

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBE TEK KUTUPLU SİSTEM MODELİ İÇİN TAM SAYI  
MERTEBE PID KONTROLÖR TASARIMI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Erhan YUMUK**

**Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı**

**MAYIS 2015**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBE TEK KUTUPLU SİSTEM MODELİ İÇİN TAM SAYI  
MERTEBE PID KONTROLÖR TASARIMI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Erhan YUMUK  
(504121115)**

**Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA**

**MAYIS 2015**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 504121115 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Erhan YUMUK**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**KESİRLİ MERTEBE TEK KUTUPLU SİSTEM MODELİ İÇİN TAM SAYI MERTEBE PID KONTROLÖR TASARIMI**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA**      .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. İbrahim EKSİN**      .....

**Doç.Dr. Ahmet ONAT**      .....

**Teslim Tarihi :**      **4 Mayıs 2015**  
**Savunma Tarihi :**      **26 Mayıs 2015**



## ÖNSÖZ

Gerek bu tezin hazırlanması sırasında gerekse öğrencilik hayatımın her döneminde yardım ve katkıları ile bana her zaman destek olan değerli hocalarım Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA'ya ve Prof. Dr. İbrahim EKSİN'e, kontrol alanında bu yeni konuya başlamada yardımcı olan Dr. Cenk ULU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman maddi manevi destek vererek beni bugünlere getiren aileme, hiçbir konuda manevi desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma sevgilerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca sağladıkları maddi destek nedeniyle Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na çok teşekkür ediyorum.

Mayıs 2015

Erhan YUMUK  
Elektronik ve Kontrol Mühendisi





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                            |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖNSÖZ.....                                                                                 | v    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                          | vii  |
| KISALTMALAR .....                                                                          | ix   |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                                       | xi   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                         | xi   |
| ÖZET.....                                                                                  | xv   |
| SUMMARY .....                                                                              | xvii |
| 1. GİRİŞ .....                                                                             | 1    |
| 2. KESİRLİ MERTEBE HESAPLAMA .....                                                         | 5    |
| 2.1 Matematiksel Tanımlar .....                                                            | 5    |
| 2.2 Kesirli Operatörün Zaman Cevabı .....                                                  | 6    |
| 2.3 Kesirli Operatörün Frekans Cevabı.....                                                 | 6    |
| 2.4 Yaklaşımlar .....                                                                      | 7    |
| 2.4.1 Oustaloup yaklaşımı.....                                                             | 7    |
| 2.5 Geometrik ve Fiziksel Yorumu .....                                                     | 9    |
| 2.5.1 Kesirli mertebe integralin geometrik yorumu .....                                    | 10   |
| 2.5.2 Kesirli mertebe integralin fiziksel yorumu .....                                     | 11   |
| 3. KESİRLİ MERTEBE MODELLEME .....                                                         | 13   |
| 3.1 Kesirli Mertebe Model Yapısının Zaman Cevabı .....                                     | 14   |
| 3.2 Kararlılık .....                                                                       | 14   |
| 3.3 Kesirli Mertebe Model Yapısının Frekans Cevabı.....                                    | 16   |
| 3.4 Kesirli Mertebe Model Yapısının Tam Sayı Yaklaşımlarının Karşılaştırılması 20          |      |
| 3.4.1 Farklı mertebe Oustaloup açılımları ile karşılaştırma.....                           | 20   |
| 3.4.2 Tam sayı yaklaşımlarında baskın olmayan kutup-sıfır ihmalleriyle karşılaştırma ..... | 22   |
| 4. KESİRLİ MERTEBE KONTROLÖR TASARIM YÖNTEMLERİ .....                                      | 27   |
| 4.1 Doğrusal Kesirli Mertebe PID Kontrolör Tasarımı.....                                   | 27   |
| 4.1.1 Analitik yöntemler .....                                                             | 27   |
| 4.1.1.1 Belirli faz payı, kazanç geçiş frekansı ve düz faza göre kontrolör tasarımı.....   | 27   |
| 4.1.1.2 İMK tabanlı kontrolör tasarımı .....                                               | 29   |
| 4.1.2 Sayısal yöntemler .....                                                              | 31   |
| 4.1.2.1 Belirli faz payı, kazanç geçiş frekansı, düz faz, gürültü ve çıkış bozucusu.....   | 31   |
| 4.1.3 Kural tabanlı yöntemler .....                                                        | 32   |
| 4.1.1.2 KMPID kontrolörü için ayarlama kuralları.....                                      | 32   |
| 4.1.1.2 S şeklinde sistem cevabına veya kritik kazanç dayalı kontrolör tasarımı.....       | 34   |
| 4.2 Doğrusal Olmayan Kesirli Mertebe PID Kontrolör Tasarımı .....                          | 35   |
| 4.2.1 Kazanç ve mertebe düzenlenmesi .....                                                 | 35   |
| 4.2.2 Sekiz parametrelili KMPID kontrolör tasarımı .....                                   | 36   |

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5. TAM SAYI MERTEBE TERS KONTROLÖR YAPILARI .....</b>                     | <b>39</b> |
| 5.1 Açılım Mertebesinde Ters Kontrolörler .....                              | 39        |
| 5.2 Baskın Kutup-Sıfır Temelli Ters Kontrolörler .....                       | 40        |
| 5.3 Düşük Mertebe Ters Kontrolörler .....                                    | 43        |
| 5.3.1 $0 \leq \alpha < 1$ bölgesi için ters kontrolör tasarımı .....         | 44        |
| 5.3.1.1 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı ..... | 44        |
| 5.3.1.2 Kesirli türeve 3. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı ..... | 44        |
| 5.3.2 $1 \leq \alpha < 2$ bölgesi için ters kontrolör tasarımı .....         | 47        |
| 5.3.2.1 Kesirli türeve 1. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı ..... | 47        |
| 5.3.2.2 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı ..... | 47        |
| 5.4 Kutup-Sıfır İhmalleriyle TMPID Kontrolör Tasarımı.....                   | 50        |
| 5.4.1 $0 \leq \alpha < 1$ bölgesi için TMPID kontrolör tasarımı.....         | 51        |
| 5.3.1.1 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile TMPID kontrolör tasarımı .    | 51        |
| 5.3.1.2 Kesirli türeve 3. mertebe yaklaşım ile TMPID kontrolör tasarımı .    | 52        |
| 5.4.2 $1 \leq \alpha < 2$ bölgesi için TMPID kontrolör tasarımı.....         | 53        |
| 5.3.2.1 Kesirli türeve 1. mertebe yaklaşım ile TMPID kontrolör tasarımı .    | 53        |
| 5.3.2.2 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile TMPID kontrolör tasarımı .    | 55        |
| 5.4 Önerilen TMPID kontrolörlerin Performans Ölçütleri.....                  | 57        |
| <b>6. ÇİFT TANK SIVI SEVİYE SİSTEMİ ÜZERİNDE UYGULAMA .....</b>              | <b>39</b> |
| <b>7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>                                          | <b>65</b> |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>                                                        | <b>68</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>                                                        | <b>73</b> |

## **KISALTMALAR**

|              |                                                       |
|--------------|-------------------------------------------------------|
| <b>KMPID</b> | : Kesirli Mertebe Proportional Integrator Derivative  |
| <b>KMPI</b>  | : Kesirli Mertebe Proportional Integrator             |
| <b>TMPID</b> | : Tam Sayı Mertebe Proportional Integrator Derivative |
| <b>TMPI</b>  | : Tam Sayı Mertebe Proportional Integrator            |
| <b>KTKM</b>  | : Kesirli Mertebe Tek Kutuplu Model                   |
| <b>İMİK</b>  | : İç Model Kontrol                                    |



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 3.1 : 2. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları...   | 23 |
| Çizelge 3.2 : 3. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları...   | 23 |
| Çizelge 3.3 : 1. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları...   | 24 |
| Çizelge 3.4 : 2. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları...   | 25 |
| Çizelge 4.1 : $K_p$ , $T_i$ , $T_d$ için oluşturulan fonksiyonların katsayıları..... | 34 |
| Çizelge 5.1 : Önerilen PID kontrolörlerin performans ölçütleri.....                  | 58 |
| Çizelge 6.1 : Modellerin katsayıları. ....                                           | 62 |



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1 : x-y düzlemi.....                                                                                                                                                         | 2  |
| Şekil 2.1 : Sırasıyla pozitif ve negatif $\alpha$ değerleri için kesirli türevin Bode diyagramı                                                                                      | 7  |
| Şekil 2.2 : $s^{0.5}$ kesirli operatörünün a) 11. mertebe b) 3. mertebe Oustaloup açılımlı Bode diyagramları.....                                                                    | 8  |
| Şekil 2.3 : $s^{1.26}$ kesirli operatörünün a) 11. mertebe b) 3. mertebe Oustaloup açılımlı Bode diyagramları.....                                                                   | 9  |
| Şekil 2.4 : Üç boyutlu eğri ve eğrinin izdüşümleri( ${}_0I_t^1 f(t)$ ve ${}_0I_t^{0.75} f(t)$ ), $f(t)=t+0.5\sin t$ , $0 < t < 10$ .....                                             | 11 |
| Şekil 2.5 : ${}_0I_t^{0.75}(t+0.5\sin t)$ eğrisinin $0 < t \leq 10$ zaman aralığında 0.5 zaman aralıklarıyla artırılması sonucunda gölgenin değişimi .....                           | 11 |
| Şekil 3.1 : Kesirli mertebe orantılı transfer fonksiyonu için kararlı kararsız bölgeler                                                                                              | 15 |
| Şekil 3.2 : (3.16)'daki sistemin Bode diyagramı. ....                                                                                                                                | 16 |
| Şekil 3.3 : (3.20)'deki sistemin birim basamak cevabı.....                                                                                                                           | 17 |
| Şekil 3.4 : (3.20)'deki sistemin frekans cevabı.....                                                                                                                                 | 18 |
| Şekil 3.5 : $s^{0.5}$ türev operatörünün kutup sıfır dağılımı ve (3.22)'deki modelin T parametresine göre kutup dağılımı a) gerçel eksen: [-800 100], b)gerçel eksen: [-0.01 0]..... | 18 |
| Şekil 3.6 : (3.24)'teki sistemin birim basamak cevabı.....                                                                                                                           | 19 |
| Şekil 3.7 : (3.24)'teki sistemin frekans cevabı .....                                                                                                                                | 19 |
| Şekil 3.8 : $s^{1.26}$ türev operatörünün kutup sıfır dağılımı ve (3.26)'deki modelin T parametresine göre kutup sıfır dağılımı .....                                                | 20 |
| Şekil 3.9 : Modelin ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları.....                                                                                                           | 21 |
| Şekil 3.10 : Modelin ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları.....                                                                                                          | 22 |
| Şekil 3.11 : (3.28a)'da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.....                                                                                                                | 22 |
| Şekil 3.12 : (3.28b)'de indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri .....                                                                                                               | 23 |
| Şekil 3.13 : (3.29a)'da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.....                                                                                                                | 24 |
| Şekil 3.14 : (3.29b)'da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri .....                                                                                                               | 24 |
| Şekil 4.1 : Tam sayı mertebe PID ve Kesirli mertebe PID .....                                                                                                                        | 27 |
| Şekil 4.2 : İç model kontrol yapısı.....                                                                                                                                             | 30 |
| Şekil 4.3 : Klasik geri besleme kontrolü.....                                                                                                                                        | 30 |
| Şekil 4.4 : S şekilli basamak cevabı.....                                                                                                                                            | 35 |
| Şekil 4.5 : Kritik kazançta sistem çıkışı .....                                                                                                                                      | 35 |
| Şekil 5.1 : (3.20)'deki modelin açılım mertebesinde ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.....                                                                  | 40 |
| Şekil 5.2 : (3.24)'daki modelin açılım mertebesinde ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.....                                                                  | 40 |
| Şekil 5.3 : (3.20)'deki modelin baskın kutup-sıfır temelli ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.....                                                           | 43 |
| Şekil 5.4 : (3.20)'deki modelin düşük mertebe ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.....                                                                        | 46 |

|                                                                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 5.5 :</b> (3.24)'teki modelde türeve 2. mertebe yaklaşımla T'ye göre çizdirilen kök eğrisi.....                                                                                 | 50 |
| <b>Şekil 5.6 :</b> (3.24)'teki modelin düşük mertebe ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.....                                                                     | 50 |
| <b>Şekil 5.7 :</b> (3.20)'deki kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri ..... | 52 |
| <b>Şekil 5.8 :</b> (3.20)'da kesirli türeve 3. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri .....   | 54 |
| <b>Şekil 5.9 :</b> (3.24)'te kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri .....   | 57 |
| <b>Şekil 5.10 :</b> (5.58)'deki kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri                                                                                             | 58 |
| <b>Şekil 6.1 :</b> Çift tank sıvı seviye sisteminin genel görünümü a) Ön görünüm b) Arka görünüm c) Şema diyagramı. ....                                                                 | 60 |
| <b>Şekil 6.2 :</b> Blok diyagramı .....                                                                                                                                                  | 61 |
| <b>Şekil 6.3 :</b> Sistem verileri ve model cevapları .....                                                                                                                              | 62 |
| <b>Şekil 6.4 :</b> Kapalı çevrimli sistemin birim basamak yanıtı ve kontrol işareti .....                                                                                                | 63 |
| <b>Şekil 6.5 :</b> Çeşitli basamak işaretleri için sistem cevapları ve kontrol işaretleri .....                                                                                          | 64 |



## KESİRLİ MERTEBE TEK KUTUPLU SİSTEM MODELİ İÇİN TAM SAYI MERTEBE PID KONTROLÖR TASARIMI

### ÖZET

Kesirli mertebeden hesaplama türev mertebesi ve integral katının tamsayı olmadığı durumlar ile ilgilenir. Kesirli mertebeden türev operatörü için tam sayı  $n$ . mertebe türevin genel formülünün belirli kısıtlar altında  $n$  katlı integral tanımına karşılık düşürülmesiyle Grünwald-Letnikov tanımı elde edilmiştir. Kesirli mertebeden integral operatörü için ise tam sayı mertebe  $n$  katlı integralin genel formülünün belirli kısıtlar altında  $n$ . mertebe türev tanımına karşılık düşürülmesiyle Riemann-Liouville tanımı yapılmıştır. Caputo tanımı ise Riemann-Liouville tanımının Laplace bölgesinde başlangıç koşulları için daha anlamlı olmasını sağlamaktadır. Bu tanımlar literatürde kesirli mertebe türev ve integral operatörlerini ifade etmek için kullanılırlar.

Kesirli mertebe operatörlerin fiziksel yorumu için tam sayı mertebe operatörlerde sabit bir şekilde akan zaman kavramına karşılık kesirli mertebe operatörlerde sabit bir şekilde akmayan zaman kavramı kullanılır. Bu sabit şekilde akmayan zaman için kozmik zaman tanımı yapılır. Geometrik yorum için ise fonksiyon, zaman ve kozmik zaman eksenlerine sahip üç boyutlu eğrinin fonksiyon-zaman düzlemine iz düşümü tam sayı mertebe integral olarak, fonksiyon-kozmik zaman düzlemine iz düşümü ise kesirli mertebe integral olarak çizimlerle gösterilir.

Kesirli mertebe operatörlerin gerçekleşmesi için literatürde sıklıkla Oustaloup yaklaşımı kullanılır. Bu yaklaşımda seçilen bir frekans aralığı için kesirli mertebe operatörlerin frekans cevaplarını ifade edebilen tam sayı mertebe transfer fonksiyonları kullanılır. Tam sayı mertebeden yaklaşımın mertebesi 11 olarak seçildiğinde ilgili frekans aralığındaki frekans cevabı, kesirli operatörün frekans cevabını oldukça yakın bir şekilde temsil eder. Bu nedenle, literatürde Oustaloup yaklaşımın mertebesi sıklıkla 11 olarak seçilir.

Kesirli mertebe hesaplama, mühendislik alanında uygulamaları açısından oldukça yeni bir konudur. Kontrol alanındaki problemlere uygulanması ilk olarak 1961 yılında Manabe tarafından yapılmıştır. Yapılan çeşitli çalışmalar ile tam sayı mertebe sistem modelleri ve kontrolörleri, kesirli mertebe sistem modelleri ve kontrolörleri için genelleştirilmiştir. Tam sayı mertebe sistemlerin modellenmesi ve kontrolörleri için önerilmiş olan katsayıları ayarlama yöntemleri, kesirli mertebeden sistemlerin modellenmesi ve kontrolör katsayılarının ayarlanması için de kullanılmaya başlanmıştır. Genelleşen bu kontrolörlerle gelen esneklik, kontrolörlerin katsayılarının ayarlanmasında karmaşıklığı da beraberinde getirmiştir. Bu karmaşıklığı çözmek için çalışmalar devam etmektedir.

Bu tezde tam sayı mertebeden en basit sistem modeli olan birinci mertebeden sistem modeline karşılık gelen kesirli mertebe tek kutuplu sistem modeli ele alınmıştır. İlk

olarak bu kesirli mertbe sistemde yer alan kesirli operatör için çeşitli mertebelerden Oustaloup açılımları kullanılarak, bu açılımların kesirli mertebeden modeli temsil edişlerindeki farklılıklar irdelenmiştir. Bu incelemeden yola çıkılarak ele alınan kesirli mertbe sistem için farklı tam sayı mertbe ters kontrolör yapıları önerilmiş ve çeşitli başarıml kriterleri üzerinden kontrolör mertebesinin başarıml üzerindeki etkisi incelenmiştir. Yüksek tamsayı mertebeden ters kontrolör yapılarının başarıml ölçütlerini açısından son derece tatmin edici olacağı açıktır. Düşük mertbe açılımlara dayalı ters kontrolör yapılarının da, kesirli mertbe sistem yapısında çok sayıda bulunduğı düşünölen kutup ve sıfırların etkilerini ortalama bir şekilde giderebildiğı ve başarıml ölçütlerini oldukça üst seviyelerde sağladığı görölmüştür. Böylece kesirli mertbe sistem için son derece basit yapılara sahip olan tamsayı mertebeden kontrolörler elde edilmiştir. Bu kontrolörlerin parametreleri kesirli mertbe sistem model parametreleri ve ele alınan frekans aralığı cinsinden parametrik olarak belirlenmiştir.

Daha sonra önerölen düşük mertbe ters kontrolörde bulunan baskın olmadığı düşünölen kutup ve sıfır çiftlerinin ihmal edilerek endüstride sıklıkla kullanılan tam sayı mertebeden PID kontrolörü önerilmiş ve kontrolör parametreleri yine kesirli mertbe sistem model parametreleri ve ele alınan frekans aralığı cinsinden belirlenmiştir. Yapılan çeşitli karşılaştırmalar ile önerölen tam sayı mertbe kontrolör yapılarının üstünlüğü gösterölmüştür.

Önerölen bu tam sayı mertbe PID kontrolör tasarımı, çift tank sıvı seviye sistemi üzerine uygulanmıştır. Bu amaçla belirli çalışma bölgesinde sistemden elde edilen verilere uygun kesirli mertbe tek kutuplu model uydurulmuştur. Ayrıca tasarıma esneklik katması açısından kontrolöre kazanç parametresi eklenmiştir. Bu tasarım parametresi, hata işaretinin karesi ile kontrol işaretinin toplamı olan başarıml ölçütüne göre büyük patlama büyük çöküş arama algoritması ile aratılmış ve tatmin edici sonuçlar alınmıştır.

## **AN INTEGER ORDER PID CONTROLLER DESIGN METHOD FOR FRACTIONAL ORDER SINGLE POLE SYSTEM MODEL**

### **SUMMARY**

Fractional Calculus deals with cases in which there are non-integer order derivative and non-integer fold integral. Non-integer order and fold can be a rational number, an irrational number or even a complex number. For Grünwald-Letnikov definition of fractional order operator, general formula of  $n^{\text{th}}$  order derivative is obtained and is generalized to  $n$  fold multiple integral under certain constraints. Similarly, general formula of  $n$  fold multiple integral can also be obtained and generalized to  $n^{\text{th}}$  order derivative under certain constraints, which corresponds to Riemann-Liouville and Caputo definition. The difference between Riemann-Liouville and Caputo definitions is that the initial condition of Laplace transformation according to Caputo definition is more meaningful than that of obtained according to Riemann-Liouville definition because of the integer order derivative of initial conditions. These definitions are commonly used to define fractional order derivative and integral operators in the literature.

The physical interpretation on fractional order integral is that “time flowing equally” for integer order integral corresponds to “time not flowing equally” for fractional order integral. The time not flowing equally is defined as cosmic time. The geometric interpretation is that three dimensional space is formed as time, cosmic time and function axes, the projection of resulting three dimensional curve on function-time plane shows integer order integral and also that on function-cosmic time plane indicates fractional order integral.

The frequency responses of the fractional order derivative and integral are highly similar to those of the integer order derivative and integral. The amplitude curve of the first order derivative increases with the slope of 20 dB/decade and the phase curve of it is added  $90^\circ$  while the amplitude curve of fractional order ( $\alpha$ ) derivative increases with the slope of  $20\alpha$  dB/decade and the phase curve of it is added  $90\alpha^\circ$ . The amplitude curve of fractional order ( $\alpha$ ) integral decreases with the slope of  $20\alpha$  dB/decade and the phase curve of it is added  $-90\alpha^\circ$ , which is quite similar to the frequency response of one fold integral.

The mostly used approximation for fractional order operator to be realized is Oustaloup approximation in the literature. In this approximation, an integer high order transfer function is considered with a frequency response similar to the frequency response of the fractional order operator within a frequency interval obtained by choosing lower and upper bound frequencies. The order of this approximation is mostly chosen as 11 since the frequency response of the high order transfer function in the chosen frequency interval fits highly to that of the fractional order operator.

The applications in engineering areas of fractional calculus are a quite new topic although fractional calculus is a continuing topic for more than 300 years. The first application of the fractional calculus was made by Abel in 1823 for the solution of the integral equation for teutochrone problem. Later in the nineteenth century, Heaveside showed that fractional calculus can solve certain problems in electromagnetic theory.

The application of fractional calculus to control areas is a more current issue and there are numerous applications. The fractional calculus is used for modeling and control of thermal system, liquid level system, control of autonomous underwater vehicle, control of velocity of servo system etc. The concept of fractional calculus in control engineering is first used by Manabe in 1961. He obtained the transient state response and frequency response of non-integer integral and used these concepts for control systems. In automatic control, Oustaloup used the fractional control algorithm to control the dynamic systems and he demonstrated that CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) method outperforms integer order PID controllers. In 1999, Podlubny proposed the generalization of integer order PID controllers called fractional order PID controllers ( $PI^\lambda D^\mu$ ). He also showed that these controllers have better performance than integer order PID controllers for fractional order dynamic control systems. FOPID controllers provide more flexibility in controller design compared to classical IOPID controllers because of having five parameters instead of three. However, these two more parameters cause more complexity in tuning procedure of the controller.

Fractional order system models and controllers are generalizations of integer order system models and controllers in control engineering. There are four configurations in control area for controllers and systems. These configurations are integer order controllers (IOCs) for integer order systems (IOSs), FOCs for integer order systems (IOSs), integer order controllers (IOCs) for fractional order systems (FOSs), and fractional order controllers (FOCs) for fractional order systems (FOSs).

There are various controller tuning procedures for fractional order controllers in the literature. These procedures are mostly the generalization of the procedures presented for integer order controllers. The most widely used fractional controllers are fractional order PID controllers. Fractional order PID controller tuning methods are divided into three parts: analytical methods, numerical methods and rule based methods. In analytical methods, there are fractional order PI controller design methods according to three performance measures such as phase margin, gain crossover frequency and flat phase and fractional order PID controller design method based on internal model control. In numerical methods, there are fractional order PID controller design methods according to five performance measures such as phase margin, gain crossover frequency, flat phase, good output disturbance rejection and high frequency noise rejection. In rule based methods, fractional order controller is obtained by numerical methods and each parameter of the controller is fitted to a function in terms of system model parameters. In addition, nonlinear fractional order PID controllers can also be seen in the literature. In this type of controller design method, system models are obtained from various operating points for nonlinear system by the help of numerical methods and the corresponding controllers are blended in terms of the position of the output. Another method is nonlinerization of error signal. In these researches, the most widely studied system is fractional order single pole model.

In this thesis, we dealt with the fractional order single pole system model which is the simplest and the most widely studied fractional order model in literature. This simple fractional order structure performs a better modelling performance than integer order models for modelling many nonlinear systems. Firstly, we observed the differences of integer order representations of the fractional order single pole model using different order Oustaloup expansions for the fractional operator. Based on this review, we proposed different integer order inverse controller structures for the control of fractional order system and examined the impact of the controller order on various performance measures. Integer high order inverse controllers are expected to be more satisfying than low order inverse controllers according to the defined performance criteria. Here, we observed that low order inverse controllers that depend on low order expansions can also compensate the effects of numerous poles and zeros that are thought to be in the structure of fractional order systems. As a result, extremely simple integer order controller structures are obtained. Moreover, we determined the parameters of these controllers in terms of the fractional system model parameters and frequency interval that is chosen for integer order expansion of the fractional order operator of the system model.

It is a well-known fact that integer order PID controllers are commonly used in industrial applications. In the next phase, we proposed integer order PID controllers by neglecting the non-dominant zeros and poles of the integer low order inverse controller. The parameters of the proposed PID controller are also expressed in terms of the fractional order system parameters and the frequency interval used for the integer order expansion of the fractional order operator. We considered the gain of the controller as the only design parameter.

Finally, we compared the proposed controllers with integer order and fractional order PID controllers the parameters of which are determined optimally using a search algorithm according to various performance measures. As a result we observed that the controllers we proposed perform equally to or better than the controllers compared.

This proposed integer order PID controller design has been implemented over two tank liquid level system. For this purpose, a fractional order single pole system model is fitted after the step response data are obtained from a certain operation area. Moreover, The gain is added to the controller for the design to make more flexibility. The design parameter is found by means of Big Bang-Big Crunch search algorithm based on performans criteria which is sum of integral square error and total variation of control signal. Satisfactory results are obtained.



## 1. GİRİŞ

$d^n f(t)/dt^n$  ifadesi  $n$  pozitif tam sayı değerleri için fonksiyonun türevinin alınacağı,  $n$  negatif tam sayı değerleri için fonksiyonun integralinin alınacağı, sıfır değerinde ise fonksiyonun kendisini ifade ettiği tam sayı mertebeden hesaplamadan iyi bilinmektedir; fakat  $n$  değeri rasyonel, irrasyonel hatta karmaşık sayı olduğu durumları incelemeyiz. Bu durumları inceleyen kesirli mertebeden hesaplamadır. Bu diferansiyel operatörlerin neden rasyonel, irrasyonel veya karmaşık sayı olmadığı sorusu ilk olarak 1695 senesinde Leibniz tarafından sorulmuştur. 300 yıldan fazla bir süredir üzerinde çalışılan kesirli mertebeye hesaplama, tam sayı mertebeye hesaplamayı tam sayı olmayan mertebeye genelleştirir.

Kesirli mertebeye hesaplamanın matematiğine ve kontrol uygulamalarına geçmeden kesirli ve kesirli mertebeye ifadelerinin kullanımına açıklık getirmek gerekmektedir. Mertebeye irrasyonel veya karmaşık bir sayı dahi olabileceği için bu alanı tam sayı olmayan mertebeye ifadesi daha iyi tanımlar fakat literatürdeki pek çok çalışma bu alanı ifade etmek için kesirli mertebeye ifadesini kullanmıştır.

