

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS DENKLEMİNİN
SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ÖNAL

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alaattin ESEN

AĞUSTOS 2020

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS DENKLEMİNİN
SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Murat ÖNAL
(36173614039)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alaattin ESEN

AĞUSTOS 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında engin bilgi ve birikimleriyle bana destek olan, mütevazı kişiliğiyle büyük saygı duyduğum tez danışmanım, kıymetli hocam Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, sabırla ve titizlikle bana yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, her zaman olduğu gibi bu çalışmam sürecinde bana her türlü destek olan aileme ve tezin uygulama aşamasında FYL-2018-1082 proje kodlu çalışmamıza vermiş oldukları maddi destekten dolayı, İnönü Üniversitesi BAP birimine teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kesirli Mertebeden Burgers Denklemine Sonlu Fark Yöntemleri ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Murat ÖNAL



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Özel Fonksiyonlar	4
2.1.1 Gama fonksiyonu.....	4
2.1.2 Beta fonksiyonu.....	5
2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu	5
2.2 Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları.....	6
2.2.1 Grünwald-Letnikov kesirli türevi	6
2.2.2 Riemann-Liouville kesirli türevi	7
2.2.3 Caputo kesirli türevi	7
2.2.4 L_1 ve L_2 formülleri.....	8
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1 Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi	9
3.2 Sonlu Fark Yöntemleri	10
3.3 Taylor Seri Yöntemi Kullanarak Sonlu Fark Yaklaşımlarının Elde Edilmesi	13
3.3.1 Bir fonksiyon için Taylor seri açılımı	13
3.3.2 Birinci mertebeden türev için sonlu fark formülleri	15
3.3.2.1 İki nokta ileri fark yaklaşımı.....	15
3.3.2.2 İki nokta geri fark yaklaşımı.....	15
3.3.2.3 İki nokta merkezi fark yaklaşımı	16
3.3.3 İkinci mertebeden türev için sonlu fark formülleri.....	16
3.3.3.1 Üç nokta ileri fark yaklaşımı	16
3.3.3.2 Üç nokta geri fark yaklaşımı.....	17
3.3.3.3 Üç nokta merkezi fark yaklaşımı	17
3.3.4 Açık (<i>Explicit</i>) yöntem	20
3.3.5 Kapalı(<i>Implicit</i>) yöntem	20
3.3.6 Crank-Nicolson yöntemi	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	22
4.1 Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi İçin Sonlu Fark Şemaları	22
4.1.1 Kesirli mertebeden Burgers denklemi için kapalı sonlu fark yöntemleri	23
4.1.2 Kesirli mertebeden Burgers denklemi için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi .	24
4.2 Sonlu Fark Yöntemleriyle Kesirli Mertebeden Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri	25
4.2.1 Problem 1.....	26
4.2.2 Problem 2.....	36

4.2.3 Problem 3.....	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR.....	60
ÖZGEÇMİŞ	63



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 : Birinci mertebeden türev için sonlu fark yaklaşımları.....	16
Çizelge 3.2 : İkinci mertebeden türev için sonlu fark yaklaşımları.....	18
Çizelge 3.3 : Çeşitli mertebeden fark yaklaşımları için hata mertebeleri	19
Çizelge 4.1 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	27
Çizelge 4.2 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	27
Çizelge 4.3 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	28
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	28
Çizelge 4.5 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	29
Çizelge 4.6 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	30
Çizelge 4.7 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	30
Çizelge 4.8 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	31
Çizelge 4.9 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	31
Çizelge 4.10 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	32
Çizelge 4.11 : Problem 1'in $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.0005$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	32
Çizelge 4.12 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	33
Çizelge 4.13 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	33

Çizelge 4.14: Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	34
Çizelge 4.15: Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	34
Çizelge 4.16: Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	35
Çizelge 4.17: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	37
Çizelge 4.18: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	37
Çizelge 4.19: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	38
Çizelge 4.20: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	38
Çizelge 4.21: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	39
Çizelge 4.22: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	39
Çizelge 4.23: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	40
Çizelge 4.24: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	40
Çizelge 4.25: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	41
Çizelge 4.26: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	42
Çizelge 4.27: Problem 2'nin $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00025$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	42
Çizelge 4.28: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	43
Çizelge 4.29: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	43

Çizelge 4.30: Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	44
Çizelge 4.31: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	44
Çizelge 4.32: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	45
Çizelge 4.33: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	47
Çizelge 4.34: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	47
Çizelge 4.35: Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	48
Çizelge 4.36: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	48
Çizelge 4.37: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	49
Çizelge 4.38: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	49
Çizelge 4.39: Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	50
Çizelge 4.40: Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	50
Çizelge 4.41: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	51
Çizelge 4.42: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	51
Çizelge 4.43: Problem 3'ün $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00025$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	52
Çizelge 4.44: Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	52
Çizelge 4.45: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	53

