



**KESİRLİ MERTEBEDEN BİR
MATEMATİKSEL MODELİN ÇÖZÜMÜ**

Mustafa Ali DOKUYUCU

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Ercan ÇELİK**

2017

Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN BİR MATEMATİKSEL
MODELİN ÇÖZÜMÜ

Mustafa Ali DOKUYUCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2017

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU



KESİRLİ MERTEBEDEN BİR MATEMATİKSEL MODELİN ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Mustafa Ali DOKUYUCU tarafından hazırlanan bu çalışma 10/11/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak oybirliği/oy çokluğu (5./5.) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Hasan BULUT

İmza

Üye : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza

Üye : Prof. Dr. Yüksel ÖZDEMİR

İmza

Üye : Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

İmza

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 16/11/2017 tarih ve 55/11 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN BİR MATEMATİKSEL MODELİN ÇÖZÜMÜ

Mustafa Ali DOKUYUCU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türev ve integralin kronolojik şekilde tanımları verilmiştir. Ayrıca kesirli türev ve integral konusunun tarihçesi anlatılmıştır.

İkinci bölümde, kuramsal temeller başlığı altında kesirli mertebeden türev ve integral operatörleri ile ilgili tezde kullanılacak tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir. Ayrıca tezde kullanılacak olan Keller-Segel modeli tanıtılmış ve model hakkında gerekli bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Caputo, Riemann-Liouville, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev ve integral operatörleri tanıtılmış ve özellikleri gösterilmiştir. Bunlara ek olarak Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu operatörlerin Laplace dönüşümleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Keller-Segel modelini her bir operatöre entegre ederek varlık ve teklik çözümleri incelenmiştir. Farklı nümerik çözümler kullanılarak sistemin bağdaşık çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bağdaşık çözümler için Mathematica programı yardımıyla detaylı analizler ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

2017, 81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli türev, Varlık-Teklik, Keller-Segel Modeli

ABSTRACT

Doctoral Thesis

A SOLUTION OF FRACTIONAL-ORDER MATHEMATICAL MODEL

Mustafa Ali DOKUYUCU

Atatürk University
Graduate School of Applied Sciences
Department of Mathematics
Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

This thesis consists of five parts. In the first part, definitions of fractional derivative and integral are given in chronological order. Also the history of fractional derivative and integral is explained.

In the second part, the definition, theorem and the lemmas that used in the thesis related to derivative and are given integral operators of fractional order under the heading of the theoretical base. In addition, the Keller-Segel model to be used in the thesis is introduced and necessary information is given about the model.

In the third chapter, Caputo, Riemann-Liouville, Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu fractional derivative and integral operators are introduced and their properties are shown. In addition to these, Laplace transforms of operators Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu are given.

In the fourth chapter, the Keller-Segel model is modified for each operator and the existence and uniqueness solutions are examined. By using different numerical solutions, coupled solutions of the system have been obtained. Detailed analyzes and comparisons are made using Mathematica program for obtained coupled solutions.

The fifth section is devoted to discussion and conclusion.

2017, 81 pages

Keywords: Fractional Derivative, Existence-Uniqueness, Keller-Segel Model

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, doktora eğitimim boyunca ilgi ve alakasını eksik etmeyen ve akademisyenliği ile bana örnek olan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu meşakkatli yolda bütün sıkıntılarıma ortak olan, varlığıyla huzur bulduğum eşime, biricik kızıma ve aileme emeklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Mustafa Ali DOKUYUCU

Kasım, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Gamma Fonksiyonu	7
2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu	11
2.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler	13
2.4. Varlık Teklik	20
2.5. Keller-Segel Modeli	22
2.5.1. Kemotaksis	22
2.5.2. Difüzyon denklemi	25
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	33
3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali.....	33
3.2. Caputo Kesirli Türev ve İntegrali.....	37
3.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegrali	39
3.3.1. Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integrali için Laplace Dönüşümü	46
3.4. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali	47
3.4.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali için Laplace Dönüşümü	49
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	53
4.1. Caputo Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi	53
4.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi.....	58
4.2.1. Keller-Segel modelinin Caputo-Fabrizio kesirli türevi için nümerik çözümü .	67
4.3. Atangana-Baleanu Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi	69
4.3.1. Keller-Segel modelinin Atangana-Baleanu kesirli türevi için nümerik çözümü	72

5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	77
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	82



SİMGELER DİZİNİ

Σ	: Toplam
$\int$	: İntegral
I^α	: α . mertebeden Rimeann-Liouville integrali
$\mathbf{D}^\alpha$	: α . mertebeden Rimeann-Liouville türevi
${}^C D^\alpha$	: α . mertebeden Caputo türevi
${}^{CF} I^\alpha$	: α . mertebeden Caputo-Fabrizio integrali
${}^{CF} D^\alpha$	: α . mertebeden Caputo-Fabrizio türevi
${}^{AB} I^\alpha$	: α . mertebeden Atangana-Baleanu integrali
${}^{ABC} D^\alpha$	: α . mertebeden Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevi
${}^{ABR} D^\alpha$	: α . mertebeden Riemann anlamında Atangana-Baleanu türevi
Γ	: Gamma fonksiyonu
β	: Beta fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{L}$	: Laplace fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Gamma fonksiyonunun grafiği.....	9
Şekil 4.1. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).	68
Şekil 4.2. $a(x, t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).	68
Şekil 4.3. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).	74
Şekil 4.4. $a(x, t)$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).	74
Şekil 4.5. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun sırasıyla Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 1$).	75
Şekil 4.6. $a(x, t)$ fonksiyonunun sırasıyla Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 1$).	76

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun farklı zaman ve yerdeki tam çözümleri, yaklaşık çözümleri ve hatalarının karşılaştırılması.	77
Çizelge 5.2. $a(x, t)$ fonksiyonunun farklı zaman ve yerdeki tam çözümleri, yaklaşık çözümleri ve hatalarının karşılaştırılması.	78
Çizelge 5.3. $\rho(x, t)$ ve $a(x, t)$ fonksiyonlarının farklı iterasyon adımları için hesaplama süreleri	78

1. GİRİŞ

Birçok makale ve teze de konu olan Marquis de L'Hospital (1661-1704)'ın Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)'e yazdığı mektup sayesinde kesirli türevin temelleri atılır. L'hospital Leibniz'e $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2, \dots\}$ inci mertebeden türev için kullanılan n sayısının $n = \frac{1}{2}$ olması halinde nasıl bir durumla karşılaşırız diye sorar. Leibniz'in 30.09.1965 tarihinde bu soruyu cevaplamasıyla kesirli mertebeden türev ifadesi oluşur. Daha sonra birçok makale ve kitapta bu konu üzerinde çalışma yapılmıştır (Podlubyn 1998).

Tam sayılı mertebeden olmayan türev ve integral kavramları tam sayılı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eskiye dayanmasına rağmen, kesirli diferansiyel denklemler teorisi son kırk yılda ivme kazanmıştır. Bu zaman zarfında araştırmacıların yaptığı çalışmalar incelendiğinde teorik matematikten ziyade matematiğin uygulamaları üzerinde durulduğu görülmektedir. 1974 yılında New Haven şehrinde "The First Conference on Fractional Calculus and its Applications" ismi ile düzenlenen konferans kesirli türev konusunun literatürde bir yeri olduğunu göstermektedir. Aynı yıl Oldham ve Spanier (1974) tarafından "Fractional Calculus" kitabı yazılmıştır. Daha sonra kesirli türev üzerine bir çok önemli kitap yazılmıştır. Örneğin, McBride (1979), Nishimoto (1991), Miller and Ross (1993), Kiryakova (1993), Rubin (1996), Davison and C. Essex (1998), Podlubyn (1998), Hilfer (2000), Kilbas *et al.* (2006), Deilthelm (2010) tarafından yazılan kitaplar yol gösterme açısından oldukça önemlidir. Kesirli türev konusunda ilk olarak 1998 yılında "Fractional calculus and applied analysis" dergisi yayınlanmıştır. Türkiye'de de 2007 yılında Sabancı üniversitesinde düzenlenen "Kesirli Basamaktan Sistemler" başlığıyla düzenlenen bir özel oturum ile kesirli türev konusunun ülkemizde de önem kazandığı görülmektedir.

Kesirli türev kavramı bu noktaya gelene kadar birçok ünlü matematikçi tarafından yorumlanmış ve geliştirilmiştir. Aşağıda Euler ile başlayan ve Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Reimann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Miller ve Ross, Caputo ve

Fabrizio, Atangana ve Baleanu'ya kadar uzanan konu ile ilgili tanımlar kronolojik olarak verilmiştir (Dalir and Bashour 2010, Caputo and Fabrizio 2015, Atangana and Baleanu 2015, Atangana 2016):

L. Euler (1730):

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n}, \quad (1.1)$$

özelliğini kullanarak,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad (1.2)$$

eşitliği ile tanımlar.

J. B. J. Fourier (1820-1822):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp,$$

integral eşitliği yardımıyla

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n \frac{\pi}{2}) dp, \quad (1.3)$$

elde eder.

N. H. Abel (1823-1826): Keyfi bir α değeri için

$$\int_0^x \frac{s'(\eta) d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \phi(x),$$

eşitliğini kullanarak,

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \phi(x)}{dx^{-\alpha}}, \quad (1.4)$$

ile tanımlar.

J. Liouville (1832-1855): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$ seri açılımını kullanarak,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}, \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlar.

G. F. B. Riemann (1847-1876):

$$D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \phi(t), \quad (1.6)$$

eşitliği ile tanımlar.

Riemann-Liouville: $n-1 \leq \alpha \leq n$ olmak üzere,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlar.

Grünwald-Letnikov:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (1.8)$$

şeklinde ifade eder.

M. Caputo (1967): $n - 1 \leq \alpha \leq n$ olmak üzere,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad (1.9)$$

ile tanımlar.

K. S. Miller, B. Ross (1993):

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlar.

M. Caputo, M. Fabrizio (2015): $\alpha \in [0,1]$, $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ olmak üzere,

$$\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1 - \alpha)} \int_a^t \dot{f}(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha} \right]} d\tau, \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlar. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme sabiti olup, $M(0) = M(1) = 1$ dir.

J. Losada, J. J. Nieto (2015): $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}^{CF}I^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t u(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (1.12)$$

şeklindedir.

J. Losada, J. J. Nieto (2015): $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi,

$${}^{CF}D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right] f'(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanır.

A. Atangana, D. Baleanu (2015): $\alpha \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ olmak üzere,

$${}^{ABC}D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (1.14)$$

ile tanımlar. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme sabiti olup, $B(0) = B(1) = 1$ dir.

A. Atangana, D. Baleanu (2015): $\alpha \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ olmak üzere,

$${}^{ABR}D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlar. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme sabiti olup, $B(0) = B(1) = 1$ dir.

A. Atangana, D. Baleanu (2015): $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}^{AB}I_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t u(y)(t-y)^{\alpha-1} dy, \quad (1.16)$$

ile tanımlar.

A. Atangana (2016): $f(x, t)$, x veya t yönünde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve $x^{-\alpha} E_\beta \left\{ -\frac{\beta}{1-\beta} x^{\beta+\alpha} \right\}$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ olmak üzere, f fonksiyonunu Atangana-Caputo kısmi diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} {}^{AC}D_x^{\alpha,\beta} f(x, t) = & \frac{A(\beta)}{1-\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial t^n} (x \\ & - \xi)^{-\alpha} f(\tau) E_\beta \left[-\frac{\beta}{1-\beta} (x - \xi)^{\beta+\alpha} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (1.17)$$

şeklinde tanımlar.

A. Atangana (2016): $f(x, t)$, x veya t yönünde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve $x^{-\alpha} E_\beta \left\{ -\frac{\beta}{1-\beta} x^{\beta+\alpha} \right\}$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ olmak üzere, f fonksiyonunu Atangana-Riemann kısmi diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} {}^{AR}D_x^{\alpha,\beta} f(x, t) = & \frac{A(\beta)}{1-\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f(\xi, t) (x \\ & - \xi)^{-\alpha} f E_\beta \left[-\frac{\beta}{1-\beta} (x - \xi)^{\beta+\alpha} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (1.18)$$

ile tanımlar.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Gamma Fonksiyonu

Tanım 2.1.1: Gamma fonksiyonu kesirli diferansiyel hesaplamalarında kullanılan temel bir fonksiyondur. Gamma fonksiyonu $n!$ hesabındaki n sayısını, tamsayı olmayan sayılar hatta karmaşık sayıları da içerecek şekilde genelleştirir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in R, \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. Birçok özelliğinin yanında en önemli özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z), \quad (2.2)$$

eşitliğidir. Bu eşitliğin gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z). \quad (2.3)$$

(2.1) eşitlikten görüleceği üzere $\Gamma(1) = 1$ olup, $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

.

.

.

$$\Gamma(z + 1) = z. \Gamma(z) = z. (z - 1)! = z!$$

elde edilir (Podlubny 1998).

Yukarıda (2.1) denklemi ile verilen gamma fonksiyonu $z > 0$ için yakınsaktır. Bu durumda $a > 0$ olmak üzere her $[a, b]$ sonlu aralığında gamma fonksiyonu ile gösterilen $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ integrali düzgün yakınsaktır. Bilinen bu bilgiler ile birlikte gamma fonksiyonunun diğer özelliklerini de aşağıdaki gibi yazabiliriz:

- 1) $\Gamma[z]$ nin tanım bölgesi $\{z: z > 0\}$ dır.
- 2) $\Gamma[z]$ fonksiyonu $z > 0$ için süreklidir.
- 3) $\Gamma[z]$ için verilen integral, her sonlu $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan $\Gamma[z]$ nin türevide elde edilebilir.

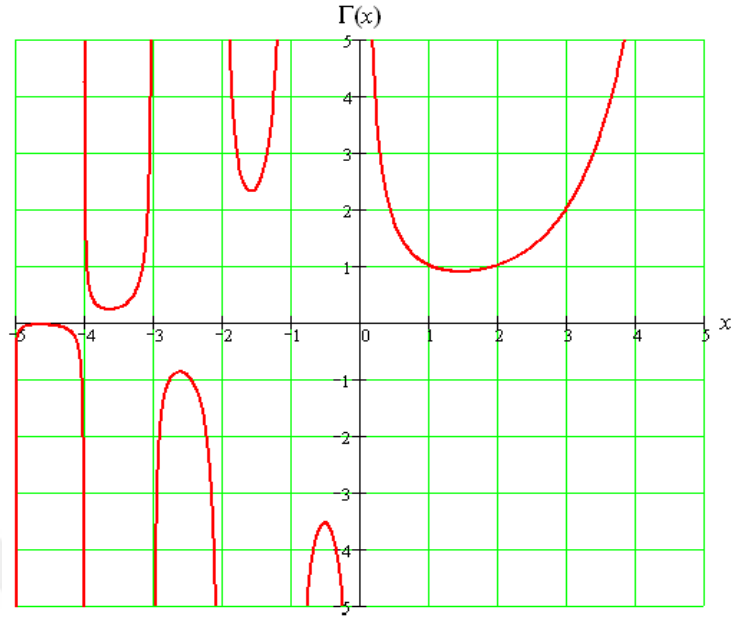
Aynı zamanda $\Gamma[z]$ nin diğer tamsayılı basamaktan türevleride benzer hesaplamalarla bulunabilir. Örneğin,

$$\Gamma'[z] = \int_0^\infty t^{z-1} \ln(t) e^{-t} dt, \quad \Gamma''[z] = \int_0^\infty t^{z-1} [\ln(t)]^2 e^{-t} dt,$$

şeklindedir (Podlubyn 1998).

Genelleştirilmiş Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonun tanımında da ifade edildiği gibi gamma fonksiyonunun tanım kümesi tüm reel eksene genişletilebilir. Gamma fonksiyonunun reel eksenindeki grafiği Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonun grafiği

(2.2) denklemindeki gamma özelliğinden yararlanarak $1 \leq z \leq 2$ için $\Gamma(z)$ nin bilinen değerlerini de göz önünde bulundurarak her $z \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(z)$ elde edilebilir. Bunu negatif z değerleri için düşündüğümüzde, $-1 < z < 0$ olduğunda $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ de $0 < z+1 < 1$ olacağından $\Gamma(z+1)$ değeri bilindiğinden $z \in (-1, 0)$ için $\Gamma(z)$ ler bulunabilir. Bunu genelleştirerek, $-n < z < -n+1$ ise $0 < z+n < 1$ olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}, \quad (2.4)$$

eşitliğini kullanarak gamma fonksiyonunun değerleri hesaplanabilir. Reel eksen düşünüldüğünde gamma fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayı değerleri sonsuzdur. Gerçekten,

$$\Gamma(z) > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{e^z},$$

olup,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^z} \rightarrow \infty,$$

elde edilir. Faktöriyel özelliğini kullanarak,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)\Gamma(z-1) \rightarrow \infty,$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.2: $Re(z) > 0$ olmak üzere gamma fonksiyonu aşağıdaki limit gösterimi,

$$\Gamma(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}, \quad (2.5)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.3: $Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere $\tau = \frac{t}{n}$ kabulü ile

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad (2.6)$$

ile tanımlanan integrale beta fonksiyonu denir.