Tam sayı mertebeye hesaplamanın temel operatörü tek katlı integral -fonksiyonun antitürevi olarak da düşünülebilir-

$$D^{-1} f(t) = \int_0^t f(x) dx \quad (1.1)$$

biçimindedir. Çift katlı integral ise

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t \int_0^x f(y) dy dx \quad (1.2)$$

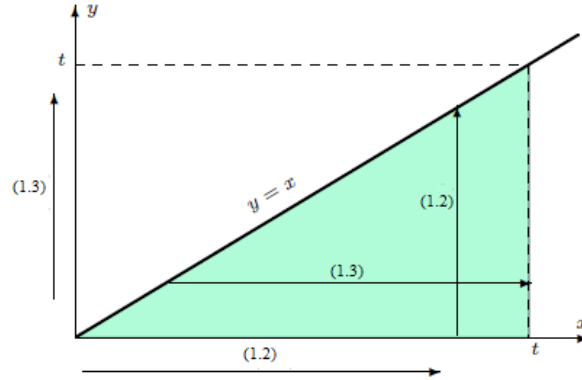
biçimindedir. (1.2) integralinin hesabı, Şekil 1.1’de gösterilen  $x$ - $y$  düzlemi göz önüne alınıp integral sınırlarında gerekli değişimler yaparak (1.2)’deki integral

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t \int_y^t f(y) dx dy \quad (1.3)$$

haline dönüştürülebilir. Bu durumda  $f(y)$ ,  $x$  değişkenine göre sabit olduğundan

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t (t-y) f(y) dy \quad (1.4)$$

sonucu elde edilir.



Şekil 1.1: x-y düzlemi

Benzer şekilde üç katlı integral,

$$D^{-3} f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-y)^2 f(y) dy \quad (1.5)$$

elde edilir. Bu ifade n katlı integrale genelleştirilirse

$$D^{-n} f(t) = \int_0^t \dots \int_0^t f(y) \underbrace{dy \dots dy}_n = \int_0^t \frac{f(y)(t-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \quad (1.6)$$

elde edilir.

Tam sayı mertebe hesaplamasının diğer temel operatörü birinci mertebe türev

$$D^1 f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.7)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde ikinci mertebe türev

$$D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)] \quad (1.8)$$

ve üçüncü mertebe türev

$$D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)] - \frac{1}{h^2} [f(t-h) - 2f(t-2h) + f(t-3h)]}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)] \quad (1.9)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler n. mertebe türev için



$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (1.10)$$

olmak üzere

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.11)$$

olarak genelleştirilebilir. (1.6) ve (1.11) denklemleri sırasıyla Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli mertebe operatör tanımlarının temelini oluşturur [1].

Kesirli mertebe hesabın ilk uygulaması 1823'te Abel tarafından yapılmıştır. Abel, tautochrone problemi için integral denklemlerinin çözümünün  $\frac{1}{2}$  mertebesinde türevdeki integraller yoluyla elde edilebileceğini keşfetmiştir. 19. yüzyılda Heaviside transmisyon hatları gibi elektromanyetik teorideki belli problemleri çözmek için kesirli mertebe hesaplamayı kullanmıştır. 20. yüzyılda Scott Blair akış biliminde, Oldham ve Spanier elektrokimya alanında kesirli mertebe hesaplamaya pratik anlamda katkılar sağlamışlardır.

Kontrolde kesirli mertebe hesaplama uygulamalarının ilk adımı 1961 senesinde frekans temelli metotların kesirli mertebe hesaplamının kavramlarıyla ifade edilmesi olmuştur. Tam sayı mertebe olmayan integralin geçici hal cevabı ve frekans cevabı (Bode ideal transfer fonksiyonu) ve kontrol sistemine uygulamaları Manabe [2] tarafından yapılmıştır. Otomatik kontrol açısından Oustaloup [3, 4] dinamik sistemlerin kontrolünde kesirli mertebe algoritmaları kullandı ve CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier, tam sayı olmayan mertebe robust kontrol) metodu PID kontrolöre göre üstünlüğünü gösterdi. Podlubny [5, 6]  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  (KMPID) kontrolörü isminde PID kontrolörün geliştirilmiş halini önerdi. Ayrıca kesirli mertebe sistemlerin kontrolünde klasik PID'ye göre daha iyi yanıt verdiğini gösterdi. Kesirli mertebe PID kontrolörler, tam sayı mertebe PID kontrolörlerine göre 3 yerine 5 serbest parametreye sahip olduğundan kontrolör tasarımı için esneklik sağlarlar fakat bu fazla iki serbest parametre kontrolörün katsayılarının ayarlanması konusunda zorluğa sebep olur. Kontrolörler ve sistem modelleri açısından literatürde dört farklı yapı vardır. Bu yapılar tam sayı mertebe sistem modelleri için tam sayı mertebe kontrolör tasarımı, tam sayı mertebe sistem modelleri için kesirli mertebe kontrolör tasarımı, kesirli mertebe sistem modelleri için tam sayı mertebe kontrolör tasarımı, kesirli mertebe sistem modelleri için kesirli mertebe kontrolör tasarımıdır.

Kesirli mertebe kontrolörler için etkin ayarlama metotları öneren araştırmalar klasik kontrol teorisini bu alana genişletmiştir. Böylece klasik kontrolörlere göre belirlenen ölçütlere ulaşmak daha kolaylaşmıştır.

Kontrol alanında çok çeşitli sayıda kesirli mertebe hesaplamanın uygulaması vardır. Isıl sistemlerin modellenmesi ve kontrolünde [7], sıvı seviye sistemlerinin modellenmesi ve kontrolünde [8], EEG, EMG ve EEG gibi biyolojik işaretlerin modellenmesinde [9] –frekans cevabı 20 db eğimle artmaz veya azalmaz-, Wargburg empedansları, sabit faz elemanları (constant phase elements-CPE) gibi özel empedansların modelinde [1] -  $k/(j\omega)^n$   $n \in \mathbb{R}$  biçiminde frekans cevabına sahip-, servosistemlerin hız kontrolünde [10], otonom su araçlarının kontrolünde [11] kullanılır.

Bu tezde 2. bölümde kesirli mertebe operatörlerin gösterimi, sık kullanılan tanımları, frekans, darbe ve basamak cevapları verilecektir. Ayrıca literatürde kesirli mertebe türev ve integral operatörlerinin gerçekleştirilmesi için sıklıkla kullanılan kısıtlı band genişliğine dayanan Oustaloup yaklaşımı üzerinde durulacak ve kesirli mertebe operatörlerin geometrik ve fiziksel yorumu hakkında bilgi verilecektir. 3. bölümde kesirli mertebeden sistemler incelenecek, belirli bir kesirli mertebe model yapısı alınarak frekans, darbe ve birim basamak cevapları sunulacaktır. Sonrasında bu model yapısında sıklıkla kesirli operatörler için sıklıkla kullanılan 11. mertebe Oustaloup yaklaşımı ile düşük mertebe yaklaşımlar arasında model farkları üzerinde durularak tezde önerilecek kontrolör tasarımı için bir giriş sağlanacaktır. 4.bölümde literatürde var olan kesirli mertebe kontrol tasarım metotları doğrusal kesirli mertebede PID ve doğrusal olmayan kesirli mertebe PID başlıkları altında incelenektir. Doğrusal kesirli mertebe PID yapıları analitik, sayısal ve kural tabanlı yöntemler olmak üzere üç bölüm altında irdelenecektir. 5. bölümde irdelenen model yapısı için açılım mertebesinde ters kontrolör, baskın kutup-sıfır temelli ters kontrolör, düşük mertebe ters kontrolör olmak üzere üç tip ters kontrolörden son ikisinin tasarımı parametrelere bağlı olarak verilecektir. Önerilen bu tam sayı mertebe ters kontrolör tasarım metodu kesirli mertebe modeller için önerilen ilk parametrik metottur. Ayrıca bu çalışmada irdelenmeyen kontrolör kazancı önerilen kontrolör metodu için tasarım parametresi olarak kullanılabilir.

## 2. KESİRLİ MERTEBE HESAPLAMA

### 2.1 Matematiksel Tanımlar

$d^n/dt^n$  operatörü pozitif  $n$  değerleri için türev, negatif  $n$  değerleri için integrali ifade eder. Kesirli mertebe hesaplama bu operatörün tam sayı olmayan  $n$  değerleri için nasıl davranacağını inceler. Bu genelleştirilmiş kesirli mertebe operatör

$${}_r D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ 1 & \text{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Literatürde kesirli mertebe operatör için en sık kullanılan üç tanım vardır: Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo tanımları.

$\alpha \in \mathbb{R}$  için Grünwald-Letnikov tanımı

$${}_r D_t^\alpha g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{t-r}{h} \right\rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} g(t-jh) \quad (2.2)$$

Riemann-Liouville tanımı

$${}_r D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_r^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.3)$$

Caputo tanımı

$${}_r D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_r^t \frac{d^n}{dt^n} \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.4)$$

şeklindedir.  $\Gamma(z)$  gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville türev tanımının Laplace dönüşümü

$$L[{}_0D_t^\alpha g(t)] = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} s^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} g(0) \quad (2.6)$$

Caputo türev tanımının Laplace dönüşümü

$$L[{}_0D_t^\alpha g(t)] = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} s^{\alpha-k-1} {}_0D_t^k g(0) \quad (2.7)$$

biçimindedir. Riemann-Liouville tanımının yerine Caputo tanımının kullanılmasının nedeni Laplace dönüşümünde görüldüğü gibi başlangıç koşulları için fonksiyonun tamsayı mertebe türevinin kullanılmasıdır. Bu da kesirli mertebe türevi hesaplamayı kolaylaştırır [12].

## 2.2 Kesirli Operatörün Zaman Cevabı

Kesirli mertebe integralin darbe( $\delta(t)$ ) ve basamak( $u(t)$ ) cevaplarının matematiksel ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} L[\delta(t)]\right] = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.8)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} L[u(t)]\right] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (2.9)$$

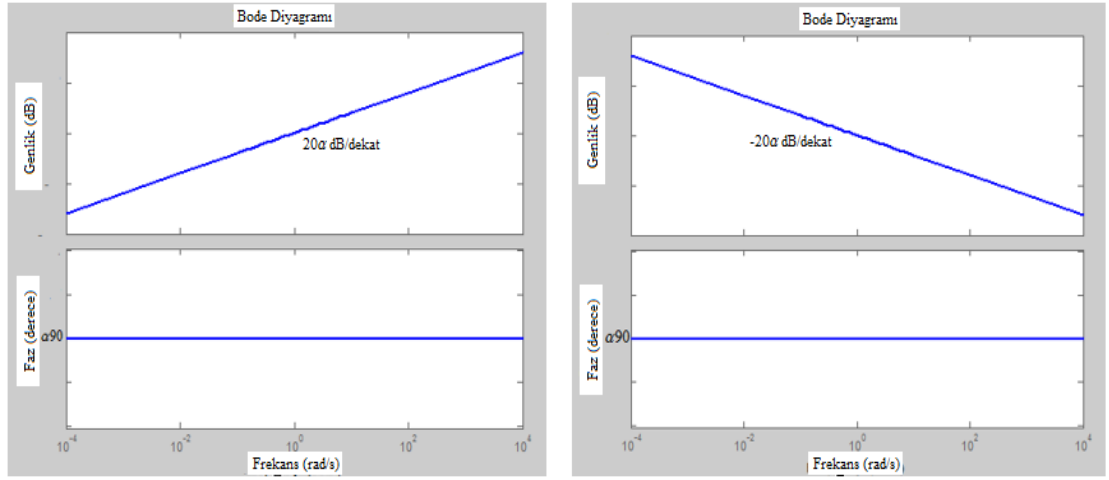
## 2.3 Kesirli Operatörün Frekans Cevabı

Kesirli türev  $s^\alpha$  biçiminde ifade edilir. Kesirli türevin frekans cevabını elde etmek için  $s$  yerine  $j\omega$  koyduğumuzda  $G(j\omega) = (j\omega)^\alpha$  olur ve böylece genlik ve fazı

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |(j\omega)^\alpha| = 20 \log_{10} \omega^\alpha = 20\alpha \log_{10}(\omega) \text{ dB} \quad (2.10)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^\alpha = \angle j^\alpha = \alpha \frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

biçiminde bulunur. Bu kesirli türevin negatif ve pozitif  $\alpha$  değerleri için Bode diyagramı Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Kesirli türevin genlik eğrisinin eğimi  $20\alpha$  dB/dekad, faz eğrisi ise tüm frekanslarda  $90\alpha^\circ$  eşittir.



**Şekil 2.1:** Sırasıyla pozitif ve negatif  $\alpha$  değerleri için kesirli türevin Bode diyagramı.

## 2.4 Yaklaşımlar

Tam sayı mertbe transfer fonksiyonları ya da ayrık transfer fonksiyonları kullanarak kesirli operatörün dinamik davranışı yaklaşık olarak elde etmek mümkündür.

### 2.4.1 Oustaloup yaklaşımı

En yaygın olarak kullanılan yaklaşım Oustaloup yaklaşımıdır. Bu yaklaşım belli bir frekans aralığında  $[\omega_l, \omega_h]$  –sırasıyla alt ve üst frekansı gösterir- N kutup N sıfır kullanılır. Oustaloup yaklaşımı [1]

$$s^\alpha \approx G_f(s) = K' \prod_{k=1}^N \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.12)$$

olarak ifade edilir. Bu gerçel kutup-sıfır çiftlerinin arasında

$$\left. \begin{aligned} \omega_{p,i} &= \delta \omega_{z,i} & i &= 1, \dots, N \\ \omega_{z,i+1} &= \eta \omega_{p,i} & i &= 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \delta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{\alpha}{N}}, \quad \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{1-\alpha}{N}} \quad (2.13)$$

biçiminde bir ilişki vardır. N değeri ne kadar büyükse, yani Oustaloup yaklaşımının mertebesi ne kadar yüksekse, elde edilen tamsayı mertbe transfer fonksiyonu kesirli mertbe türev operatörünü o kadar iyi yansıtır. Kesirli mertbe türev operatörü, sonsuz mertbe tamsayı transfer fonksiyonu ile tam olarak gerçekleşir. Bu yüzden pratikte kullanılırken Oustaloup filtresine mertbe sınırı getirilmelidir. Literatürde genelde yaklaşım mertebesi 11 olarak seçilir.

Yaklaşımında herbir kutup  $90^\circ$  faz düşürür, herbir sıfır  $90^\circ$  faz yükseltir. Bu etkilerin toplanmasıyla  $90\alpha^\circ$  civarında osilasyon yapan bir faz eğrisi oluşacaktır. Herbir kutup 20 db/dekat eğimle genliği azaltır, herbir sıfır 20 db/dekat eğimle genliği artırır. Bu etkilerin toplanmasıyla  $20\alpha$  dB/dekat eğimli kazanç eğrisi oluşur. Pratikte,  $\alpha \in ]-1,1[$  ise (2.12)'deki Oustaloup filtresi  $[10\omega_l, \omega_h/10]$  frekans aralığında geçerlidir. N değerinin artmasıyla faz ve genlik eğrilerindeki dalgalanmalar azalacaktır.

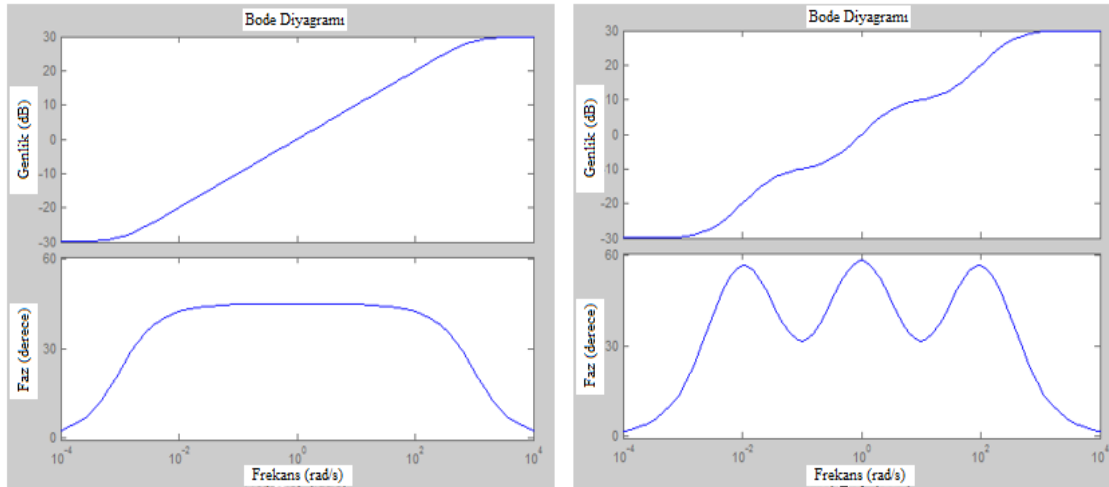
*Örnek 1.1:*

Alt ve üst frekanslar ( $\omega_h, \omega_l$ ) sırasıyla  $10^3$  ve  $10^{-3}$  seçildiğinde  $s^{0.5}$  kesirli operatörünün 11. ve 3. mertebe Oustaloup yaklaşımı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$s^{0.5} \approx 31.623 \frac{(s+0.001369)(s+0.004806)(s+0.01688)(s+0.05926)(s+0.2081)...(s+31.62)(s+111)(s+389.9)}{(s+0.002565)(s+0.009006)(s+0.03162)(s+0.111)(s+0.3899)...(s+59.26)(s+208.1)(s+730.5)}$$

$$s^{0.5} \approx 31.623 \frac{(s+0.003162)(s+0.3162)(s+31.62)}{(s+0.03162)(s+3.162)(s+316.2)} \quad (2.14)$$

Bu kesirli operatörün 11. ve 3. mertebe tamsayı transfer fonksiyonunun bode diyagramları Şekil 2.2(a) ve(b)'de gösterilmiştir.



a)

b)

**Şekil 2.2:**  $s^{0.5}$  kesirli operatörünün a) 11. mertebe b) 3. mertebe Oustaloup açılımlı Bode diyagramları.

$\alpha > 1$  olduğu zaman yaklaşımın geçerli olduğu frekans aralığı frekans aralığı daha dar hale gelir. Bu durumda

$$s^\alpha = s^{\lfloor \alpha \rfloor} s^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} \quad (2.15)$$

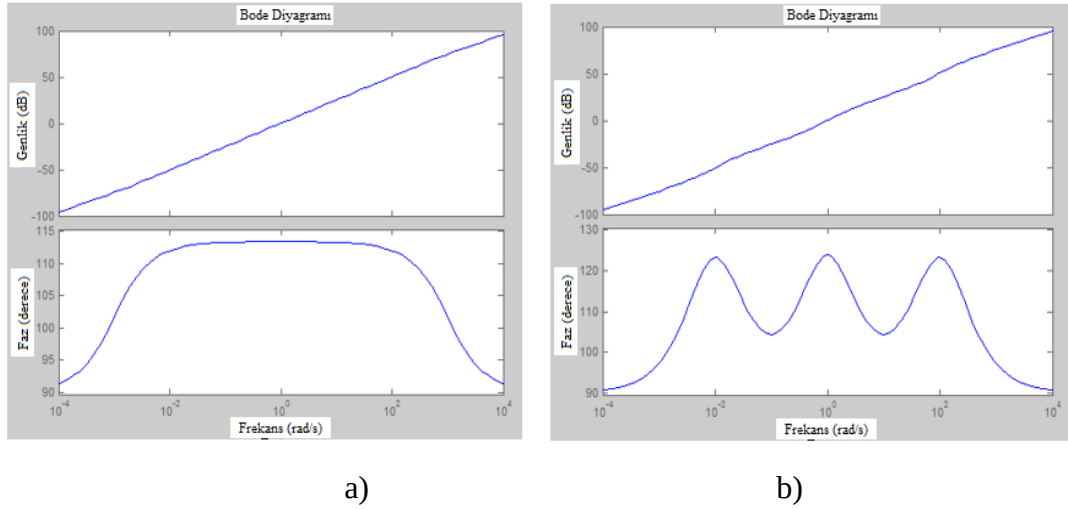
biçiminde yaklaşım yapılır.

### Örnek 1.2:

Alt ve üst frekanslar( $\omega_h, \omega_l$ ) sırasıyla  $10^3$  ve  $10^{-3}$  seçildiğinde  $s^{1.26}$  türev operatörünün 11. ve 3. mertebe Oustaloup yaklaşımı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$s^{1.26} = s^1 s^{0.26} \approx 6.0256 \frac{s(s+0.001592)(s+0.005588)(s+0.01962)(s+0.06889)(s+0.2419)\dots(s+36.77)(s+129.1)(s+453.3)}{(s+0.002206)(s+0.007746)(s+0.0272)(s+0.0955)(s+0.3353)\dots(s+50.97)(s+178.9)(s+628.3)}$$
$$s^{1.26} = s^1 s^{0.26} \approx 6.0256 \frac{s(s+0.005495)(s+0.5495)(s+54.95)}{(s+0.0182)(s+1.82)(s+182)} \quad (2.16)$$

Bu kesirli operatörün 11. ve 3. mertebe tamsayı transfer fonksiyonunun bode diyagramları Şekil 2.3(a) ve(b)'de gösterilmiştir.



**Şekil 2.3:**  $s^{1.26}$  kesirli operatörünün a) 11. mertebe b) 3. mertebe Oustaloup açılımlı Bode diyagramları.

Kesirli mertebe operatörü tam sayı mertebe transfer fonksiyonuna yaklaştırmak için Oustaloup yaklaşımının dışında Carlson ve Matsuda yaklaşımları vardır. Ayırık transfer fonksiyonuna yaklaştırmak için Grünwald-Letnikov yaklaşımı, zaman ve darbe cevabı yaklaşımları vardır.

## 2.5 Geometrik ve Fiziksel Yorumu

Tam sayı mertebe türev ve integralin belirli bir fiziksel ve geometrik yorumu vardır ve çeşitli bilimsel alanlarda problemlerin çözümünde kolaylıklar sağlar fakat kesirli mertebe integral ve türevde durum böyle değildir. Kesirli mertebe fikrinin doğuşundan yani yaklaşık 300 yıldan buna yana bu operatörler için kabul edilebilir geometrik ve fiziksel yorumu yoktu. Kesirli mertebe integral ve türevin fiziksel ve geometrik yorumu 1974'te kesirli mertebe hesaplama üzerine ilk uluslararası

konferansta açık bir problem olarak bildirilmiştir [13]. İlerleyen zamanlarda probleme çözüm bulanamamıştır [14, 15].

Kesirli mertbe integral ve kesirli mertbe türev, tam sayı mertbe integral ve türev kavramlarının genişleştirilmiş halidir. Belirli durumlar için n. derece türev ya da n katlı integral(n bir tam sayı) anlamına gelir. Böylece kesirli mertbe operatörlerin fiziksel ve geometrik yorumu için ideal olacaktır, bu da tam sayı mertbe integral ve türevin fiziksel ve geometrik yorumu arasında bir ilişki sağlar.

Öncelikle sadece kesirli mertbe integral için basit geometrik yorumu verilecektir. Sonrasında homojen olmayan ve değişen zaman ölçeği kullanarak kesirli mertbe integralin fiziksel yorumu sunulacaktır. Buna rağmen günümüzde kesirli mertbe integral ve türevin geometrik ve fiziksel yorum eksikliği hala vardır.

### 2.5.1 Kesirli mertbe integralin geometrik yorumu

Riemann-Liouville kesirli mertbe integrali

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.17)$$

biçiminde tanımlanır. Bu integral

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau), \quad (2.18)$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha\} \quad (2.19)$$

biçiminde ifade edilsin.  $g_t(\tau)$  fonksiyonu ölçekleme özelliğine sahiptir.  $t_1=kt$  ve  $\tau_1=k\tau$  ( $k>0$ ) alınırsa o zaman fonksiyon

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau) \quad (2.20)$$

olur. (2.18)'deki integral sabit bir t anı için düşünölsün. Eksenler ( $\tau$ , g ve f) olarak alınıp ( $\tau$ , g) düzleminde  $0 \leq \tau < t$  zaman aralığında  $g_t(\tau)$  fonksiyonu çizilecektir.  $t=10$ ,  $f(t)=t+0.5\sin t$  ve  $\alpha=0.75$  olmak üzere elde edilen üç boyutlu eğri ve eğrinin iki yüzey üzerine izdüşümü Şekil 2.4'te verilmiştir.

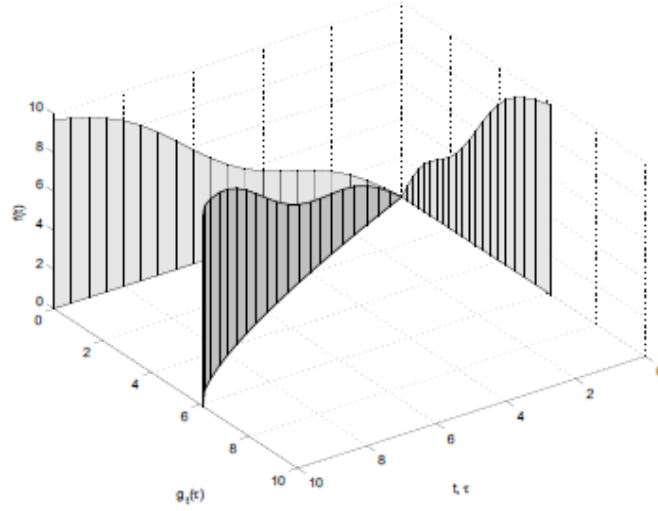
- Eğrinin ( $\tau, f$ ) düzlemindeki izdüşümünün alanı

$${}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.21)$$

integralinin değerine karşı düşer.

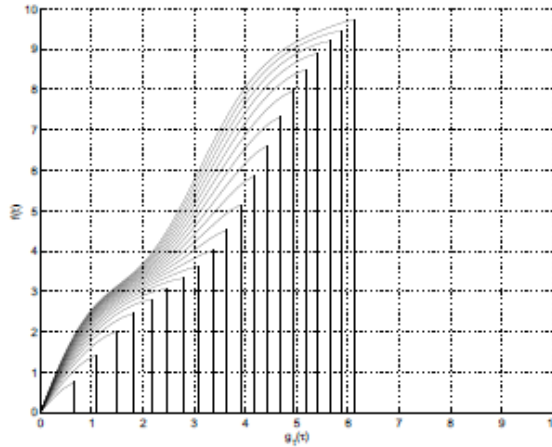


- Eğrinin (g,f) düzlemindeki izdüşümünün alanı (2.18)'deki integralin değerine karşı düşer.



**Şekil 2.4:** Üç boyutlu eğri ve eğrinin izdüşümleri(  ${}_0I_t^1 f(t)$  ve  ${}_0I_t^{0.75} f(t)$ ),  $f(t)=t+0.5\sin t$ ,  $0<t<10$ .

$\alpha=1$  ise  $g_t(\tau)=\tau$  olacak ve bu iki izdüşüm birbirinin aynısı olacaktır. Bu da geometrik bir bakış açısıyla tam sayı mertebe integralinin Riemann-Liouville kesirli mertebe integralinin belirli bir durumu olduğunu gösterir.  $t$  değıştikçe, eğrinin uzunluğu ve şekli aynı anda değışecektir. Bu eğrinin (g,f) düzlemindeki izdüşümünün zamanla değışimi Şekil 2.5'te verilmiştir [16].