Çizelge 4.46: Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	53
Çizelge 4.47: Problem 3'ün $N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması	54
Çizelge 4.48: Problem 3'ün $N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması.....	54
Çizelge 4.49: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N ' in farklı değerleri için problem 1'in hata normlarının Referans [1]'da verilen değerlerle karşılaştırılması	55
Çizelge 4.50: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için problem 2'nin hata normlarının Referans [1] teki değerlerle karşılaştırılması	55
Çizelge 4.51: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için problem 3 nin hata normlarının Referans [1] teki değerlerle karşılaştırılması	55
Çizelge 4.52: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı' in hata normlarının karşılaştırılması	56
Çizelge 4.53: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç İterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 1' in hata normlarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.54: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı Yöntem İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 2'in hata normlarının karşılaştırılması	56
Çizelge 4.55: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 2'in hata normlarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.56: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı Yöntem İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 3'in hata normlarının karşılaştırılması	57
Çizelge 4.57: $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 3'in hata normlarının karşılaştırılması.....	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 : Değişik ızgara modelleri	12
Şekil 3.2 : Sonlu fark yöntemleri için grid temsili.....	14
Şekil 4.1 : Problem 1'in Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri	35
Şekil 4.2 : Problem 2'nin Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri	41
Şekil 4.3 : Problem 3'ün Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri	58

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

MURAT ÖNAL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

63+xi sayfa

2020

Danışman: Prof. Dr. Alaattin ESEN

Beş bölümden oluşan tezde, ilk bölüm giriş kısmı olarak verildi. Burada kesirli analiz ifadesinin tarihsel ve bilimsel gelişimi ile literatür özetinden bahsedildi.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılan temel kavramlar genel hatlarıyla incelendi.

Üçüncü bölümde, bu çalışmada model problem olarak kullanılacak olan kesirli mertebeden Burgers denklemi tanıtılıp literatür özeti verildi. Ayrıca denklemin çözümünde kullanılacak olan klasik sonlu fark yöntemleri de bu bölümde tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, kesirli mertebeden Burgers denklemi için sonlu fark şemaları oluşturuldu. Model problem için üç farklı başlangıç ve sınır koşulu ele alınıp iç iterasyon ve Rubin Graves lineerleştirme teknikleri kullanılarak kapalı ve Crank Nicolson sonlu fark yöntemleri için toplamda dört farklı şema elde edildi. Nümerik çözümler bu dört şema yardımıyla bulunup elde edilen sonuçlar çizelgeler ve şekiller yardımıyla sunuldu.

Beşinci bölüm sonuç ve öneriler olarak düzenlendi. Bu bölümde elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Mertebeden Türev, Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi, Kapalı Sonlu Fark Yöntemi.

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER BURGERS EQUATION BY FINITE DIFFERENCE METHODS

Murat ÖNAL

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

63+xi pages

2020

Supervisor: Prof. Dr. Alaattin ESEN

In this thesis, which consists of five chapters, the first chapter is presented as an introduction. In this chapter, the historical and scientific development of the fractional analysis concept and the literature survey are given.

In the second chapter, the basic concepts used in the study are examined in general terms.

In the third chapter, the fractional order Burgers equation that are going to be used as a model problem in this study is introduced and a literature survey is given. Also, classical finite difference methods to be used in solving the equation are introduced in this chapter.

In the fourth chapter, finite difference schemes are created for the fractional order Burgers equation. For the model problem, three different initial and boundary conditions are taken and implicit and Crank Nicolson finite difference schemes using inner iteration and Rubin Graves linearization techniques are utilized. A total of four different schemes were obtained for those methods. Numerical solutions were found with the help of these four schemes and the results were presented with the help of tables and figures.

The fifth chapter was organized as conclusion and suggestions. A general evaluation of the results obtained in this chapter has also been made.

Keywords: Fractional order Derivative, Fractional Order Burgers equation, Finite Difference Methods, Crank-Nicolson Finite Difference Method, Implicit Finite Difference Method.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler çevremizdeki dünyayı modelleme ve tahmin etme konusunda dikkate değer bir yeteneğe sahiptir. Örneğin, bir bitkinin büyümesi, borsadaki dalgalanmalar, hastalıkların yayılması veya bir nesneye etki eden fiziksel güçler gibi çok çeşitli oluşumlarda diferansiyel denklemler etkin rol oynamaktadır. Bununla birlikte zaman içerisinde, bilim insanları diferansiyel denklemlerin, katılarda yayılma, yarı iletkenlerde yük iletimi veya ekolojik modellerde hayvan göçleri gibi bazı sürekli oluşumları modelleme konusunda her zaman yeterli olmadığını ve kesirli operatörlerin yani kesirli türev ve integralleri içeren kesirli analizin gerçek dünya olaylarını daha verimli bir şekilde modelleyebildiğini keşfetti. Başka bir deyişle kesirli analiz doğanın gerçekliğini bilim diline daha iyi çeviriyordu. Belki de kesirli analiz doğanın anladığı dildi ve bu nedenle doğa ile bu dilde konuşmak gerekirdi. Fakat kesirli analiz en az klasik analiz kadar köklü, yaklaşık olarak üç asırlık bir geçmişe sahip olmasına rağmen uzun yıllar boyunca bilimsel toplulukların dikkatini çekmeyi başaramamıştı. Bu konunun bilim ve mühendislik topluluğuna doğayı daha iyi anlamak veya tanımlamak için başka bir boyut eklemesi ile kesirli analiz popüler bir konu olarak ilerlemeye devam etti.