Gamma fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı kurulmuştur.

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau,$$

olsun. $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun t^{z-1} ile t^{w-1} in konvülasyonu olduğu ve $h_{z,w}(1) = \beta(z, w)$ eşitliğinin olduğu aşikardır.

$h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun Laplace fonksiyonu $H_{z,w}(s)$ olmak üzere,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

bulunur. Diğer yandan,

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} t^{z+w-1},$$

ifadesini ters laplace dönüşümü ile elde edebiliriz. O halde $t = 1$ için,

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

elde edilir. Buradan da $\beta(z, w) = \beta(w, z)$ olduğu açıktır (Podlubny 1998).

2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Tanım 2.2.1: $\mathcal{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $\alpha \in \mathcal{C}$ olmak üzere, 1953 yılında Mittag-Leffler Fonksiyonu Wiman tarafından ilk kez aşağıdaki şekliyle tanımlanmıştır.

$R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$ olmak üzere,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \quad (2.7)$$

iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımlanması α ve β için seçilen özel değerler için bilinen birçok fonksiyonu elde etmemizi sağlar. Örneğin;

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(3+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2},$$

genelleştirilerek,

$$E_{1,n}(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{z^k}{k!} \right\},$$

elde edilir.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları da elde edilebilir. Örneğin,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z},$$

şeklindedir (Podlubny 1998).

Kısmi türevli kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde önemli rol oynayan fonksiyonlardan birisi de Wright fonksiyonudur. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanarak Wright tarafından tanımlanan kısmi türevli dalga denklemini örnek verilebilir. Bunun dışında Agarwal ve Humbert, bu fonksiyonla ilgili birçok kullanışlı özelliği tanıtmıştır. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W(z; \alpha, \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \equiv E_{\alpha}(z). \quad (2.8)$$

2.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.3.1: $f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilen ve $n \geq \alpha \geq n - 1, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere α .mertebeden Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli türevleri,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau, \\ {}_t D_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubyn 1998).

Bilindiği gibi α .mertebeden kesirli türevin anlam ifade edebilmesi için tam sayı olması durumunda sağlanması gerekir. Riemann-Liouville kesirli türevi için α 'nın tamsayı olması durumunda,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^\alpha \quad \text{ve} \quad {}_t D_b^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt} \right)^\alpha,$$

şeklinde ifade edilir. Diğer yandan yapılan fiziksel yorumlar incelendiğinde sürecin şimdiki durumunun gelecekteki durumuyla ilişkili olmadığından sağ türev ihmal edilmiş ve Riemann-Liouville kesirli türevi denildiğinde sol türev dikkate alınmıştır. Özel olarak $n = 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (2.10)$$

şeklinde yazılır. Grünwald-Letnikov türevinin çok işlevsel olmadığı tanımdan kolaylıkla anlaşılmaktadır. Riemann-Liouville kesirli türev tanımının gelişmesinde önemli rol oynasa da uygulamalı matematiğin gelişmesi ve birçok alanda kullanılmasından itibaren kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemleriyle birlikte formülize edilmesi önem kazandı.

Fakat Riemann-Liouville yaklaşımı, $k = 1, 2, \dots, n$ ve b_k katsayılar olmak üzere, $t = a$ alt sınırındaki kesirli türevinin limit değerlerini içeren başlangıç koşullarını kullanmayı gerektirir.

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) = b_2,$$

.

.

.

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) = b_n.$$

Bu şekilde verilen bir başlangıç değer probleminin çözümüne ulaşmak mümkün olsa da fiziksel olarak yorumlamak neredeyse mümkün olmadığından dolayı çok kullanışlı gözükmemektedir.

Bu problemi ortadan kaldırmak için kullanılabilecek en kullanışlı tanımlardan birisi Caputo kesirli türevidir. Kısaca açıklamak gerekirse, Caputo kesirli türevinin tanımına göre sabitin türevi sıfırdır, diğer yandan a alt limitinin sonlu değerlere sahip olması durumunda C sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevinin değeri sıfır'a eşit değil,

$${}_0 D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

ile bulunan değere eşittir. Caputo ilk olarak 1966 ve 1967 yıllarındaki makalelerinde bu soruna çözüm bulmuştur.

Tanım 2.3.2: Caputo kesirli türevi,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir. Şayet α değerini $0 < \alpha < 1$ arasında bir değer alırsak,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau,$$

$\alpha = n, n \in N$ olması durumunda ise,

$$D_\alpha^n f(t) = f^{(n)}(x),$$

eşitliği elde edilir. $n = 0$ değeri için de Caputo kesirli türevi,

$$D_\alpha^0 f(t) = f(x),$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Caputo tanımının neden diğer tanımlardan daha kullanışlı olduğu, kesirli türevin başlangıç koşullarının, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerinin başlangıç koşulları cinsinden ifade edilebilir olması şeklinde yorumlanabilir (Podlubyn 1998).

Fakat tanımda kullanılan $(t - \tau)^\alpha$ çekirdeği $t = \tau$ noktasında tekilliği sağlamadığı için 2015 yılında Caputo ve Fabrizo kesirli türev tanımını aşağıdaki şekilde yeniden tanımlamıştır.

Tanım 2.3.3: Bilindiği üzere Caputo'nun bilinen en geçerli kesirli türev tanımı $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.12)$$

şeklindedir. (2.12) denklemindeki çekirdeğimiz olan $(t-\tau)^{-\alpha}$ yerine $e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ yerine de $\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)}$ yazılırsa,

$$\mathfrak{D}_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f'(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (2.13)$$

denklemini elde edilir. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme sabiti olup $M(0) = M(1) = 1$ dir. Yeni tanımlanan kesirli türevde $f(t)$ sabit iken kesirli türevi sıfır elde ediliyor. Fakat bilinen tanımda $t = \tau$ için bir tekillik elde edilemiyor. Bir diğer önemli durum ise kullanılan uzaylarla ilgili olup f fonksiyonunu $H^1(a, b)$ yerine $L^1(-\infty, b)$ olarak seçilirse,

$$\mathfrak{D}_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (2.14)$$

elde edilir. Son denklemde $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in [0, \infty]$, $\alpha = \frac{1}{1+\sigma} \in [0, 1]$ yazılırsa, son olarak

$$\tilde{\mathfrak{D}}_t^\sigma f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} f'(\tau) e^{\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right]} d\tau, \quad (2.15)$$

bulunur. Burada $\sigma \in [0, \infty]$ and $N(\sigma)$, $M(\alpha)$ 'nın normalleştirme terimidir ve $N(0) = N(\infty) = 1$ dir. Caputo ve Fabrizio (2015) makalesinde gerçekten de yeni ve eski türevler arasında bir uygulama örneği yaptığında $\alpha = 0.66$ için oldukça benzer bir

sonuç elde etse de α sıfıra yaklaştıkça örneğin, $\alpha = 0.1$ için çok daha hızlı bir şekilde kararlı olduğunu söylemiştir. Daha sonra elde edilen bu tanımı Laplace dönüşüm ve Fourier dönüşüm için elde etmiş ve gayet iyi sonuçlar elde etmiştir (Caputo and Fabrizio 2015).

Losada ve Nieto (2.13) denkleminde verilen Caputo ve Fabrizio'nun (2.13) tanımını bir adım daha ileriye taşıyarak aşağıdaki tanımı elde etmişlerdir.

Tanım 2.3.4: Caputo'nun $0 < \alpha < 1$ aralığındaki kesirli türev tanımı

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.16)$$

olup, burada $b > 0, f \in H^1(0, b)$ dir. Çekirdeğimiz olan $(t-\tau)^{-\alpha}$ yerine $e^{(-\frac{\alpha}{1-\alpha}t)}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ yerine de $\frac{1}{\sqrt{(2\pi(1-\alpha^2))}}$ yazılırsa

$${}^{CF} D^\alpha f(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t f'(\tau) e^{[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}]} d\tau, \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada $M(\alpha), \alpha$ bağlı olan normleştirme sabitidir ve $M(0) = M(1) = 1$ dir. Elde edilen iki tanımdan da görüleceği üzere f sabit fonksiyon olduğunda, ${}^{CF} D^\alpha f = 0$ dır. Fakat bu iki tanım arasındaki en önemli fark, $t = \tau$ için eski tanımın aksine yeni tanımda tekillik yoktur. Laplace dönüşümü kullanarak

$$\mathcal{L}[{}^{CF} D^\alpha f(t)](s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))} (s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)), \quad s > 0, \quad (2.18)$$

ifadesi yazılabilir (Caputo and Fabrizio 2015).

Laplace ve ters laplace tanımlarını kullanarak, Losada ve Nieto'nun kesirli integral ve kesirli türev tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.5: $0 < \alpha < 1$ olsun. α . mertebeden f fonksiyonunun kesirli integrali,

$${}^{CF}I^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t u(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (2.19)$$

şeklindedir (Losada and Nieto 2015).

Bu tanımdan yola çıkarak f fonksiyonun birinci mertebeden integrali, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} = 1,$$

dir. Buradan $M(\alpha)$ ifadesi bulunursa,

$$M(\alpha) = \frac{2}{(2-\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

elde edilir. Bu durumda yeni bir Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı yazılabilir.

Tanım 2.3.6: $0 < \alpha < 1$ olmak üzere f fonksiyonunun α . mertebeden kesirli türevi,

$${}^{CF}D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (2.20)$$

dir (Losada and Nieto 2015).

Tanım 2.3.7: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda, kesirli türev,

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (2.21)$$

dir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 2.3.8: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda, kesirli türev,

$${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (2.22)$$

dir (Atangana and Baleanu 2016).

Teorem 2.3.9: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

$${}^{ABC}_0 D_t^\alpha f(t) = {}^{ABR}_0 D_t^\alpha f(t) + H(t), \quad (2.23)$$

dir (Atangana and Baleanu 2016).

İspat: (2.23) eşitliğinde her iki tarafa Laplace dönüşüm uygulanırsa,

$$L\{{}^{ABC}_0 D_t^\alpha f(t)\}(s) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha L\{f(t)\}(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{B(\alpha)}{1-\alpha},$$

elde edilir. Daha sonra,

$$L\{{}^{ABC}_0 D_t^\alpha f(t)\}(s) = L\{{}^{ABR}_0 D_t^\alpha f(t)\}(s) - \frac{s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{B(\alpha)}{1-\alpha},$$

yazılır. Son eşitlikte her iki tarafa ters Laplace uygulanırsa,

$${}^{ABC}_0 D_t^\alpha f(t) = {}^{ABR}_0 D_t^\alpha f(t) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} t^\alpha \right),$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 2.3.10: Lokal olmayan çekirdek ile tanımlanan yeni türev tanımı kesirli integral ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilir. α . mertebeden Atangana-Baleanu kesirli integrali

$${}^{AB}I_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t u(y)(t-y)^{\alpha-1} dy, \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir (Atangana and Baleanu 2016).

Yukarıda yazılan Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev tanımlarının modelimize uyarlanarak varlık ve tekliğini inceleyeceğiz. Bundan dolayı varlık teklik ile ilgili kullanacağımız tanım, lemma ve teoremler aşağıda verilmiştir.

2.4. Varlık Teklik

Tanım 2.4.1: x -ekseninin bir I alt aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardan oluşan bir fonksiyon ailesi $\{f_n(x)\}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için

$$|x - x_0| < \delta$$

olduğunda

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon, \quad \forall n \in N,$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(x_0) > 0$ bulunabiliyorsa, $\{f_n(x)\}$ ailesine *eş-süreklidir* denir (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

Lemma 2.4.2: Her $\epsilon > 0$ için $[0, T]$ üzerinde tanımlı sürekli $x_\epsilon(t)$

$$\begin{aligned}
D^\alpha(x_\epsilon(t) - x_\epsilon(0)) &= f(t, x_\epsilon(t)), & 0 < \alpha < 1, \\
x_\epsilon(0) &= x_0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

başlangıç değeri probleminin çözümü olmak üzere, $0 \leq t \leq T$ için $|f(t, x_\epsilon(t))| \leq M$ koşulu sağlanıyorsa, $\{x_\epsilon(t)\}$ fonksiyon ailesi $0 \leq t \leq T$ üzerinde eş-sürekli. (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

Teorem 2.4.3: $R_0 = [(t, x): 0 \leq t \leq a, |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. Bu durumda, $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.25) deki başlangıç değeri probleminin en az bir çözümü vardır. Burada $\gamma = \min\left(a, \left[\frac{b}{M} \Gamma(\alpha + 1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $0 < \alpha < 1$ dir (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

İspat: $\delta > 0$ olmak üzere $x_0(\epsilon)$, $[-\delta, 0]$ üzerinde $x_\epsilon(t) = x_0(t)$ ve $[0, \gamma_1]$ üzerinde

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\epsilon(s-\epsilon)) ds, \tag{2.26}$$

olacak şekilde bir $x_\epsilon(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $D^\alpha x_\epsilon(t)$ mevcuttur ve γ_1 in seçiminden dolayı

$$\begin{aligned}
|x_\epsilon(t) - x_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\epsilon(s-\epsilon)) ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{M\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq b,
\end{aligned}$$

dir. $\gamma_1 < \gamma$ olması durumunda da (2.25) denklemini kullanılarak $x_\epsilon(t)$ fonksiyonu $\gamma_2 = \min(\gamma, 2\epsilon)$ olmak üzere $[-\delta, \gamma_2]$ üzerinde kesirli mertebeden sürekli türevlenebilir ve $|x_\epsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde genişletilebilir. Bu şekilde devam edilirse, $|x_\epsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayan, $[-\delta, \gamma]$ üzerinde tanımlı

bir $x_\epsilon(t)$ fonksiyon tanımlanabilir. Bu fonksiyon, kesirli mertebeden sürekli türevlere sahip ve aynı aralıkta (2.25) denklemini sağlayan bir fonksiyondur. Aynı zamanda R_0 üzerinde $|f(t, x_\epsilon(t - \epsilon))| \leq M$ olduğundan $|D^\alpha x_0(t)| \leq M$ dir. Bu durumda $\{x_\epsilon(t)\}$ ailesinin eş-sürekli ve düzgün sınırlı fonksiyonların bir ailesi olduğu söylenebilir. Ascoli-Arzela teoremine göre, $n \rightarrow \infty$ halinde $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n$ ve $[-\delta, 0]$ üzerinde $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\epsilon_n}(t)$ olacak şekilde bir $\{\epsilon_n\}$ dizisi mevcuttur. f düzgün sürekli olduğundan, $n \rightarrow \infty$ halinde $\epsilon_n = \epsilon$ ve $\gamma_1 = \gamma$ alınmasıyla (2.25) ün terim terim integre edilmesiyle,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds,$$

elde edilir. Bu da (2.25) başlangıç değer probleminin bir $x(t)$ çözümünün varlığını verir.

Teorem 2.4.4: $R_0 = [(t, x): 0 \leq t \leq a, |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. f, R_0 üzerinde ikinci değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın, yani, her $(t, x_1), (t, x_2) \in R_0$ için

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A|x_1 - x_2|,$$

olacak şekilde $A > 0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda, $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.25) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır. (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

2.5. Keller-Segel Modeli

2.5.1. Kemotaksis

Burada bir varlığın rasgele belirlenmiş hareketi ele alınacaktır. Örneğin, hücreler, bakteri, kimyasallar ve hayvanlar genellikle rasgele hareket etmektedirler. Mikroskobik hareket analizi, birçok bireysel parçacığın düzensiz hareket ettiğini göstermektedir.

Difüzyonun doğada meydana gelen çeşitli taşınım olaylarından biri olduğunu biliyoruz. Reaksiyon-difüzyon sistemleri, maddelerin birbirlerine dönüştüğü lokal kimyasal reaksiyonları etkilemektedir. Maddelerin yüzeye yayılması sayesinde söz konusu sistem difüzyonu da etkilemektedir (Murray 2002).