**Şekil 2.5:**  ${}_0I_t^{0.75}(t+0.5\sin t)$  eğrisinin  $0<t\leq 10$  zaman aralğında 0.5 zaman aralıklarıyla artırılması sonucunda gölgenin değışimi.

## 2.5.2 Kesirli mertebe integralin fiziksel yorumu

Riemann- Liouville kesirli mertebe integrali

$$S_o(t) = \int_0^t \nu(\tau) dg_t(\tau) = {}_0I_t^\alpha \nu(t) \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlansın.  $\nu(\tau)$  fonksiyonunun kesirli mertebe integrali( $S_o(t)$ ) zamanı  $\tau$  ve hızı  $\nu(\tau)$  olan hareketli nesnenin ona ait yerel değerleri boyunca aldığı yolun uzunluğu olarak yorumlanabilir.  $\tau$  eşit bir şekilde akan zaman,  $g_t(\tau)$  ise eşit bir şekilde akmayan zaman(kozmik zaman) olarak tanımlanabilir. Yani,  $g_t(\tau)$  fonksiyonu homojen olmayan zaman ölçeğini tanımlar. Bu ölçek sadece  $\tau$  zamana bağlı değil hareket eden nesnenin son ölçülen değerine( $t$ ) bağlıdır.

$t$  değiştikçe geçen kozmik zamanın tümü de değişir. Bu fizik alanında kabul edilmiş bir görüştür. B.N. Ivanov [17], zaman aralıklarının yer çekimine bağlı olduğundan bahseder. Aynı şekilde S. Hawking [18], dünya gibi büyük kütleli cisimlerin yakınında zaman daha yavaş aktığını ve tek bir kesin zamanın olmadığını fakat yerine bireylerin hareket ettikleri yere ve nasıl hareket ettiğine bağlı olan kişisel zaman ölçülerine sahip olduğunu belirtmiştir.

Hareket eden cisim uzay-zamanda pozisyon değiştirdiğinde tüm uzay-zamandaki yer çekimi bu hareketten dolayı değişir. Sonuç olarak, kozmik zaman aralığı, ki nesnenin hareket geçmişine karşı düşer, değişir. Bu, (2.22)'deki hareketli nesnenin aldığı yolun gerçek uzunluğunu ( $S_o(t)$ ) etkiler [16].

### 3. KESİRLİ MERTEBE MODELLEME

Kesirli mertebe bir sistem,

$$a_n D_t^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D_t^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D_t^{\beta_0} y(t) = b_m D_t^{\alpha_m} u(t) + b_{m-1} D_t^{\alpha_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D_t^{\alpha_0} u(t) \quad (3.1)$$

biçimindeki zamanla değişmez kesirli mertebe diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Bu durumda sürekli zamanda kesirli mertebe transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\alpha_m} + b_{m-1} s^{\alpha_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\alpha_1}}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1}} \quad (3.2)$$

haline gelir. Burada  $\alpha_k < \alpha_{k-1} < \dots < \alpha_0$  ve  $\beta_k < \beta_{k-1} < \dots < \beta_0$  olmak üzere  $\alpha_k, \beta_k$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) gerçel sayılar ve  $a_k, b_k$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) rasgele sabitlerdir. Tüm  $\alpha_k, \beta_k$  mertebeleri en küçük ortak bölenin ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ) tam sayı çarpımları olduğunda bu transfer fonksiyonu orantılı (commensurate) transfer fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\alpha_m} + b_{m-1} s^{\alpha(m-1)} + \dots + b_1 s^{\alpha_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 s^{\alpha_0}} \quad (3.3)$$

biçiminde gösterilir, yani  $s^\alpha$  cinsinden iki polinomun oranıdır. Burada  $k$  tam sayı değerleri Tam sayı transfer fonksiyonu  $\alpha=1$  ile orantılı transfer fonksiyonudur. Literatürde birçok kesirli mertebe sistem modeli mevcuttur [---]. Bu tezde ele alınacak olan sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K}{Ts^\alpha + 1} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Bu modelde  $K$  sistem kazancını,  $T$  bilinen bir sabitini,  $\alpha$  ise sistem mertebesini belirtmektedir. Bu model kesirli mertebe tek kutuplu model (KTKM) olarak adlandırılacaktır.

### 3.1 Kesirli Mertebe Model Yapısının Zaman Cevabı

(3.4)'teki sistem modelinin darbe( $\delta(t)$ ) ve basamak( $u(t)$ ) cevapları aşağıda verilmiştir.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha \pm a} L[\delta(t)]\right] = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mp at^\alpha) \quad (3.5)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha \pm a} L[u(t)]\right] = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mp at^\alpha) \quad (3.6)$$

$E_{\alpha,\beta}(t)$  iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur ve

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilir.

### 3.2 Kararlılık

*Teorem 1:* (3.3)'teki kesirli mertebe sistem transfer fonksiyonu ancak

$$\forall s: a_n s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 s^{\alpha} = 0, \quad |\angle s| > \frac{\pi}{2} \quad (3.8)$$

ise sistem kararlıdır ( $\angle s, [\pi, -\pi]$  rad ile sınırlandırılır).

*Sonuç 1:* (Matignon teoremi)  $\sigma = s^\alpha$  olmak üzere (3.8)'deki polinom

$$A(\sigma) = a_n \sigma^n + a_{n-1} \sigma^{(n-1)} + \dots + a_0 \sigma^0 \quad (3.9)$$

haline dönüşür. Bu durumda (3.3)'teki kesirli mertebe transfer fonksiyonu ancak (3.9) polinomunun kökleri

$$|\angle \sigma| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

ise sistem kararlıdır.

*İspat:*  $A(\sigma)$  polinomunun katlı köke sahip olmadığı düşünülerek ispat yapılacaktır.

(3.3)'teki sistem,

$$G(s) = \frac{\rho_n}{s^\alpha - \sigma_n} + \frac{\rho_{n-1}}{s^\alpha - \sigma_{n-1}} + \dots + \frac{\rho_0}{s^\alpha - \sigma_0} \quad (3.11)$$

biçiminde kısmi kesirlere ayrılabilir. Bu durumda (3.5) kullanılarak (3.11)'deki sistemin darbe cevabı

$$y(t) = \rho_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\sigma_n t^\alpha) + \rho_{n-1} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\sigma_{n-1} t^\alpha) + \dots + \rho_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\sigma_0 t^\alpha) \quad (3.12)$$

halindedir. (3.7)'de iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun zamanla

$$E_{\alpha,\beta}(t) \approx \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.13)$$

yakınsamasından yararlanarak darbe cevabı

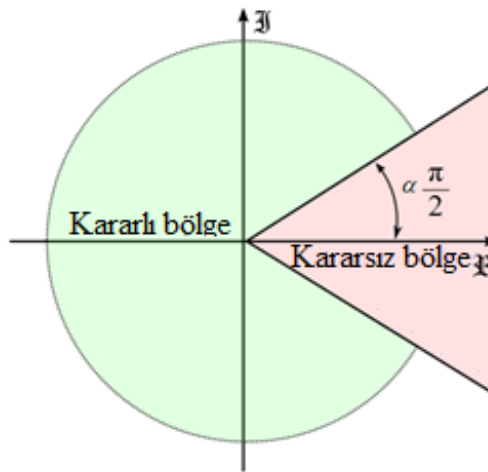
$$y(t) \approx \rho_n t^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha} (\sigma_n t^\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{(\sigma_n t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} + \dots = \frac{\rho_n}{\alpha} \sigma_n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{t \sigma_n^{1/\alpha}} + \dots \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. Darbe cevabının zamanla sıfıra gitmesi için  $\text{Re}[\sigma_n^{1/\alpha}] < 0$  olması gerekmektedir.

$$\text{Re}[\sigma_n^{1/\alpha}] = \text{Re}[|\sigma_n| e^{j\angle\sigma_n}]^{1/\alpha} = \text{Re}[|\sigma_n|^{1/\alpha} (\cos \frac{\angle\sigma_n}{\alpha} + i \sin \frac{\angle\sigma_n}{\alpha})] \quad (3.15)$$

$\cos \angle\sigma_n / \alpha < 0 \Leftrightarrow |\angle\sigma_n / \alpha| > \pi / 2$  olursa yukarıdaki eşitlik sağlanır.  $\alpha$  pozitif olduğu için teorem 1 ispatlanmış olur.

Şekil 3.1'de kararlı ve kararsız bölgeler görülmektedir. Kesirli mertebeli orantılı transfer fonksiyonu için  $A(\sigma)$  polinomunun köklerinin tümü yeşil alandaysa sistem kararlı, bazı kökleri kırmızı alandaysa sistem kararsızdır. Kararsız bölge  $0 < \alpha < 1$  ise sağ yarı düzlemde,  $1 < \alpha < 2$  ise sol yarı düzlemdedir. Orantılı mertebesi  $\alpha > 2$  ise sistem kesinlikle kararsızdır.



**Şekil 3.1:** Kesirli mertebeli orantılı transfer fonksiyonu için kararlı kararsız bölgeler.

### 3.3 Kesirli Mertebe Model Yapısının Frekans Cevabı

Frekans cevabı bulunacak sistem

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^\alpha + 1} \quad (3.16)$$

biçimindedir. Bu amaçla s yerine  $j\omega$  konulduğunda

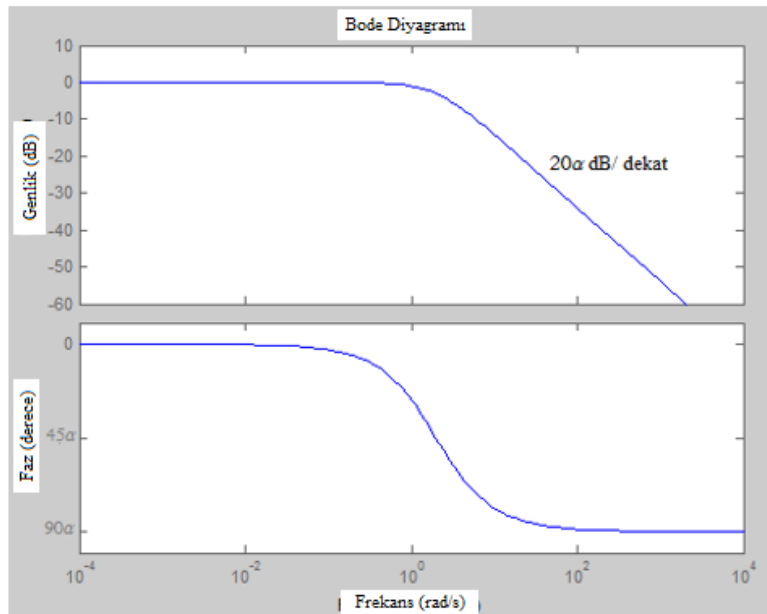
$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{a}\right)^\alpha + 1} \quad (3.17)$$

elde edilir.  $\omega \gg a$  ise  $G(j\omega) \approx (a/j\omega)^\alpha$ ,  $\omega \ll a$  ise  $G(j\omega) \approx 1$ .  $\omega = a$  frekansında

$$|G(ja)| = \left| \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2} + j \sin \frac{\alpha\pi}{2} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}} \quad (3.18)$$

$$\angle G(ja) = \arctan \frac{-\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}} = \arctan \frac{-2 \sin \frac{\alpha\pi}{4} \cos \frac{\alpha\pi}{4}}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{4} \cos \frac{\alpha\pi}{4}} = -\alpha \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (3.19)$$

genlik ve faz değerine sahip olur. Şekil 3.2’de (3.16)’daki sistemin genlik ve faz eğrileri verilmiştir. Sistem  $20\alpha$  dB/dekat eğimine sahiptir ve  $-90\alpha^\circ$  faz kaydırır.



Şekil 3.2: (3.16)’daki sistemin Bode diyagramı.

Örnek 3.1: Bu örnekte dinamometre kontrol sisteminin modeli

$$G(s) = \frac{1}{0.4s^{0.5} + 1} \quad (3.20)$$

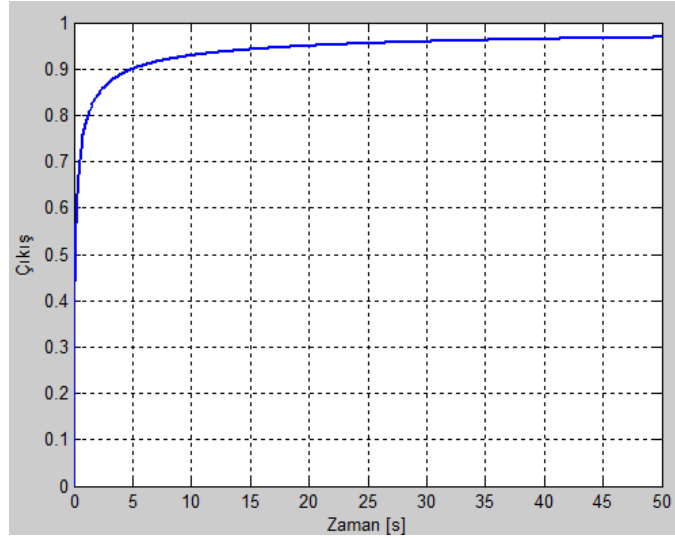
kullanılacaktır [19]. (3.6) ve (3.7)'deki denklemler yardımıyla modelin birim basamak cevabı

$$y(t) = 2.5t^{0.5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2.5t^{0.5})^k}{\Gamma(0.5k + 1.5)} \quad (3.21)$$

teorik olarak elde edilir. Birim basamak cevabını yaklaşık olarak elde etmek için (2.15)'teki Oustaloup yaklaşımı ile elde edilen kesirli mertebe türev kullandığında

$$G(s) = \frac{1}{0.4s^{0.5} + 1} \approx 0.07326 \frac{(s + 0.002565)(s + 0.009006)(s + 0.03162)(s + 0.01110)(s + 0.3899)...(s + 59.26)(s + 208.1)(s + 730.5)}{(s + 0.002549)(s + 0.008879)(s + 0.03076)(s + 0.1055)(s + 0.3551)...(s + 36.87)(s + 120.8)(s + 405.4)} \quad (3.22)$$

11. mertebe tam sayı transfer fonksiyonuna ulaşılır. FOMCON [20] araç kutusu yardımıyla Şekil 3.3'te (3.20)'deki sistemin yaklaşık birim basamak verilmiştir.



Şekil 3.3: (3.20)'deki sistemin birim basamak cevabı.

(3.17)'deki denklemde elde edilen tüm ifadeler bu sistem için  $a=2.5^2= 6.25$  olduğu değere karşı düşer.  $\omega \gg 6.25$  rad/s ise  $G(j\omega) \approx (6.25/j\omega)^{0.5}$  bu durumda faz  $-90\alpha = 45^\circ$  olarak bulunur. Genlik eğrisinin eğimi de  $-20\alpha$  dB/ dekat =  $-10$  dB/dekat olarak elde edilir.  $\omega \ll 6.25$  ise  $G(j\omega) \approx 1$ , genlik 0 dB, faz  $0^\circ$  olur. Şekil 3.4'te (3.20)'deki transfer fonksiyonun frekans cevabı verilmiştir.

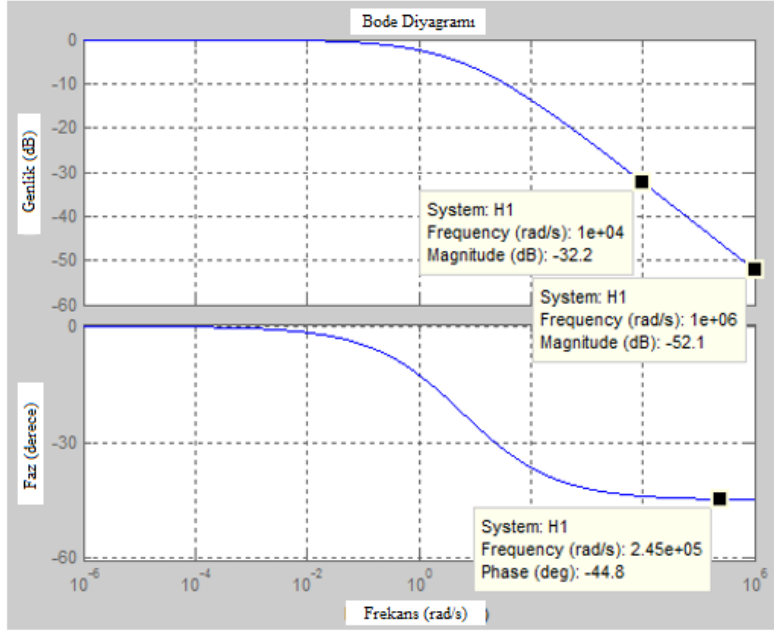
(2.14)'te verilen  $s^{0.5}$  kesirli mertebe türevinin 11. mertebe Oustaloup yaklaşımının kutup sıfırlarının yeri ve ayrıca (3.22)'deki modelin 0.4 değerinde olan T parametresi

serbest bırakıldığında bu parametreye göre kutupların değişimi Şekil 3.5'te verilmiştir.

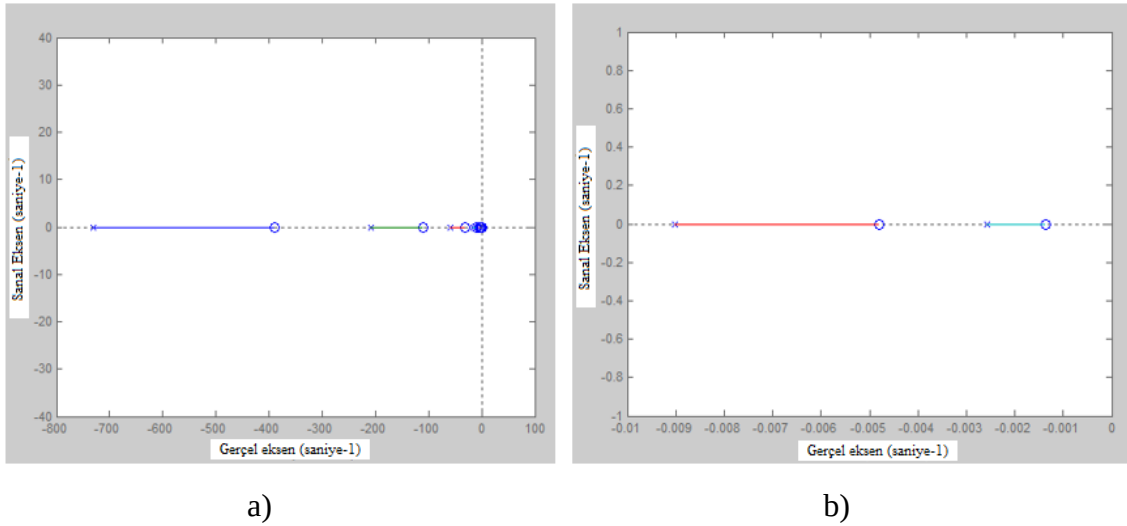
Örnek 3.2: Bu örnekte elektriksel radyatörün modeli

$$G(s) = \frac{1}{39.69s^{1.26} + 0.598} \quad (3.23)$$

kullanılacaktır [21].



Şekil 3.4: (3.20)'deki sistemin frekans cevabı.



Şekil 3.5:  $s^{0.5}$  türev operatörünün kutup sıfır dağılımı ve (3.22)'daki modelin T parametresine göre kutup dağılımı a) gerçel eksen: [-800 100], b)gerçel eksen: [-0.01 0] .



Bu model (3.4)'teki model biçiminde dönüştürüldüğünde

$$G(s) = \frac{1.672}{66.371s^{1.26} + 1} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. (3.6) ve (3.7)'deki denklemler yardımıyla modelin birim basamak cevabı

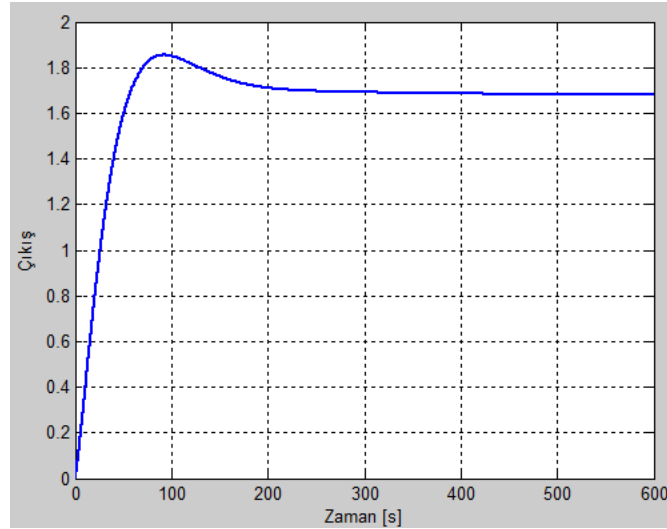
$$y(t) = 0.02519t^{1.26} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-0.015066t^{1.26})^k}{\Gamma(1.26k + 2.26)} \quad (3.25)$$

teorik olarak elde edilir.

Birim basamak cevabını yaklaşık olarak elde etmek için (2.16)'daki Oustaloup yaklaşımı ile elde edilen kesirli mertebe türev kullandığında

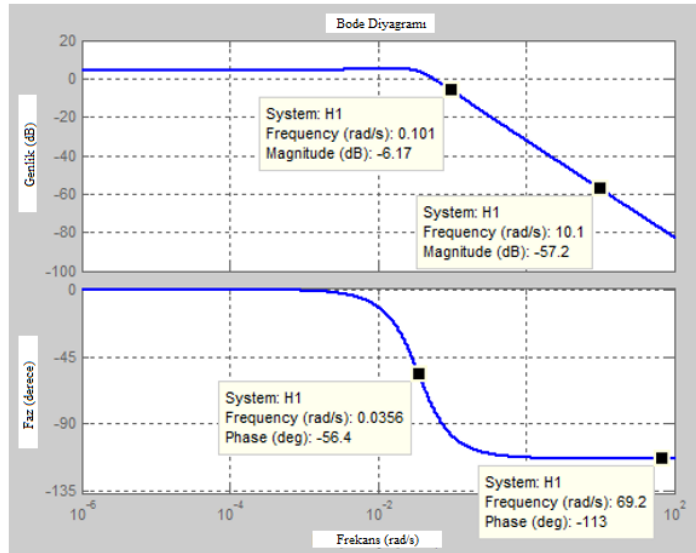
$$G(s) = \frac{1.672}{66.371s^{1.26} + 1} \approx 0.0041808 \frac{(s + 0.002206)(s + 0.007746)(s + 0.0272)(s + 0.0955)(s + 0.3353)...(s + 50.97)(s + 178.9)(s + 628.3)}{(s^2 + 0.05581s + 0.001181)(s + 0.002223)(s + 0.00813)(s + 0.053)(s + 0.235)...(s + 36.76)(s + 129.1)(s + 453.3)} \quad (3.26)$$

11. mertebe tam sayı transfer fonksiyonuna ulaşılır. FOMCON araç kutusu yardımıyla Şekil 3.6'te (3.24)'teki sistemin yaklaşık birim basamak verilmiştir.



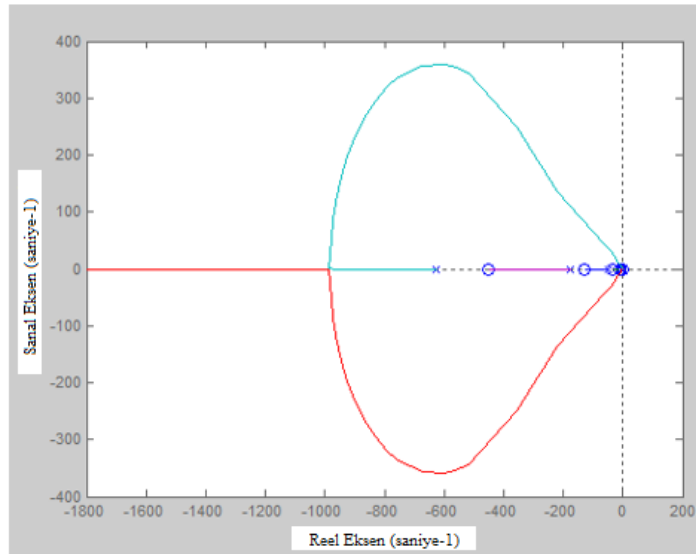
Şekil 3.6: (3.24)'teki sistemin birim basamak cevabı.

(3.17)'deki denklemde elde edilen tüm ifadeler bu sistem için  $a=0.015066^{1/1.26}=0.0358$  olduğu değere karşı düşer.  $\omega \gg 0.0358$  rad/s ise  $G(j\omega) \approx (0.0358 / j\omega)^{1.26}$  bu durumda faz  $-90\alpha = -113.4^\circ$  olarak bulunur. Genlik eğrisinin eğimi de  $-20\alpha$  dB/ dekat =  $-25.2$  dB/dekat olarak elde edilir.  $\omega \ll 0.0358$  ise  $G(j\omega) \approx 1.672$ , genlik 4.46 dB, faz  $0^\circ$  olur. Şekil 3.7'de (3.24)'teki transfer fonksiyonun frekans cevabı verilmiştir.



**Şekil 3.7:** (3.24)'teki sistemin frekans cevabı.

(2.16)'da verilen  $s^{1.26}$  kesirli mertbe türevinin 11. mertbe Oustaloup yaklaşımının kutup sıfırlarının yeri ve ayrıca (3.26)'daki modelin 66.371 değerinde olan  $T$  parametresi serbest bırakıldığında bu parametreye göre kutupların değişimi Şekil 3.8'de verilmiştir.



**Şekil 3.8:**  $s^{1.26}$  türev operatörünün kutup sıfır dağılımı ve (3.26)'daki modelin  $T$  parametresine göre kutup dağılımı.

### 3.4 Kesirli Mertbe Model Yapısının Tam Sayı Yaklaşıklarının Karşılaştırılması

Kesirli mertbe modeller için farklı mertbe Oustaloup yaklaşımları kullanılarak birçok tam sayı mertbe model elde edilebilir. Genellikle kesirli mertbe türev için

11. mertebe Oustaloup yaklaşımı kullanıldığı için asıl model olarak bunu ele alıp daha düşük mertebe açılımlar için birbirine benzerliğini bulunmaya çalışılacaktır. Bu amaçla indirgenen modellerin asıl modele ne kadar yakın davrandığının ölçütü olarak

$$e = \sum_{i=0}^T (y_{gerçek}(i) - y_{indirgenen}(i))^2 \quad (3.27)$$

model farklarının karelerinin toplamını kullanılacaktır. Bu bölümde (3.20) ve (3.24)'teki KTK modellerin incelemesi yapılacaktır.