Kesirli analiz, klasik mertebeden türev ve integral tanımlarının tamsayı olmayan mertebeye genelleştirilmesidir. Fakat bu tanımla birlikte birçok ilginç soru ortaya çıkabilir. Örneğin, eğer bir fonksiyonun ilk türevi eğimi veriyorsa, yarım türevin geometrik anlamı nedir? Yarım mertebeden bir türev ile ilk türevi elde edilmek isteniyorsa hangi operatör iki kez kullanılmalıdır? Bu soruların derin tarihi, Gottfried Wilhelm Leibniz'in ilk kez kesirli türevin var olma olasılığını önerdiği, kesirli diferansiyel ve integral hesabının temellerini geliştirdiği on yedinci yüzyılın sonlarına, kesirli analizin doğuşuna kadar uzanır. Leibniz $f(x)$ fonksiyonunun n mertebeden türevini simgeleyen

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

sembolü tanıttı ve bunu $n \in \mathbb{N}$ varsayımı ve geliştirilmesini örtük bir şekilde önererek

“Tamsayı mertebeden türevlerin anlamı, tamsayı olmayan mertebeden türevler için genelleştirilebilir mi?”

sorusunu gündeme getirdi. L'Hospital bu soruyu merak etti ve Leibniz'e başka bir soru ile cevap verdi:

“ $n = 1/2$ için $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ türevinin anlamı ne olur?”

Kesirli analizin doğum günü olan 30 Eylül 1695 tarihli bir mektupta Leibniz’in yanıtı ise;

“*bir gün yararlı sonuçların ortaya çıkacağı aşikâr bir paradokstur*”

oldu. Böylece, 300 yıldan daha uzun süredir devam eden kesirli mertebeden türev dediğimiz alanın ilk temelleri atıldı. Özellikle $n = 1/2$ için sorunun sorulması ise matematiğin bu alanına kesirli isminin verilmesini sağladı. Her ne kadar verilen bu isim, türevin mertebesinin veya integralin katının rasyonel sayılar kümesi ile sınırlanmaması gerektiği iyi bilise de, o zamandan beri kullanımda kaldı. Bununla birlikte, kesirli analiz uygulamaları ve çevreleyen matematiksel arka plan paradoksal olmaktan uzaktır. Fiziksel anlamı kavramak zor olsa da tanımlar ve teoremleri klasik analizden daha sert değildir.

1695 tarihli bu mektuptan sonra bu alanda çalışmaya başlayan ilk Leibniz oldu. Daha sonra, Bernoulli, Wallis, Lagrange, Euler, Riemann, Liouville, Laplace, Abel, Weyl gibi birçok matematikçi alana katkıda bulundu. Yıllar boyunca, çok sayıda matematikçi, kendi gösterimlerini ve yaklaşımlarını kullanarak en önemli tanımları *Riemann–Liouville kesirli türevi*, *Caputo kesirli türevi* ve *Grünwald Letnikov kesirli türevi* olmak üzere tamsayı olmayan bir integral veya türev fikrine uyan çeşitli yeni tanımlar ve teoremler sunuldu. Bunlar içinde en önemli olan ise;

Sunulan tanımların yanı sıra yüzyıllar içerisinde kesirli analiz kavramının heterojen bir oluşum ile ilişkili karmaşıklıklar nedeniyle sanayileşmesi, kesirli operatörlerin difüzyon işlemlerine sahip oldukları için çok yönlü ortamların davranışını yakalayabilmeleri ve bilgisayar yazılımı kullanan matematiksel tekniklerin hızla gelişmesi nedeniyle araştırmacıların karmaşık oluşumları analiz ederken bakış açılarını sunarak yeni tanım ve teoremler, yüzlerce kitap ve bilimsel yayınlar sunmaları ile gelişti. Son 30 yılda, bu alan bilimsel ve mühendislik uygulamalarında dikkat çeken bir yükselme göstermiştir.