Birçok böcek ve hayvan türü, aynı türler arasında bilgi aktarmak için koku duyularını kullanmaktadır. Örneğin, dişi ipekböceği güvesi *Bobmyx mori*'de ve birçok derin deniz balığında bu gerçekleşmektedir. Bu türlerin yaydığı kimyasallara *feromon* denilmektedir. Bu da akıllara: Kemotaksis nedir? Sorusunu getirmektedir. "Kemotaksis, dışsal kimyasal derişim alanına tepki olarak bir hücrenin veya bir organizmanın hareketidir" (Höfer 1999).

Keller-Segel modeli, kemotaksisin en yaygın kullanılan modellerinden biridir. Hücresel cıvık mantar *Dictyostelium discoideum*'a odaklanmak üzere geliştirilmiştir. $a(x, t)$ bir harekete neden olan atraktant'ta bulunan gradyanı olarak belirtiriz. Ortaya çıkan hücre akı, $\rho(x, t)$ olan hücre sayısı ile artacaktır. Şu şekilde yazılabilir,

$$J = \rho\chi(a)\nabla a.$$

Burada; J kemotaktik akı olup $\chi(a)$ ise atraktant derişiminin bir fonksiyonudur (Murray 2002). Denklem genel olarak $\rho(x, t)$ için

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } J = f(n),$$

şekilde yazılabilir. Burada; $f(n)$ hücreler için büyüme ifadesini belirtmektedir, toplam akı,

$$J_{tot} = J_{diff} + J_{chem},$$

elde edilir. Burada $J_{diff} = -D\nabla\rho$. Bu nedenle,

$$\rho_t = D\rho_{xx} - (\rho\chi(a)a_x)_x + f(n), \quad (2.27)$$

dir. Burada; D hücrelerin difüzyon katsayısıdır. Denklem (2.27), *Reaksiyon-difüzyon-kemotaksis* denklemi olarak adlandırılmaktadır. $a(x, t)$ kimyasal bir ifade olarak bilinmekte olup $a(x, t)$ genellikle

$$a_t = D_a a_{xx} + g(a, \rho), \quad (2.28)$$

şekilde yazılabilir. Burada: $g(a, \rho)$ kinetik bir ifade olup D_a ise a 'nın difüzyon katsayısıdır. Bu ifade ρ ve a 'ya bağlıdır.

$$\begin{cases} \rho_t = D\rho_{xx} - \chi(\rho a_x)_x \\ a_t = D_a a_{xx} + g(a, \rho). \end{cases} \quad (2.29)$$

Keller-Segel'e göre (Keller and Segel 1971) kinetik ifadeler $g(a, n) = h\rho - ka$ şeklinde olacaktır, burada h, k pozitif sabitlerdir. $h\rho$ amip sayısına (n) oranlı iken, $-ka$ ise atraktant etkinliğinin azaldığını göstermektedir. $f(n) = 0$, amip üretim oranını dikkate almadığımızı ifade eden basit bir modeldir. Kemotaktik bir ifade olan $\chi(a)$, χ sabiti olarak alınabilir. Daha sonra da doğrusal olmayan sistem doğrusal formla $g(a, n) = h\rho - ka$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= D\Delta\rho - \chi \operatorname{div}(\rho\nabla a), \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= D_a\Delta a + h\rho - ka. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Burada; a tüketilen gıda olup, ρ bakteri popülasyonunu ifade etmektedir. Bu da, a ve ρ 'nun Laplace katkısına sahip iken farklı bir işareti olması dolayısıyla difüzyonun sıklıkla stabilize edildiği, kemotaksisin ise sıklıkla destabilize edildiği izlemine vermektedir

(2.30)'da yer alan birinci denklem, hücre dinamiklerini belirtmektedir. Bu denklem, rasgele hücre hareketinin difüzyon akısı modelini, bunun yanı sıra hücre hareketine yönlendirilmiş akı modelini ve kimyasalın derişim gradyanına orantılı olarak hızı belirtmektedir. (2.30)'da yer alan ikinci denklem, doğrusal üretim ve $h, k > 0$ sabit hızlarında dejenerasyon ile kimyasal kinetiğı gösteren bir reaksiyon-difüzyon denklemdir. Sistem (2.30), 'minimal kemotaksis modeli' olarak adlandırılmaktadır. Bu model, çözümün evrensel varlığı ve uzamsal örüntü oluşumu gibi güçlü dinamikleri içermektedir (Horstmann, 2001).

2.5.2. Difüzyon denklemi

Difüzyon, herhangi bir maddenin çok yoğun ortamdan, az yoğun ortama doğru geçme sürecidir. Bu süreç, madde yoğunluğu bölge boyunca eşit hale gelene kadar devam etmektedir. Madde yoğunluğu farkı fazla ise, difüzyon daha hızlı olacaktır. Fiziksel kimyada, bu durum kinetik enerjilerine bağılı olarak moleküllerin rastlantısal hareketleridir. Rastlantısal hareket, başlangıçta Brown tarafından Brown hareketi olarak öne sürülen difüzyonun temel fikirlerinden biridir.

Bir futbol sahasında bulunan havaya rasgele top atan insanlar ile tamamen rastlantısal olan ve çeşitli yönlerde hareket eden topun hareketi, rastlantısal hareket benzetmesi örneğıdir (Wesselingh, 1993).

▪ Difüzyonun matematiksel açıklaması

Difüzyon, bir maddenin molekülünün çok yoğun ortamdan (bireysel ve rastlantısal hareketler yoluyla) az yoğun ortama hareketini kapsamaktadır. Moleküllerin difüzyonu kinetik bir süreç olup, Fick kanunu ile açıklanmaktadır. Difüzyonun göreceli kolaylığı veya zorluğu, difüzyon moleküllerinin karşılaştığı dirence bağılıdır. Moleküllerin derişim gradyanının bir bölgesinden diğerine olan difüzyon hızına 'akı' (J) denilmektedir.

▪ Fick'in Birinci Kanunu

Akı büyüklüğü, düşünülen ortamın iki bölgesi arasındaki derişim gradyanı ile ilgilidir. Akı denklemini derişim farkını esas alarak tekrar yazarsak, Fick'in Birinci Kanunu olarak bilinen denklemi elde ederiz. Bu denklem, iki bölge arasındaki derişim gradyanı 'sıfır' oluncaya kadar devam eder (Flynn, 2002).

$$J = D \frac{dc}{dx}. \quad (2.31)$$

Bu kanun, denge koşullarında geçerlidir. dc/dx derişim gradyanı olup, zamandan bağımsız bir değerdir. İlgili denklemde, D moleküllerin difüzyon katsayısını, C derişimi, x moleküllerin difüzyon yüzeyine paralel olarak kat ettiği mesafeyi gösterir.

▪ Fick'in İkinci Kanunu

Fick'in birinci kanununa göre derişimin mesafe ile değışimi zamandan bağımsız iken, Fick'in ikinci kanununa göre ise, derişim ve akı hem zaman, hem de mesafeye bağlıdır. Bu denklem şöyle tanımlanabilir:

$$\frac{dc}{dx} = - \frac{dJ}{dx}. \quad (2.32)$$

Denklem (2.32)'te ikinci dereceden kısmi diferansiyeli alarak,

$$- \frac{dJ}{dx} = D \frac{d^2c}{dx^2}, \quad (2.33)$$

ayrıca, alınan bu denklemde $-dJ/dx$ ifadesi yerine dc/dt ifadesi yazıldığında,

$$\frac{dc}{dt} = D \frac{d^2c}{dx^2}, \quad (2.34)$$

elde edilir. Bu Fick'in İkinci Kanunu olarak bilinmektedir. Bu denklemde, molekül hareketinin sadece bir yöne doğru olduğu kabul edilir. Difüzyonda, zaman ve mesafe arasındaki derişim farkı, değişim hızı ile orantılıdır (Atkins 1978).

Reaksiyon-difüzyon denklemi, reaksiyon ifadesi ile difüzyon ifadesinden oluşmaktadır, genellikle şu şekilde olmaktadır:

$$\rho_t = D\Delta\rho + a\rho, \quad D > 0. \quad (2.35)$$

Burada: a sabit büyüme oranıdır. Bu denklem, Difüzif-Malthus denklemi olarak adlandırılır. İlk ifade, “*difüzyonu*” difüzyon katsayısı olarak D ile göstermektedir. İkinci ifade, $(a\rho)$ düz bir işlev olup süreçleri gerçekten “*değişim*” olarak mevcut ρ ile göstermektedir.

$\rho(t, x) = u(x)v(x)$ eşitliğini kullandığımızda,

$$Du''(x)v(t) + au(x)v(t) = u(x)v'(t),$$

veya eşdeğer olarak,

$$D \frac{u''}{u} + a = \frac{v''}{v} = D\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

elde edilir. Sınır koşullarını ve Fourier serisini kullanarak,

$$p(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e \left(\left[\frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right] t \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right), \quad (2.36)$$

elde edilir. Burada B_k başlangıç verileri ρ_0 için Fourier katsayısıdır. O halde iki durum söz konusudur;

- Eğer $a < 0$ ise, (2.35) eşitliği asimptotik olarak kararlıdır, çünkü serideki tüm terimler $t \rightarrow +\infty$ kadar hızlı şekilde katlanarak sıfıra ulaşmaktadır
- Eğer $a > 0$ ise, açıkça görüldüğü gibi,

▪

$$L < \pi \sqrt{\frac{D}{a}}, \quad (2.37)$$

ve sonrasında çözüm $p(t, x), t \rightarrow \infty$, olarak sıfıra yaklaşır. (2.37)'deki kritik değerler, *Kritik Yol Boyutu*'nu belirtir. $\frac{D}{a}$ oranı oldukça yüksek ise, difüzyon hâkimdir. Böylece, eğer bir reaksiyon yoksa $a = 0$, bu çözüm asimptotik olarak kararlıdır.

Birden fazla türün rekabet, yıkıcılık, reaksiyon kinetiği ve karşılıklık (diğerlerinin yanında) gibi süreçler yoluyla etkileşimi, değişkenlik gösteren difüzyon sabitlerini gösterir. Bu gibi durumlarda, “reaksiyon-difüzyon sistemi ile modellenme” durumunda olduğu söylenir. Bu sistem daha önce Fisher (Fisher 1937) ve Kolmogorov (Kolmogorov *et al.* 1937), Kessler ve Levine (Kessler and Levine 1998) ve Kawasaki (Kawasaki *et al.* 1997) tarafından incelenmiştir.

▪ Reaksiyon-Difüzyon Denklemi

Reaksiyon-Difüzyon denklemi,

$$\rho_t = D\rho_{xx} + f(t, x, \rho), \quad (2.38)$$

şeklindedir. Burada $f(t, x, \rho)$ doğum/ölüm sürecini belirtmektedir. Genel olarak popülasyon modeli

$$f(\rho) = r\rho \left(1 - \frac{\rho}{N}\right), \quad (2.39)$$

şekilde varsayılmaktadır. Burada, r ve N pozitif sabitlerdir. *Taşıma kapasitesi* N büyümenin sınırı olarak belirtilmektedir. $f(\rho)$, bir popülasyondaki *lojistik büyüme* olarak adlandırılır. Eğer $\rho = N$ ise, sistem kararlıdır. Öte yandan, eğer $\rho = 0$ ise, sistem kararsızdır (Atkins, 1978).

▪ Turing Kararsızlığı

Turing (Turing 1952), kesin olmayan bir durumda, kimyasalların tepki verebileceğini ve difüze edilebileceğini ileri sürmüştür. Bu, kimyasallar veya morfojen derişimlerin sabit-durumlu, heterojen uzamsal formlarının oluşumuyla sonuçlanacaktır. Çoğunlukla kimyasal türler için $a(x, t)$ ve $b(x, t)$ yapılarıyla ilgilidir. Dolayısıyla, eşitlik sistemi

$$\begin{cases} \partial_t a = f_1(a, b) + D_a \Delta a \\ \partial_t b = f_2(a, b) + D_b \Delta b, \end{cases} \quad (2.40)$$

şeklindedir. Burada; f_1 ve f_2 , daima doğrusal olmayan kinetikleri belirtmektedir.

Turing'in kavramı kolay ama düşündürücü olmasının yanı sıra çok önemlidir. Turing bunu, herhangi bir difüzyonun söz konusu olmadığı durumlarda; bir diğer deyişle a ve b 'nin doğrusal olarak sabit bir şekle doğru yol aldığı durumlarda ele almıştır. Bu da, belirli durumlarda gerçekleşir. D_a 'nın D_b 'ye eşit olmaması durumunda, uzamsal tekdüze durumlar difüzyon motiveli kararsızlık ile gelişebilir. Difüzyon genellikle dengeleyici bir prosedür olarak kabul edilir, bu nedenle yukarıdaki kavramın neden derin bir fikir olarak kabul edildiğini belirtir. Aşağıdaki bilgilendirici benzetme, gerçekçi olmasada, difüzyonun nasıl stabilize olduğunu belirlemek için kullanılır. Schnakenberg'in (Schnakenberg 1979) reaksiyonu,

$$\begin{cases} f_1(a, b) = \kappa_1 - \kappa_2 a + \kappa_3 a^2 b \\ f_2(a, b) = \kappa_4 - \kappa_3 a^2 b, \end{cases} \quad (2.41)$$

şeklinde yazılabilir. Burada; κ , pozitif sabit oranı belirtmektedir. a ise $f_1(a, b)$ 'de yer alan $\kappa_3 a^2 b$ ifadesi ile kendiliğinden oluşur. Buda, *reaksiyonlar-difüzyon sistemlerini* gösterir.

Difüzyon yapıları, hayvanları araştırmak için rasyonel bir temel oluşturup istila ve dağılımı da kapsamaktadır. Bu da, popülasyon artışından kaynaklanan difüzyon iddiası söz konusu olduğunda, böcek dağılımının önem arz ettiği konvansiyonel difüzyon yapısının uzantılarından biridir. Bu yapıların birinde, difüzyon katsayısı (a) veya daha doğrusu difüzyon (D)'nun ρ ile artma eğilimi göstereceği şekilde popülasyon büyüklüğüne (n) bağlı olan bir akı (J) bulunmaktadır.

$$(J) = -D(\rho)\nabla\rho, \quad D'(\rho) > 0. \quad (2.42)$$

Bazı hayvan popülasyonlarındaki bireylerin difüzyon akısı için $D(\rho)$, ρ 'ye bağlı olarak artmaktadır. Bu yapıda, difüzyon bireylerin hızlı bir şekilde daha yüksek yoğunluklara ulaşabilmesi için yoğunluğa bağlı olmaktadır. Söz konusu olay, bazı durumlarda deneysel olarak incelenmiştir – örneğin, iki birey arasındaki mesafe git gide azaldıkça difüzyon sonucu mukavemette itici etki artar. Buna ek olarak, böyle bir varsayım hacim doldurma etkisiyle tetiklenebilir: yoğunluk çok yüksek olduğunda, pozitif hacimleri nedeniyle bireyler birbirlerini daha fazla veya daha derin bir şekilde hissederler. Bir dizi yazar, kemotaksis bağlamında doğrusal olmayan difüzyon kullanımı için savunmada bulunmuştur. Bu, kemotaksis ve difüzyon arasında iyi bir denge elde etmek için amaçlanmakta olup, muhtemel bir stabil durum ve kemotaksis prevalansı ile sonuçlanmaktadır. Genellikle, kişi kemotaksis hâkim sistemin bir sonucu olarak patlama etkisi dışında bir örüntü oluşumunu görmek isteyebilir. Darcy kanununun uygulanması, patlama yapmayan (orijinal kütle ne kadar büyük olursa olsun) ve zamanla eşit şekilde çevrelenmiş olan Keller-Segel yapısına bir çözüm üretmek için muhtemel yöntemlerden

biridir. Geniş zamanlar için çözülmesi zor olan örüntülerin oluşmasını önerir. Doğrusal olmayan difüzyon ile ifade edilen Keller-Segel yöntemini bir kez daha düşünersek;

$$D(\rho) = C\rho^{\gamma-1}, \quad \gamma > 1, \quad C > 0, \quad (2.43)$$

büyük yoğunluklar için polinom büyüme özelliğine sahip difüzyona ilişkin genel bir durumu göstermektedir. $div(\rho^{\gamma-1}\nabla\gamma) = \frac{1}{\gamma}\Delta\rho^\gamma$ olduğu için, sabitleri aşağıdaki eşitliği elde etmek için standartlaştırabiliriz,

$$\begin{cases} \rho_t = \Delta\rho^\gamma - div(\rho\nabla c) \\ 0 = \Delta c + \rho \\ \rho(t, 0) = \rho_0(x). \end{cases} \quad (2.44)$$

Yüksek yoğunluklar için daha büyük olan $D(\rho)$ 'den difüzyon etkilerinin başarılı olmasına yardım etmesini, dolayısıyla yoğun agregasyon durumunda yoğunluğu aşağı çekmesi beklenir.