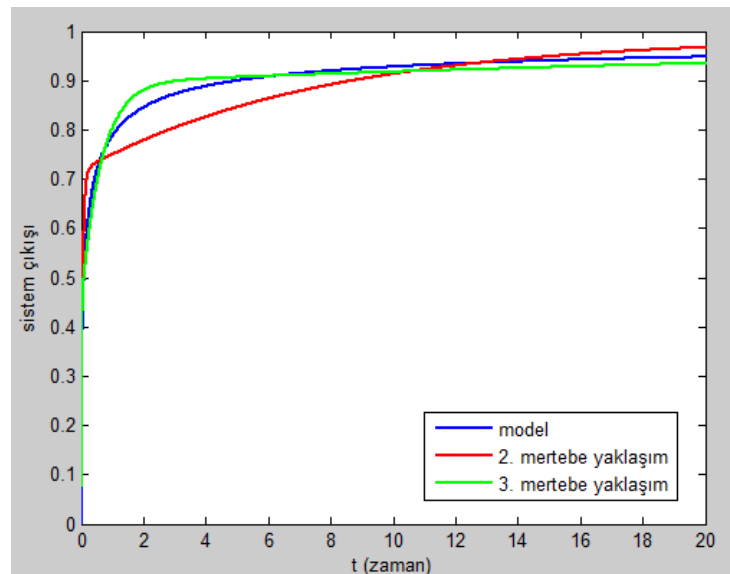
### 3.4.1 Farklı mertebe Oustaloup açılımları ile karşılaştırma

(3.20)'deki sistem modelinin kesirli mertebe türeve 11. mertebe Oustaloup yaklaşımı ile oluşan tam sayı mertebe transfer fonksiyonu (3.22)'de verilmiştir. Kesirli mertebe türev için 2. ve 3. mertebe Oustaloup yaklaşımları kullanıldığında sırasıyla elde edilen tam sayı mertebe transfer fonksiyonları

$$G_{2.mertebe}(s) = \frac{0.073265(s+0.177828)(s+177.828)}{(s+0.129415)(s+18.1288)} \quad (3.28a)$$

$$G_{3.mertebe}(s) = \frac{0.073265(s+0.0316228)(s+3.16228)(s+316.228)}{(s+0.0286649)(s+1.59289)(s+51.3828)} \quad (3.28b)$$

biçimindedir. Modelin ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.9'da verilmiştir. 2. mertebe yaklaşımla elde edilen model için bu toplam 0.03151, 3. mertebe yaklaşımla elde edilen model için 0.006627 olarak bulunur. Türevin yaklaşım mertebesi arttırıldıkça gerçek modelle arasındaki hata miktarının azalması beklenen bir sonuçtur.



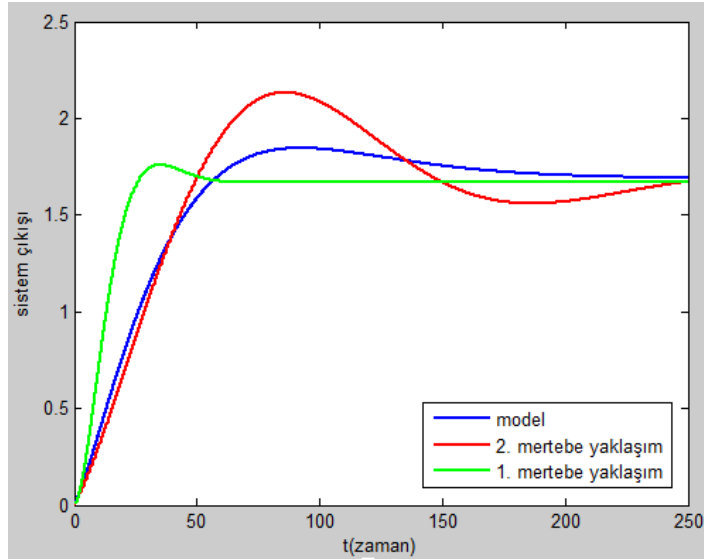
Şekil 3.9: Modelin ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları.

(3.24)'teki sistem modelinin kesirli mertebe türeve 11. mertebe Oustaloup yaklaşımı ile oluşan tam sayı mertebe transfer fonksiyonu (3.26)'da verilmiştir. Kesirli mertebe türev için 1. ve 2. mertebe Oustaloup yaklaşımları kullanıldığında sırasıyla elde edilen tam sayı mertebe transfer fonksiyonları

$$G_{1.mertebe}(s) = \frac{0.0041808(s + 6.02559)}{s^2 + 0.168459s + 0.0150668} \quad (3.29a)$$

$$G_{2.mertebe}(s) = \frac{0.0041808(s + 77.6247)(s + 0.0776247)}{(s + 12.87)(s^2 + 0.0279s + 0.0011707)} \quad (3.29b)$$

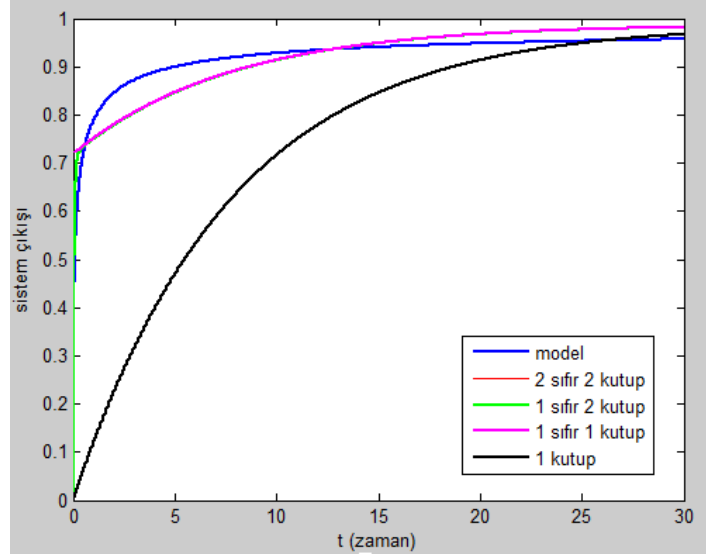
biçimindedir. Şekil 3.10'da model ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları gösterilmiştir. Modellerin birbirine yakınlık ölçütü ise 1. mertebe yaklaşımla elde edilen model için bu toplam 12.91, 2. mertebe yaklaşımla elde edilen model için 5.507 olarak bulunur.



Şekil 3.10: Modelin ve indirgenmiş modellerin birim basamak cevapları.

### 3.4.2 Tam sayı yaklaşıklarında baskın olmayan kutup-sıfır ihmalleri ile karşılaştırılması

(3.20) ve (3.24)'teki KTK modelleri kesirli mertebe türeve düşük mertebe Oustaloup yaklaşımı ile düşük mertebeye indirgenmiştir. Burada indirgenen modellerde baskın olmayan kutup-sıfırlardan başlayarak kutup-sıfır ihmalleri yapılacaktır. (3.28a)'daki indirgenmiş ikinci mertebe modelin tüm kök ve sıfırları gerçel olduğu için sırasıyla ihmal edilebilir. Bu durumda bu indirgenmiş modelin sıfır ve kutuplarının hepsi gerçel olacağı için teker teker ihmal edildiğinde oluşan modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.11'de verilmiştir. Bu şekilde 2 sıfır 2 kutuplu, 1 sıfır 2 kutuplu ve 1 sıfır 1 kutuplu modeller üst üste gelmiştir.



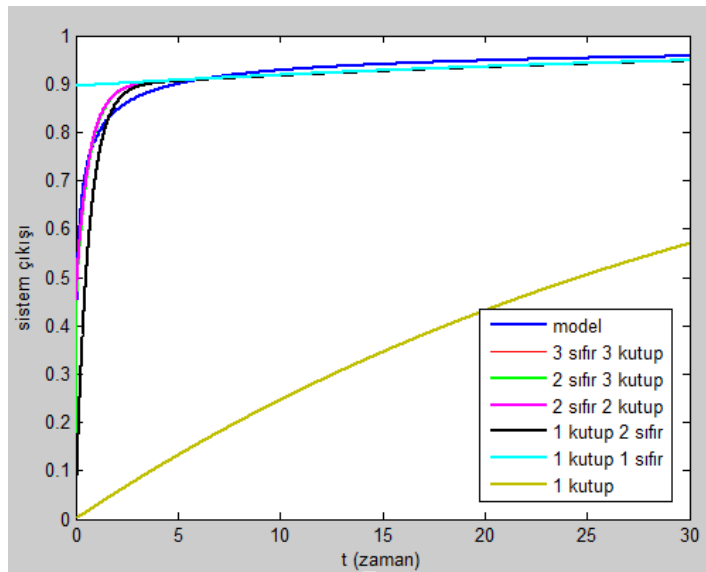
**Şekil 3.11:** (3.28a)'da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.

Bu indirgenmiş modelin ve sıfır kutup ihmalleriyle elde edilen modellerin gerçek modele(11.mertebe) yakınlığının kriteri için model hatalarının karesi toplamı hesaplanmıştır. Toplam model hataları Çizelge 3.1 'de verilmiştir.

**Çizelge 3.1:** 2. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları.

|                       | 2 sıfır 2 kutup | 1 sıfır 2 kutup | 1sıfır 1 kutup | 1 kutup |
|-----------------------|-----------------|-----------------|----------------|---------|
| <b>Model hataları</b> | 0.03151         | 0.03148         | 0.04461        | 2.273   |

(3.28b)'deki indirgenmiş üçüncü mertebe modelin kutup ve sıfırlarının hepsi gerçel olacağı için teker teker ihmal edildiğinde oluşan modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.12'de görülmektedir. Bu şekilde 3 sıfır 3 kutuplu, 2 sıfır 3 kutuplu ve 2 sıfır 2 kutuplu modeller üst üste gelmiştir.



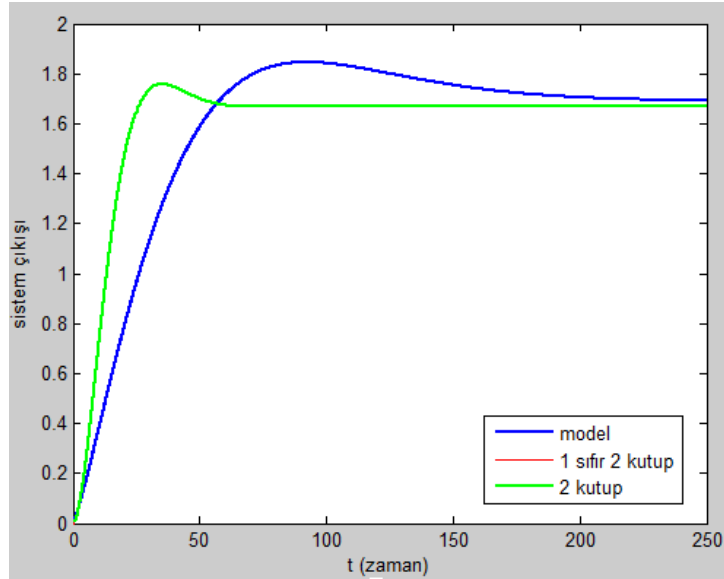
**Şekil 3.12:** (3.28b)'de indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.

Bu indirgenmiş modelin ve sıfır kutup ihmalleriyle elde edilen modellerin gerçek modele(11.mertebe) yakınlığının kriteri olan model hatalarının karesi toplamı Çizelge 3.2’de verilmiştir.

**Çizelge 3.2:** 3. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları.

|                       | 3 sıfır<br>3 kutup | 2 sıfır<br>3 kutup | 2 sıfır<br>2 kutup | 1 sıfır<br>2 kutup | 1 sıfır<br>1 kutup | 1 kutup |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------|
| <b>Model hataları</b> | 0.006627           | 0.00665            | 0.008321           | 0.06648            | 0.07631            | 11.19   |

(3.29a)’daki indirgenmiş ikinci mertebe modelin var olan kutupları karmaşık eşlenik olduğu için ihmal edilemez. Var olan bir sıfırı ihmal edildiğinde oluşan modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.13’te verilmiştir. Bu şekilde 1 sıfır 2 kutuplu ve 2 kutuplu modeller üst üste gelmiştir.



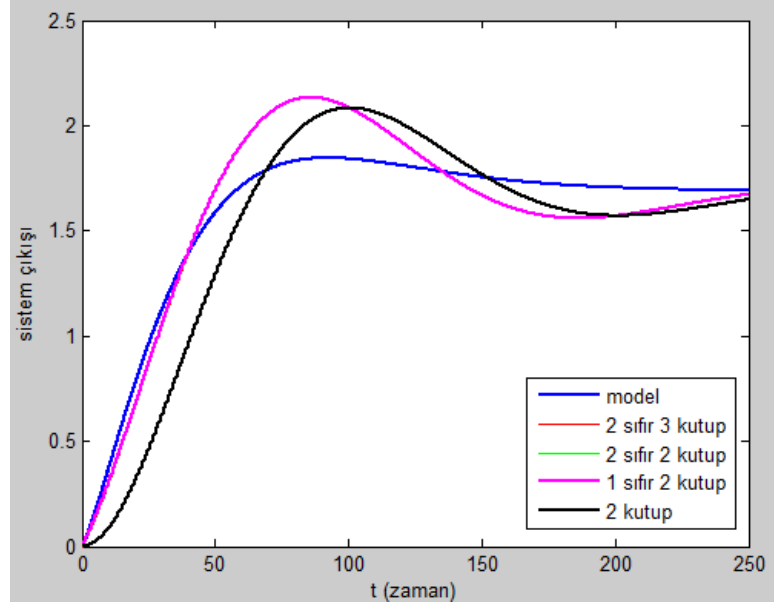
**Şekil 3.13 :** (3.29a)’da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.

Bu indirgenmiş modelin ve sıfır kutup ihmaliyle elde edilen modelin gerçek modele(11.mertebe) yakınlığının kriteri olan model hatalarının karesi toplamı Çizelge 3.3’te verilmiştir.

**Çizelge 3.3 :** 1. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları.

|                       | 1 sıfır 2 kutup | 2 kutup |
|-----------------------|-----------------|---------|
| <b>Model hataları</b> | 12.91           | 12.68   |

(3.29b)’deki indirgenmiş üçüncü mertebe modelde karmaşık eşlenik kutuplar olacağı için kutup sıfır ihmalleri dikkat edilerek yapılmalıdır. Kutup-sıfırları ihmal edildiğinde oluşan modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.14’te verilmiştir. Bu şekilde 2 sıfır 3 kutuplu, 2 sıfır 2 kutuplu ve 1 sıfır 2 kutuplu modeller üst üste gelmiştir.



**Şekil 3.14:** (3.29b)'da indirgenen modelde kutup sıfır ihmalleri.

Bu indirgenmiş modelin ve sıfır kutup ihmaliyle elde edilen modelin gerçek modele(11.mertebe) yakınlığının kriteri olan model hatalarının karesi toplamaları Çizelge 3.4'te verilmiştir.

**Çizelge 3.4:** 2. mertebe yaklaşımla indirgenen modellerin toplam model hataları.

|                       | 2 sıfır 3 kutup | 2 sıfır 2 kutup | 1 sıfır 2 kutup | 2 kutup |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|
| <b>Model hataları</b> | 5.507           | 5.503           | 5.503           | 11.42   |





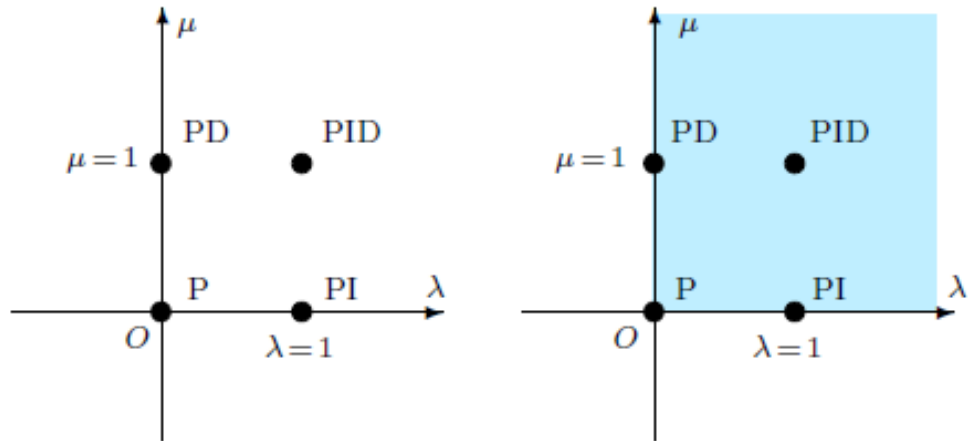
## 4. KESİRLİ MERTEBE KONTROLÖR TASARIMI

### 4.1. Doğrusal Kesirli Mertebe PID Kontrolör Tasarımı

Kesirli mertebe PID(KMPID) kontrolör yapısı

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

biçimindedir. KMPID yaygın olarak kullanılan ve iyi bilinen PID'nin genelleştirilmiş halidir.  $\lambda=1, \mu=1$  olduğu durumda KMPID, TMPID yapısına dönüşür. Sadece  $K_d=0$  olduğu durumda KMPID, KMPI yapısına, sadece  $K_i=0$  olduğu durumda KMPD yapısına dönüşür. Bu kesirli yapılar (KMPI ve KMPD) sırasıyla  $\lambda=1$  olduğu zaman TMPI,  $\mu=1$  olduğu zaman TMPD yapısına dönüşür. Şekil 4.1 KMPID ile TMPID arasındaki ilişkiyi görsel olarak sunmaktadır. Bu şekilde sarı alan kesirli mertebe tüm kontrolörleri, köşe noktalar ise tam sayı mertebe kontrolörleri belirtir.



Şekil 4.1: Tam sayı mertebe PID ve Kesirli mertebe PID [1].

Literatürde pek çok KMPID katsayılarını ayarlama yöntemi vardır. Bu katsayılar ayarlamak için analitik yöntemler, sayısal yöntemler ve kural tabanlı yöntemler kullanılır.

#### 4.1.1 Analitik Yöntemler

##### 4.1.1.1 Belirli faz payı, kazanç geçiş frekansı ve düz faza göre kontrolör tasarımı

Luo ve arkadaşlarının çalışmasında [19] ele alınan model ve tasarlanacak kontrolör yapısı aşağıdaki gibidir:

$$G(s) = \frac{K}{Ts^\alpha + 1} \quad (4.2a)$$

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{s^\lambda}\right) \quad (4.2b)$$

$K$ , model kazancı, kontrolörün kazancıyla iç içe kullanılabileceğinden genellikle kaybetmeden 1 olarak alınabilir.  $\alpha$  kesirli mertebeyi ifade eden pozitif gerçel sayıdır.  $T$  bilinen bir parametredir.  $s$  Laplace dönüşüm değişkenidir. Bu sistem modelinin kontrolü için KMPI tasarlanacaktır.  $\lambda \in (0,2)$  olarak düşünülecektir.

Bu tasarımda  $\omega_c$  kazanç geçiş frekansı,  $\phi_m$  faz payı olmak üzere üç ölçüt kullanılacaktır.

(i) *Faz payı ölçütü*

$$\begin{aligned} \text{Arg}[C(j\omega_c)G(j\omega_c)] &= \text{Arg}[C(j\omega_c)] + \text{Arg}[G(j\omega_c)] \\ &= -\tan^{-1}\left[\frac{K_i\omega_c^{-\lambda}\sin(\lambda\pi/2)}{1+K_i\omega_c^{-\lambda}\cos(\lambda\pi/2)}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{T\omega_c^\alpha\sin(\alpha\pi/2)}{1+T\omega_c^\alpha\cos(\alpha\pi/2)}\right] \\ &= -\pi + \phi_m \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak yazıldığında

$$A = -\tan\left[\tan^{-1}\left[\frac{T\omega_c^\alpha\sin(\alpha\pi/2)}{1+T\omega_c^\alpha\cos(\alpha\pi/2)}\right] + \phi_m\right] \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$K_i = \frac{-A}{\omega_c^{-\lambda}\sin(\lambda\pi/2) + \omega_c^{-\lambda}\cos(\lambda\pi/2)D_2} \quad (4.5)$$

denkleminde ulaşılır.

(ii) *Kazanç geçiş frekans ölçütü*

$$|C(j\omega_c)G(j\omega_c)|_{dB} = 0 \quad (4.6)$$

$$|C(j\omega_c)G(j\omega_c)| = \frac{K_p \sqrt{(1 + K_i \omega_c^{-\lambda} \cos(\lambda\pi/2))^2 + (K_i \omega_c^{-\lambda} \sin(\lambda\pi/2))^2}}{\sqrt{(1 + T \omega_c^\alpha \cos(\alpha\pi/2))^2 + (T \omega_c^\alpha \sin(\alpha\pi/2))^2}} = 1 \quad (4.7)$$

olarak yazıldığında

$$K_p = \frac{\sqrt{(1 + T \omega_c^\alpha \cos(\alpha\pi/2))^2 + (T \omega_c^\alpha \sin(\alpha\pi/2))^2}}{\sqrt{(1 + K_i \omega_c^{-\lambda} \cos(\lambda\pi/2))^2 + (K_i \omega_c^{-\lambda} \sin(\lambda\pi/2))^2}} \quad (4.8)$$

denkleminde ulaşılır.

(iii) Çevrim kazanç değişimlerine karşı dayanıklılık ölçütü

Bunun için fazın frekansa göre türevinin sıfır olması Bode faz eğrisinde kazanç geçiş frekansı civarında sabit olduğu anlamına gelir. Bu durumda sistem cevabı, çevrim kazanç değişimlerine karşı dayanıklıdır ve sistem cevabında faz payına bağlı olan aşım neredeyse aynı kalır.

Çevrim kazanç değişimlerine karşı dayanıklılık kısıtı

$$B = 1 + T \omega_c^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \quad C = T \omega_c^\alpha \sin(\alpha\pi/2) \quad D = 2E \omega_c^{-\lambda} \cos(\lambda\pi/2) - \lambda \omega_c^{-\lambda-1} \sin(\lambda\pi/2) \quad (4.9)$$

olmak üzere

$$\left| \frac{d(\text{Arg}[C(j\omega)G(j\omega)])}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = \frac{K_i \lambda \omega_c^{\lambda-1} \sin(\lambda\pi/2)}{\omega_c^{2\lambda} + 2K_i \omega_c^\lambda \cos(\lambda\pi/2)} - \underbrace{\frac{\alpha T \omega_c^{\alpha-1} [B \sin(\lambda\pi/2) - C \cos(\lambda\pi/2)]}{B^2 + C^2}}_E = 0 \quad (4.10)$$

olarak yazıldığında

$$K_i = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4E^2 \omega_c^{-2\lambda}}}{2D \omega_c^{-2\lambda}} \quad (4.11)$$

denkleminde elde edilir. (4.5), (4.8) ve (4.11) denklemleri beraber çözüldüğünde KMPI kontrolörüne ulaşılır.

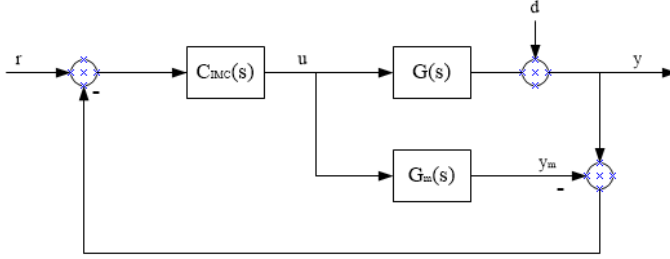
#### 4.1.1.2 İMK tabanlı kontrolör tasarımı

İç model kontrol metodu, klasik geri beslemeli kontrolör için modele dayalı analitik ifadeler elde edilmesini sağlar. İç model kontrol (İMK) ve klasik geri beslemeli kontrol blok diyagramları sırasıyla Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'te gösterilmiştir, Şekil 4.2'de  $G(s)$  kontrol edilecek süreci,  $G_m(s)$  sürecin modelini,  $C_{IMC}(s)$  iç model kontrolörü ifade eder.  $C(s)$  ve  $C_{IMC}(s)$  arasındaki ilişki

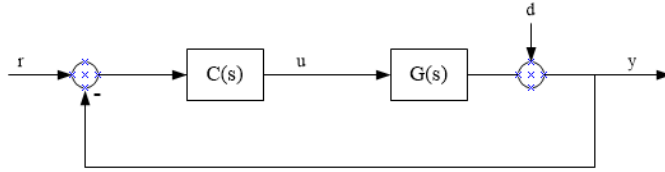
$$C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - C_{IMC}(s)G_m(s)} \quad (4.12)$$

olduğunda bu iki blok diyagramı birbirinin aynısı olur. İMK yapısında süreç çıkışı (y),

$$y(s) = \frac{C_{IMC}(s)G(s)}{1 + C_{IMC}(s)(G(s) - G_m(s))} r(s) + \frac{1 - C_{IMC}(s)G(s)}{1 + C_{IMC}(s)(G(s) - G_m(s))} d(s) \quad (4.13)$$



Şekil 4.2: İç model kontrol yapısı.



Şekil 4.3: Klasik geri besleme kontrolü.

İMK kontrolör iki adımda tasarlanır:

#### 1. Süreç modeli

$$G_m(s) = G_m^+(s)G_m^-(s) \quad (4.14)$$

şeklinde iki kısma ayrılır. Bu ifadede  $G_m^+(s)$  ölü zamanı ve sağ yarı düzlem sıfırlarını içerir ve kazancı 1'e eşittir.

#### 2. İMK kontrolör

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m^-(s)} f(s) \quad (4.15)$$

biçiminde belirlenir. Bu ifadede

$$f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (4.16)$$

biçimindeki filtreyi belirtir. Bettayeb ve Mansouri'nin çalışmasında [22] ele alınan sistem

$$G(s) = \frac{k(1 + \tau s^\gamma)}{a_2 s^\beta + a_1 s^\alpha + 1} \quad \beta > \alpha \quad (4.17)$$

biçimindedir. (4.14)-(4.16) denklemleri yardımıyla elde edilecek kontrolör

$$C_{IMC}(s) = \frac{a_2 s^\beta + a_1 s^\alpha + 1}{k(1 + \tau s^\gamma)(1 + \tau_c s^{\lambda+1})} \quad (4.18)$$

geleneksel kontrolör ise

$$C(s) = \frac{a_2 s^\beta + a_1 s^\alpha + 1}{k \tau_c s^{\lambda+1} (1 + \tau s^\gamma)} = \underbrace{\frac{1}{s^{\lambda+1-\alpha} (1 + \tau s^\gamma)}}_{\text{kesirli mertebe filtre}} \underbrace{\frac{a_1}{k \tau_c} \left(1 + \frac{1}{a_1 s^\alpha} + \frac{a_1}{a_2} s^{\beta-\alpha}\right)}_{PI^\alpha D^{\beta-\alpha} \text{ kontrolör}} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir.  $\gamma=\alpha$  ve  $\beta=2\alpha$  olmak üzere sistem orantılı bir transfer fonksiyonu olarak seçildiğinde kontrolör

$$C(s) = \underbrace{\frac{1}{s^{\lambda+1-\alpha} (1 + \tau s^\alpha)}}_{\text{kesirli mertebe filtre}} \underbrace{\frac{a_1}{k \tau_c} \left(1 + \frac{1}{a_1 s^\alpha} + \frac{a_1}{a_2} s^\alpha\right)}_{PI^\alpha D^\alpha \text{ kontrolör}} \quad (4.20)$$

biçiminde olur. Sistem  $\gamma=\alpha=1$  ve  $\beta=2$  olarak alınırse tam sayı mertebe olur ve kontrolör

$$C(s) = \underbrace{\frac{1}{s^\lambda (1 + \tau s)}}_{\text{kesirli mertebe filtre}} \underbrace{\frac{a_1}{k \tau_c} \left(1 + \frac{1}{a_1 s} + \frac{a_1}{a_2} s\right)}_{PID \text{ kontrolör}} \quad (4.21)$$

haline dönüşür. Ele alınan bu sistemde  $\tau s^\gamma$  ve  $a_2 s^\beta$  ihmal edildiğinde (3.4)'teki model haline gelir ve (4.20)'deki kontrolör,  $\lambda+1>\alpha$  durumda

$$C(s) = \underbrace{\frac{1}{s^{\lambda+1}}}_{\text{kesirli mertebe filtre}} \underbrace{\frac{1}{k \tau_c} (a_1 s^\alpha + 1)}_{PD^\alpha \text{ kontrolör}} \quad (4.22)$$

$\lambda+1<\alpha$  durumda ise

$$C(s) = \underbrace{\frac{1}{s^{\lambda+1-\alpha}}}_{\text{kesirli mertebe filtre}} \underbrace{\frac{a_1}{k \tau_c} \left(1 + \frac{1}{a_1 s^\alpha}\right)}_{PI^\alpha \text{ kontrolör}} \quad (4.23)$$

şekline dönüşür.