Bu tezde, Caputo anlamında zamana bağlı kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik sonuçlarının elde edilmesi amaçlandır. Bu nedenle, sonlu fark yöntemlerinde Kapalı Yöntem ve Crank Nicolson Yöntemleri çeşitli lineerleştirme teknikleri ile birleştirilerek dört farklı nümerik şema elde edildi. Yöntemin etkisi ve güvenilirliğinin test edilmesi amacıyla göz önüne alınan Burgers denklemi üç farklı problem için araştırıldı ve nümerik çözümler ile tam çözümlerin

uyumluluğu, ayrıca kullanılan yöntemin diğeri yöntemler kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar ile karşılaştırılması çizelge ve şekiller desteğı ile tartışıldı.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde, kesirli analize ilişkin bazı tanımlar ve özellikler sunularak kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılacak olan kesirli mertebeden türevin ayrıklaştırılması hakkında bilgi verilecektir.

2.1 Özel Fonksiyonlar

2.1.1 Gama fonksiyonu

Kesirli türev ve integral hesabında kullanılan temel fonksiyonlarından biri de Euler'in Gama fonksiyonudur. $\Gamma(n)$ ile göstereceğimiz Gama fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.1.1)$$

ile verilen genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Gama fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

•

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (2.1.2)$$

Bu özellik (2.1.1) Gama fonksiyonu tanımından

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \left[-e^{-t} t^n \right]_{t=0}^{t=\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n)$$

kolayca gösterilebilir.

- $\Gamma(1) = 1$ ve $x = 1, 2, 3, \dots$ için (2.1.2) eşitliği yardımı ile;

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

.....

.....

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

kullanılarak

$$n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

integraline geçiş yapmak mümkündür. Bu özelliğinden dolayı, Gama fonksiyonu **faktöriyel fonksiyonu** olarak da isimlendirilir.

Ayrıca Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (2.1.3)$$

biçiminde limit yardımıyla da gösterilebilir [2].

2.1.2 Beta fonksiyonu

$B(m, n)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

olarak tanımlanır. Bu integral $m > 0, n > 0$ için yakınsaktır. Beta fonksiyonu, Gama fonksiyonu ile

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (2.1.4)$$

ilişkisi ile bağlıdır. Beta fonksiyonu yardımıyla Gama fonksiyonu için önemli iki özellik yazılabilir. Bunların ilki;

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. $x = \frac{1}{2}$ alındığında Gama fonksiyonunun önemli ve kullanışlı bir değeri olan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

elde edilir. İkinci olarak ise; Beta fonksiyonu yardımıyla Gama fonksiyonu için önemli bir formül olan

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{2x-1}\Gamma(2x), (2x \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (2.1.6)$$

Legendre formülü elde edilir [2].

2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu

Diferansiyel denklemler teorisinde büyük bir öneme sahip olan e^x üstel fonksiyonunun bir parametrelili genelleştirilmiş hali; G.M. Mittag-Leffler tarafından, C kompleks sayılar kümesi ve $\alpha \in C$ olmak üzere, $E(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli türev ve integral hesabında büyük bir öneme sahip olan iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise Agarwal tarafından

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlanmıştır [2].

2.2 Kesirli Türev ve İntegral Yaklaşımları

Bu kısımda türev ve integral kavramlarının genelleştirilmiş bazı yaklaşımları verilmiştir. Matematik yanlış isim verme sanatıdır. İlk bakışta gizemli ve güzel bir isim olan kesirli analiz de bu yanlışlardan biridir. Örneğin, doğal sayılar ve gerçekte sayılar gibi isimleri biliyoruz. Kısa bir süre için bu sayıları düşünelim. Doğal sayılar kavramı doğal bir soyutlamadır ancak sayının kendisi doğal mıdır? Ya da gerçekte kelimesinin anlamıyla gerçekte sayılar aynı şeyi ifade etmemektedir. Şimdi tekrar kesirli analiz ismine dönelim. Kesirli analiz keyfi mertebeden türev ve integralin adıdır. Şimdi n . mertebeden türev ve n katlı integrallerin

$$\dots, \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \dots$$

biçimindeki sonsuz dizisini düşünelim. Herhangi $\alpha \in R$ için keyfi mertebeden türev:

$${}_aD_t^\alpha f(t)$$

ile gösterilir. $\beta > 0$ olmak üzere kesirli integrali ise;

$${}_aD_t^{-\beta} f(t)$$

ile gösterilir [2].

2.2.1 Grünwald-Letnikov kesirli türevi

Grünwald-Letnikov türevi, adi türevin kesirli türeve basit bir genişletilmesidir. Bu türev 1867'de Anton Karl Grünwald, sonra da 1867'de Aleksey Vasilievich Letnikov tarafından tanımlanmıştır.

Sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu ve $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m+1$) fonksiyonu $[a, t]$ aralığında sürekli olsun ve m bir tamsayı olmak üzere ($m > p-1$) şartıyla, m için mümkün olan en küçük değer $m < p < m+1$ eşitsizliği ile belirlensin, $f(t)$ fonksiyonunun p 'inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi;

$${}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.2.1)$$

şeklinde. Yine aynı şartlar altında $f(t)$ fonksiyonunun p mertebeden kesirli integrali;

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

olarak verilir [2].