Patlak-Keller-Segel (PKS) modeli, kemotaksis için en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan modeldir. İlk olarak 1953'te Patlak (Patlak 1953), daha sonra Keller tarafından sunulmuş ve 1970 yılında Segel tarafından da tanıtılmıştır (Keller and Segel 1970). Model,

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla(\kappa_1(\rho, a)\rho_x - \kappa_2(\rho, a)\rho a_x) + \kappa_3(\rho, a) \\ a_t = D_a a_{xx} + \kappa_4(\rho, a) - \kappa_5(\rho, a)a, \end{cases} \quad (2.45)$$

şeklindedir. Burada; ρ hücre yoğunluğunu göstermekte olup a kimyasal sinyalin derişimini belirlemektedir. $\kappa_1(\rho, a)$ hücrelerin difüzyonu iken, $\kappa_2(\rho, a)$ kemotaktik hassasiyeti belirtmektedir. $\kappa_3(\rho, a)$ hücre büyümesini gösterirken, $\kappa_4(\rho, a)$ ve $\kappa_5(\rho, a)$ ise kimyasal sinyalin üretimini ve bozunumunu gösteren kinetik fonksiyonlardır. Hillen

ve Painter, bu modelde bazı varyasyon tiplerini tanımlamaktadır. Biz de minimum ve doğrusal olmayan difüzyon modeline odaklanacağız.

Minimal model, evrensel çözümler ile bir dizi ilginç spesifikasyonlara sahiptir. Çözümlerin varlığı ve tekliği, özellikle agregasyon ve bu özelliklerin doğaya bağlılığı ile ilgili sorular ortaya çıkmıştır (Chen 1992).

Minimal model şu şekilde gösterilmektedir:

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla(D\nabla\rho - \chi\rho\nabla a), \\ a_t = \nabla^2 a + \rho - a. \end{cases}$$

Doğrusal olmayan difüzyon modeli şu şekilde gösterilmektedir:

$$\begin{cases} u_t = \nabla(Du^n\nabla u - \chi u\nabla v), \\ v_t = \nabla^2 v + u - v. \end{cases} \quad n > 1$$

Burada; D difüzyon sabiti olup, χ ise kemotaksis duyarlılığıdır (Hillen and Painter 2009).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak tezde kullanılacak olan ve kesirli türeve yön veren Caputo, Riemann-Liouville, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev ve integral operatörleri hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

Öncelikle Riemann-Liouville kesirli integral tanımını verelim. α negatif olmayan bir reel sayı olsun. f , $J = (0, \infty)$ üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon ve bu aralıkta integrallenebilir olsun. Bu durumda, $t > 0$ için, f fonksiyonunu α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır.

n . mertebeden başlangıç koşulları verilen

$$\begin{cases} y^n(t) = f(t) \\ y(c) = y'(c) = \dots y^{n-1}(c) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

diferansiyel denklemi ele alalım. Cauchy fonksiyonu yardımıyla,

$$H(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!},$$

eşitliği (3.2) problemine uygulanırsa, tek çözüm,

$$y(t) = \int_c^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

olarak bulunur. Bu ifade tümevarım yoluyla ispatlanabilir (Podlubyn 1998).

İspat: $n = 1$ için,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(c) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

bulunur. (3.3) eşitliğinden,

$$\int_c^t y'(x) dx = \int_c^t \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(x) dx, \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir. $y(c) = 0$ olduğundan,

$$y(t) = \int_c^t f(x) dx,$$

bulunur. Şimdi, (3.3) denkleminin n için doğru olduğunu varsayarak, $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{cases} y^{(n+1)}(t) = f(t) \\ y(c) = y'(c) = \dots = y^{(n)}(c) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $u(t) = y'(t)$ olsun. $y^{(n+1)}(t) = (y')^{(n)}(t)$ eşitliği kullanılarak (3.6) denklemi,

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = f(t) \\ u(c) = u'(c) = \dots = u^{(n)}(c) = 0, \end{cases}$$

olur. Tümevarım kullanılarak,

$$\int_c^t y'(x)dx = \int_{z=c}^t \left(\int_{h=c}^t \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)dx \right) dz,$$

$$y(t) - y(c) = \int_{x=0}^t \left(\int_{x=0}^t \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)dz \right) dt = \int_c^t \frac{(t-x)^n}{n!} f(x)dx,$$

elde edilir. $y(c) = 0$ olduğundan,

$$y(t) = \int_c^t \frac{(t-x)^n}{n!} f(x)dx, \quad (3.7)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Biliniyor ki (3.2) denkleminde f fonksiyonu y nin n . mertebeden türevidir. Bu durumu, y fonksiyonu, f fonksiyonunun n . mertebeden integrali şeklinde de yorumlanabilir. Yani,

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-x)^{n-1} f(x)dx, \quad (3.8)$$

yazılabilir. Sonuç olarak, (3.8) denkleminde n gördüğümüz yere pozitif bir reel α sayısı yazılırsa Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir.

(3.8) denklemi kullanılarak Riemann-Liouville kesirli türev tanımı da yapılabilir. $m-1 \leq \alpha \leq m$ olmak üzere,

$${}^{RL}D^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right], & m-1 \leq \alpha \leq m \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x), & \alpha = m \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır.

Riemann-Liouville operatörü ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir (Podlubyn 1998).

Lineerlik: Tam sayılı türevlerde olduğu gibi kesirli türev operatörleri de lineerlik özelliğini sağlar (Podlubyn 1998).

$${}^{RL}D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^{RL}D^\alpha f(t) + {}^{RL}D^\alpha g(t).$$

Toplama ve Değişme: $x \in [a, b]$ ve $f(x) \in L_p(a, b)$ olsun.

- $\alpha > 0, \beta > 0$ ise,

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x),$$

- Sol Riemann-Liouville kesirli türevi ters işlem özelliğini sağlar.

$$D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = f(x),$$

- $\alpha > 0, \beta > 0$ ise,

$$D_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(x),$$

- $\alpha \geq 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. $D_{a+}^\alpha f(x)$ ve $D_{a+}^{\alpha+m} f(x)$ var ise,

$$D^m D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^{\alpha+m} f(x),$$

elde edilir.

- $\alpha > 0, n = \llbracket \alpha \rrbracket + 1$ ve $I_{a+}^{n-\alpha} f(t)$, $(n - \alpha)$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali olsun.

a) $1 \leq p < \infty$ ve $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$ ise,

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x),$$

b) $f(t) \in L_1(a, b)$ ve $I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \in AC^n[a, b]$ ise,

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t - a)^{\alpha-j}.$$

Şayet $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise,

$$I_{a+}^n D_{a+}^n f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_{n-\alpha}^{(j)}(a)}{j!} (t - a)^j,$$

elde edilir (Podlubyn 1998).

3.2. Caputo Kesirli Türev ve İntegrali

Teorik matematik için Riemann-Liouville operatörü oldukça kullanışlı olup kesirli türev konusunun gelişmesinde ve ilerlemesinde büyük bir pay sahibidir. Fakat modellemenin günlük hayatta uygulanması arttıkça başlangıç koşulları ile fiziksel durumlara en iyi yaklaşım yapan Caputo olmuştur. Caputo 1967 yılında aşağıdaki tanımı yapmıştır. $n - 1 < \alpha < n$ olmak üzere,

$${}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Caputo tanımının en önemli avantajı tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır.

Caputo operatörünün birkaç önemli özelliği aşağıda yazılmıştır:

Lineerlik:

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu D^\alpha g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t),$$

eşitliği ile ifade edilir (Podlubny 1998).

İspat:

$$\begin{aligned} D^\alpha(\lambda f(t) + \mu D^\alpha g(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \\ &= \lambda \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh) \\ &\quad + \mu \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} g(t-rh) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t), \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde α . mertebeden ($k-1 \leq \alpha < k$) Riemann-Liouville kesirli türevleri için,

$$\begin{aligned}
& D^\alpha(\lambda f(t) + \mu D^\alpha g(t)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} g(\tau) d\tau = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t),
\end{aligned}$$

eşitliği ile lineerlik özelliği gösterilebilir (Podlubny 1998).

Homojenlik: C herhangi bir sabit olmak üzere,

$${}_a^C D_t^\alpha C f(t) = C [{}_a^C D_t^\alpha f(t)],$$

eşitliği ile homojenlik özelliği gösterilebilir (Podlubny 1998).

Birleşme özelliği: $f(t)$ sürekli bir fonksiyon $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha < \beta$ olmak üzere,

$$D_t^\alpha [D_t^{-\beta} f(t)] = D_t^{\alpha-\beta},$$

eşitliği yazılabilir (Podlubny 1998).

3.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegrali

(3.1) bölümünde de söz edildiği gibi Caputo'nun 1967 yılında tanımlamış olduğu kesirli türev tanımındaki çekirdekte $t = \tau$ için tekilliğinin bulunamama problemi vardır. Caputo ve Fabrizio 2015 yılında tanımlamış oldukları yeni tanımı ile bu problemi ortadan kaldırmışlardır. Zamansal ve mekânsal olmak üzere iki farklı değişkeni olan yeni bir tanımlama yapılmıştır. İlk gösterim, zaman değişkenleri üzerinde çalışır; normal kesirli türevin çözümlerinde görünen gerçek güçlerin, formüllerde ve hesaplamalarda bazı basitleştirmelerle tamsayıya dönüşür. Bu çerçevede Laplace

dönüşümünü kullanmak uygundur. İkinci gösterim mekânsal değişkenlerle ilişkilidir, bu nedenle bu yerel olmayan fraksiyonel türev için Fourier dönüşümü ile çalışmak daha kolaydır. Bu yeni yaklaşımın nedeni, klasik viskoelastik materyallerin, termal medyanın, elektromanyetik sistemler vb. davranışlarını tanımlayan bir modelin kullanılması gerekliliğinden kaynaklanmaktadır. Aslında, fraksiyonel türevin asıl tanımı, bu mekanik olgular için özellikle elverişli görünmektedir. Bu etkiler mevcut olmadığında, yeni kesirli türevin kullanılması daha uygun gözükmektedir.

Bilindiği üzere bilinen Caputo kesirli türevi $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}_a D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (3.11)$$

şeklinde dir. Burada $a \in [-\infty, t]$, $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ dır. $(t-\tau)^\alpha$ çekirdeği yerine $e^{\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right]}$ fonksiyonu ve $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ ifadesi yerine ise $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ yazıldığında, yeni kesirli türev tanımı,

$$\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f'(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme sabiti olup $M(0) = M(1) = 1$ dir. Yeni tanımlanan kesirli türevde $f(t)$ sabit iken kesirli türev sıfır elde edilir. Fakat bilinen (3.11) tanımında $t = \tau$ için bir tekillik problemi oluşmaktadır. Bir diğer önemli durum ise kullanılan uzaylarla ilgili olup f fonksiyonunu $H^1(a, b)$ yerine $L^1(-\infty, b)$ olarak seçilirse,

$$\mathfrak{D}_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (3.13)$$

elde edilir. Son denklemde $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in [0, \infty]$, $\alpha = \frac{1}{1+\sigma} \in [0, 1]$ yazılırsa, son olarak

$$\tilde{\mathfrak{D}}_t^\sigma f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} f'(\tau) e^{\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right]} d\tau, \quad (3.14)$$

bulunur. Burada $\sigma \in [0, \infty]$ and $N(\sigma)$, $M(\alpha)$ 'nın normalleştirme terimidir ve $N(0) = N(\infty) = 1$ dır (Caputo and Fabrizio 2015).

Teorem 3.3.1: Caputo-Fabrizio'nun (3.12) tanımını için, eğer $f(t)$ fonksiyonu

$$\tau f^{(s)}(a) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

ise,

$$\mathfrak{D}_t^{(n)} \left(\mathfrak{D}_t^{(a)} f(t) \right) = \mathfrak{D}_t^{(a)} \left(\mathfrak{D}_t^{(n)} f(t) \right),$$

eşitliği elde edilir (Caputo and Fabrizio 2015).

İspat:

$$\mathfrak{D}_t^{(\alpha+n)} f(t) := \mathfrak{D}_t^{(\alpha)} \left(\mathfrak{D}_t^{(n)} f(t) \right),$$

eşitliğini kullanarak,

$$\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} \left(\mathfrak{D}_t^{(1)} f(t) \right) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t \dot{f}(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau,$$

elde edilir. $f'(a) = 0$ kabul edersek,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_t^{(\alpha)} \left(\mathfrak{D}_t^{(1)} f(t) \right) &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t \left(\frac{d}{dt} f(\tau) \right) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[\int_a^t \frac{d}{dt} f(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t f(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[f(\tau) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t f(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_t^{(1)} \left(\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} f(t) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau \right) \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[f(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t f(\tau) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau \right],\end{aligned}$$

elde edilir. $n > 1$ için aynı gösterim kolaylıkla yapılabilir. Burada $M(\alpha) = 1$ kabul edilmiştir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Caputo-Fabrizio kesirli integral tanımı Losada ve Nieto tarafından 2015 yılında yapılmıştır. Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı,

$${}^{CF}D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_a^t f'(s) e^{\left[-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right]} ds, \quad (3.15)$$

şeklindedir. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme sabitidir. Denklemden her iki tarafın Laplace dönüşümü alındığında,

$$L\left[{}^{CF}D_t^{(\alpha)} f(t)\right](s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} (sL[f(t)](s) - f(0)), \quad s > 0$$

eşitliği elde edilir. $0 < \alpha < 1$ aralığındaki türev tanımı aynı aralıkta kesirli integral tanımı yapılmasına imkan tanır. Öncelikle $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}^{CF}D_t^{(\alpha)} f(t) = u(t), \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

eşitliğinde Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L\left[{}^{CF}D_t^{(\alpha)} f(t)\right](s) = L[u(t)](s), \quad s > 0$$

elde edilir. Buradan son eşitlik düzenlenerek,

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)}(sL[f(t)](s) - f(0)) = L[u(t)](s), \quad s > 0$$

eşitliği elde edilir ve gerekli işlemler yapıldığında

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s}f(0) + \frac{2\alpha}{s(2-\alpha)M(\alpha)} L[u(t)](s) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} L[u(t)](s), \quad s > 0$$

ifadesi bulunur. Burada ters Laplace dönüşüm özelliğini kullanarak,

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. Başka bir değişle, $c \in R$ olmak üzere,

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s)ds + c, \quad t \geq 0$$

bulunur. Bu denklem aynı zamanda (3.16) denkleminin çözümüdür. O halde (3.16) eşitliği aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t f'(s) \exp\left[-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right] ds = u(t), \quad t \geq 0$$

ya da benzer olarak,

$$\int_0^t \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}s\right) f'(s) ds = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} e^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right)} u(t), \quad t \geq 0,$$

yazılabilir. Bu eşitlikte f' fonksiyonu yalnız bırakıldığında,

$$f'(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \left(u'(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} u(t) \right), \quad t \geq 0,$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın integrali alındığında,

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} [u(t) - u(0)] + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + f(0), \quad t \geq 0$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki tanım yazılabilir (Losada and Nieto 2015).

Tanım 3.3.2: $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$${}^{CF}I^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0$$

eşitliğine f fonksiyonunun α 'ıncı mertebeden kesirli integrali denir (Losada and Nieto 2015).

Lemma 3.3.3: $0 < \alpha < 1$ ve f fonksiyonu aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemin bir çözümü olsun.

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.18)$$

eşitliği f fonksiyonunun sabit olması halinde sağlanır (Losada and Nieto 2015).