#### 4.1.2 Sayısal Yöntemler

##### 4.1.2.1 Belirli faz payı, kazanç geçiş frekansı, düz faz, gürültü ve çıkış bozucusu bastırma performansına göre kontrolör tasarımı

KMPID 5 serbestlik derecesine sahip olan bir kontrolördür. Bu yüzden beş performans ölçütü gerçekleştirme imkanı sağlar. Monje ve arkadaşlarının çalışmasında [23] (4.3), (4.6) ve (4.10)'da verilen ölçütlere ek olarak  $G(s)$  model transfer fonksiyonu,  $C(s)$  kontrolör transfer fonksiyonu olmak üzere

(i) *Yüksek frekanslı gürültüleri bastırma performansı ölçütü:*

$$\begin{aligned} |T(j\omega)|_{dB} &= \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq A \text{ dB} \\ \forall \omega \geq \omega_t \text{ rad / sn} &\Rightarrow |T(j\omega_t)|_{dB} = A \text{ dB} \end{aligned} \quad (4.24)$$

biçiminde duyarlılık fonksiyonu üzerinden tanımlanır. Burada  $\omega \geq \omega_t$  rad/s frekansları için gürültüyü A dB gücünde bastırması istenir.

(ii) *Çıkış bozucusu bastırma performans ölçütü:*

$$\begin{aligned} |S(j\omega)|_{dB} &= \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq B \text{ dB} \\ \forall \omega \leq \omega_s \text{ rad / sn} &\Rightarrow |S(j\omega_s)|_{dB} = B \text{ dB} \end{aligned} \quad (4.25)$$

biçiminde tamamlayıcı fonksiyonu üzerinden tanımlanır. Burada  $\omega \leq \omega_s$  rad/s frekansları için çıkış bozucusunu B dB gücünde bastırması istenir.

(4.1)'deki KMPID tasarımı için bu beş ölçüt sonucunda beş doğrusal olmayan denkleme ulaşılır. Beş doğrusal olmayan denkleminin çözülmesi sonucunda KMPID'nin bulunması istenen beş parametresine ulaşılabilir ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ). Bu KMPID tasarımında (4.6) ölçütü amaç fonksiyonu seçilerek (4.3), (4.10), (4.24) ve (4.25) eşitlik kısıtları altında MATLAB'da FMINCON fonksiyonu kullanılarak (4.6) fonksiyonu minimum yapılmaya çalışılır, böylece kontrolör parametreleri bulunmaya çalışılır. Bu tasarım metodunun başarısı bulunacak parametrelerin başlangıç koşuluna bağlıdır.

### 4.1.3 Kural Tabanlı Yöntemler

#### 4.1.3.1 KMPID kontrolörü için ayarlama kuralları

Visioli ve Padula'nın çalışmasında [24] birinci mertebe ölü zamanlı süreç modelleri için maksimum duyarlılık kısıtı altında IAE performans ölçütünü minimum yapan KMPID kontrolörün katsayıları ve mertebeleri için kurallar oluşturulabileceği belirtilir. Kullanılacak sistem modeli

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-Ls} \quad (4.26)$$

biçimindedir. Burada K kazanç, T zaman sabiti, L ölü zamanı ifade eder. Sürecin dinamikleri  $L/T$  veya  $L/(L+T)$  olarak tanımlanan normalize ölü zaman( $\tau$ ) ile belirlenir ve sürecin kontrol edilme zorluğunun ölçütüdür. (4.26)'daki birinci mertebe ölü zamanlı modelinin normalize ölü zamanı  $0.05 < \tau < 0.8$  olanlar kullanılacaktır. Tasarlanacak seri KMPID kontrolör

$$C(s) = K_p \frac{T_i s^\lambda + 1}{T_i s^\lambda} \frac{T_d s^\mu + 1}{\frac{T_d}{N} s^\mu + 1} \quad (4.27)$$

biçimindedir. Burada  $K_p$  oransal kazancı,  $T_i$  integral zaman sabitini,  $T_d$  türev zaman sabitini,  $\lambda$  ve  $\mu$  integral ve türevin kesirli mertebelerini belirtir. Minimum yapılacak integral performans ölçütü (IAE)

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt = \int_0^\infty |r(t) - y(t)| dt \quad (4.28)$$

biçimindedir. Bu ölçüt sisteme hem düşük aşım hem de düşük yerleşme zamanı üretir. Maksimum duyarlılık açık çevrimli sistem transfer fonksiyonunun Nyquist eğrisinin (-1,0) noktasına olan maksimum uzaklığının tersi olarak tanımlanır ve

$$M_s = \max_{\omega \in [0, \infty)} \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \quad (4.29)$$

ile temsil edilir. Referans takibi durumunda (4.28)'deki IAE performans ölçütü belirli bir maksimum duyarlılık için minimum yapılmaya çalışılacaktır. Arama algoritması olarak genetik algoritma kullanılacaktır. Sistem cevabının dayanıklılığıyla ilgilenileceği için maksimum duyarlılık 1.4 olarak seçilmiştir. Kontrolör katsayılarının genel yapısı

$$K_p = \frac{1}{K}(a\tau^b + c) \quad (4.30a)$$

$$T_i = T^\lambda (a(\frac{L}{T})^b + c) \quad (4.30b)$$

$$T_d = T^\mu (a(\frac{L}{T})^b + c) \quad (4.30c)$$

türetilir. Burada  $\lambda$  ve  $\mu$  parçalı sabit fonksiyon olarak düşünülmüştür. Genetik algoritma sonucunda verilen fonksiyonların katsayıları Çizelge 4.1’de verilmiştir.

**Çizelge 4.1:**  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  için oluşturulan fonksiyonların katsayıları.

|                             | <b>a</b>                                      | <b>b</b> | <b>c</b>  |
|-----------------------------|-----------------------------------------------|----------|-----------|
| <b><math>K_p</math></b>     | 0.6503                                        | -0.9166  | -0.6741   |
| <b><math>T_i</math></b>     | 0.04701                                       | -0.2611  | 0.9276    |
| <b><math>T_d</math></b>     | 0.3563                                        | 1.2      | 0.0003108 |
| <b><math>\lambda</math></b> | 1                                             |          |           |
| <b><math>\mu</math></b>     | $\tau < 0.1$ ise 1.1; $\tau \geq 0.1$ ise 1.2 |          |           |

Performans ölçütünün değerlendirilmesi için sürecin parametrelerine bağlı olarak normalize ölü zaman ( $\tau = L/(L+T)$ ) olmak üzere

$$IAE = T(0.0011e^{10.414\tau} + 0.6304e^{2.2226\tau} + 0.791\tau - 0.6547) \quad (4.31)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Maksimum duyarlılık farklı seçilerek KMPID kontrolörün katsayıları ve mertebeleri farklı değerler elde edilebilir. Kullanılan değerden daha büyük bir değerde olduğunda sistem cevabının dayanıklılığı yerine agresifliği ön planda tutulmuş olur.

#### 4.1.3.2 S şeklinde sistem cevabına veya kritik kazanca dayalı KMPID tasarımı

Sistem modeli olmadığı durumlarda tek seçenek kurallar oluşturmaktır. Sistem modeline sahip olursa kontrol ölçütlerini atamak çok zor olmasa bile zaman kazanmak için, analitik metotlarla hesaplamalar için verilen çabayı azaltmak için kurallar kullanılabilir. Burada Ziegler ve Nichols tarafından önerilen kurallara benzer ayarlama kuralları önerilir. (4.3), (4.6), (4.10), (4.24) ve (4.25)’teki performans ölçütlerine göre türev ifadesi içermeyen Nelder-Mead arama metodu kullanılır. İki



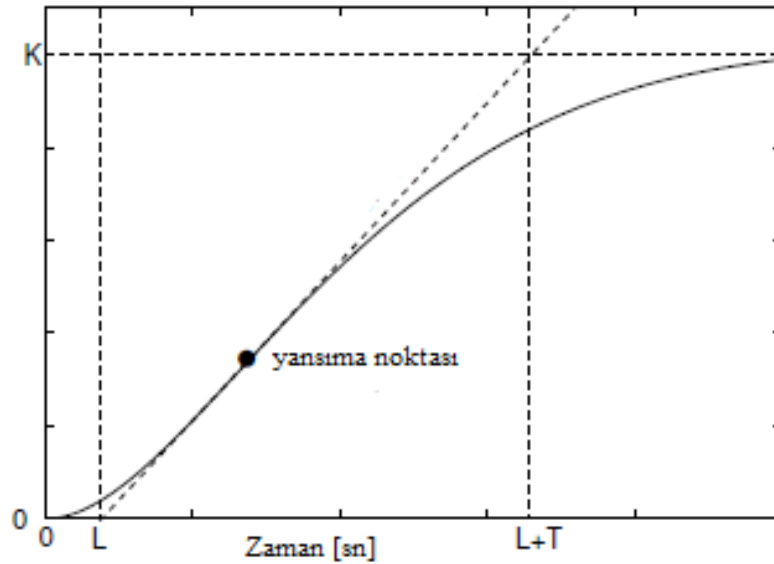
yöntem kullanılacaktır: S şeklindeki sistem cevabına dayalı KMPID tasarımı, Kritik kazançca dayalı KMPID tasarımı.

Şekil 4.4'te S şeklindeki sistem cevabı gösterilmiştir. Sistem cevabında K sistemin kazancını, yansıma noktasından çizilen teğetin zaman eksenini kestiği yer sistemin ölü zamanını (L), kazancını kestiği yer ile fark zaman sabitini(T) ifade eder.

Valerio ve da Costa'nın çalışmasında [25] belirli 5 performans ölçütüne göre KMPID'nin 5 parametresi( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$  ve  $\mu$ ) için

$$f(L, T) = a_1 + a_2L + a_3T + a_4L^2 + a_5T^2 + a_6TL \quad (4.32)$$

biçiminde fonksiyon bulunur. Bulunan bu kurallar belirli T ve L için geçerlidir.

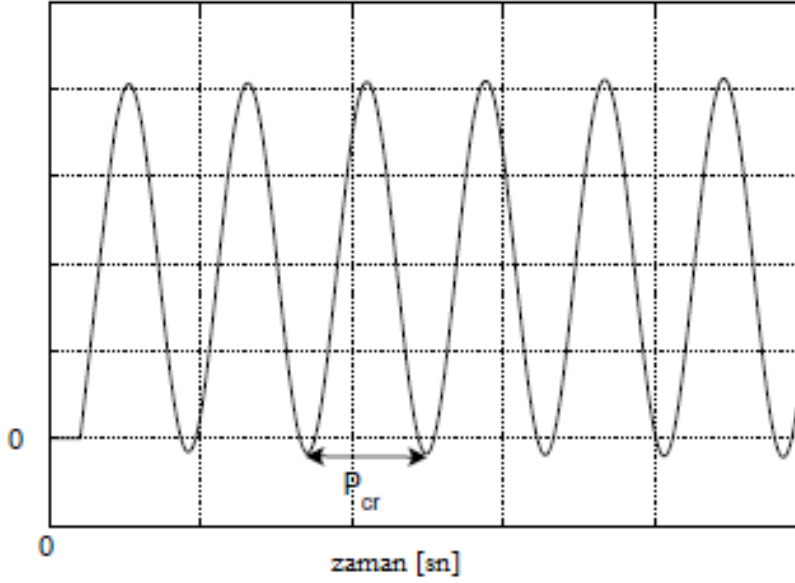


Şekil 4.4 : S şeklinli basamak cevabı.

Şekil 4.5'te kritik kazançta birim geri beslemeli sistemin çıkış işareti gösterilmiştir. Belirli 5 performans ölçütüne göre KMPID'nin 5 parametresi( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$  ve  $\mu$ ) için

$$f(K_{kritik}, P_{kritik}) = a_1 + a_2K_{kritik} + a_3P_{kritik} + \frac{a_4}{K_{kritik}} + \frac{a_5}{P_{kritik}} \quad (4.33)$$

biçiminde fonksiyon bulunur. Bulunan bu kurallar belirli  $P_{kritik}$  ve  $K_{kritik}$  değerleri için geçerlidir.



**Şekil 4.5:** Kritik kazançta sistem çıkışı.

## 4.2 Doğrusal Olmayan Kesirli Mertebe PID Kontrolör Tasarımı

### 4.2.1 Kazanç ve mertebe düzenlenmesi

Doğrusal olmayan sistem bir sistem,

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \quad (4.34)$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca belli çalışma bölgesinde çeşitli çalışma noktaları  $\{(u_k; y_k), k=1,2,...,n\}$  için

$$\Psi = \{G_1, G_2, ..., G_n\} \quad (4.35)$$

biçiminde doğrusal kesirli mertebe model kümesi elde edilsin. Bu kümede her bir doğrusal model için performans ölçütlerini sağlayan KMPID kontrolör kümesi

$$\Omega = \{C_1, C_2, ..., C_n\} \quad (4.36)$$

biçiminde tanımlansın. Tepljakov ve arkadaşlarının çalışmasında [26] birleşik kontrol kuralı (composite control law)  $\beta_k(x)$ , düzenlenen duruma bağlı ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$Y(x, s) = \sum_{k=1}^n \beta_k(x) C_k(s) \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilir.  $n$ 'nin seçimi sistemin çalışma bölgesine bağlıdır. Burada  $n=2$  olarak seçildiğinde  $x_{maks}$  düzenlenen durumun maksimum değeri,

$$\gamma(x) := \frac{x(t)}{x_{maks}} \quad \beta_1(x) := 1 - \gamma(x) \quad \beta_2(x) := \gamma(x) \quad (4.38)$$

olmak üzere

$$Y(x, s) = \beta_1(x)C_1(s) + \beta_2(x)C_2(s) \quad (4.39)$$

ifade edilir. Burada iki çalışma noktası belirlenip sistem yapısı

$$G(s) = \frac{K}{Ts^\alpha + 1} \quad (4.40)$$

biçiminde seçilmiştir ve bu iki model için  $C_1(s)$  ve  $C_2(s)$  KMPID kontrolörler (4.3), (4.6), (4.10), (4.24) ve (4.25)'teki 5 performans ölçütü göre FOMCON araç kutusundaki FOPID optimizasyon aracı kullanılarak tasarlanmıştır.

#### 4.2.2 Sekiz parametrelili KMPID kontrolör tasarımı

Doğrusal olmayan KMPID, PID kontrolöre kıyasla daha az kontrol enerjisi kullanarak karmaşık sistemleri kontrol etmede etkin bir yapıdır. Merrikh-Bayat ve Mirebrahimi'nin çalışmasındaki [27] kontrolörde ayarlanması gereken 8 parametre vardır. Doğrusal olmayan KMPID kontrolde giriş çıkış ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$u(t) = k_p |e(t)|^\alpha \text{sign}(e(t)) + k_d |D^\mu e(t)|^\beta \text{sign}(D^\mu e(t)) + k_i |D^\lambda e(t)|^\gamma \text{sign}(D^\lambda e(t)) \quad (4.41)$$

Burada  $k_p, k_d, k_i \in \mathbb{R}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^+$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}^-$  olan ayarlama parametreleridir.  $e(t)$  birim geri beslemeli sistemde hata işareti,  $u(t)$  kontrol işaretini temsil eder.  $\alpha=\beta=\gamma=1$  olarak alındığında klasik KMPID kontrolörü elde edilir. Böylece doğrusal olmayan KMPID, klasik KMPID kontrolöre göre üç serbest parametreye daha sahiptir.  $\mu=-\lambda=1$  alındığında basit bir doğrusal olmayan PID kontrol yapısı ortaya çıkar. Kesirli mertebe operatörler hata işaretini daha etkin şekillendirme imkanı sağlarlar. Doğrusal olmayan PID kontrolöre göre tercih edilmesinin sebebi budur.

Doğrusal olmayan KMPID kontrolörün parametrelerinin ayarlayabilmek için en basit yaklaşım belirli bir integral performans ölçütünü minimumlaştıracak şekilde bilinmeyen parametreleri ( $k_p, k_d, k_i, \alpha, \beta, \gamma, \mu$  ve  $\lambda$ ) hesaplamaktır. Parametrelerin integral performans ölçütüne göre analitik olarak elde edilemez, bu durumda sayısal optimizasyon teknikleri kullanılmalıdır. Bu durumda da sekiz parametrelili

kontrolörün arama uzayı çok geniştir. Bu zorluklardan ötürü kontrolör parametrelerinin ayarlanması zor bir iştir. Bu yüzden belirli integral performans ölçütünü minimum yapan PID kontrolör tasarlanıp üç parametre ( $k_p$ ,  $k_d$ ,  $k_i$ ) ayarlanır. İkinci adımda bulunan üç parametre kullanılarak kontrolörün mertebesi olan iki parametre ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) ayarlanır. Son adımda ise bulunan beş parametre kullanılarak bu integral performans ölçütünü minimum yapan  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  parametreleri bulunur. Böylece adım adım doğrusal olmayan KMPID'nin integral performan ölçütünü nasıl iyileştirdiği gösterilir.

## 5. TAM SAYI MERTEBE TERS KONTROLÖRLER

Kesirli mertebe sistem modeller için genellikle Oustaloup yaklaşımı yapılarak yüksek mertebe tam sayı sistemler kullanılarak benzetimi yapılır. (3.4)'teki KTK sistem modeli kullanılacaktır. Kullanılan modelleri mertebesi  $0 < \alpha < 1$  ve  $1 < \alpha < 2$  olmak üzere iki kısma ayıracağız. Bu sebeple örnek model olarak (3.20)'de ve (3.24)'teki KTK sistem modellerini inceleyeceğiz. Kesirli mertebe kontrolörler için de benzetim yapılırken yüksek mertebe tam sayı kontrolörler kullanılır. Burada amaç, yüksek mertebe tam sayı kontrolörler yerine düşük mertebe tam sayı kontrolörler tasarlandığında tatmin edici sonuçlar alınıp alınmadığını görmektir. Kontrolör yapısı olarak ters kontrolör tasarımı yapacağız.

### 5.1 Açılım mertebesinde ters kontrolör tasarımı

Bu ters kontrolör tasarımında kesirli mertebe sistem modeline karşı düşen tam sayı mertebe transfer fonksiyonunun tüm kutup ve sıfırları kullanılır. (3.20)'deki KTK sistem modeli için (3.22)'de 11. mertebe tam sayı transfer fonksiyonu karşılığı elde edilmiştir. Bu açılımdaki model için kullanılacak ters kontrolör,

$$C(s) = \frac{0.4s^{0.5} + 1}{s} \approx \frac{1}{0.07326s} \frac{(s + 0.002549)(s + 0.008879)(s + 0.03076)(s + 0.1055)(s + 0.3551)...(s + 36.87)(s + 120.8)(s + 405.4)}{(s + 0.002565)(s + 0.009006)(s + 0.03162)(s + 0.01110)(s + 0.3899)...(s + 59.26)(s + 208.1)(s + 730.5)} \quad (5.1)$$

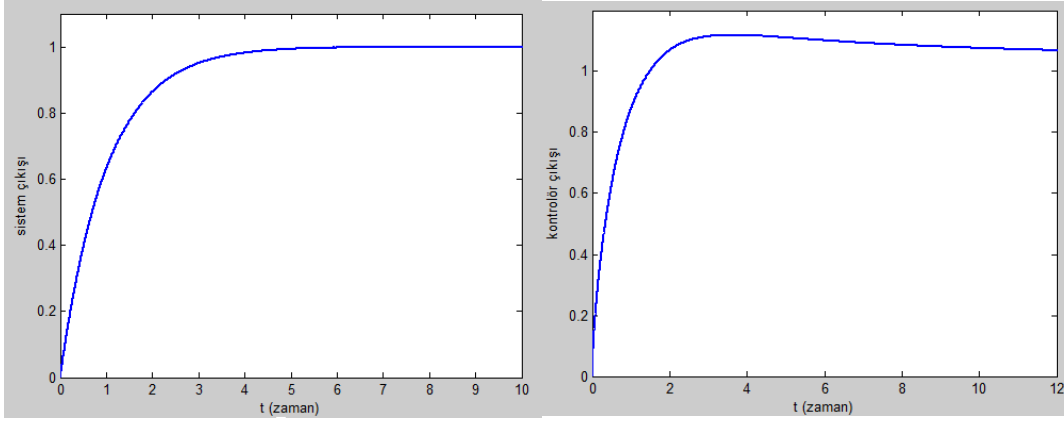
olarak elde edilir. Elde edilen ters kontrolörde sürekli hal hatasını yok etmek için kontrolöre integratör eklenmiştir. Bu durumda birim geri besleme altında birim basamak cevabı ve kontrol işareti Şekil 5.1'de gösterilmiştir.

(3.24)'teki KTK sistem modeli için (3.26)'da 11. mertebe tam sayı transfer fonksiyonu karşılığı elde edilmiştir. Bu model için kullanılacak ters kontrolör,

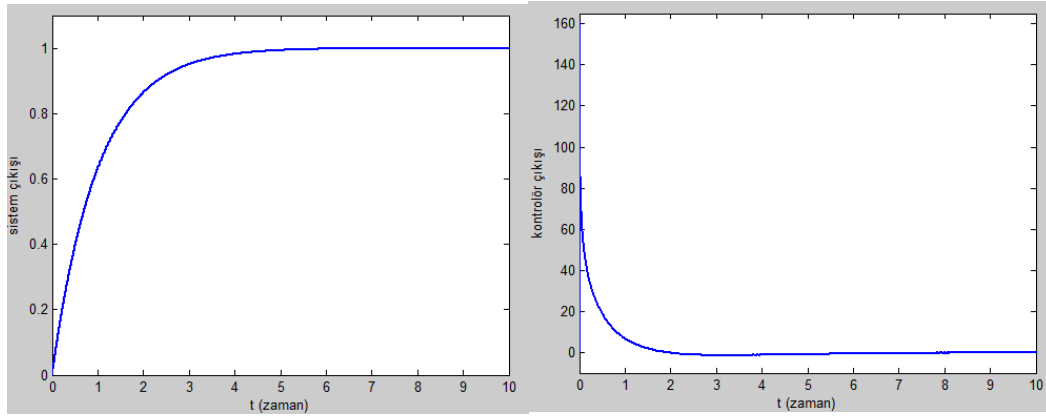
$$C(s) = \frac{66.371s^{1.26} + 1}{1.672s} \approx \frac{1}{0.0041808s} \frac{(s^2 + 0.05581s + 0.001181)(s + 0.002223)(s + 0.00813)(s + 0.053)(s + 0.235)...(s + 36.76)(s + 129.1)(s + 453.3)}{(s + 0.002206)(s + 0.007746)(s + 0.0272)(s + 0.0955)(s + 0.3353)...(s + 50.97)(s + 178.9)(s + 628.3)} \quad (5.2)$$

Elde edilen bu ters kontrolör ile verilen model birim geri besleme ile kontrol

edildiğinde birim basamak cevabı ve kontrol işareti Şekil 5.2’de verilmiştir.



**Şekil 5.1:** (3.20)’deki modelin açılım mertebesinde ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.



**Şekil 5.2:** (3.24)’daki modelin açılım mertebesinde ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.

## 5.2 Baskın kutup-sıfır temelli ters kontrolör tasarımı

Bu ters kontrolör tasarımı kesirli mertebe modelin dinamiklerini yansıtan baskın bölgedeki kutup ve sıfırlar olduğundan bu kutup ve sıfırların yok edilmesine dayanmaktadır. Bu amaçla en baskın 1 kutup-sıfır çifti ve en baskın 2 kutup-sıfır çifti parametrik olarak belirlenip sistemin baskın kutup-sıfırların etkisini giderecek parametrik bir ters kontrolör belirlenecektir. Bu tasarım KTK modeli için  $0 < \alpha < 1$  bölgesinde geçerli olacaktır. Bu bölgede kutupların T değişkenine göre nasıl değişeceğini Şekil 3.5’te gösterilmişti. Bu şekle bakarak en baskın kutbu belirlemek için genlik koşulu uygulanacaktır. Genlik koşulu için ilk iki kutup sıfır çiftinin uzaklıkları T’nin belirlenmesinde diğer kutup-sıfır çiftlerine göre daha etkin olduğu düşünülüp diğer kutup-sıfır çiftlerinin oranı kadar etkilediği düşünülecektir, ki bu

çiftler sanal eksenden uzaklaştıkça kutup sıfırın birbirine oranına ( $\delta$ ) yakınsar. Bu durumda

$$\delta^{N-2} \frac{(p_{baskın} - \omega_{p,1})(p_{baskın} - \omega_{p,2})}{(\omega_{z,1} - p_{baskın})(p_{baskın} - \omega_{z,2})} = K'T \quad (5.3)$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir. Baskın kutbun bulunması aşağıdaki ikinci dereceden denklem çözümüne haline dönüşür:

$$\underbrace{\left(1 + \frac{K'T}{\delta^{N-2}}\right)}_{k_0} p_{baskın}^2 - \underbrace{\left(\omega_{p,1} + \omega_{p,2} + \frac{K'T}{\delta^{N-2}}(\omega_{z,1} + \omega_{z,2})\right)}_{k_1} p_{baskın} + \underbrace{\left(\omega_{p,1}\omega_{p,2} + \frac{K'T}{\delta^{N-2}}\omega_{z,1}\omega_{z,2}\right)}_{k_2} = 0 \quad (5.4)$$

Bu durumda baskın kutup

$$p_{baskın} = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2k_0}}{2k_0} \quad (5.5)$$

parametrik olarak elde edilir.  $\omega_{p,1}$  ve  $\omega_{p,2}$  kesirli türevin( $s^\alpha$ ) baskın iki kutbunu,  $\omega_{z,1}$  ve  $\omega_{z,2}$  kesirli türevin( $s^\alpha$ ) baskın iki sıfırına karşı düşer. Sırasıyla bu kutup ve sıfırlar (2.13)'teki ifade yardımıyla  $k=1,2$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega_{z,1} &= \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{1-\alpha}{2N}} & \omega_{z,2} &= \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{3-\alpha}{2N}} \\ \omega_{p,1} &= \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{1+\alpha}{2N}} & \omega_{p,2} &= \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{3+\alpha}{2N}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

parametrik olarak bulunabilir. Modelin baskın sıfırı ise kesirli türevin baskın kutbudur ( $\omega_{p,1}$ ). Sistemin kazancı da

$$K'' = \frac{K\delta^{N-2}}{T\omega_h^\alpha + \delta^{N-2}} \quad (5.7)$$

Bu durumda tek baskın kutup ve sıfırları parametrik olarak bulunan sistemi için tasarlanacak ters kontrolör

$$C_{1baskın}(s) = \frac{(s + p_{baskın})}{K''(s + \omega_{p,1})} \quad (5.8)$$

olarak elde edilir.