2.2.2 Riemann-Liouville kesirli türevi

Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımında (2.2.1) ile verilen integralin alınabiliyor olduğu durumlar için kullanılması uygundur. Fakat integral işleminin alınamadığı durumlarda, basit bir cevapla

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} d\tau, \quad m \leq p < m+1 \quad (2.2.2)$$

Riemann-Liouville tanımı ile karşılaşılır. Buradan, f fonksiyonu tanımlı olduğu $[a, t]$ aralığında sürekli ve türevli bir fonksiyon $m \in \mathbb{N}$, $m-1 \leq p < m$ olmak üzere f fonksiyonunun p mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi

$${}_a^{RL} D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2.3)$$

şeklindedir. (2.2.3) ile verilen tanım, kesirli türevin en çok bilinen tanımıdır ve

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^p f(t), \quad m \leq p < m+1 \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlik, sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için $(m+1)$ kez türevlenebiliyorsa, Grünwald-Letnikov tanımının Riemann-Liouville tanımına eşit olduğunu gösterir [2].

2.2.3 Caputo kesirli türevi

Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev ve integral tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır (tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerinin çözümü, fonksiyon sınıflarının yeni tanımları, seri toplamları, vb.). Bununla birlikte, modern teknolojinin talepleri, köklü matematiksel yaklaşımların da bir revizyonunu gerektirmektedir.

Gelişmiş modellere dayanan matematiksel modelleme, doğal olarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanılmasına yol açar. Uygulamalı problemler, $f(a)$, $f'(a)$,... gibi fiziksel olarak yorumlanabilen başlangıç koşullarına imkân veren kesirli türevlerin

tanımlanmasını gerektirir. Caputo yaklaşımının en önemli avantajı başlangıç koşullarının bu şekilde alınabilmesidir. $f(t)$ sürekli ve türevli fonksiyonu için Caputo kesirli türevi;

$${}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+1-n}}, \quad n-1 \leq p < n \quad (2.2.4)$$

şeklindedir [2].

2.2.4 $L1$ ve $L2$ formülleri

Kesirli mertebeden Burgers denkleminin çözümünde kullanacağımız sonlu fark şemalarını elde etmek için, Caputo anlamında kesirli türevin diskritize edilmesinde $L1$ ve $L2$ formüllerini kullanacağız. $0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ için $L1$ formülü ;

$$\frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \bigg|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - f(t_{m-1-k})] \quad (2.2.5)$$

dır.

Benzer şekilde $1 < \gamma \leq 2$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}$ olmak üzere $L2$ formülü;

$$\frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} \bigg|_{t_m} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\gamma [f(t_{m-k}) - 2f(t_{m-1-k}) + f(t_{m-2-k})] \quad (2.2.6)$$

dır [3,4].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi

Burgers denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \nu > 0$$

ile verilen, doğrusal olmayan dalga hareketini doğrusal difüzyonla birleştirmenin bir sonucu olarak elde edilen bir denklemdir. Bu denklem zaman evrimi, lineer olmama ve difüzyon arasındaki dengeyi ifade eder. ν viskozite teriminin varlığı dalga kırılmasının engellenmesine, şok süreksizliklerinin giderilmesine yardımcı olur. Burgers denklemi, ilk olarak 1948 de iki zıt etki olan konveksiyon ve difüzyonun etkileşimi olarak tanımlanan türbülansı açıklamak için Burgers tarafından geliştirilmiştir. Burada u_{xx} lineer terimi, ısı denklemindeki gibi difüzyon terimi ve uu_x lineer olmayan terimi ise dalgaların kırılmasına yol açarak şok etkisi yaratır. Burgers denkleminin çözümüyle ilgili Hopf [5] ve Benton [6]'nın araştırmaları ilk dikkat çeken çalışmalardır.

Günümüzde, kesirli mertebeden türev ve integral farklı bilim dallarında araştırmacılar ve uzmanlar arasında daha fazla dikkat çekmeye başlamasıyla çok sayıda matematikçi kesirli mertebeden diferansiyel denklem modellerinin nümerik ve tam çözümleri üzerine yoğunlaştı. Bu modeller içerisinde en önemlisi olan , Burgers denkleminin kesirli versiyonu

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \nu > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1$$

şeklinde verilmiştir.

Burgers ve kesirli mertebeden Burgers denklemlerinin nümerik çözümleri için yapılan bazı çalışmalar şunlardır: Ali ve Gardner [7], kübik B-Spline sonlu elemanlar yöntemiyle nümerik çözümler elde ettiler. Sonlu farklar yöntemini kullanarak Kutluay vd. [8], nümerik çözümler buldular. Wang [9], çalışmasında Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak denklemin yarı analitik çözümünü buldu. Mittal ve Jain [10], modifiye edilmiş kübik B-Spline kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümler verdi. Liu vd. [11], genelleştirilmiş Burgers denkleminin açık, kapalı çözümü ve Li simetri analizi çalışmasında nümerik çözümler elde etti. Jia ve Feng [12], kompleks Burgers denkleminin çözümleri için homotopi dönüşüm metodunu kullandı. Yıldırım ve Mohyud-din [13], kesirli Burgers denkleminin nümerik çözümlerini homotopi analiz yöntemiyle elde etti. Danaf ve Hadhoud [14], makalelerinde kesirli Burgers denkleminin