İspat: (3.18) eşitliğinin sağlanması için (3.17) eşitliğinden yararlanarak her $t \geq 0$ için $f(t) = f(0)$ olması halinde sağlanır. Bu f fonksiyonun sabit bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.4: $0 < \alpha < 1, T > 0$ ve $\phi: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$L > 0$ olmak üzere,

$$|\phi(t, s_1) - \phi(t, s_2)| \leq |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

$(a_\alpha + b_\alpha T)L < 1$ olduğunda aşağıdaki başlangıç değer problemi $\mathfrak{S}[0, T]$ de tek bir çözüme sahiptir.

$$\begin{aligned} {}^{CF}D^\alpha f(t) &= \phi(t, f(t)), & t \in [0, T], \\ f(0) &= f_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

İspat: $\mathfrak{S}[0, T]$, $[0, T]$ aralığında tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayında bilinen supremum norma sahip olsun. Bu durumda,

$$\|f\| = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|, \quad \forall f \in \mathfrak{S}[0, T].$$

$N: \mathfrak{S}[0, T] \rightarrow \mathfrak{S}[0, T]$ operatörü $c = -a_\alpha \phi(0, f_0) + f_0$ olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Nf(t) = c + a_\alpha \phi(t, f(t)) + b_\alpha \int_0^t \phi(s, f(s)) ds.$$

(3.19) başlangıç değer probleminin çözümü için sabit nokta teoremini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& |Nf_1(t) - f_2(t)| \\
&= \left| a_\alpha \left(\phi(t, f_1(t)) - \phi(t, f_2(t)) \right) \right. \\
&\quad \left. + b_\alpha \left(\int_0^t \phi(s, f_1(s)) ds - \int_0^t \phi(s, f_2(s)) ds \right) \right| \\
&\leq a_\alpha |\phi(t, f_1(t)) - \phi(t, f_2(t))| + b_\alpha \int_0^t |\phi(s, f_1(s)) - \phi(s, f_2(s))| ds \\
&\leq a_\alpha L |f_1(t) - f_2(t)| + b_\alpha L \int_0^t |f_1(s) - f_2(s)| ds \\
&\leq (a_\alpha + b_\alpha T) L \|f_1 - f_2\|,
\end{aligned}$$

N operatörü bir daralmaya sahiptir. Dolayısıyla sabit nokta teoremine göre (3.19) başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir (Losada and Nieto 2015).

3.3.1. Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integrali için Laplace Dönüşümü

Caputo-Fabrizio'nun (3.14) eşitliğindeki özelliklerini incelemek için, p değişkeniyle verilen Laplace dönüşümü hesaplanabilir.

$$LT[\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^\infty \exp(-pt) \int_0^t f(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau dt,$$

bunun sonucu olarak, Laplace'ın konvolüsyon dönüşüm özelliğinden,

$$LT[\mathfrak{D}_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{1}{(1-\alpha)} LT(f'(t)) LT\left(\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right)\right) = \frac{(pLT(f(t)) - f(0))}{p + \alpha(1-p)}.$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
LT[\mathfrak{D}_t^{(\alpha+1)} f(t)] &= \frac{1}{(1-\alpha)} LT(\ddot{f}(t)) LT\left(\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right)\right) \\
&= \frac{(p^2 LT[f(t)] - pf(0) - f'(0))}{p + \alpha(1-p)},
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} LT\left[\mathfrak{D}_t^{(\alpha+n)}f(t)\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)}LT(f^{(n+1)}(t))LT\left(e^{\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)}\right) \\ &= \frac{p^{n+1}LT[f(t)] - p^n f(0) - p^{n-1}f'(0) \dots - f^{(n)}(0)}{p + \alpha(1-p)}, \end{aligned}$$

bulunur (Caputo and Fabrizio 2015).

3.4. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali

Bilindiği gibi Caputo ve Fabrizio 2015 yılında üstel çekirdekli bir kesirli türev tanımı yapmıştır. Aynı yıl Losada ve Nieto tarafından bu tanımın kesirli integral tanımı yapılmıştır. Bu yeni tanımda α , 1 olduğunda orjinal fonksiyon üretilemiyor. Bu problem 2016 yılında Caputo ve Fabrizio tarafından yayınlanan bir makale ile giderilmiştir. Yeni tanımın ana mesajı, bellek etkisi olan sistemlerin dinamiklerinin daha iyi tanımlanmasıdır. İşte bu noktada Atangana ve Baleanu şu soruyu sormuş ve cevabını aramışlardır. Bu durum için en uygun çekirdek nedir? Bu sorunun cevabı için Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki yolu izlediler.

Aşağıda yazılan kesirli adi diferansiyel denklemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonunu vermektedir.

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = ay, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Şimdi genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^\alpha k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

t noktasındaki $e^{-(t-y)}$ nin taylor serisine açılımı,

$$e^{-(t-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a(t-y))^k}{k!},$$

şeklindedir. $a = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ seçilip yukarıdaki ifade Caputo-Fabrizio kesirli türevinde yerine yazılırsa,

$$D_t^\alpha(f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} ((t-y))^k dy,$$

elde edilir. Son denklemde $k!$ yerine $\Gamma(\alpha k + 1)$ ve $(t-y)^k$ yerine $(t-y)^{\alpha k}$ yazılırsa,

$$D_t^\alpha(f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} ((t-y))^{\alpha k} dy,$$

bulunur (Atanagana and Baleanu 2016).

Tanım 3.4.1: : $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Yeni kesirli türev,

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau. \quad (3.20)$$

dir (Atanagana and Baleanu 2016).

Burada $B(\alpha)$ sabiti Caputo-Fabrizio tanımındaki $M(\alpha)$ ile aynı özelliğe sahiptir. Gerçek hayatta karşılaştığımız problemler ve başlangıç değer problemlerini çözmek için kullandığımız Laplace trasformunda bu tanım bize çok daha fazla kolaylık sağlamaktadır. Fakat α sıfır olduğunda orjinal fonksiyonu geri getiremiyoruz. Bunun için aşağıdaki vereceğimiz tanım bu problemi de ortadan kaldırmış oluyor.

Tanım 3.4.2: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda, kesirli türev,

$${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (3.21)$$

dir. (3.20) ve (3.21) denklemleri lokal olmayan bir çekirdeğe sahiptir. Ayrıca (3.20) denkleminde f fonksiyonu sabit ise türevi sıfır olarak elde ediyoruz (Atangana and Baleanu 2016).

3.4.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali için Laplace Dönüşümü

(3.20) ve (3.21) eşitlikleri için Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$L\{{}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t)\}(p) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^\alpha L\{f(t)\}(p)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (3.22)$$

ve

$$L\{{}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t)\}(p) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^\alpha L\{f(t)\}(p) - p^{\alpha-1} f(0)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (3.23)$$

elde edilir (Atangana and Baleanu 2016).

3.4.1.1. Teorem: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda,

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = {}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) + H(t), \quad (3.24)$$

elde edilir (Atangana and Baleanu 2016).

İspat: (3.24) denkleminde her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L\{^{ABC}_b D_t^\alpha f(t)\}(p) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^\alpha L\{f(t)\}(p)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^{\alpha-1} f(0)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

elde edilir. (3.22) denklemini kullanarak

$$L\{^{ABC}_b D_t^\alpha f(t)\}(p) = L\{^{ABR}_b D_t^\alpha f(t)\}(p) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^{\alpha-1} f(0)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = ^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} t^\alpha \right),$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.4.1.2.Teorem: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\| ^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) \| < \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} K, \| h(t) \| = \max_{a \leq t \leq b} |h(t)|.$$

eşitliği elde edilir (Atangana and Baleanu 2016).

İspat:

$$\begin{aligned} \| ^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) \| &= \left\| \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f(x) E_\alpha \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-x)^\alpha \right) dx \right\| < \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \left\| \int_0^t f(x) dx \right\| \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \| f(x) \|. \end{aligned}$$

Burada K , $\|f(x)\|$ olarak alınırsa ispat tamamlanmış olur.

3.4.1.3.Teorem: Riemann ve Caputo anlamlarındaki Atangana-Baleanu kesirli türevi için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir (Atangana and Baleanu 2016).

$$\|{}^{ABR}_0D_t^\alpha f(t) - {}^{ABR}_0D_t^\alpha h(t)\| \leq H\|f(t) - h(t)\|$$

ve

$$\|{}^{ABC}_0D_t^\alpha f(t) - {}^{ABC}_0D_t^\alpha h(t)\| \leq H\|f(t) - h(t)\|.$$

İspat:

$$\begin{aligned} & \|{}^{ABR}_0D_t^\alpha f(t) - {}^{ABR}_0D_t^\alpha h(t)\| \\ &= \left\| \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t h(x) E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \right\| \end{aligned}$$

Birinci mertebeden türevin Lipschitz koşulunu kullanarak, aşağıdaki gibi küçük bir pozitif sabit bulunabilir.

$$\|{}^{ABR}_0D_t^\alpha f(t) - {}^{ABR}_0D_t^\alpha h(t)\| < \frac{B(\alpha)\theta_1}{1-\alpha} E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t)^\alpha}{1-\alpha} \right] \left\| \int_0^t f(x) dx - \int_0^t h(x) dx \right\|$$

ve

$$\begin{aligned} & \|{}^{ABR}_0D_t^\alpha f(t) - {}^{ABR}_0D_t^\alpha h(t)\| < \frac{B(\alpha)\theta_1}{1-\alpha} E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t)^\alpha}{1-\alpha} \right] \|f(x) - h(x)\| \\ &= H\|f(x) - h(x)\|, \end{aligned}$$

bulunur. Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi için aynı gösterimi yapmak mümkündür (Atangana and Baleanu 2016).

f , n kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda,

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} ({}^{ABR}_0D_t^\alpha f(t)),$$

eşitliği yazılabilir. Bunun ispatı ters Laplace dönüşünü ve konvülasyon teoremini kullanarak kolaylıkla gösterilebilir. O halde,

$${}^{ABC}_0D_t^\alpha (f(t)) = u(t),$$

tek bir çözüme sahiptir. Bu çözüm,

$$f(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} u(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t u(y)(t-y)^{\alpha-1} dy,$$

dir.

3.4.1.4.Tanım: Lokal olmayan çekirdek ile tanımlanan yeni türev tanımı kesirli integrali

$${}^{AB}_aI_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t u(y)(t-y)^{\alpha-1} dy, \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlanır (Atangana and Baleanu 2016).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Caputo Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi

İlk kemotaksis modeli Clifford S. Patlak tarafından 1953 yılında geliştirilmiştir. Daha sonra 1970 yılında Keller ve Segel benzer bir model geliştirmişlerdir. Bu modeller, kemotaksis modellemeye öncülük etmiş ve bu alanda temel olarak bilinen Patlak-Keller-Segel modeline dönüştürülmüştür. Bir boyutlu basitleştirilmiş Keller-Segel modeli:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + c\rho(x, t) - da(x, t), \end{cases} \quad (4.1)$$

dir. Başlangıç koşulları, $\rho(x, 0) = p_0(x)$, $a(x, 0) = a_0(x)$ verilmiş olup, D, D_a, χ, c ve d pozitif sabitlerdir. Modelimizde ρ ve a çözümleri sırasıyla bir kimyasal maddenin konsantrasyonu ile bakterinin konsantrasyonunu vermektedir (Keller and Segel 1970).

Öncelikle modelimizi Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevlerine entegre ederek varlık ve tekliğini inceleyeceğiz. Daha sonra $0 < \alpha < 1$ aralığındaki α . mertebeden bu tanımların modelimize nasıl tepki verdiğini grafikler yardımıyla inceleyerek detaylı bir sonuç vermek istiyoruz. Bu yüzden ilk olarak modelimizi Caputo'nun kesirli türev tanımına göre yazalım.

$F = C[a, b]$ kümesi $[a, b]$ kapalı aralığında Banach uzayında sürekli bir fonksiyon ve $Z = \{\rho, a \in F, \rho(x, t) \geq 0 \text{ ve } a(x, t) \geq 0\}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha \rho(x, t) = D\rho(x, t)_{xx} - \chi(\rho(x, t)a(x, t))_x \\ {}^C_0 D_t^\alpha a(x, t) = D_a a(x, t)_{xx} + c\rho(x, t) - da(x, t), \end{cases} \quad (4.2)$$

sistemini elde alalım. Riemann-Liouville kesirli integral tanımı yardımıyla,

$$\begin{cases} I^\alpha \rho(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [D\rho(x, \tau)_{xx} - \chi(\rho(x, \tau)a(x, \tau)_x)_x] d\tau \\ I^\alpha a(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [D_a a(x, \tau)_{xx} + c\rho(x, \tau) - da(x, \tau)] d\tau, \end{cases} \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi varlık ve teklik teoremini uygulayabilmemiz için $T: K \rightarrow K$ operatörünü

$$\begin{cases} T\rho(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [D\rho(x, \tau)_{xx} - \chi(\rho(x, \tau)a(x, \tau)_x)_x] d\tau \\ Ta(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [D_a a(x, \tau)_{xx} + c\rho(x, \tau) - da(x, \tau)] d\tau, \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlansın. İleride kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

$$\begin{cases} s(x, t, \rho(x, t)) = D\rho(x, t)_{xx} - \chi(\rho(x, t)a(x, t)_x)_x \\ s(x, t, a(x, t)) = D_a a(x, t)_{xx} + c\rho(x, t) - da(x, t). \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1.1.Lemma : T operatörü $T: K \rightarrow K$ tamamen sürekli ve kompaktır.

İspat: $M \subset K$ sınırlı olsun. l, m pozitif iki sabit olmak üzere $\forall \rho, a \in M$ için $\|\rho\| < l, \|a\| < m$ dir. L_1 ve L_2 aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$L_1 = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq l}} s(x, t, \rho(x, t)) \quad \text{ve} \quad L_2 = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq a \leq m}} s(x, t, a(x, t)).$$

$\forall \rho, a \in M$ olmak üzere,

$$\|T\rho(x, t)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |s(x, \tau, \rho(x, \tau))| d\tau \\
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{L_1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|T\rho\| \leq \frac{L_1}{\Gamma(1+\alpha)},$$

bulunur. Aynı adımlar $a(x, t)$ fonksiyonu içinde uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|Ta(x, t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, a(x, \tau)) d\tau \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|s(x, \tau, a(x, \tau))\| d\tau \\
&\leq \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{L_2}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|Ta\| \leq \frac{L_2}{\Gamma(1+\alpha)},$$

bulunur. Yani $T(M)$ sınırlıdır. Şimdi kompakt olduğunu gösterelim. $\rho(x, t), a(x, t) \in M$ ve $t_1 < t_2$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $|t_2 - t_1| < \delta$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned}
& \|T\rho(x, t_2) - T\rho(x, t_1)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho(x, \tau)) d\tau \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \|(t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1}\| \|s(x, \tau, \rho(x, \tau))\| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} \|(t_1 - \tau)^{\alpha-1}\| \|s(x, \tau, \rho(x, \tau))\| d\tau \\
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} ((t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1}) d\tau + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} d\tau - \int_0^{t_2} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \\
&= \frac{L_1}{\Gamma(1+\alpha)} (t_2^\alpha + (t_1 - t_2)^\alpha - t_1^\alpha + (t_1 - t_2)^\alpha) \\
&\leq \frac{2L_1}{\Gamma(1+\alpha)} (t_1 - t_2)^\alpha + \frac{L_1}{\Gamma(1+\alpha)} (t_1 - t_1)^\alpha = \frac{2L_1}{\Gamma(1+\alpha)} (t_1 - t_2)^\alpha \\
&< \frac{2L_1}{\Gamma(1+\alpha)} \delta^\alpha = \epsilon,
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\|T\rho(x, t_2) - T\rho(x, t_1)\| \leq \epsilon,$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı adımlar $a(x, t)$ fonksiyonu için yapıldığında,

$$\|Ta(x, t_2) - Ta(x, t_1)\| \leq \epsilon,$$

olduğu görülür. Arzela-Ascoli teoremini kullanarak söyleyebiliriz ki $\overline{T(M)}$ kompakttır.

4.1.2. Teorem: $S: [u_1, u_2] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyon ve $S(x, t, \cdot)$, $[u_1, u_2]$ aralığında artan bir fonksiyon olsun. Öyle iki w_1 ve w_2 bulunabilir ki, $P(s)p_1 \leq S(x, t, p_1)$, $P(s)w_2 \geq S(x, t, p_2)$, $0 \leq p_1(x, t) \leq p(x, t)$, $u_1 \leq t \leq u_2$. Böylelikle (4.2) sistemi pozitif çözüme sahiptir.