Genlik koşulu için ilk üç kutup sıfır çiftinin uzaklıkları T'nin belirlenmesinde diğer

kutup-sıfır çiftlerine göre daha etkin olduğu düşünülüp diğer kutup-sıfır çiftlerinin oranı kadar etkilendiği düşünülecektir. Bu durumda

$$\delta^{N-3} \frac{(\omega_{p,3} - p_i)(p_i - \omega_{p,2})(p_i - \omega_{p,1})}{(\omega_{z,3} - p_i)(\omega_{z,2} - p_i)(p_i - \omega_{z,1})} = K'T \quad (5.9)$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir. Baskın iki kutbun bulunması aşağıdaki üçüncü dereceden denklem çözümüne haline dönüşür:

$$\underbrace{-(1 + \frac{K'T}{\delta^{N-3}}) p_i^3}_{k_0} + \underbrace{(\omega_{p,1} + \omega_{p,2} + \omega_{p,3} + \frac{K'T}{\delta^{N-3}} (\omega_{z,1} + \omega_{z,2} + \omega_{z,3})) p_i^2}_{k_1} - \underbrace{(\omega_{p,1}\omega_{p,2} + \omega_{p,2}\omega_{p,3} + \omega_{p,1}\omega_{p,3})}_{k_2} + \underbrace{(\frac{K'T}{\delta^{N-3}} (\omega_{z,1}\omega_{z,2} + \omega_{z,2}\omega_{z,3} + \omega_{z,1}\omega_{z,3})) p_i + \omega_{p,1}\omega_{p,2}\omega_{p,3} + \frac{K'T}{\delta^{N-3}} \omega_{z,1}\omega_{z,2}\omega_{z,3}}_{k_3} = 0 \quad (5.10)$$

Bu durumda baskın üç kutup

$$p = \frac{3 \frac{k_2}{k_0} - (\frac{k_1}{k_0})^2}{9} \quad q = \frac{2(\frac{k_1}{k_0})^3 - \frac{9k_1k_2}{k_0^2} + 27 \frac{k_3}{k_0}}{54} \quad (5.11)$$

olmak üzere

$$p_{baskın1} = 2(-p)^{0.5} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{q}{p} (-p)^{-0.5}) - 0 \frac{2\pi}{3}) - \frac{k_1}{3k_0} \quad (5.12)$$

$$p_{baskın2} = 2(-p)^{0.5} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{q}{p} (-p)^{-0.5}) - 1 \frac{2\pi}{3}) - \frac{k_1}{3k_0}$$

olarak elde edilir.  $\omega_{p,1}$ ,  $\omega_{p,2}$  ve  $\omega_{p,3}$  kesirli türevin( $s^\alpha$ ) baskın üç kutbunu,  $\omega_{z,1}$ ,  $\omega_{z,2}$  ve  $\omega_{z,3}$  kesirli türevin( $s^\alpha$ ) baskın üç sıfırına karşı düşer. Sırasıyla bu kutup ve sıfırlar (2.13)'teki ifade yardımıyla  $k=1,2,3$  olmak üzere.

$$\omega_{z,1} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{1-\alpha}{2N}} \quad \omega_{z,2} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{3-\alpha}{2N}} \quad \omega_{z,3} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{5-\alpha}{2N}} \quad (5.13)$$

$$\omega_{p,1} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{1+\alpha}{2N}} \quad \omega_{p,2} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{3+\alpha}{2N}} \quad \omega_{p,3} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{5+\alpha}{2N}}$$

parametrik olarak elde edilir. Modelin baskın iki sıfırı ise kesirli türevin baskın iki kutbudur ( $\omega_{p,1}$  ve  $\omega_{p,2}$ ). Sistemin kazancı da



$$K^m = \frac{K\delta^{N-3}}{T\omega_h^\alpha + \delta^{N-3}} \quad (5.14)$$

Bu durumda 3 baskın kutup ve sıfırları parametrik olarak bulunan sistemi için tasarlanacak ters kontrolör

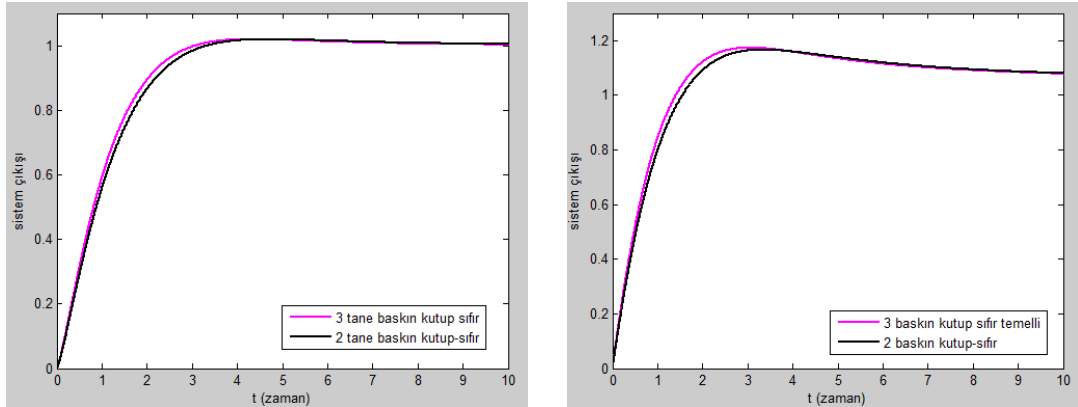
$$C_{3baskin}(s) = \frac{(s + p_{baskin1})(s + p_{baskin2})}{K^m(s + \omega_{p,1})(s + \omega_{p,2})} \quad (5.15)$$

(3.22)'deki KTK model için sırasıyla (5.3-5.6) ve (5.7-5.13) denklemleri yardımıyla tasarlanan baskın kutup sıfır temelli ters kontrolörler

$$C_{1baskin}(s) \approx \frac{1}{0.900063} \frac{(s + 0.002547)}{s(s + 0.002565)} \quad (5.16a)$$

$$C_{2baskin}(s) \approx \frac{1}{0.827776} \frac{(s + 0.002548)(s + 0.008865)}{s(s + 0.002565)(s + 0.009006)} \quad (5.16b)$$

biçimindedir. Bu kontrolörlerle modelin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.3'te verilmiştir.



**Şekil 5.3 :** (3.20)'deki modelin baskın kutup-sıfır temelli ters kontrolörle a)birim basamak cevabı b) kontrol işareti.

### 5.3 Düşük mertebe ters kontrolörler

Düşük mertebe ters kontrolörün mertebesi, kesirli mertebe sistemdeki kesirli ifadenin açılım mertebesinde küçük olmasıdır. Sistem N. dereceden açılımla gerçekleşiyorsa kontrolörün N. dereceden az olmasıdır. KTK sistemlerinde kutup ve sıfırların yerlerini parametrik olarak belirleyebilmek için sistem ikinci ve üçüncü mertebeye kadar indirilip sistem cevaplarına bakılacaktır. Kutup ve sıfırların yerlerini parametrik olarak belirlemek baskın olmayan kutupların ihmalini rahatlıkla imkan

sunup ters kontrolörün farklı tip kontrolöre dönüşümünün kolayca sağlamaktır. Ele alınan KTK model mertebesine göre ikiye ayrılacaktır:  $0 \leq \alpha < 1$  bölgesi ve  $1 \leq \alpha < 2$  bölgesi.

### 5.3.1 $0 \leq \alpha < 1$ bölgesi için ters kontrolör tasarımı

#### 5.3.1.1 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı

Model, parametrik olarak  $r = \omega_h / \omega_l$  olmak üzere

$$\frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \approx \frac{K(s^2 r^{\frac{3}{4}} + s(\omega_h(1 + \sqrt{r})r^{\frac{\alpha}{4}}) + \omega_l \omega_h r^{\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}})}{s^2 r^{\frac{3}{4}}(1 + K' \tau r^\alpha) + s \omega_h(1 + \sqrt{r})(1 + K' \tau r^{\frac{\alpha}{2}})r^{\frac{\alpha}{4}} + (1 + K' \tau) \omega_l \omega_h r^{\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}}} \quad (5.17)$$

biçiminde elde edilir. Sistemin kutup sıfır gösterimi

$$G_{rep1}(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (5.18)$$

İndirgenmiş sistemin ( $G_{rep1}(s)$ ) tersine dayanan kontrolör temel yapısı aşağıdaki şekildedir:

$$C_1(s) = \frac{(s + p_1)(s + p_2)}{Ks(s + z_1)(s + z_2)} \quad (5.19)$$

Sürekli hatasını yok etmek için kontrolöre bir integratör eklemiştir.  $K_a$  ise kontrolörün kazancını belirtir. Kontrolörün sıfır ve kutupları -sırasıyla indirgenmiş sistemin kutup ve sıfırlarına karşılık düşer- parametrik olarak

$$p_{1,2} = \frac{-\omega_h(1 + \sqrt{r})(1 + K' \tau r^{\frac{\alpha}{2}})r^{\frac{\alpha}{4}} \pm \sqrt{(\omega_h(1 + \sqrt{r})(1 + K' \tau r^{\frac{\alpha}{2}})r^{\frac{\alpha}{4}})^2 - 4r^{\frac{3}{4}}(1 + K' \tau r^\alpha)(1 + K' \tau) \omega_l \omega_h r^{\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}}}}{2r^{\frac{3}{4}}(1 + K' \tau r^\alpha)}$$

$$z_{1,2} = \frac{-(\omega_h(1 + \sqrt{r})r^{\frac{\alpha}{4}}) \pm \sqrt{(\omega_h(1 + \sqrt{r})r^{\frac{\alpha}{4}})^2 - 4r^{\frac{3}{4}} \omega_l \omega_h r^{\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}}}}{2r^{\frac{3}{4}}} \quad (5.20)$$

elde edilir.

#### 5.3.1.2 Kesirli türeve 3. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı

Model, parametrik olarak  $r = \omega_h / \omega_l$  olmak üzere

$$\frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \approx \frac{K(s^3 + s^2(1+r^{\frac{1}{3}}+r^{\frac{1}{3}})\omega_l r^{\frac{1+\alpha}{6}} + s(\omega_h + \omega_h r^{\frac{1}{3}} + \omega_l r^{\frac{2}{3}})\omega_l r^{\frac{\alpha}{3}} + \omega_l^2 \omega_h r^{\frac{1+\alpha}{2}})}{s^3(1+K'\tau r^\alpha) + s^2(1+r^{\frac{1}{3}}+r^{\frac{2}{3}})(1+K'\tau r^{\frac{2\alpha}{3}})\omega_l r^{\frac{1+\alpha}{6}} + s(1+K'\tau r^{\frac{\alpha}{3}})(\omega_h + \omega_h r^{\frac{1}{3}} + \omega_l r^{\frac{2}{3}})\omega_l r^{\frac{\alpha}{3}} + (1+K'\tau)\omega_l^2 \omega_h r^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$

(5.21)

biçiminde elde edilir. Sistemin kutup sıfır gösterimi

$$G_{rep2}(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (5.22)$$

İndirgenmiş sistemin( $G_{rep2}(s)$ ) tersine dayanan kontrolör temel yapısı aşağıdaki şekildedir:

$$C_2(s) = \frac{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}{Ks(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)} \quad (5.23)$$

Aynı şekilde sürekli hatasını yok etmek kontrolöre integratör eklenmiştir. Kontrolörün sıfırları –aynı zamanda indirgenmiş sistemin kutupları–

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 + K'\tau r^\alpha & k_1 &= (1+r^{\frac{1}{3}}+r^{\frac{2}{3}})(1+K'\tau r^{\frac{2\alpha}{3}})\omega_l r^{\frac{1+\alpha}{6}} \\ k_2 &= (1+K'\tau r^{\frac{\alpha}{3}})(\omega_h + \omega_h r^{\frac{1}{3}} + \omega_l r^{\frac{2}{3}})\omega_l r^{\frac{\alpha}{3}} & k_3 &= (1+K'\tau)\omega_l^2 \omega_h r^{\frac{1+\alpha}{2}} \\ p &= \frac{3\frac{k_2}{k_0} - (\frac{k_1}{k_0})^2}{9} & q &= \frac{2(\frac{k_1}{k_0})^3 - \frac{9k_1 k_2}{k_0^2} + 27\frac{k_3}{k_0}}{54} \end{aligned} \quad (5.24)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} p_1 &= 2(-p)^{0.5} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}) - 0\frac{2\pi}{3}) - \frac{k_1}{3k_0} \\ p_2 &= 2(-p)^{0.5} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}) - 1\frac{2\pi}{3}) - \frac{k_1}{3k_0} \\ p_3 &= 2(-p)^{0.5} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}) - 2\frac{2\pi}{3}) - \frac{k_1}{3k_0} \end{aligned} \quad (5.25)$$

kontrolörün kutupları –aynı zamanda indirgenmiş sistemin sıfırları–

$$\begin{aligned}
k_1 &= (1 + r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{3}}) \omega_l r^{\frac{1+\alpha}{6}} & k_2 &= (\omega_h + \omega_h r^{\frac{1}{3}} + \omega_l r^{\frac{2}{3}}) \omega_l r^{\frac{\alpha}{3}} \\
k_3 &= \omega_l^2 \omega_h r^{\frac{1+\alpha}{2}} \\
p &= \frac{3k_2 - k_1^2}{9} & q &= \frac{2k_1^3 - 9k_1 k_2 + 27k_3}{54}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 0 \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3} \\
z_2 &= 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 1 \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3} \\
z_3 &= 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 2 \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olarak elde edilir.

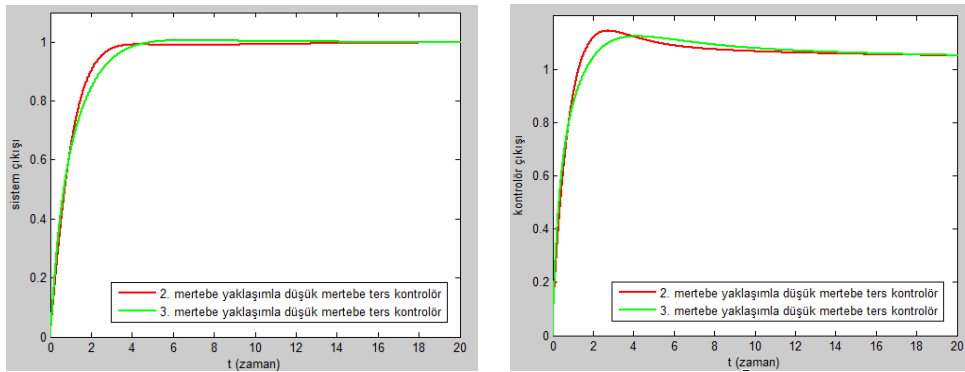
*Örnek 5.1:*

Bu örnekte kullanılacak (3.20)'deki KTK modelin (3.22)'de 11. mertebe tam sayı açılımı gösterilmiştir. Ayrıca bölüm 3'te 11. mertebe model ile bu modele karşı düşen, çalışmamızda kullanılacak olan düşük mertebe 2. ve 3. mertebe modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.6'da verilmiştir ve aralarındaki karesel farkların toplamı belirtilmiştir. Bu örnekte (5.15-5.18) ve (5.19-5.25) denklemleri yardımıyla düşük mertebe ters kontrolör tasarlanmıştır. Elde edilen kontrolörler aşağıdaki gibidir:

$$C_{2.mertebe}(s) = \frac{(s + 0.129415)(s + 18.1288)}{0.073265s(s + 0.177828)(s + 177.828)} \tag{5.28a}$$

$$C_{3.mertebe}(s) = \frac{(s + 0.0286649)(s + 1.59289)(s + 51.3828)}{0.073265s(s + 0.0316228)(s + 3.16228)(s + 316.228)} \tag{5.28b}$$

Sistem bu kontrolörler ile kontrol edildiğinde birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.4'te verilmiştir.



**Şekil 5.4:** (3.20)'deki modelin düşük mertebe ters kontrolörle a) birim basamak cevabı b) kontrol işareti.

### 5.3.2 $1 \leq \alpha < 2$ bölgesi için ters kontrolör tasarımı

#### 5.3.2.1 Kesirli türeve 1. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı

Model, parametrik olarak  $r = \omega_h / \omega_l$  olmak üzere

$$\frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \approx \frac{K(s + \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}})}{s^2 K' \tau r^{\alpha-1} + s(1 + K' \tau \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}}) + \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (5.29)$$

biçiminde elde edilir. Sistemin kutup sıfır gösterimi

$$G_{rep3}(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (5.30)$$

İndirgenmiş sistemin ( $G_{rep1}(s)$ ) tersine dayanan kontrolör temel yapısı aşağıdaki şekildedir:

$$C_3(s) = \frac{(s + p_1)(s + p_2)}{Ks(s + z_1)} \quad (5.31)$$

Sürekli hatasını yok etmek için kontrolöre bir integratör eklemiştir.  $K_a$  ise kontrolörün kazancını belirtir. Kontrolörün sıfır ve kutupları -sırasıyla indirgenmiş sistemin kutup ve sıfırlarına karşılık düşer-

$$p_{1,2} = \frac{-(1 + K' \tau \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}}) \pm \sqrt{(1 + K' \tau \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}})^2 - 4K' \tau r^{\alpha-1} \omega_l r^{\frac{\alpha}{2}}}}{2K' \tau r^{\alpha-1}} \quad (5.32a)$$

$$z_1 = -\omega_l r^{\frac{\alpha}{2}} \quad (5.32b)$$

parametrik olarak elde edilir.

#### 5.3.2.2 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşım ile ters kontrolör tasarımı

Model, parametrik olarak  $r = \omega_h / \omega_l$  olmak üzere

$$\frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \approx \frac{K \omega_h (s + \omega_l r^{\frac{\alpha}{4}})(s + \omega_l r^{\frac{\alpha+2}{4}})}{s^3 K' \tau \omega_l r^\alpha + s^2 (\omega_h + K' \tau \omega_h \omega_l r^{\frac{3\alpha}{4}} + K' \tau \omega_l^2 r^{\frac{3\alpha+2}{4}}) + s \omega_h \omega_l r^{\frac{\alpha}{4}} (1 + \sqrt{r} + K' \tau \omega_l r^{\frac{\alpha+2}{4}}) + \omega_h \omega_l^2 r^{\frac{\alpha+1}{2}}} \quad (5.33)$$

biçiminde elde edilir. Sistemin kutup sıfır gösterimi

$$G_{rep4}(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (5.34)$$

İndirgenmiş sistemin( $G_{rep1}(s)$ ) tersine dayanan kontrolör temel yapısı aşağıdaki şekildedir:

$$C_4(s) = \frac{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}{Ks(s+z_1)(s+z_2)} \quad (5.35)$$

Sürekli hatasını yok etmek için kontrolöre bir integratör eklemiştir.  $K_a$  ise kontrolörün kazancını belirtir. Kontrolörün kutupları -indirgenmiş sistemin sıfırlarına karşılık düşer-

$$z_1 = -\omega_l r^{\frac{\alpha}{4}} \quad (5.36a)$$

$$z_2 = -\omega_l r^{\frac{\alpha+2}{4}} \quad (5.36b)$$

biçiminde parametrik olarak elde edilir. Kontrolörün kutupları –indirgenmiş sistemin kutupları- üç tanedir. Kutupların 2 farklı kombinasyonu olabilir: Üçünün gerçel olması durumu ve ikisinin karmaşık eşlenik, birinin gerçel olması durumu. Bu iki durum, kök eğrisinde kopma noktalarını veren

$$\frac{d(sO(s^{\alpha-1}))}{ds} = 0 \quad (5.37)$$

denkleminin çözümünden gelen ya dört gerçel kök( $x_1, x_2, x_3, x_4$  ve  $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$  olsun) ya da iki gerçel kök ( $x_5, x_6$  ve  $x_5 > x_6$  olsun) ile ayrılabilir. Kök eğrisinin bu konumlarında iki kök çakışık hale gelecektir. Kökler gerçel ise karmaşık eşlenik hale, karmaşık eşlenik ise gerçel hale dönüşecektir.

Model için dört farklı kopma noktası varsa  $[-\infty, x_4]$ ,  $[x_3, x_2]$  ve  $[x_1, 0]$  aralığında kök varsa kontrolörün sıfırları,

$$\begin{aligned} k_0 &= K' \tau \omega_l r^{\alpha} & k_1 &= \omega_h + K' \tau \omega_h \omega_l r^{\frac{3\alpha}{4}} + K' \tau \omega_l^2 r^{\frac{3\alpha+2}{4}} \\ k_2 &= \omega_h \omega_l r^{\frac{\alpha}{4}} (1 + \sqrt{r} + K' \tau \omega_l r^{\frac{\alpha+2}{4}}) & k_3 &= \omega_h \omega_l^2 r^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ p &= \frac{3 \frac{k_2}{k_0} - (\frac{k_1}{k_0})^2}{9} & q &= \frac{2(\frac{k_1}{k_0})^3 - \frac{9k_1 k_2}{k_0^2} + 27 \frac{k_3}{k_0}}{54} \end{aligned} \quad (5.38)$$

olmak üzere

$$p_1 = 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 0\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3k_0} \quad (5.39a)$$

$$p_2 = 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 1\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3k_0} \quad (5.39b)$$

$$p_3 = 2(-p)^{0.5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q}{p}(-p)^{-0.5}\right) - 2\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{k_1}{3k_0} \quad (5.39c)$$

elde edilir. Aksi takdirde, köklerin gerçel kısmı  $[x_1, x_2]$  ve  $[x_3, x_4]$  aralığında ise, karmaşık eşlenik köklere sahiptir. Bu durumda (4.32)'de tanımlanan  $p$  ve  $q$  değişkenleri,  $p > 0$  olduğu durumda kontrolörün sıfırları,

$$p_1 = -2p^{0.5} \sinh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{q}{p} p^{-0.5}\right)\right) - \frac{k_1}{3} \quad (5.40a)$$

$$p_{2,3} = k_1 - p_1 \pm \sqrt{\frac{k_3}{p_1} - (k_1 - p_1)^2} \quad (5.40b)$$

$p < 0$  ve  $p^3 + q^2 > 0$  olduğu durumda kontrolör sıfırları,

$$p_1 = -2\frac{|q|}{q}(-p)^{0.5} \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{-|q|}{p}(-p)^{-0.5}\right)\right) - \frac{k_1}{3} \quad (5.41a)$$

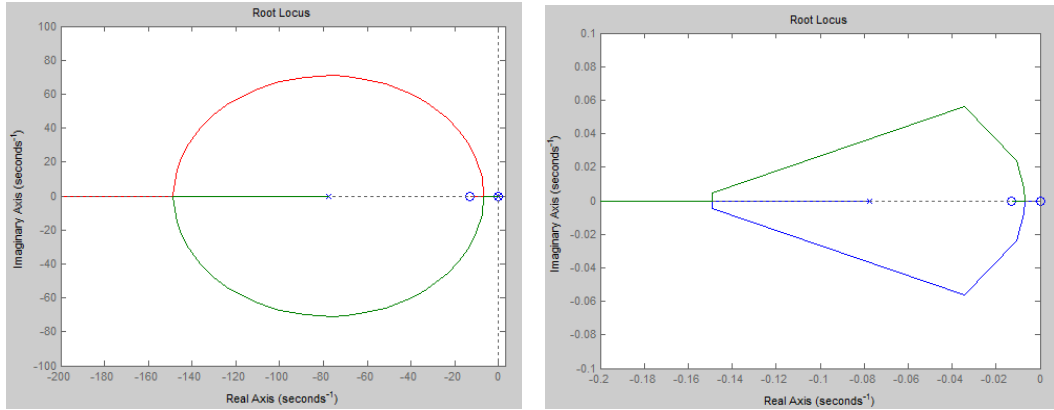
$$p_{2,3} = k_1 - p_1 \pm \sqrt{\frac{k_3}{p_1} - (k_1 - p_1)^2} \quad (5.41b)$$

Model için iki kopma noktası varsa  $[-\infty, x_6]$  ve  $[x_5, 0]$  bölgesinde kök varsa köklerin hepsi gerçeldir ve kontrolörün sıfırları (5.38, 5.39) denklemleri yardımıyla parametrik olarak elde edilebilir.  $[x_5, x_6]$  bölgesinde kök varsa köklerin ikisi karmaşık eşlenik, biri gerçeldir ve kontrolörün sıfırları (5.38, 5.40, 5.41) denklemleri yardımıyla parametrik olarak elde edilebilir.

#### Örnek 5.2:

Bu örnekte kullanılacak (3.24)'teki KTK modelin (3.26)'da 11. mertebe tam sayı açılımı gösterilmişti. Ayrıca bölüm 3'te 11. mertebe model ile bu modele karşı düşen, çalışmamızda kullanılacak olan düşük mertebe 2. ve 3. mertebe modellerin birim basamak cevapları Şekil 3.7'de verilmişti ve aralarındaki karesel farkların toplamı belirtilmişti. Bu örnek için Şekil 5.5'te (3.24)'teki modelde türeve 3. mertebe yaklaşımla ( $T=66.371$ ) serbest parametre alınarak çizdirilen kök eğrisi gösterilmiştir. Kök eğrisinde kopma noktaları sırasıyla  $x_1=-0.0067319$ ,  $x_2=-0.149187$ ,  $x_3=-6.703$  ve

$x_4 = -148.546$  idir. Kontrolörün sıfırları ise  $-12.87$ ,  $-0.01395 \pm 0.03124$  idir.  $[x_1, x_2]$  arasında karmaşık sıfırlar olmalıdır sonucuyla tutarlıdır.



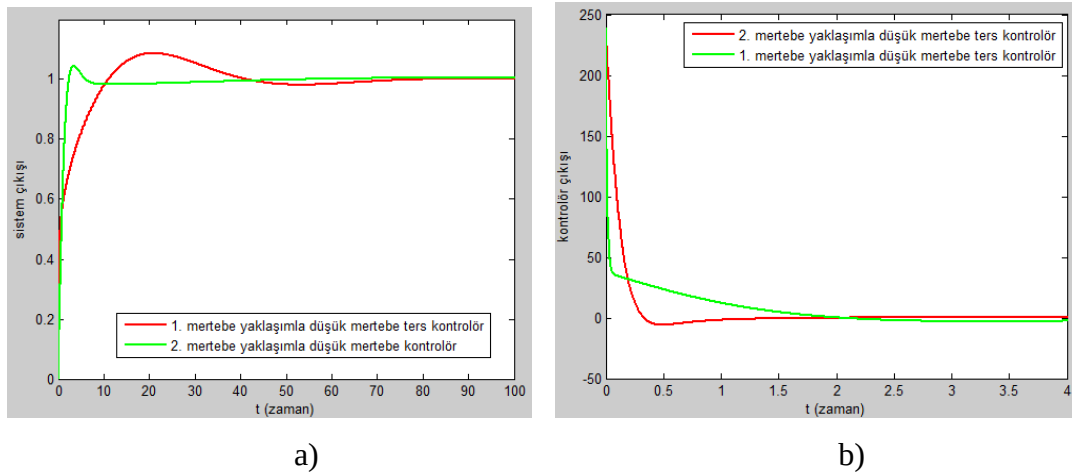
**Şekil 5.5:** (3.24)'teki modelde türeve 2. mertebe yaklaşımla T'ye göre çizdirilen kök eğrisi.