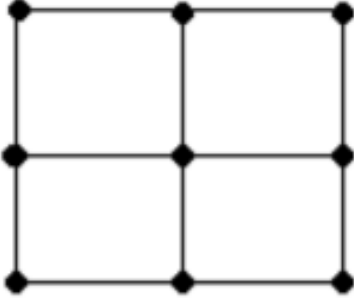
nümerik çözümlerini elde etmek ve sayısal bir yöntem geliştirmek amacıyla parametrik spline fonksiyonlarının genel bir çerçevesini sundular. Khan vd. [15], kesirli Burgers denklemlerinin nümerik çözümleri için genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm tekniği ile homotopi pertürbasyon yöntemini arasında bir karşılaştırma yaptılar. Xu ve Agraval [16], genelleştirilmiş kesirli Burgers denklemi için nümerik çözümler elde etti. Esen vd. [17], kesirli Damped Burgers ve Cahn-Allen denklemleri için homotopi analiz yöntemini kullandılar. Baskonus vd. [18], lineer olmayan kesirli Burgers denkleminin çözümünde homotopi analiz metodu ve modifiye test deneme denklem metodu kullanarak yaklaşık analitik çözümler buldular. Bhrawy vd. [19], Legendre collocation metoduyla kesirli Burgers denkleminin nümerik sonuçlarını hesapladılar. Esen ve Tasbozan [20], kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümleri için kübik B-Spline sonlu elemanlar yöntemini kullandı. Prakash vd. [21], çalışmalarında birleştirilmiş kesirli mertebeden Burgers denklemlerinin çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak yaklaşık tam çözümler elde ettiler. Liu vd. [22], genelleştirilmiş kesirli Burgers denklemi için açık sonlu fark yöntemiyle nümerik çözümlerini buldular. Çenesiz vd. [23], modifiye Burgers ve kesirli Burgers denklemi için integral metoduyla tam sonuçlar elde ettiler. Saad vd. [24], çalışmalarında Liouville-Caputo, Caputo-Fabrizio ve Mittag-Leffler kesirli türeve sahip Burgers denkleminin homotopi analiz dönüşüm metoduyla nümerik çözümlerini elde ettiler. Asgari ve Hosseini [25], makalelerinde genelleştirilmiş Burgers denkleminin tutarlılık, kararlılık ve yakınsama analizleriyle birlikte çözümü için yarı kapalı Fourier pseudospektral şemaları önerdiler. Gaber vd. [26], çalışmalarında lineer olmayan kesirli Burgers denklemlerinin tam çözümünü elde etmek için modifiye Kudryashov metodunu kullandılar.

3.2 Sonlu Fark Yöntemleri

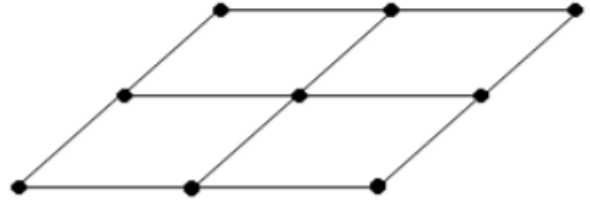
Bilindiği üzere, birçok diferansiyel denklemin analitik çözümünü açık bir şekilde bulmak oldukça zor, hatta bazen de imkansızdır. Bu nedenle yakınsak nümerik şemaların oluşturulması, çözümle ilgili nitel bilgilerin ortaya çıkarılması ve çözümlerin davranışlarının nicel olarak gözlenmesi ve araştırılması son derece önemli ve gereklidir. Örneğin, ısı ve dalga denklemleri gibi bazı denklemlerin açık çözümleri, kapalı formda çözümleri ve sonsuz seri çözümleri mevcut olsa bile nümerik yöntemler ile oldukça kararlı ve yakınsak sonuçlar elde edilebilir. Diferansiyel denklemler için temel nümerik çözüm şemaları iki geniş kategoriye ayrılır. Birincisi, sonlu fark yöntemleri, diğeri ise sonlu eleman yöntemleridir [27]. Bu tezde sonlu fark yöntemleri üzerine yoğunlaşılacaktır.