İspat: Lemma 4.1.1'deki operatör yardımıyla sistemin tamamen sürekli olduğunu gösterdik. Şimdi ise sabit nokta teoremini kullanarak ρ_1 ve ρ_2 iki sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} T\rho_1(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho_1(x, \tau)) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, \rho_2(x, \tau)) d\tau \\ &= T\rho_2(x, t), \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde a_1 ve a_2 sabitleri için,

$$\begin{aligned} Ta_1(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, a_1(x, \tau)) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} s(x, \tau, a_2(x, \tau)) d\tau \\ &= Ta_2(x, t), \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan T nin artan bir operatör olduğu göstermiş olduk. O halde $Tp_2 \geq p_2$ ve $Tp_1 \geq p_1$ kestirimi yapılabilir. Lemma 4.1.1 kullanılarak $T: \langle p_1, p_2 \rangle \rightarrow \langle p_1, p_2 \rangle$ nin kompakt olduğu söylenebilir.

Şimdi, sistemin pozitif tek bir çözümünün olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \|T\rho_1(x, t) - T\rho_2(x, t)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(s(x, \tau, \rho_1(x, \tau)) - s(x, \tau, \rho_2(x, \tau)) \right) d\tau \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} C_1 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \|\rho_1(x, \tau) - \rho_2(x, \tau)\| d\tau,
\end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\|T\rho_1(x, t) - T\rho_2(x, t)\| \leq \left\{ \frac{C_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\} \|\rho_1(x, \tau) - \rho_2(x, \tau)\|,$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \|Ta_1(x, t) - Ta_2(x, t)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left(s(x, \tau, a_1(x, \tau)) - s(x, \tau, a_2(x, \tau)) \right) d\tau \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} C_2 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \|a_1(x, \tau) - a_2(x, \tau)\| d\tau,
\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\|Ta_1(x, t) - Ta_2(x, t)\| \leq \left\{ \frac{C_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\} \|a_1(x, \tau) - a_2(x, \tau)\|,$$

elde edilir. Bu durum bize T operatörünün daraldığını gösterir yani Keller-Segel modelimizi sabit nokta teoremi yardımıyla tek bir pozitif çözümü olduğunu gösterir.

4.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi

Keller-Segel modeli bir çok araştırmacı tarafından araştırılmış ve incelenmiştir. Atangana ve Alkahtani (Atangana and Alkahtani 2015) Keller-Segel modelini Caputo-Fabrizio kesirli türevine modifiye ederek modelin varlık ve teklik incelemesi yapmıştır. Fakat modelin bir sistem olması ve sistemde bulunan denklemler birbirlerini

etkiledikleri için modelde yapılan değişikler çıkan sonuçları direkt olarak etkilemektedir. Atangana ve Alkahtani'nin kullandıkları model,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial \varphi(\rho(x, t))}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = b \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + cu(x, t) - d\rho(x, t), \end{cases}$$

şeklindedir (Atangana and Alkahtani 2015).

Burada kullanılan modelle bizim kullandığımız model arasında bazı farklılıklar vardır. Öncelikle Atangana ve Alkahtani bizim kullandığımız χ kemotaktik hassasiyet katsayısını kullanmamışlardır. Bu katsayının kullanılmaması nümerik sonuçlarda ve kararlılık hesaplamalarında oldukça farklı sonuçlar vermektedir. Bunun dışında Atangana ve Alkahtani $\frac{\partial^2 \varphi(\rho(x, t))}{\partial x^2}$ terimini kullanırken biz $\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2}$ terimini kullandık. Burada Atangana ve Alkahtani φ fonksiyonu için daha kesin sonuçlar elde etmek adına $\varphi(\rho(x, t))$ fonksiyonu yerine $\frac{\rho(x, t)}{\rho(x, t)+1}, \rho(x, t), \frac{\rho^2(x, t)}{\rho^2(x, t)+1}, \log(\rho(x, t))$ fonksiyonlarının seçilebileceğini söylemiştir. Bu durum tezde kullanılan (4.1) sistemiyle Atangana-Alkahtani'nin kullandığı sistem arasındaki diğer farklılığı göstermektedir. Buna rağmen yapılan varlık ve teklik gösterimindeki teorem ve ispatlar paralel olduğundan bu bölümdeki teorem ve ispatlar Atangana ve Alkahtani'nin (Atangana and Alkahtani 2015) makalesine atf edilmiştir.

Model bu haliyle etki hafızasını ve küresel hareketin gerçekleştiği ortamın farklı katmanlardaki bakterilerin hareketlerini tam olarak tanımlayamamaktadır. Bu iki etkeni dahil etmek için sıradan zaman türevi yerine Caputo-Fabrizio'nun kesirli türev tanımı modele uygulanırsa.

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha \rho(x, t) = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \\ {}^{CF}D_t^\alpha a(x, t) = D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + c\rho(x, t) - da(x, t), \end{cases} \quad (4.6)$$

elde edilir. Bu ifade ile çözümün varlığını ve tekliğini göstermek gerekir. Bunun için öncelikle $\rho(x, t)$ ve $a(x, t)$ fonksiyonlarının varlığı gösterilecektir. Losada ve Nieto'nun (3.18) deki kesirli integral tanımı kullanılırsa,

$$\begin{cases} \rho(x, t) - \rho(x, 0) = {}^{CF}I_t^\alpha \left\{ D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\} \\ a(x, t) - a(x, 0) = {}^{CF}I_t^\alpha a(x, t) \left\{ D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + c\rho(x, t) - da(x, t) \right\}, \end{cases} \quad (4.7)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{cases} \rho(x, t) - \rho(x, 0) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \left\{ D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \\ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \left\{ D \frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\} dy \\ a(x, t) - a(x, 0) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \left\{ D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + c\rho(x, t) - da(x, t) \right\} + \\ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \left\{ D_a \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} + c\rho(x, y) - da(x, y) \right\} dy, \end{cases} \quad (4.8)$$

elde edilir. Kolaylık sağlaması açısından çekirdekler aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{cases} K_1(x, t, \rho) = D \frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \\ K_2(x, t, a) = D_a \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} + c\rho(x, y) - da(x, y). \end{cases} \quad (4.9)$$

Çözümlerin varlığını göstermek için sırasıyla K_1 ve K_2 'nin Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilmelidir.

4.2.1.Teorem: Aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması durumunda K_1 ve K_2 Lipschitz koşulunu sağlar (Atangana and Alkahtani 2015).

$$0 < D\delta_1^2 + \chi\delta_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\| \leq 1,$$

İspat: Öncelikle K_1 çekirdeği için varlık çözümü incelenirse, norm yardımıyla

$$\begin{aligned} & \|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, q)\| \\ &= \left\| D \frac{\partial^2 \{\rho(x, t) - q(x, t)\}}{\partial x^2} \right. \\ & \quad \left. - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\{\rho(x, t) - q(x, t)\} \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right) \right\|. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, q)\| \\ & \leq D \left\| \frac{\partial^2 \{\rho(x, t) - q(x, t)\}}{\partial x^2} \right\| \\ & \quad + \left\| -\frac{\partial}{\partial x} \left(\{\rho(x, t) - q(x, t)\} \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right) \right\|, \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Türev operatörünün Lipschitz şartını sağladığına göre öyle iki δ_1 ve δ_2 pozitif sayı bulunabilir ki;

$$\begin{cases} D \left\| \frac{\partial^2 \{\rho(x, t) - q(x, t)\}}{\partial x^2} \right\| \leq D\delta_1^2 \|\rho(x, t) - q(x, t)\| \\ -\chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\{\rho(x, t) - q(x, t)\} \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right) \leq \chi\delta_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\| \|\rho(x, t) - q(x, t)\|, \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Son eşitsizlikler (4.9) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, q)\| \leq \left\{ D\delta_1^2 + \chi\delta_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\| \right\} \|\rho(x, t) - q(x, t)\|,$$

elde edilmiş olur.

$$T = \left\{ D\delta_1^2 + \chi\delta_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\| \right\},$$

alınırsa,

$$\|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, q)\| \leq T\|\rho(x, t) - q(x, t)\|,$$

olup Lipschitz şartını sağlamış olur. İkinci durumdaki K_2 çekirdeği lineer olup Lipschitz şartını sağladığı açıktır.

$$\|K_2(x, t, a) - K_2(x, t, a_1)\| \leq \{D_a\theta_1^2 + c\}\|a(x, t) - a_1(x, t)\|.$$

Bu durumda çekirdekler (4.8) denklem sisteminde yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho) + \rho(x, 0) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho)\} dy \\ a(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_2(x, t, a) + a(x, 0) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_2(x, t, a)\} dy, \end{cases}$$

elde edilir.

Sistem genelleştirerek yazılırsa,

$$\begin{cases} \rho_n(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho_{n-1}) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho_{n-1})\} dy \\ a_n(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_2(x, t, a_{n-1}) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_2(x, t, a_{n-1})\} dy, \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin başlangıç koşulları,

$$\begin{cases} \rho_0(x, t) = \rho(x, t) \\ a_0(x, t) = a(x, t), \end{cases}$$

şeklindedir. Ardışık terimler arasındaki farklar,

$$\begin{aligned} P_n(x, t) &= \rho_n(x, t) - \rho_{n-1}(x, t) \\ &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho_{n-1}) - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho_{n-2}) \\ &\quad + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho_{n-1}) - K_1(x, t, \rho_{n-2})\} dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_n(x, t) &= a_n(x, t) - a_{n-1}(x, t) \\ &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_2(x, t, a_{n-1}) - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_2(x, t, a_{n-2}) \\ &\quad + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_2(x, t, a_{n-1}) - K_2(x, t, a_{n-2})\} dy, \end{aligned}$$

şeklindedir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak denklemler düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \|P_n(x, t)\| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} T \|P_{n-1}(x, t)\| \\ &\quad + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} K \int_0^t \|P_{n-1}(x, t)\| dy \end{aligned} \quad (4.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \|A_n(x, t)\| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} T_1 \|A_{n-1}(x, t)\| \\ &\quad + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} J_1 \int_0^t \|P_{n-1}(x, t)\| dy, \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir (Atangana and Alkahtani 2015).

4.2.2. Teorem:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha \rho(x, t) = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \\ {}^C D_t^\alpha a(x, t) = D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + c \rho(x, t) - d a(x, t), \end{cases}$$

sistemi birleşik bir çözüme sahiptir (Atangana and Alkahtani 2015).

İspat: $p(x, t)$ ve $a(x, t)$ fonksiyonlarının sınırlı olduğunu biliniyor. Yukarıda bu fonksiyonların çözümünün varlığı gösterildi. (4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{cases} \|P_n(x, t)\| \leq \|\rho(x, 0)\| \left\{ \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} T \right\}^n + \left\{ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} Kt \right\}^n \right\} \\ \|A_n(x, t)\| \leq \|a(x, 0)\| \left\{ \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} T_1 \right\}^n + \left\{ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} J_1 t \right\}^n \right\}, \end{cases}$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm vardır ve süreklidir. Bununla birlikte bu çözümün (4.8) sisteminin çözümü olduğu gösterilebilir. Kabul edelim ki,

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \rho_n(x, t) - P_n(x, t) \\ a(x, t) = a_n(x, t) - P_{2n}(x, t), \end{cases}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \rho(x, t) - \rho_n(x, t) \\ &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho - P_n(x, t)) \\ &+ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho - P_n(x, t))\} dy, \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &- \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho) - u(x, 0) \\
&- \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho)\} dy \\
&= P_n(x, t) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho) \\
&+ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho - P_n(x, t)) K_1(x, t, \rho)\} dy,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son eşitliğin her iki tarafının normu alınıp Lipschitz şartı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\left\| u(x, t) - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_1(x, t, \rho) - u(x, 0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho)\} dy \right\| \\
&\leq \|P_n(x, t)\| \\
&\quad + \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} H_1 + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} L_1 t \right\} \|P_n(x, t)\|,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Aynı şekilde $a(x, t)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
&\left\| a(x, t) - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} K_2(x, t, a) - a(x, 0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_2(x, t, a)\} dy \right\| \\
&\leq \|P_{2n}(x, t)\| \\
&\quad + \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} H_2 + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} L_2 t \right\} \|P_{2n}(x, t)\|,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.12) ve (4.13) denkleminin $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır,

$$\begin{cases} p(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \{K_1(x, t, \rho)\} + p(x, 0) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, p)\} dy \\ a(x, t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \{K_2(x, t, a)\} + a(x, 0) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_2(x, t, a)\} dy, \end{cases} \quad (4.14)$$

bulunur. Bu durum (4.14) sistemi (4.6) sisteminin bir çözümü olduğunu gösterir. Şimdi bu sistemin çözümünün tek olduğu gösterilebilir. Bilinen çözümün dışında $\rho_1(x, t), a_1(x, t)$ gibi birer çözüm daha olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned} \rho(x, t) - \rho_1(x, t) &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \{K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, \rho_1)\} \\ &+ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, \rho_1)\} dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\rho(x, t) - \rho_1(x, t)\| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \{\|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, \rho_1)\|\} \\ &+ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \{\|K_1(x, t, \rho) - K_1(x, t, \rho_1)\|\} dy, \end{aligned}$$

elde edilir. Çekirdeklerin Lipschitz koşullarından yararlanarak çözümlerin sınırlandırılmış olmasıyla aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\|\rho(x, t) - \rho_1(x, t)\| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} H_1 + \left\{ \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} L_1 \right\}^n.$$

Bu eşitsizlikten de söylenebilir ki ki her n için,

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t).$$

Benzer ifadeler ve koşullar ile birlikte

$$a(x, t) = a_1(x, t),$$

elde edilebileceği açıktır. Böylelikle (4.6) sisteminin çözümü tektir (Atangana and Alkahtani 2015).

4.2.1. Keller-Segel modelinin Caputo-Fabrizio kesirli türevi için nümerik çözümü

Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile Laplace dönüşüm arasındaki ilişkiyi şu şekildedir:

$$\mathcal{L}\left({}^{CF}_0 D_t^\alpha f(x)\right) = \frac{p\mathcal{L}(f(x)) - f(0)}{p + \alpha(1 - p)}.$$

Bu operatör modele uygulanırsa,

$$\begin{cases} \frac{p\mathcal{L}(\rho(x, t)) - \rho(x, 0)}{p + \alpha(1 - p)} = \mathcal{L}\left\{D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x, t) \frac{a(x, t)}{\partial x}\right)\right\} \\ \frac{p\mathcal{L}(a(x, t)) - a(x, 0)}{p + \alpha(1 - p)} = \mathcal{L}\left\{D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + b\rho(x, t) - ca(x, t)\right\}, \end{cases} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) sistemi yeniden düzenleyerek yazılırsa,

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\rho(x, t)) = \frac{\rho(x, 0)}{p} + \frac{p + \alpha(1 - p)}{p} \mathcal{L}\left\{D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x, t) \frac{a(x, t)}{\partial x}\right)\right\} \\ \mathcal{L}(a(x, t)) = \frac{a(x, 0)}{p} + \frac{p + \alpha(1 - p)}{p} \mathcal{L}\left\{D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + b\rho(x, t) - ca(x, t)\right\}, \end{cases} \quad (4.16)$$

bulunur. Şimdi (4.16) sistemine ters Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \rho(x, 0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p + \alpha(1 - p)}{p} \mathcal{L}\left\{D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x, t) \frac{a(x, t)}{\partial x}\right)\right\}\right\} \\ a(x, t) = a(x, 0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p + \alpha(1 - p)}{p} \mathcal{L}\left\{D_a \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} + b\rho(x, t) - ca(x, t)\right\}\right\}, \end{cases} \quad (4.17)$$