Bu örnekte (5.27-5.30) ve (5.31-5.39) denklemleri yardımıyla düşük mertebe ters kontrolörler tasarlanmıştır. Elde edilen ters kontrolörler aşağıdaki gibidir:

$$C_{1.mertebe}(s) = \frac{s^2 + 0.168459s + 0.0150668}{0.0041808s(s + 6.02559)} \quad (5.42a)$$

$$C_{2.mertebe}(s) = \frac{(s + 12.87)(s^2 + 0.0279s + 0.0011707)}{0.0041808s(s + 77.6247)(s + 0.0776247)} \quad (5.42b)$$

Sistem bu kontrolörler ile kontrol edildiğinde birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.6'da verilmiştir.



**Şekil 5.6:** (3.24)'teki modelin düşük mertebe ters kontrolörle a) birim basamak cevabı b) kontrol işareti.



## 5.4 Kutup-Sıfır İhmalleri ile PID Tasarımı

Bu kontrolör tasarımı önceki bölümlerde verilen parametrik ters kontrolör tasarım yönteminde diğerlerine göre daha baskın olan kutup ve sıfırlar göz önünde bulundurularak yapılır. Bölüm 3'te indirgenen sistem modelleri için kutup-sıfır ihmalleri yapılmış, birim basamak basamak cevapları Şekil 3.8, Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de gösterilmiştir ve gerçek modelle(11. mertebe) aralarındaki karesel farklar Çizelge 3.1, Çizelge 3.2, Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'te verilmiştir.

### 5.4.1 $0 \leq \alpha < 1$ bölgesi için PID kontrolör tasarımı

#### 5.4.1.1 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımla PID kontrolör tasarımı

Mertebe  $0 \leq \alpha < 1$  olan KTK modelinde kesirli türev için 2. mertebe Oustaloup yaklaşıklığı yapıldığında (5.18)'daki transfer fonksiyonu elde edilir ve bu modele karşı düşen düşük mertebe ters kontrolör (5.19)'de verilmiştir. Bu ters kontrolörde kutup sıfırlar arasındaki ilişki  $z_2 > p_2 > z_1 > p_1$  olarak kabul edilsin. Bu durumda  $z_2$  kutbu ihmal edilirse filtreli PID;  $z_2$  kutbu ve  $p_2$  sıfırı ihmal edildiğinde filtreli PI;  $z_2$  ve  $z_1$  kutupları ve  $p_2$  sıfırı ihmal edilirse filtresiz PI elde edilir ve kontrolörlerin katsayıları parametrik olarak elde edilebilir. Bölüm 5.3'te bu kutup ve sıfırlar parametrik olarak elde edildiğinden karışıklığı önlemek amacıyla kontrolörleri katsayıları bu kutup ve sıfırlar cinsinden ifade edilecektir. Böylece filtreli PID kontrolör

$$C_{F\_PID}(s) = \frac{1}{1+Ts} \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) \quad (5.43)$$

biçiminde alındığında  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  ve  $T$  parametreleri

$$K_p = -\frac{p_1 + p_2}{Kz_2z_1}, \quad K_i = \frac{p_1p_2}{Kz_2z_1}, \quad K_d = \frac{1}{Kz_2z_1}, \quad T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.44)$$

kolayca elde edilir. Filtreli PI ise

$$C_{F\_PI}(s) = \frac{1}{1+Ts} \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) \quad (5.45)$$

biçiminde alındığında  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $T$  parametreleri

$$K_p = \frac{p_2}{Kz_2z_1}, \quad K_i = \frac{p_2p_1}{Kz_2z_1}, \quad T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.46)$$

elde edilir. Filtresiz PI ise

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (5.47)$$

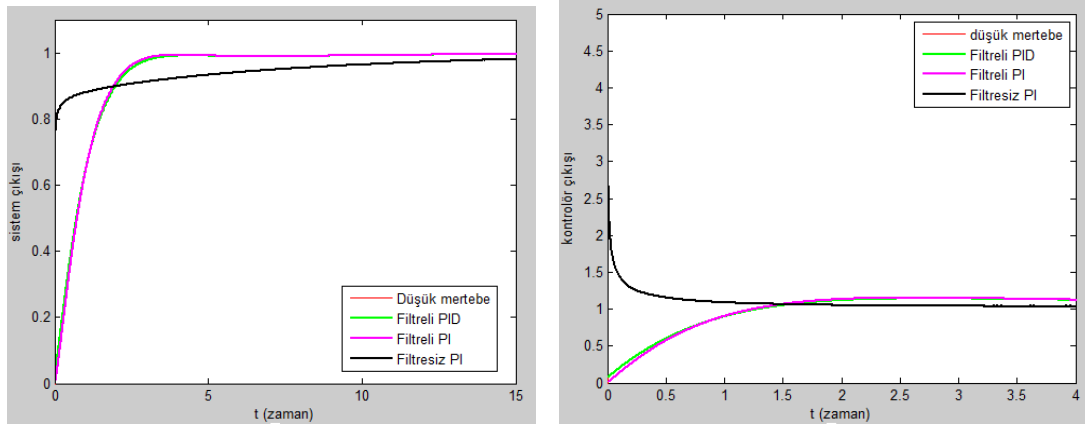
biçiminde alındığında  $K_p$  ve  $K_i$  parametreleri filtreli PI kontrolörün  $K_p$  ve  $K_i$  parametrelerinin aynısıdır.

*Örnek 5.3:*

(3.20)'deki KTK model için kesirli türeve 2. mertebe Oustaloup yaklaşımı yapıldığında elde edilen kontrolör (5.26a)'da verilmiştir. Kutup-sıfırlar gerçel olacağı için teker teker sırasıyla ihmal edildiğinde aşağıdaki kontrolörlere ulaşılır:

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{(s + 0.129415)(s + 18.1288)}{13.0285s(s + 0.177828)} \\ C_2(s) &= \frac{(s + 0.129415)}{0.71866s(s + 0.177828)} \\ C_3(s) &= \frac{(s + 0.129415)}{0.1278s} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Bu kontrolörler sırasıyla filtreli PID, filtreli PI ve filtresiz PI biçimindedir. (3.20)'deki KTK model tasarlanan filtreli PID, filtreli PI ve filtresiz PI ile kontrol edildiğinde birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.7'de verilmiştir.



**Şekil 5.7:** (3.20)'deki kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri.

#### 5.4.1.2 Kesirli türeve 3. mertebe yaklaşımla PID kontrolör tasarımı

Mertebesi  $0 \leq \alpha < 1$  olan KTK modelinde kesirli türev için 2. mertebe Oustaloup yaklaşımlığı yapıldığında (5.22)'deki transfer fonksiyonu elde edilir ve bu modele karşı düşen düşük mertebe ters kontrolör (5.23)'de verilmiştir. Bu ters kontrolörde kutup sıfırlar arasındaki ilişki  $z_3 > p_3 > z_2 > p_2 > z_1 > p_1$  olarak kabul edilsin. Bu durumda

$z_3$  ve  $z_2$  kutupları ve  $p_3$  sıfırı ihmal edilirse filtreli PID;  $z_3$  ve  $z_2$  kutupları ve  $p_3$  ve  $p_2$  sıfırları ihmal edilirse filtreli PI;  $z_3$ ,  $z_2$  ve  $z_1$  kutupları ve  $p_3$  ve  $p_2$  sıfırları ihmal edilirse filtresiz PI elde edilebilir ve kontrolörlerin katsayıları parametrik olarak elde edilebilir. Böylece filtreli PID kontrolör (5.43)'teki yapıda kabul edildiğinde  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  ve  $T$  parametreleri

$$K_p = -\frac{p_3(p_1 + p_2)}{Kz_3z_2z_1}, K_i = \frac{p_3p_2p_1}{Kz_3z_2z_1}, K_d = \frac{p_3}{Kz_3z_2z_1}, T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.49)$$

kolayca elde edilir. Filtreli PI kontrolör (5.45)'teki yapıda kabul edildiğinde  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $T$  parametreleri

$$K_p = \frac{p_3p_2}{Kz_3z_2z_1}, K_i = \frac{p_3p_2p_1}{Kz_3z_2z_1}, T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.50)$$

elde edilir. Filtresiz PI kontrolör ise (5.47)'teki yapıda kabul edildiğinde  $K_p$  ve  $K_i$  parametreleri Filtreli PI kontrolörün  $K_p$  ve  $K_i$  parametrelerinin aynısıdır.

*Örnek 5.4:*

(3.20)'deki KTK model için kesirli türeve 3. mertebe Oustaloup yaklaşımı yapıldığında ise elde edilen ters kontrolör (5.26b)'de verilmiştir. Kutup-sıfırlar gerçel olacağı için teker teker sırasıyla ihmal edildiğinde aşağıdaki kontrolörlere ulaşılır:

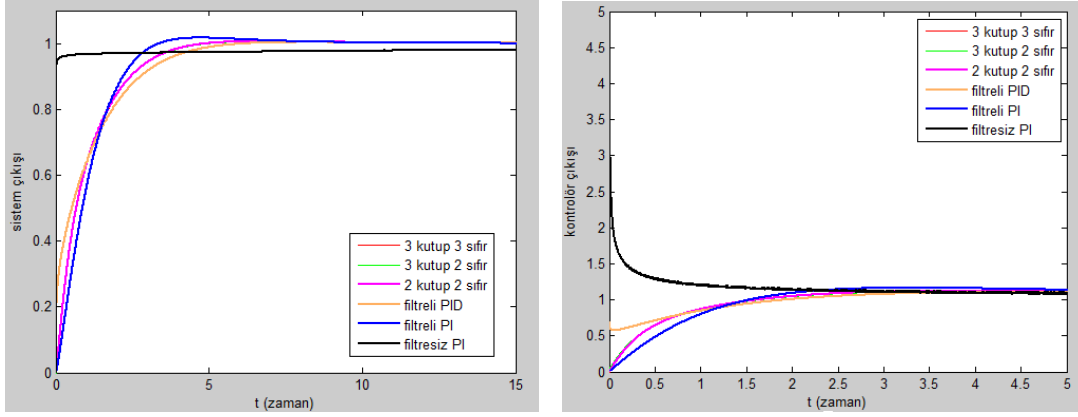
$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{(s + 0.0286649)(s + 1.59289)(s + 51.3828)}{23.1684s(s + 0.0316228)(s + 3.16228)} \\ C_2(s) &= \frac{(s + 0.0286649)(s + 1.59289)}{0.45089s(s + 0.0316228)(s + 3.16228)} \\ C_3(s) &= \frac{(s + 0.0286649)(s + 1.59289)}{1.425868s(s + 0.0316228)} \\ C_4(s) &= \frac{(s + 0.0286649)}{0.89514s(s + 0.0316228)} \\ C_5(s) &= \frac{(s + 0.0286649)}{0.0283s} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Son üç kontrolörden sırasıyla filtreli PID, filtreli PI ve filtresiz PI tasarım yapılabilir. (5.51)'de elde edilen kontrolörler kullanıldığında sistemin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.8'deki gibidir.

#### 5.4.2 $1 \leq \alpha < 2$ bölgesi için PID kontrolör tasarımı

##### 5.4.2.1 Kesirli türeve 1. mertebe yaklaşımla PID kontrolör tasarımı

Mertebe  $1 \leq \alpha < 2$  olan KTK modelinde kesirli türev için 1. mertebe Oustaloup yaklaşıklığı yapıldığında (5.28)'deki transfer fonksiyonu elde edilir ve bu modele karşı düşen düşük mertebe ters kontrolör (5.29)'da verilmiştir. Bu haliyle kontrolör filtreli PID biçimindedir.  $p_1$  ve  $p_2$  karmaşık eşlenik olması durumunda bu kontrolör için



**Şekil 5.8 :** (3.20)'da kesirli türeve 3. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri.

kutup sıfır ihmali yapılamaz; fakat karmaşık eşlenik değilse filtreli PI elde etmek mümkündür. Bu amaçla bu bölgelerin saptanabilmesi (5.35)'teki kopma noktalarını veren denklem çözülmelidir. Bu denklem sonucunda ikinci dereceden denklem elde edilir ve çözümler parametrik olarak bulunabilir. Bu kökler,

$$x_{1,2} = \frac{-\omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{\left(\omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 4\omega_h \omega_l}}{2} \quad (5.52)$$

olarak bulunur.

Eğer  $[x_1, 0]$  bölgesinde kök varsa  $p_1$  ve  $p_2$  gerçeldir. (5.29)'da  $p_1 < p_2 < z_1$  ilişkisi olduğundan  $p_1$  ihmali yapılamaz.  $z_1$  ihmali yapılsa kontrolör gerçekleştirilemez.

Eğer  $[x_2, x_1]$  bölgesinde kök varsa  $p_1$  ve  $p_2$  karmaşık eşleniktir. Kontrolörde kutup sıfır ihmali yapılamaz.

Eğer  $[-\infty, x_2]$  bölgesinde kök varsa  $p_1$  ve  $p_2$  gerçeldir. (5.31)'da  $z_1 < p_1 < p_2$  ilişkisi olduğundan  $p_2$  ihmal edilirse filtreli PI elde edilir. Filtreli PI kontrolör (5.45)'teki yapıda kabul edildiğinde  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $T$  parametreleri

$$K_p = \frac{p_2}{Kz_1}, K_i = \frac{p_2 p_1}{Kz_1}, T = -\frac{1}{z_1} \quad (5.53)$$

olarak bulunur.

*Örnek 5.5:*

(3.24)'teki KTK model için kesirli türeve 1. mertebe Oustaloup yaklaşımı yapıldığında elde edilen ters kontrolör (5.42a)'da verilmiştir. Kopma noktaları -11.9676 ve -0.0835587 idir. Kontrolörün sıfırları da  $-0.0842296 \pm 0.0892872$  idir. (5.42a)'da tasarlanan ters kontrolörde sıfırlar karmaşık eşlenik geldiği için sadece bir kutbu ihmal edildiğinde elde edilen kontrolör aşağıdaki gibidir:

$$C_1(s) = \frac{s^2 + 0.168459s + 0.0150668}{0.0251719s} \quad (5.54)$$

Bu kontrolörün gerçekleştirilmesi için filtre tasarlanması gerekmektedir. Filtre tasarımıyla şimdilik ilgilenmeyeceğiz.

#### 5.4.2.2 Kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımla PID kontrolör tasarımı

Mertebe  $1 \leq \alpha < 2$  olan KTK modelinde kesirli türev için 2. mertebe Oustaloup yaklaşımlığı yapıldığında (5.34)'deki transfer fonksiyonu elde edilir ve bu modele karşı düşen düşük mertebe ters kontrolör (5.35)'de verilmiştir. Kontrolörün kutupları daima gerçeldir, sıfırları ise karmaşık eşlenik gelebileceği için bölgelere ayırmak gereklidir. Bu amaçla bu bölgelerin saptanabilmesi (5.37)'teki kopma noktalarını veren denklem çözülmelidir. Bu denklem sonunda dördüncü dereceden geleceği için kökler parametrik olarak belirlenemez. Buradan itibaren parametrik olarak belirlendiği düşünüp bölgelere ayıracağız.

*Dört tane kopma noktası ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) olduğu durumda*

- $[x_1, 0]$ ,  $[x_2, x_3]$  ve  $[x_4, -\infty]$  arasında gerçel kök varsa kontrolör sıfırlarının tümü gerçeldir. (5.39)'deki parametrik ifade sıfırları büyükten küçüğe sıralı bir şekilde verir. Kontrolörün (5.36b) ve (5.39c)'deki verilen kutup sıfırları ihmal edildiğinde (5.36a), (5.39a) ve (5.39b)'de kalan parametrik kutup ve sıfırlar ile parametrik filtreli PID kontrolör elde edilir. Filtreli PID yapısı (5.43)'teki gibi kabul edildiğinde kutup sıfırlar cinsinden filtreli PID kontrolörün katsayıları ise

$$K_p = \frac{p_3(p_1 + p_2)}{Kz_2z_1}, K_i = -\frac{p_3p_2p_1}{Kz_2z_1}, K_d = -\frac{p_3}{Kz_2z_1}, T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.55)$$

olarak elde edilir. Kontrolörün (5.36b), (5.39b) ve (5.39c)'deki verilen kutup sıfırları ihmal edildiğinde (5.36a) ve (5.39a)'da kalan parametrik kutup ve sıfırlar ile

parametrik filtreli PI kontrolör elde edilir. Filtreli PI yapısı (5.45)'teki gibi kabul edilirse kutup sıfırlar cinsinden filtreli PI kontrolörün katsayıları ise

$$K_p = \frac{p_3 p_2}{K z_2 z_1}, K_i = -\frac{p_3 p_2 p_1}{K z_2 z_1}, T' = -\frac{1}{z_1} \quad (5.56)$$

elde edilir. Kontrolörün (5.36a), (5.36b), (5.39b) ve (5.39c)'deki verilen kutup sıfırları ihmal edildiğinde (5.39a)'da kalan parametrik sıfırı ile parametrik filtresiz PI kontrolör elde edilir. Filtresiz PI yapısı (5.47)'deki gibi kabul edildiğinde kutup ve sıfırlar cinsinden filtresiz PI kontrolörün  $K_p$  ve  $K_i$  parametreleri ise filtreli PI kontrolörün  $K_p$  ve  $K_i$  parametreleri ile aynıdır.

- $[x_1, x_2]$  arasında karmaşık eşlenik kökün gerçel kısmı varsa kontrolörün sadece (5.40a) veya (5.41a)'daki bir sıfırı ve (5.36b)'deki bir kutbu ihmal edildiğinde (5.40b) veya (5.41b)'deki sıfırları ve (5.36a)'daki kutbuyla parametrik filtreli PID elde edilir. Bu kutup ve sıfırlar cinsinden filtrenin PID kontrolörün katsayıları (5.55)'te verilmiştir. Parametrik filtreli PI ve filtresiz PI baskın sıfırların ihmalıyla oluşturulabileceğinden kullanışlı olmayacaktır.

- $[x_3, x_4]$  arasında karmaşık eşlenik kökün gerçel kısmı varsa kontrolörün (5.40b) veya (5.41b)'deki karmaşık eşlenik iki sıfırı ve (5.36b)'deki bir kutbu ihmal edildiğinde (5.40a) veya (5.41a)'daki sıfırı ve (5.36a)'daki kutbuyla parametrik filtreli PI elde edilir. Kalan bu kutup sıfırlar cinsinden filtreli PI kontrolörün katsayıları (5.56)'da verilmiştir. Ek olarak (5.36a)'daki kutup da ihmal edilirse filtresiz PI elde edilir. Kalan bu sıfır cinsinden filtresiz PI kontrolörünün katsayıları filtreli PI kontrolörün  $K_p$  ve  $K_i$  parametrelerine eşittir.

*İki kopma noktası ( $x_5, x_6$ ) olduğu durumda ise*

- $[x_5, 0]$  ve  $[x_6, -\infty]$  bölgesinde kök varsa kontrolörün sıfırlarının hepsi gerçeldir. Dört kopma noktası olduğu durumda kontrolör sıfırların hepsinin gerçel olduğu zamanki kontrolör tasarımları aynı şekilde olur.  $[x_5, x_6]$  bölgesinde kök varsa kontrolörün sıfırları karmaşık eşlenik eşlenik gelecektir. Bu durumda diğer sıfıra baskın olup olmadığına bakılmalıdır.

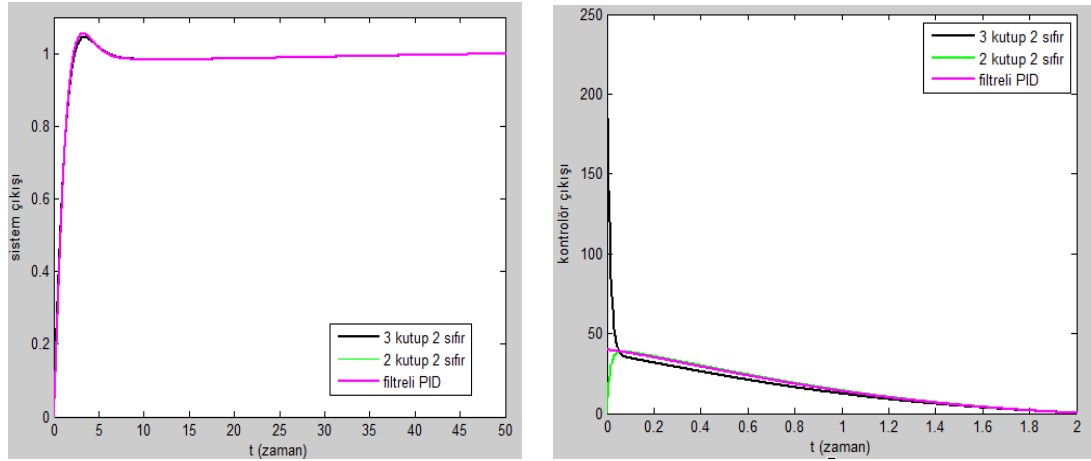
*Örnek 5.6:*

(3.24)'teki KTK model için kesirli türeve 2. mertebe Oustaloup yaklaşımı yapıldığında elde edilen ters kontrolör (5.40b)'de verilmiştir. Karmaşık eşlenik sıfıra

sahip olduğundan dikkatli bir şekilde kutup sıfır ihmali yapıldığında aşağıdaki kontrolörler elde edilir:

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{s^2 + 0.0279s + 0.0011707}{0.00032485s(s + 77.6247)(s + 0.0776247)} \\ C_2(s) &= \frac{s^2 + 0.0279s + 0.0011707}{0.0252s(s + 0.0776247)} \\ C_3(s) &= \frac{s^2 + 0.0279s + 0.0011707}{0.001956s} \end{aligned} \quad (5.57)$$

İkinci kontrolörden filtreli PID tasarımı yapılabilir. Üçüncü kontrolörün gerçekleştirilmesi için filtre tasarımı yapılmalıdır. Kutuplar karmaşık eşlenik olmasaydı filtreli PI ve filtresiz PI tasarımı da yapılabilirdi. (5.50)'de elde edilen ilk iki kontrolörler kullanıldığında sistemin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri Şekil 5.9'daki gibidir.



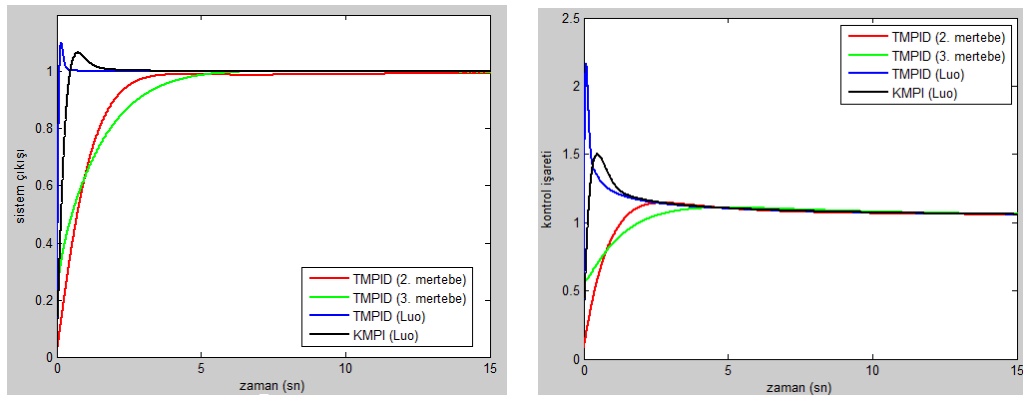
**Şekil 5.9 :** (3.24)'te kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımlı modelin kutup-sıfır ihmalleriyle elde edilen ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri.

### 5.5 Önerilen PID Kontrolörlerin Performans Ölçütleri

Bu bölümde katsayıları ele alınan model yapısının parametreleri cinsinden elde edilen PID kontrolörle bu model için [19] makalesinde önerilen KMPI ve TMPID kontrolörlerin performans ölçütleri değerlendirilecektir. Bunun için mertebesi  $0 < \alpha < 1$  arasında olan KTK modeli ele alınacaktır. Makalede verilen kontrolörler ve bu tezde önerdiğimiz kontrolörler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
C_{Luo\_TMPID}(s) &= 0.1072 + \frac{56.0224}{s} + \frac{0.0915s}{0.314s+1} \\
C_{Luo\_KMPI}(s) &= 0.225 + \frac{8.6973}{s^{1.0317}} \\
C_{2.mertebe\_TMPID}(s) &= \frac{(s+0.129415)(s+18.1288)}{13.0285s(s+0.177828)} \\
C_{3.mertebe\_TMPID}(s) &= \frac{(s+0.0286649)(s+1.59289)}{1.425868s(s+0.0316228)}
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C_{Luo\_TMPID}(s) \\ C_{Luo\_KMPI}(s) \\ C_{2.mertebe\_TMPID}(s) \\ C_{3.mertebe\_TMPID}(s) \end{aligned}} \right\} \text{önerilen kontrolörler}
\tag{5.58}$$

(5.58)'de verilen ilk iki kontrolör [19] makalesinde önerilen TMPID ve KMPI kontrolörler, son ikisi bu çalışmada düşük mertebedeki (2. ve 3.) kontrolörlerde kutup-sıfır ihmalleriyle elde ettiğimiz kontrolörlerdir. Şekil 5.10'da bu kontrolörle sistem cevapları ve kontrol işaretleri verilmiştir. Çizelge 5.1'de bu kontrolörlerin performans ölçütleri sunulmuştur.



**Şekil 5.10:** (5.58)'deki kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri.

**Çizelge 5.1:** Önerilen PID kontrolörlerin performans ölçütleri.

|                       | Aşım(%) | Yükselme Z. (sn) | Yerleşme Z. (sn) | ISE     | TV      |
|-----------------------|---------|------------------|------------------|---------|---------|
| <b>TMPID (Luo)</b>    | 10.204  | 0.0721           | 0.3099           | 0.02526 | 0.04774 |
| <b>KMPI (Luo)</b>     | 1.3432  | 0.3384           | 1.3432           | 0.1078  | 0.0282  |
| <b>TMPID (2.mer.)</b> | 0       | 1.8597           | 3.0911           | 0.501   | 0.01822 |
| <b>TMPID (3.mer.)</b> | 0.4687  | 2.7567           | 4.5076           | 0.3893  | 0.01712 |



## 6. ÇİFT TANK SIVI SEVİYE SİSTEMİ ÜZERİNDE UYGULAMA

Çalışmamızda kesirli mertebe tek kutuplu sistem modeli için bir önceki bölümde tam sayı mertebe filtreli PID kontrolör tasarımı yöntemi önerdik. Bu yöntemin avantajı filtreli PID kontrolörün katsayıları kesirli mertebe tek kutuplu modelin parametrelerine bağlılığıdır. Kesirli mertebe sistemler için önerilen kesirli mertebe kontrolörler gerçekleştirirken yüksek tam sayı mertebe kontrolörler kullanılır. Buradan hareketle yüksek mertebe tam sayı kontrolörleri düşük mertebe şeklinde ifade edebilen kesirli mertebe kontrolörlerin avantajlarını koruyan karmaşıklığını azaltan filtreli PID kontrolör tasarımı önerilmiştir.