Sonlu fark yöntemleri başlangıç ve sınır koşulları ile verilen diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bilinen en eski yöntemlerden biridir. Birçok fikir yöntemin temellerinin daha geçmişte izlerinin olduğunu savunsa bile genellikle başlangıç noktası olarak Courant, Friedrichs ve Lewy (1928) tarafından hazırlanan "matematiksel fiziğin problemlerinin sonlu farklar yoluyla çözümü" temel teorik makale kabul edilir [28]. İkinci dünya savaşının hemen sonrasında bilgisayar yardımıyla büyük ölçekli pratik uygulamaların mümkün olması ile birlikte yöntem üzerine önemli ilerlemeler gözlemlenmiştir. Yöntemin gelişimde büyük bir rol oynayan Von Neumann'ın çalışmaların bir kısmı O'Brien, Hyman ve Kaplan [29] çalışmalarında belirtilmiştir. Yöntemin gelişim sürecindeki ilk uygulamalardan biri ise "sonlu fark yöntemlerinin parabolik denklemler için uygulamaları [30]" dır. Ayrıca, bu dönemlerde başlangıç ve sınır koşulları karışık formda verilen (Dirichlet ve Neumann tipi koşulların bir arada bulunması) problemler için kapalı yöntemlerin kullanılması ise Crank ve Nicolson [30] tarafından çalışılmıştır. 1950 ve 1960 larda genel olarak başlangıç değer problemleri ve parabolik problemler için sonlu fark teorisi, Lax denklik teoremleri ve Kreiss matris lemmalarında kararlılık yapısının incelenmesi ile yoğun bir gelişim dönemine girmiştir. Bu dönem boyunca Douglas, Lees, Samarskii, Widlund ve birçok araştırmacı yöntemin gelişimine önemli katkıda bulunmuştur. Hiperbolik denklemler için Friedrichs, Lax ve Wendroff gibi birçok bilim insanının özellikle lineer olmayan korunum yasaları üzerine çalışmaları geçmişten günümüze bilim dünyasının ilerlemesinde hayati bir rol oynamaya devam etmiştir [31]. Yöntemin altında yatan temel fikir, diferansiyel denklemlerde görülen türev terimlerinin sonlu fark denklemleri ile değiştirilmesidir. Bu sonlu fark yaklaşımları cebirsel biçimdedir ve çözümler ise ızgara denilen noktalar üzerinde aranır. Izgara modelleri bir ve iki boyut için Şekil 3.1 de gösterilmiştir.

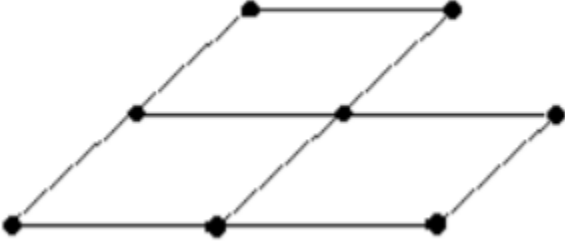
Biraz daha açıklayıcı bir şekilde ifade edilirse, nümerik hesaplamalardaki temel fikirlerden biri takdir yetkisidir. Bu nedenle bir diferansiyel denklem bir cebirsel denkleme indirgenmelidir. Buna göre, hesaplama alanı, hücreler veya elementler adı verilen birden fazla alt alandan oluşan bir ağa veya ızgaraya ayrılır. İndirgenen cebirsel denklemdeki matrislerin büyüklüğü, kafes büyüklüğü, hesaplama alanının boyutları ve bilinmeyenlerin sayısı ile belirlenir. Bu ise bölgenin parçalanma yani ayrıklaştırma işlemi ile bağlantılıdır. Örneğin, Şekil 3.2'de gösterildiği üzere problemin çözüm bölgesi $[a, b] \in D$ olsun, konum adımını $\Delta x = \delta x = h = (b - a)/N$ (N bir tamsayı) ve zaman adımı $\Delta t = \delta t = k = T/M$ olarak D bölgesi boyunca bir dizi yatay ve dikey çizgi ile parçalansın ve tüm kesişim noktaları (x_j, t_n) , veya basitçe (j, n) ile gösterilsin. Burada N ve M bölüntü sayısı, T veya t_{son} ise yine takdir yetkisi kullanılarak, ilgilenilen problemin



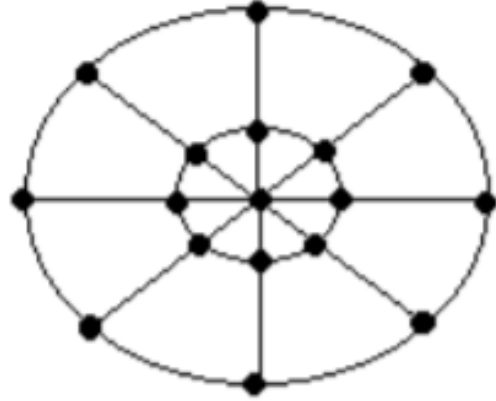
(a) Dikdörtgen ızgara



(b) eğik ızgara



(c) üçgen ızgara



(d) dairesel ızgara.

Şekil 3.1 : Değişik ızgara modelleri

sonlanma zamanını temsil edecektir. Sonlu fark yöntemlerinde, çözüm bölgesindeki bir noktada bağımlı değişkenin değerini, komşu noktalarındaki bağımlı değişkenin değerleri ile ilişkilendirir.