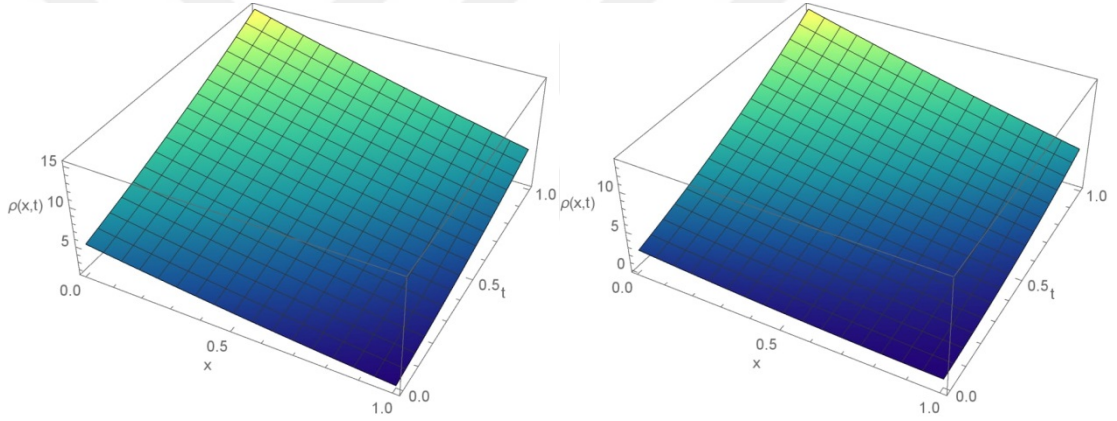
elde edilir. Son sistemin genelleştirilmiş hali,

$$\begin{cases} \rho_{n+1}(x, t) = \rho_n(x, t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+\alpha(1-p)}{p} \mathcal{L} \left\{ D \frac{\partial^2 \rho_n(x, t)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_n(x, t) \frac{a_n(x, t)}{\partial x} \right) \right\} \right\} \\ a_{n+1}(x, t) = a_n(x, 0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+\alpha(1-p)}{p} \mathcal{L} \left\{ D_a \frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial x^2} + b \rho_n(x, t) - c a_n(x, t) \right\} \right\}, \end{cases} \quad (4.18)$$

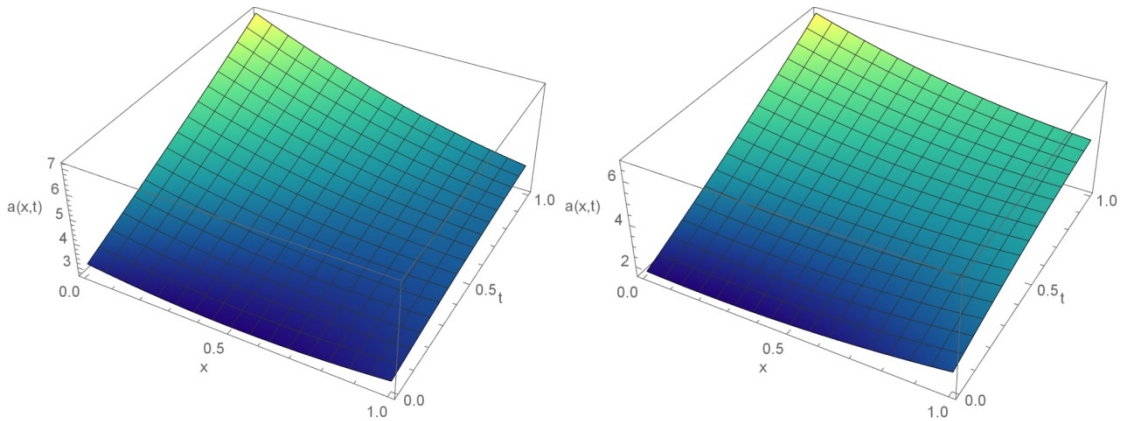
şeklinde dir. Sistemin çözümü aşağıdaki ifade kullanılarak bulunabilir.

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x, t) \\ a(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x, t), \end{cases} \quad (4.19)$$

(4.18) eşitliklerini kullanarak α 'nın farklı değerleri için iki farklı grafik hesaplanmıştır.



Şekil 4.1. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).



Şekil 4.2. $a(x, t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 incelendiğinde α 'nın farklı değerler için verdiği sonuçlar Caputo-Fabrizio operatörünün doğru çalıştığını göstermektedir.

4.3. Atangana-Baleanu Kesirli Türevi için Varlık ve Teklik Gösterimi

Bu bölümde ise Keller-Segel modelini Atangana-Baleanu kesirli türevine uygulayarak öncelikle varlık ve tekliğini göstereceğiz. Daha sonra bulduğumuz çözümleri nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler üzerinde inceleyeceğiz. $\Omega = (a, b)$, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\alpha \in (0,1)$ için $\rho(x, t), a(x, t) \in H^1(\Omega) \times [0, T]$ olsun.

$$\begin{cases} \sigma_1(x, t, \rho) = D\rho_{xx} - \chi\rho_x a_{xx} \\ \sigma_2(x, t, a) = D_a a_{xx} + h\rho - ka \end{cases} \quad (4.20)$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0 D_t^\alpha \rho = \sigma_1(x, t, \rho) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha a = \sigma_2(x, t, a) \end{cases} \quad (4.21)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada ρ kimyasal maddenin konsantrasyonunu, a ise hücrenin konsantrasyonunu göstermektedir. Atangana-Baleanu integral operatörünü kullanarak,

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \rho(x, 0) + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \sigma_1(x, t, \rho(x, t)) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \sigma_1(x, r, \rho(x, r))(t-r)^{\alpha-1} dr \\ a(x, t) = a(x, 0) + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \sigma_2(x, t, \rho(x, t)) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \sigma_2(x, r, \rho(x, r))(t-r)^{\alpha-1} dr \end{cases} \quad (4.22)$$

elde edilir.

Teorem 4.3: Aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması durumunda σ_1 ve σ_2 Lipshitz koşullarını sağlar.

$$0 < D\gamma_1^2 + \chi\gamma_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, y)}{\partial x^2} \right\| \leq 1.$$

İspat: Öncelikle σ_1 çekirdeğini ele alalım. Lipshitz şartını sağlaması için κ_1 ve κ_2 gibi iki fonksiyon alalım.

$$\begin{aligned} & \|\sigma_1(x, t, \kappa_1) - \sigma_1(x, t, \kappa_2)\| \\ &= \left\| D(\kappa_1(x, t)_{xx} - \kappa_2(x, t)_{xx}) \right. \\ & \quad \left. - \chi(\kappa_1(x, t)_x - \kappa_2(x, t)_x) \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\|, \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak son eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \|\sigma_1(x, t, \kappa_1) - \sigma_1(x, t, \kappa_2)\| \\ & \leq D \|\kappa_1(x, t)_{xx} - \kappa_2(x, t)_{xx}\| \\ & \quad + \chi \left\| -(\kappa_1(x, t)_x - \kappa_2(x, t)_x) \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\|, \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur. Türev operatörü kullanılarak, aşağıdaki gibi γ_1 ve γ_2 gibi iki pozitif sabit bulabiliriz.

$$\begin{cases} D \|\kappa_1(x, t)_{xx} - \kappa_2(x, t)_{xx}\| \leq D\gamma_1^2 \|\kappa_1(x, t) - \kappa_2(x, t)\| \\ \chi \left\| -(\kappa_1(x, t)_x - \kappa_2(x, t)_x) \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\| \leq \chi\gamma_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\| \|\kappa_1(x, t) - \kappa_2(x, t)\| \end{cases} \quad (4.25)$$

(4.25) denklemindeki eşitsizlikler (4.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\|\sigma_1(x, t, \kappa_1) - \sigma_1(x, t, \kappa_2)\| \leq K \|\kappa_1(x, t) - \kappa_2(x, t)\|,$$

elde edilir. Burada $K = \left(D\gamma_1^2 + \chi\gamma_2 \left\| \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} \right\| \right)$ dir. Böylece σ_1 çekirdeği Lipshitz koşulunu sağlamış olur. Benzer şekilde σ_2 çekirdeği içinde,

$$\sigma_1(x, t, v_1) - \sigma_1(x, t, v_2) \leq (c\phi_1^2 + d)\|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|,$$

eşitsizliği gösterilebilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Keller-Segel modelinin Atangana-Baleanu kesirli türevi için tek çözümü olduğunu gösterelim.

$\rho_1, \rho_2 \in H^1$ (4.22) sisteminin iki çözümü olsun. $\rho = \rho_1 - \rho_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \left(\sigma_1(x, t, \rho_1(x, t)) - \sigma_1(x, t, \rho_2(x, t)) \right) \\ & + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\sigma_1(x, r, \rho_1(x, r)) - \sigma_1(x, r, \rho_2(x, r)) \right) dr, \end{aligned} \quad (4.26)$$

yazılır. Buradan (4.26) eşitliğinin her iki tarafının normunu alıp Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|\rho\| \leq & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \left\| \sigma_1(x, t, \rho_1(x, t)) - \sigma_1(x, t, \rho_2(x, t)) \right\| \\ & + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left\| \sigma_1(x, r, \rho_1(x, r)) - \sigma_1(x, r, \rho_2(x, r)) \right\| dr \\ \leq & K_1 \int_0^t \left\| \sigma_1(x, r, \rho_1(x, r)) \right\|_{H^1} dr, \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $a = a_1 - a_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|a\| &\leq \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \|\sigma_2(x, t, a_1(x, t)) - \sigma_2(x, t, a_2(x, t))\| \\
&\quad + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\sigma_2(x, r, a_1(x, r)) - \sigma_2(x, r, a_2(x, r))\| dr \\
&\leq K_2 \int_0^t \|\sigma_2(x, r, a_1(x, r))\|_{H^1} dr,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.22) sistemi tek bir çözüme sahiptir.

4.3.1. Keller-Segel modelinin Atangana-Baleanu kesirli türevi için nümerik çözümü

Kesirli mertebeden Atangana-Baleanu türevlerinin iki önemli rolü vardır. Birincisi, farklı heterojen maddeleri ve bazı yapıları farklı ölçeklerle tasvir etmektedir. Yeni çekirdek yapının ve ortamın içindeki belleklerin farklı ölçeklerle daha iyi tanımlanmasına olanak sağlar. Ayrıca bu yeni türev malzemenin özelliklerini tanımlamada baskın olan yerel olmayan değişikliklerle ilgili bazı materyallerin mikroskobik davranışlarının incelenmesinde belirli bir rol oynayabilir. İkinci önemli rolü ise hafıza etkisini matematik denklemlerine yerleştirebilmektedir. Bizde bunu kullanarak değiştirilmiş Keller-Segel modelini göz önüne alalım. Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevine uygulanmış Keller-Segel modeli,

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha \rho(x, t) = D\rho_{xx} - \chi\rho_x a_{xx} \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha a(x, t) = D_a a_{xx} + h\rho - ka \end{cases} \tag{4.29}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem sistemini Crank-Nicholson yöntemi ile nümerik olarak çözeceğiz. Yerel türevin ikinci mertebeden yaklaşımı ρ ve a fonksiyonları için sırasıyla,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2}(\rho_i^{j+1} - \rho_i^j),$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)} + \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2(\Delta x)} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{i+1}^{j+1} - 2\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{\rho_{i+1}^j - 2\rho_i^j + \rho_{i-1}^j}{2(\Delta x)^2} \right),$$

$$a(x, t) = \frac{1}{2} (a_i^{j+1} - a_i^j),$$

$$\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{i+1}^{j+1} - 2a_i^{j+1} + a_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{a_{i+1}^j - 2a_i^j + a_{i-1}^j}{2(\Delta x)^2} \right),$$

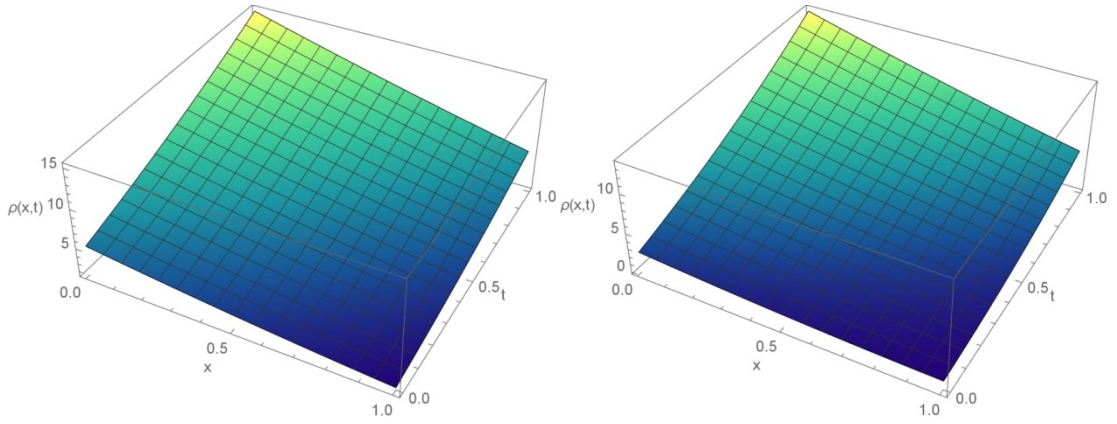
şeklindedir. Bu denklemler (4.29) denklem sisteminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^n \frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau} \theta_{i,n,\alpha} \\ = \frac{D}{2} \left(\frac{\rho_{i+1}^{j+1} - 2\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{\rho_{i+1}^j - 2\rho_i^j + \rho_{i-1}^j}{2(\Delta x)^2} \right) \\ - \frac{\chi}{4} \left(\frac{\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)} + \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2(\Delta x)} \right) \left(\frac{a_{i+1}^{j+1} - 2a_i^{j+1} + a_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)^2} \right. \\ \left. + \frac{a_{i+1}^j - 2a_i^j + a_{i-1}^j}{2(\Delta x)^2} \right) \end{aligned}$$

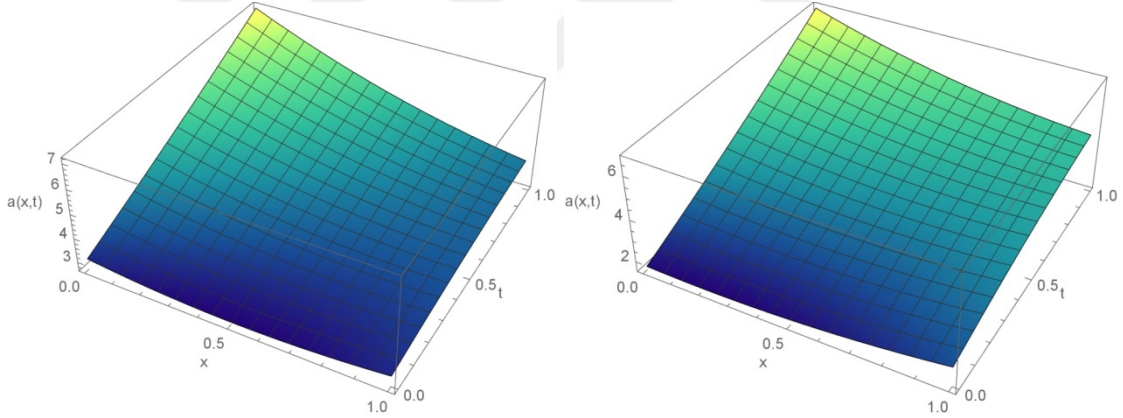
ve

$$\begin{aligned} \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^n \frac{a_i^{j+1} - a_i^j}{\tau} \theta_{i,n,\alpha} \\ = \frac{D_a}{2} \left(\frac{a_{i+1}^{j+1} - 2a_i^{j+1} + a_{i-1}^{j+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{a_{i+1}^j - 2a_i^j + a_{i-1}^j}{2(\Delta x)^2} \right) - \frac{h}{2} (\rho_i^{j+1} - \rho_i^j) \\ + \frac{k}{2} (a_i^{j+1} - a_i^j), \end{aligned}$$

eşiklikleri elde edilir. Son iki denklem bize Keller-Segel modelinin, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi ile sayısal çözüm üretmemize yardımcı olacaktır. Bu denklemler *Mathematica* programı yardımıyla çözüldüğünde elde edilen grafikler aşağıdaki gibidir.