Tasarım yöntemimizin uygulanabilirliğini sınamak için çift tank deney düzeneği üzerinde çalışılmıştır. Çift tank deney düzeneğinin özellikleri şu şekilde ifade edilebilir: Düzenekte 50 cm boyunda iki tank vardır ve bu iki tank arasındaki sıvı geçişi üç vana ile sağlanmaktadır. Sıvı girişi ve çıkışı soldaki tanktan olmaktadır. Sıvı çıkışı iki vana yardımıyla, sıvı girişi ise oransal vana yardımıyla olmaktadır. Sisteme giren sıvının debisi oransal vana konumuna bağlı olarak değişmektedir. Oransal vananın konumu ise PLC'den gelen sayısal bilgi PLC'nin analog çıkış modülü yardımıyla elektropnömatik regülatör üzerinden 4-20 mA arasında akım bilgisi 0.7-14 psi arasında basınç bilgisine çevrilerek ayarlanmaktadır. Tanktaki sıvı seviyesi bilgisi ise basınç sensörü (çıkışı 1-5 V arasında) yardımıyla PLC'nin analog giriş modülü yardımıyla PLC'ye aktarılmaktadır. Sistem iki basınç sensörünün yerine bir basınç sensörü ve tank seçici kullanılmıştır. Tank seçici elemanı ile hangi tankta sıvı seviye ölçümü yapılacağını seçilir. Ayrıca elektropnömatik regülatör ve basınç sensörünün kullanılabilmesi için kompresör, Depodaki sıvının yukarı çıkabilmesi için pompa kullanılmıştır. Kontrolör olarak da Allen-Bradley marka PLC'lerden yararlanılmıştır. Bu çift tank deney düzeneği Şekil 6.1'de verilmiştir.

Kontrolör tasarımı ve sistem modelinin düzgün bir şekilde çıkarılabilmesi için PLC'de okunan sayısal değerler ile sistem için anlamlı olan bilgiler (debi( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) ve yükseklik(cm)) arasında ölçekleme yapılması gerekmektedir. Kullanılacak blok

diyagramı Şekil 6.2’de gösterilmiştir. Oransal vana PLC’den gelen sayısal bilgiyi debiye( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) çevirmektedir.

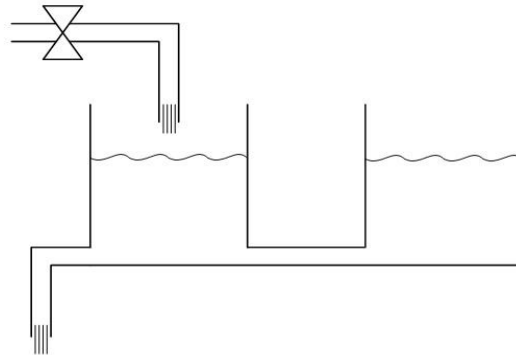


a)



b)

- |                                |                                                                               |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1.Oransal vana                 | 9. Basınç/Akım (0-2 PSI/ 1-5V) dönüştürücüsü                                  |
| 2.Seviye sensörü               | 10. Elektro-pnömatik regülatör (Akım/Basınç (4-20 mA/0.7-14 PSI) dönüştürücü) |
| 3.Tanklar                      | 11. Elektriksel seviye bilgisi (PLC’ye)                                       |
| 4.Tanklar arası geçiş valfleri | 12. Oransal vana konum komutu (PLC’den)                                       |
| 5.Boşatım valfleri             | 13. Kompresör                                                                 |
| 6.Başlat/Durdur butonları      | 14. PLC’nin giriş/çıkış birimi                                                |
| 7.Depo                         | 15. Pompa                                                                     |
| 8. Tank seviye seçicisi        | 16. Şalter                                                                    |

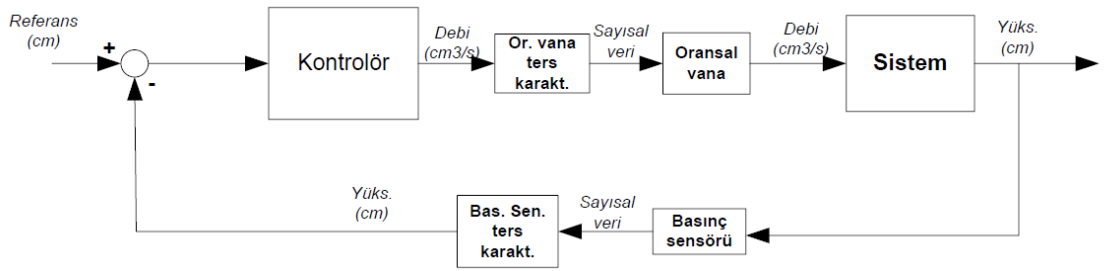


c)

**Şekil 6.1:** Çift tank sıvı seviye sisteminin genel görünümü a) Ön görünüm b) Arka görünüm c) Şema diyagramı.

Kontrolörün çıkışının da debi olması için oransal vananın ters karakteristiği kullanılmış ve oransal vanadan gelen etki yok edilmiştir; fakat oransal vana karakteristiğinin çıkarımı için doğrusal fonksiyon ( $ax+b$ ) uydurulmuştur. Benzer şekilde basınç sensöründen gelen bilgi PLC’de sayısal bilgi olarak görüneceğinden bu bilgi yükseklik(cm) bilgisine çevrilmektedir. Doğrusal olarak elde basınç sensörü karakteristiğinin tersinin alınmasıyla hem etkisi yok edilmiş olur, hem de sayısal bilgi yükseklik bilgisine dönüştürülmüş olur.

Deney düzeneğindeki fiziksel elemanların yapısı gereği sistemde doğrusal olmayan etkiler fazladır. Oransal vananın konumunun alt ve üst sınırlarının olması, oransal vananın doğrusal olduğu bölgede yaklaşık doğrusal olması, oransal vananın bulunduğu önceki konuma bağlı olarak debi vermesi, sistem vananın oluşturacağı dirençlerin sıvı seviyesine bağlı olması sistemdeki doğrusal olmayan etkilerin temel kaynaklarıdır.



**Şekil 6.2:** Blok diyagramı.

Bu sistemde debi miktarı  $190 \text{ cm}^3/\text{s}$ 'lik debi verilip sistem 13 cm oturmuştur. Sonrasında  $195 \text{ cm}^3/\text{s}$ 'lik debi verilmiş ve sistemden veriler toplanmıştır. Bu elde edilen verilere model uydurulmaya çalışılmıştır. Çalışmamızda

$$G_1(s) = \frac{K}{Ts^\alpha + 1} \quad (6.1a)$$

$$G_2(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (6.1b)$$

$$G_3(s) = \frac{K}{T_2s^2 + T_1s + 1} \quad (6.1c)$$

biçimindeki sırasıyla kesirli mertebe tek kutuplu model, ölü zamanlı birinci mertebe model ve ölü zamansız ikinci mertebe model uydurulmaya çalışılmıştır. Adil bir karşılaştırma yapabilmek için üç serbest parametreye sahip olan kesirli mertebe tek

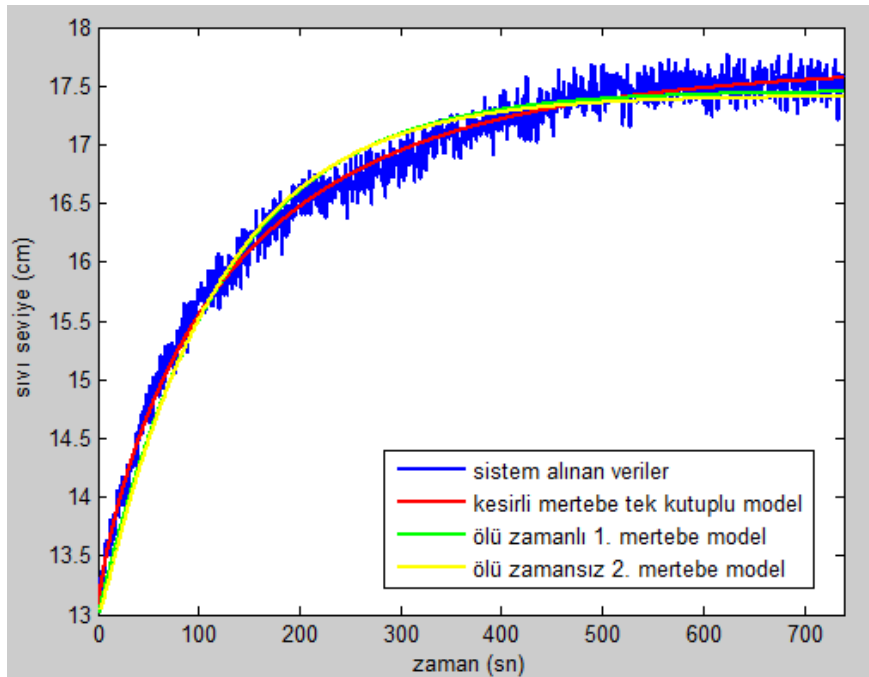
kutuplu sistem modelinin yanında üç serbest parametreye sahip ölü zamanlı birinci mertebe model ve ölü zamansız ikinci mertebe modelleri seçilmiştir. Toplanan verilere model uydurulurken

$$e_{toplam} = \sum_{t=0}^T (y_{model} - y_{veri})^2 \quad (6.2)$$

biçimdeki karesel hata minimum yapılmaya çalışılmıştır. Bunun için Büyük Patlama Büyük Çöküş arama algoritması [28] kullanılmıştır. Aramalar sonucunda elde edilen sistem modellerinin parametreleri ve toplam karesel hatalar Çizelge 6.1’de verilmiştir. Buna göre modelin elde edildiği aralık için en uygun model kesirli mertebe tek kutuplu model olduğu görülmüştür. Elde edilen bu modeller ve sistemin basamak yanıtı Şekil 6.3’te gösterilmiştir.

**Çizelge 6.1 : Modellerin katsayıları.**

| Kesirli mertebe tek kutuplu model |         | Ölü zamanlı birinci mertebe model |          | Ölü zamansız ikinci mertebe model |          |
|-----------------------------------|---------|-----------------------------------|----------|-----------------------------------|----------|
| <b>K</b>                          | 1.18314 | <b>K</b>                          | 0.88692  | <b>K</b>                          | 0.87862  |
| <b>T</b>                          | 73.6425 | <b>T</b>                          | 119.5197 | <b>T<sub>1</sub></b>              | 469.6709 |
| <b><math>\alpha</math></b>        | 0.8168  | <b>L</b>                          | 1.57     | <b>T<sub>2</sub></b>              | 118.3888 |
| <b>e<sub>toplam</sub></b>         | 8.7879  | <b>e<sub>toplam</sub></b>         | 20.527   | <b>e<sub>toplam</sub></b>         | 23.42    |



**Şekil 6.3:** Sistem verileri ve model cevapları.

Elde edilen kesirli mertebe tek kutuplu çift tank sıvı seviye sistem modeli

$$G_1(s) = \frac{1.18314}{73.6425s^{0.8168} + 1} \quad (6.3)$$

biçimindedir. Sistem parametrelerine bağlı olarak verilen (5.24)-(5.27) denklemleri yardımıyla sisteme ait kutup ve sıfırlar bulunur. (5.49) denklemlerinde bu kutup ve sıfırlar kullanılarak filtreli PID kontrolör elde edilir.

$$C_{1\_FPID}(s) = \frac{(s + 0.00699035)(s + 0.160465)}{0.0160466s(s + 0.0655843)} = \frac{1}{15.247s + 1} \left( 159.116 + \frac{1.0658}{s} + 950.204s \right) \quad (6.4)$$

Tasarlanan bu kontrolör için tasarıma esneklik katmak adına serbest parametre olarak kontrolöre kazanç eklenmiştir. Başarım ölçütü olarak da toplam hatanın karesi

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (6.5)$$

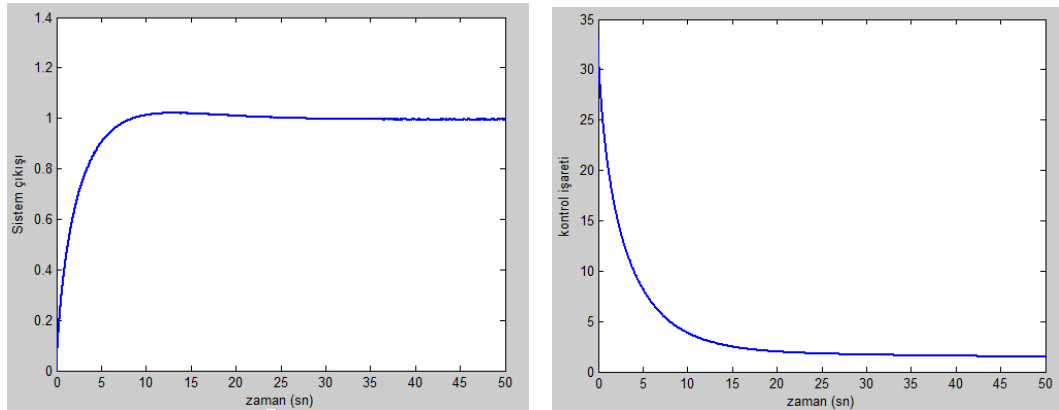
ve kontrol işaretinin toplam değişimi

$$TV = \sum_{i=1}^{\infty} |u_{i+1} - u_i| \quad (6.6)$$

Olmak üzere  $I = \alpha ISE + \beta TV$  seçilmiştir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  ölçekleme çarpanları uygun şekilde seçilerek ISE ve TV başarım ölçütleri aynı seviyede değerlerdirilmiştir. Kontrolörün serbest parametresi Büyük Patlama Büyük Çöküş arama algoritması yardımıyla aratılmıştır. Bu arama sonucu

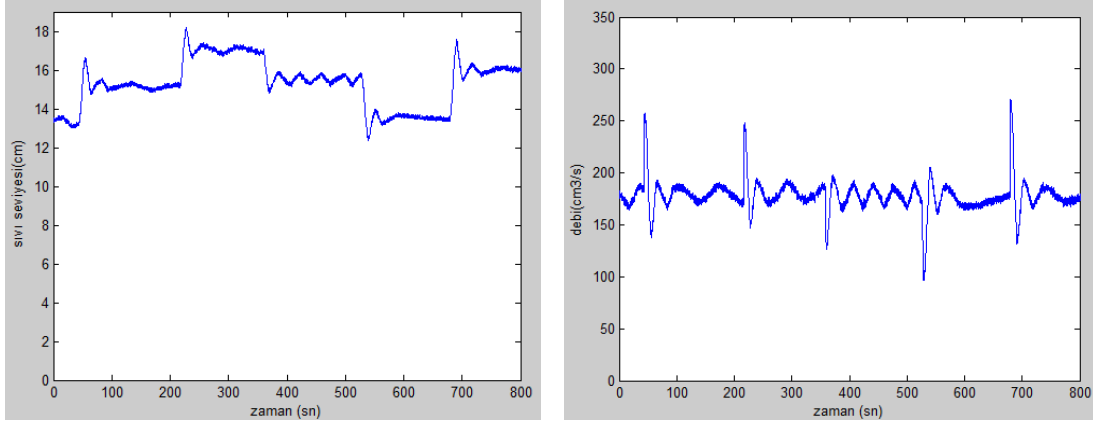
$$C_{1\_FPID}(s) = 32.904 \frac{(s + 0.00699035)(s + 0.160465)}{s(s + 0.0655843)} = \frac{1}{15.247s + 1} \left( 84.0056 + \frac{0.562}{s} + 501.705s \right) \quad (6.7)$$

biçiminde filtreli PID kontrolör elde edilmiştir. Performans ölçütü ISE 0.9354, TV 0.968 olmak üzere 1.9034 olarak elde edilmiştir. Benzetim sonucunda elde edilen birim basamak yanıtı ve kontrol işareti Şekil 6.4'teki gösterilmiştir.



**Şekil 6.4:** Kapalı çevrimli sistemin birim basamak yanıtı ve kontrol işareti.

Elde edilen bu kontrolöre ek olarak dört serbest parametreye sahip filtreli PID ve beş serbest parametreye sahip KMPID kontrolörlerin katsayıları da Büyük Patlama Büyük Çöküş arama algoritmasıyla aratılmıştır ve gerçek sistem üzerine uygulandığında çeşitli basamak işaretleri için önerdiğimiz (6.7)'deki filtreli PID kontrolörüyle sistem cevapları ve kontrol işareti Şekil 6.5'teki gibi olmuştur. Tüm parametreleri aratılan filtreli PID ve KMPID kontrolörler sistemi kararsızlığa sürüklemiştir.



**Şekil 6.5:** Çeşitli basamak işaretleri için sistem cevapları ve kontrol işaretleri.

## 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kesirli mertebe tek kutuplu model olarak adlandırdığımız model yapısı için önce baskın kutup sıfır temelli ters kontrolör tasarımı metodu önerilmiştir. Sonrasında düşük mertebe ters kontrolör tasarımı üzerinden baskın olmayan kutup-sıfırların ihmal edilmesine dayandırılan endüstride sıklıkla kullanılan tam sayı mertebe PID kontrolör için tasarım metodu sunulmuştur. Bu iki tasarım metodunun en avantajlı yanı kontrolör parametrelerinin sistem modeli parametreleri cinsinden elde edilmesidir. Bu önerilen iki tasarım metodunda kesirli mertebe tek kutuplu model, mertebesi  $[0 \ 1]$  ve  $[1 \ 2]$  arasında olmak üzere iki farklı kısma ayrılıp incelenmiştir. Bu kesirli mertebe sistem modelini gerçeklemek için literatürde sıklıkla kullanılan Oustaloup yaklaşımı tercih edilmiştir.

Baskın kutup-sıfır temelli ters kontrolör tasarım metodunda kesirli mertebe tek kutuplu modelin mertebesinin sadece  $[0 \ 1]$  arasında olduğu durum irdelenmiştir. Bu tasarım metodu modeli yansıtan baskın bölgedeki kutup-sıfır çiftleri olduğundan diğer kutup-sıfır çiftleri ihmal edilebilir düşüncesine dayandırılmıştır. Bu amaçla iki ve üç kutup sıfır çiftini bulmaya yönelik parametrik hesaplamalar yapılmıştır. Bu hesaplamalar sistemin sıfırları –ya da ters kontrolörün kutupları- kesirli türevin kutupları olduğundan sıfırların yerleri Oustaloup yaklaşımından, sistem kutupları –ya da ters kontrolörün sıfırlarını- için kök eğrisinde genlik koşulundan rahatça elde edilmiştir. Birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri açılım mertebesinde ters kontrolördekine oldukça yakındır. Böylece tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. İki ve üç baskın kutup-sıfır çiftiyle oluşturulan ters kontrolörlerin birim basamak cevapları ve kontrol işaretleri birbirine oldukça yakın olduğunda işlem yükü açısından iki baskın kutup-sıfır çiftiyle tasarlanan ters kontrolör daha uygundur. Kesirli mertebe tek kutuplu modelin mertebesi  $[1 \ 2]$  arasında ise kökler karmaşık eşlenik gelebileceği için analizlerine bu tasarım metodu için girilmemiştir.

Tam sayı mertebe PID kontrolör tasarım metodunda ele alınan modelin mertebesinin  $[0 \ 1]$  ve  $[1 \ 2]$  arasında olduğu iki durum için de analizler yapılmıştır. Bu tasarım

metodu kullanılan kesirli mertebe sistem modelinin indirgenip baskın olmayan kutupların elenmesine dayandırılmıştır. Kesirli mertebe sistem modelinin indirgenmesindeki amaç, model gerçekleşirken kullanılan yüksek mertebe Oustaloup yaklaşımının düşük mertebe Oustaloup yaklaşımıyla ne kadar ifade edileceğini görmektir. Başka bir deyişle modelin var olan kutup ve sıfırlarını az sayıda kutup-sıfırla ifade edip edemeyeceğimizi görmektir. Mertebesi  $[0 \ 1]$  arasında olan modeller için kesirli türeve 2. ve 3. mertebe yaklaşımına model indirgemesi yapıldığında tatmin edici sonuçlar elde edilmiş, 3. mertebe modelde çok kutup sıfır çifti kullanıldığından sonuçlar daha iyi çıkmıştır. Modelin tüm kökleri gerçel olduğunda PID yapısı rahatça elde edilebilir. Mertebesi  $[1 \ 2]$  arasında olan modeller için kesirli türeve 1. ve 2. mertebe yaklaşımına model indirgemesi yapıldığında kökler karmaşık eşlenik çıkabileceğinden PID yapısı elde etmek için uğraştırıcı analizler gerektirmiştir. Tüm analizler yapıldığında açılım mertebesindeki ters kontrolöre göre sonuçlar kesirli türeve 2. mertebe yaklaşımına tasarım için daha tatmin edici çıkmıştır; fakat 1. mertebe yaklaşımda modelin karmaşık eşlenik geleceği kutupların bölgeleri parametrik olarak belirlenebiliyorken 2. mertebe yaklaşımına gelecek bu bölgeler parametrik olarak belirlenememiştir.

Ayrıca mertebesi  $[0 \ 1]$  arasında olan model örneğinin alındığı makalede önerilen kesirli mertebe PI ve tam sayı mertebe PID kontrolör ile tezde önerilen PID kontrolörlerin performanları kıyaslanmıştır. Yerleşme zamanı ve yükselme zamanı açısından KMPI ve TMPID, tezde önerilen PID kontrolörlere göre daha üstünken aşım ve kontrolörlerin katsayılarının model parametrelerine bağlı olması açısından tezde önerilen kontrolör daha üstündür. Ayrıca kontrolörün kazancı, tasarım parametresi olarak eklenirse yerleşme ve yükselme zamanı daha iyi duruma getirebilir. Bu gelecek çalışmalarda irdelenmesi sağlanabilir. Gelecek çalışmalarına kesirli mertebe tek kutuplu sistem modeline ölü zaman konarak analizler genişletilebilir.

Önerdiğimiz bu tam sayı mertebe PID kontrolör tasarımı, çift tank sıvı seviye sistemi üzerinde uygulanmıştır. Bu amaçla belirli çalışma bölgesinde sistemden elde edilen verilere uygun kesirli mertebe tek kutuplu model uydurulmuştur. Ayrıca tasarıma esneklik katması açısından kontrolöre kazanç parametresi eklenmiştir. Bu tasarım parametresi, hata işaretinin karesi ile kontrol işaretinin toplamı olan başarımlı ölçütüne göre büyük patlama büyük çöküş arama algoritması ile aratılmıştır. Karşılaştırma



olarak dört serbest parametreye sahip tam sayı mertebe filtreli PID ve beş parametrelili kesirli mertebe PID kontrolörleri kullanılmıştır. Katsayılar önerdiğimiz yöntemde serbest parametrenin bulunduğu gibi aynı algoritma aynı başarıml ölçütüne göre aratılmıştır. Dört serbest parametreye sahip tam sayı mertebe filtreli PID ve beş serbest parametrelili kesirli mertebe PID kontrolörleri sistemi kontrol edemezken önerdiğimiz kontrolör sistemi başarılı bir şekilde kontrol etmiştir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Monje, C.A., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Xue, D., Feliu, V.,** (2010). Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications. *Springer London Dordrecht Heidelberg New York*.
- [2] **Manabe, S.,** (1961). The non-integer integral and its application to control systems. *Japanese Institute of Electrical Engineering (JIEE) Journal*, vol. 6 no. 3/4, pp. 83-87.
- [3] **Oustaloup, A.,** (1981). Linear feedback control systems of fractional order between 1 and 2. *Proceedings of the IEEE Symposium on Circuit and System, Chicago, USA*, 4.
- [4] **Oustaloup, A.,** (1995). *LaDerivation Non Entiere. Paris*.
- [5] **Podlubny, I.,** (1999). Fractional Differential Equations, *Academic Press. San Diego, California*.
- [6] **Podlubny, I.,** (1999). Fractional-order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 44 No. 1, pp.208-214.
- [7] **Malek, H., Luo, Y., Chen, Y.Q.,** (2013). Identification and tuning fractional order proportional integral controller for time delayed systems with a fractional pole. *Mechatronics* 23 746-754.
- [8] **Tepljakov, A., Petlenkov, E., Belikov, J., Halas, M.,** (2013). Design and Implementation of Fractional-order PID controllers for a Fluid Tank System. *Proceedings of 2013 American Control Conference, Washington DC, USA, June 17-19*.
- [9] **Ortigueira, M.D.,** (2011). Fractional Calculus for Scientist and Engineers. *Springer Dordrecht Heidelberg London*.
- [10] **Barbosa, R.D., Machoda, J.A.T., Jesus, I.S.,** (2010). Effect of fractional orders in velocity control of a servo systems. *Computers and Mathematics with Applications* 59 1679-1686.
- [11] **Talange, D.B., Joshi, S.D., Gaikwad, S.,** (2013). Control of Autonomous Underwater Vehicle using Fractional Order  $PI^{\lambda}$  Controller. *IEEE International Conference on Control Applications (CCA), Hyderabad, India, August 28-30*.
- [12] **Valerio, D., da Costa, J.S.,** (2011). Introduction to single-input, single- output fractional control. *IET Control Theory and Applications*, Vol. 5, Iss. 8, pp.1033-1057.
- [13] **Ross, B.,** (1975). Fractional Calculus and Its Applications. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 457, *Springer-Verlag, New York*.

- [14] **McBride, A., Roach, G.,** (1985). Fractional Calculus. *Research Notes in Mathematics*, vol. 138, Pitman, Boston-London-Melbourne.
- [15] **Nishimoto, K.,** (1990). Fractional Calculus and Its Applications. *Nihon University, Koriyama*.
- [16] **Podlubny, I.,** (2002). Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation. *An International Journal for Theory and Applications*, Vol. 5 Number 4.
- [17] **Ivanov, B.N.,** (1973). Printsipy sovremennoi fiziki (Principle of Modern Physics). *Nauka, Moscow*.
- [18] **Hawking, S.W.,** (1988). A Brief History of Time. *Bantan Press, London*.
- [19] **Luo, Y., Chen, Y.Q., Wang, C.Y., Pi, Y.G.,** (2010). Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional order systems. *Journal of Process Control* 20 823-831.
- [20] **Tepljakov, A., Petlenkov, E., Belikov, J.,** (2011). FOMCON toolbox. [Online]. Available: <http://www.fomcon.net/>
- [21] **Tavazoei, M.S.,** (2010). Notes on integral performance indices in fractional-order control systems. *Journal of Process Control* 20 285-291.
- [22] **Bettayeb, M., Mansouri, R.,** (2014). Fractional IMC-PID-filter controllers design for non-integer order systems, *Journal of Process Control* 24 261-271.
- [23] **Monje, C.A., Vinagre, B.M., Feliu, V., Chen, Y.Q.,** (2008). Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineerind Practice* 16 798-812.
- [24] **Visioli, A., Padula, F.,** (2011). Tuning rules for optimal PID and fractional order PID controllers. *Journal of Process Control* 21 69-81.
- [25] **Valerio, D., da Costa, J.S.,** (2006). Tuning rules for fractional PID controllers. order PID controllers. *Proceedings of the Second IFAC Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications*.
- [26] **Tepljakov, A., Petlenkov, E., Belikov, J.,** (2014). Gain and Order Scheduled Fractional-order PID Control of Fluid Level in a Multi-Tank System. *IEEE*.
- [27] **Merrikh-Bayat, F., Mirebrahimi, N.,** (2011). Introduction to the Nonlinear  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Control. *IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering*.
- [28] **Erol, O.K., Eksin, İ.,** (2006). A new optimization method: Big Bang Big Crunch. *Advances in Engineering Software*, Vol 37 No 2.

## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad Soyad** : Erhan YUMUK  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Eminönü 14.04.1989  
**E-Posta** : yumuk@itu.edu.tr

### **ÖĞRENİM DURUMU:**

- **Lisans** : 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği
- **Lisans** : 2013, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik- Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** : 2015, İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