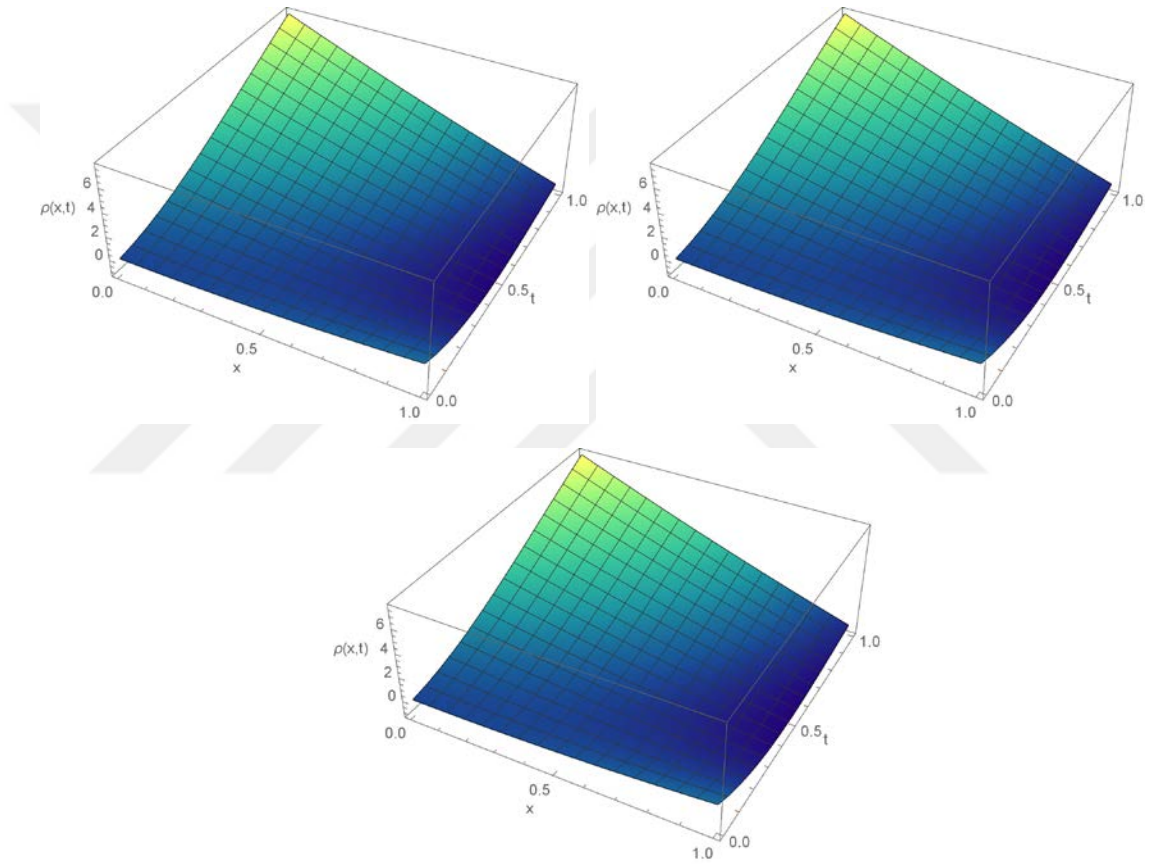
Şekil 4.3. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).



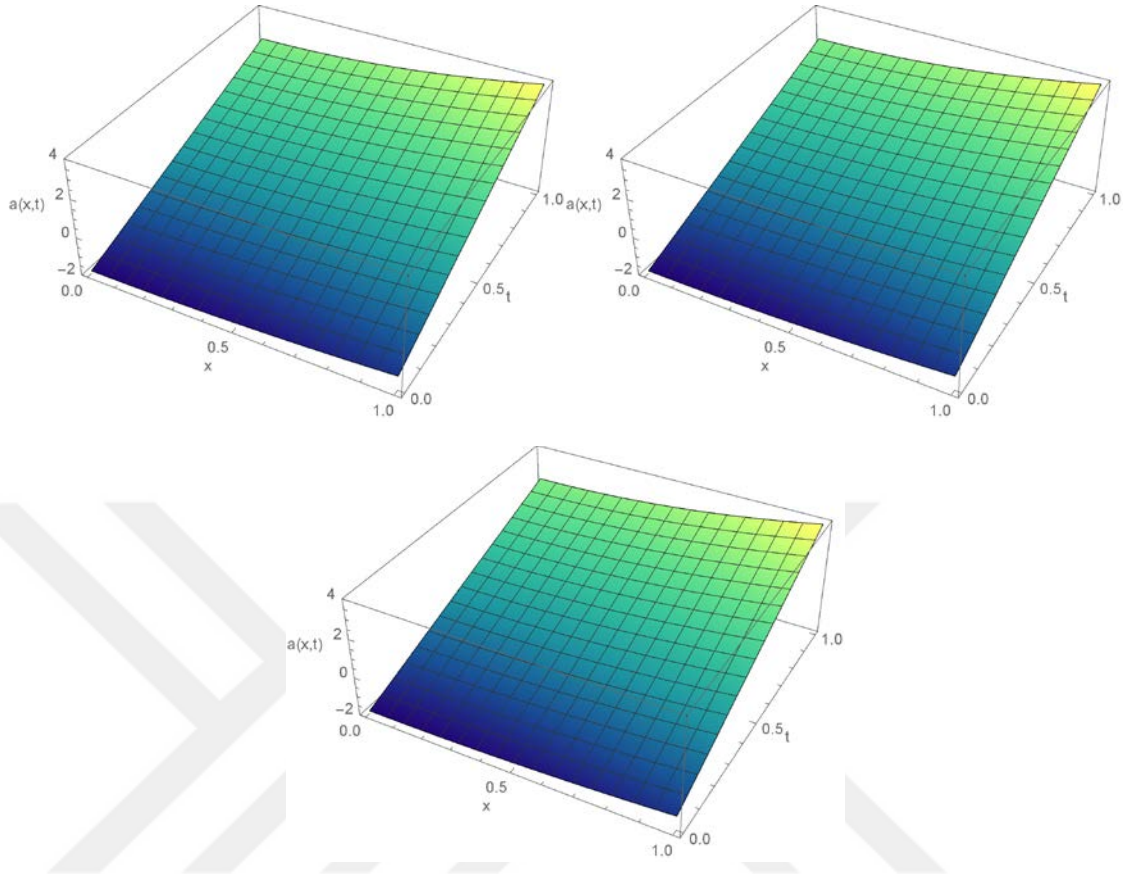
Şekil 4.4. $a(x, t)$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 0.5, \alpha = 0.7$).

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 incelendiğinde Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 ile çok benzer sonuçlar vermektedir. Bu durum Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu operatörlerinin benzer sonuçlar verdiğini ve Keller-Segel modeline modifiye edilebileceği göstermektedir. Sonuç olarak görülmüştür ki her iki operatörde Caputo'ya göre daha hızlı ve kararlıdır. Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev operatörlerini grafikler üzerinde karşılaştırmak için $\alpha = 1$ seçilerek aşağıdaki grafikler çizilmiştir. Şekil 4.5 ve 4.6'da görüleceği üzere $\rho(x, t)$ ve $a(x, t)$ fonksiyonlarının Caputo, Caputo-Fabrizio

ve Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Grafiklerden de görüldüğü üzere her bir operatör için çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. α 'nın farklı değerleri için çıkan sonuçlar çözümünün aynı zamanda kesirli mertebeye bağlı olduğunu gösteriyor. Bu durum, kesirli mertebeden çözümün sistem içindeki farklı ölçeklerin davranışını incelemek için kullanabileceğimizi göstermektedir.



Şekil 4.5. $\rho(x,t)$ fonksiyonunun sırasıyla Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 1$).



Şekil 4.6. $a(x,t)$ fonksiyonunun sırasıyla Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevi için yaklaşık çözümleri ($\alpha = 1$).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında Keller-Segel modelinin Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu kesirli türev tanımlarına uygulanarak varlık ve teklikleri bulunmuş, lemma ve teoremleri verilmiştir. Daha sonra bulunan bağdaşık çözümler için analizler yapılarak grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır. Bu analizler sonucunda görülmüştür ki, Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevleri birbirleriyle aynı sonuçları vermiştir. Tam çözümle karşılaştırma yapabilmek için $\alpha = 1$ alınarak tam çözümle diğer sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlar aşağıda verilen tablo ile daha iyi anlaşılacaktır.

Çizelge 5.1. $\rho(x, t)$ fonksiyonunun farklı zaman ve yerdeki tam çözümleri, yaklaşık çözümleri ve hatalarının karşılaştırılması.

Yaklaşık Çözümler				
t	x	ρ_{tam}	ρ_{caputo}	$ \rho_{tam} - \rho_{caputo} $
0.5	0.1	3.351678	3.351671844	0.6156×10^{-5}
	0.3	2.581676	2.581682084	0.6084×10^{-5}
	0.5	1.891674	1.891680002	0.6002×10^{-5}
	0.7	1.281672	1.281677944	0.5944×10^{-5}
	0.9	0.751665	0.751670992	0.5992×10^{-5}
t	x	ρ_{tam}	$\rho_{caputo-fabrizio}$	$ \rho_{tam} - \rho_{caputo-fabrizio} $
0.5	0.1	3.351678	3.351683432	0.5432×10^{-5}
	0.3	2.581676	2.581681384	0.5384×10^{-5}
	0.5	1.891674	1.891679316	0.5316×10^{-5}
	0.7	1.281672	1.281677246	0.5246×10^{-5}
	0.9	0.751665	0.751670188	0.5188×10^{-5}
t	x	ρ_{tam}	$\rho_{atangana-baleanu}$	$ \rho_{tam} - \rho_{atangana-baleanu} $
0.5	0.1	3.351678	3.351683428	0.5428×10^{-5}
	0.3	2.581676	2.581681380	0.5380×10^{-5}
	0.5	1.891674	1.891679312	0.5312×10^{-5}
	0.7	1.281672	1.281677242	0.5242×10^{-5}
	0.9	0.751665	0.751670184	0.5184×10^{-5}

Çizelge 5.2. $a(x, t)$ fonksiyonunun farklı zaman ve yerdeki tam çözümleri, yaklaşık çözümleri ve hatalarının karşılaştırılması.

Yaklaşık Çözümler				
t	x	a_{tam}	a_{caputo}	$ a_{tam} - a_{caputo} $
0.5	0.1	2.676942	2.676945228	0.3228×10^{-5}
	0.3	2.654956	2.654959198	0.3198×10^{-5}
	0.5	2.745994	2.745997154	0.3154×10^{-5}
	0.7	2.952408	2.952411106	0.3106×10^{-5}
	0.9	3.274402	3.274405078	0.3078×10^{-5}
t	x	a_{tam}	$a_{caputo-fabrizio}$	$ a_{tam} - a_{caputo-fabrizio} $
0.5	0.1	2.676942	2.676944668	0.2668×10^{-5}
	0.3	2.654956	2.654958624	0.2624×10^{-5}
	0.5	2.745994	2.745996588	0.2588×10^{-5}
	0.7	2.952408	2.952410540	0.2540×10^{-5}
	0.9	3.274402	3.274404492	0.2492×10^{-5}
t	x	a_{tam}	$a_{atangana-baleanu}$	$ a_{tam} - a_{atangana-baleanu} $
0.5	0.1	2.676942	2.676944666	0.2666×10^{-5}
	0.3	2.654956	2.654958622	0.2622×10^{-5}
	0.5	2.745994	2.745996586	0.2586×10^{-5}
	0.7	2.952408	2.952410538	0.2538×10^{-5}
	0.9	3.274402	3.274404490	0.2490×10^{-5}

Yukarıdaki çizelgede bulunan sonuçlar *Mathematica* programı yardımıyla hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken farklı iterasyon zamanlarında elde edilen sonuçlarda aşağıda hesaplanarak verilmiştir.

Çizelge 5.3. $\rho(x, t)$ ve $a(x, t)$ fonksiyonlarının farklı iterasyon adımları için hesaplama süreleri

	Caputo	Caputo-Fabrizio	Atangana-Baleanu
$\rho_0(x, t)$	0	0	0
$\rho_5(x, t)$	2.13375	0.18125	0.17875
$\rho_{10}(x, t)$	11.52625	2.86375	2.84125
$a_0(x, t)$	0	0	0
$a(x, t)$	0.94500	0.059375	0.058625
$a_{10}(x, t)$	3.12250	0.94875	0.92375

Çizelge 5.3’de de görüldüğü üzere Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev tanımları bilinen Caputo türev tanımına göre çok daha hızlı bir şekilde çalışmaktadır. Bu da gösteriyor ki, yeni tanımlanan türevler daha kullanışlı ve hızlıdır.



KAYNAKLAR

- Atangana, A. and Koca I., 2016. Chaos in a simple nonlinear system with Atangana–Baleanu derivatives with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, 447-454.
- Atangana, A. and Baleanu D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model *Thermal Science, OnLine-First* (00), 18-18.
- Atangana, A., 2016. On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher’s reaction–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 273, 948-956.
- Atangana, A., 2016. Derivative with two fractional orders: A new avenue of investigation toward revolution in fractional calculus. *The European Physical Journal Plus*, 131(10), 373.
- Atangana, A., and Alkahtani B. S. T., 2015. Analysis of the Keller–Segel model with a fractional derivative without singular kernel. *Entropy*, 17(6), 4439-4453.
- Atkins, P. W., 1978. *Molecules in motion: ion transport and molecular diffusion*. Physical Chemistry. PW Atkins, editor. Oxford University Press. Oxford, UK, 819-848.
- Baleanu, D., Diethelm K., Scalas E., and Trujillo J. J., 2012. *Fractional calculus: models and numerical methods* (Vol. 3). World Scientific.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5), 529-539.
- Caputo, M. and Fabrizio M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2), 1-13.
- Chen, X., 1992. Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations. *Journal of Differential equations*, 96(1), 116-141.
- Dalir, M., and Bashour M., 2010. Applications of fractional calculus. *Applied Mathematical Sciences*, 4(21), 1021-1032.
- Davison, M., and Essex, C., 1998. Fractional differential equations and initial value problems. *Mathematical Scientist*, 23(2), 108-116.
- Diethelm, K., 2010. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer.
- Fisher, R. A., 1937. The wave of advance of advantageous genes, *Annu. Eugenics*, 7, 255-369.
- Flynn, G. L., 2002. Cutaneous and transdermal delivery-processes and systems of delivery. *Modern pharmaceuticals*, 4th ed., Banker GS, Rhodes Ch. T., Eds, 293-364.
- Hilfer, R., 2000. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific.
- Hillen, T., and Painter, K. J., 2009. A user’s guide to PDE models for chemotaxis. *Journal of mathematical biology*, 58(1-2), 183.
- Horstmann, D., 2003. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences.
- Horstmann, D., 2001. Lyapunov functions and L_p -estimates for a class of reaction-diffusion systems. *Coll. Math*, 87(1), 113-127.

- Höfer, T., 1999. Chemotaxis and aggregation in the cellular slime mould. *Transport and Structure*, 137-150.
- Kawasaki, K., Mochizuki A. Matsushita M. Umeda T. and Shigesada N., 1997. Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis*. *Journal of theoretical biology*, 188(2), 177-185.
- Keller, E. F., and Segel L. A., 1970. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26(3), 399-415.
- Keller, E. F., and Segel L. A., 1971. Model for chemotaxis. *Journal of theoretical biology*, 30(2), 225-234.
- Kessler, D. A., and Levine H., 1998. Fluctuation-induced diffusive instabilities. *Nature*, 394(6693), 556.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006. Preface.
- Kiryakova, V. S., 1993. Generalized fractional calculus and applications. CRC press.
- Kolmogorov, A. N., Petrovsky I. G. and Piskunov N. S., 1937. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Math. Bull*, 1(1-25), 129.
- Lakshmikantham, V., and Vatsala A. S., 2007. Theory of fractional differential inequalities and applications. *Communications in Applied Analysis*, 11(3-4), 395-402.
- Losada, J., and Nieto J. J., 2015. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2), 87-92.
- McBride, A. C., 1979. Fractional calculus and integral transforms of generalized functions (Vol. 31). London: Pitman.
- Miller, K. S. and Ross, B., 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.
- Murray, J. D., 2002. Mathematical biology I: an introduction. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, 17
- Nishimoto, K., 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus in the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order. Descartes Press Company.
- Oldham, K., and Spanier, J., 1974. The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order (Vol. 111). Elsevier.
- Patlak, C. S., 1953. Random walk with persistence and external bias. *Bulletin of Mathematical Biology*, 15(3), 311-338.
- Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications (Vol. 198). Academic press.
- Rubin, B., 1996. Fractional integrals and potentials (Vol. 82). CRC Press.
- Schnakenberg, J., 1979. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *Journal of theoretical biology*, 81(3), 389-400.
- Turing, A. M., 1952. The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. R.Soc.*, 237, 37-72.
- Wesselingh J. A., 1993. Controlling diffusion, *J.Cont.Rel.* 24, 47-60.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılı Erzurum doğumludur. İlk, orta ve lise eğitimini Kastamonu’da tamamladıktan sonra 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne yerleşti. 2007-2011 yılları arası özel kurumlarda matematik öğretmenliği yaptı. Daha sonra 2011 yılında Yurtdışı Lisansüstü Bursu (YLYS) kapsamında İngiltere Bath Üniversitesinde yüksek lisansını tamamladı. 2014 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Aynı yıl Uygulamalı Matematik anabilim dalında doktora eğitimine başladı.

Evli ve bir kız çocuğu olup, halen Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.