Yöntem temel olarak beş adımdan oluşur:

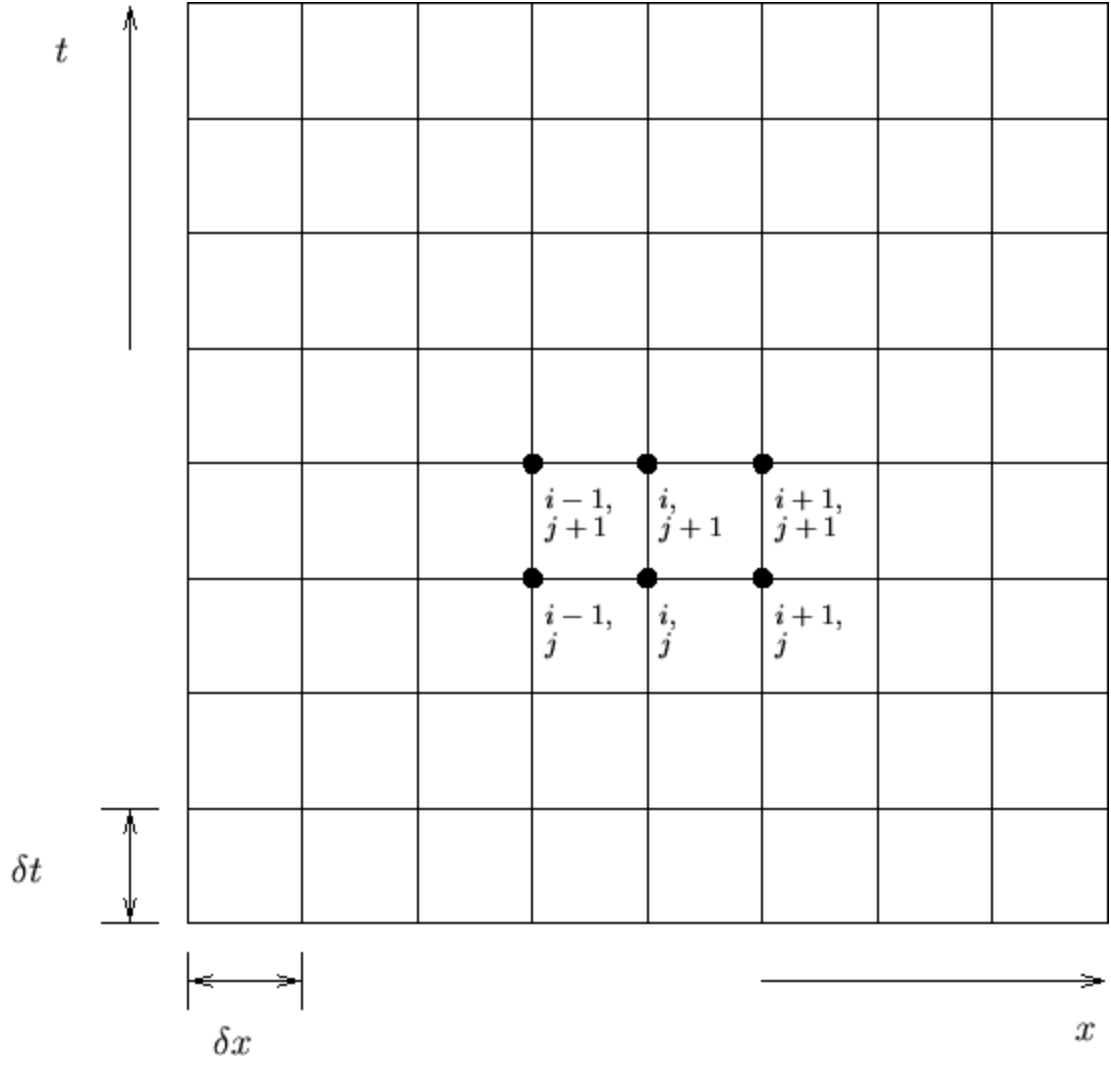
1. Çözüm bölgesi, hesaplama alanını kapsayan bir düğüm ızgarasına veya nokta listesine bölünür.
2. Diferansiyel denklemde türevler yerine sonlu fark yaklaşımları yazılır.
3. Diferansiyel denklem, çözüm bölgesinde oluşturulan ızgara noktalarının herhangi birinde, bağımlı değişkenin komşu noktalarındaki değerleriyle ilişkilendirilir.
4. Fark denklemi adı verilen cebirsel denklem sınır koşullarına ve başlangıç koşullarına tabii olarak çözülür.
5. Analitik ve nümerik olarak hata analizi yapılır.

İkinci adımda bahsedilen türevler yerine yaklaşımların yazılması adımı, aynı türevleri yaklaşık olarak belirlemek için farklı yollar vardır. Bununla birlikte farklı şemalar elde edilir. Bu ise farklı doğruluk seviyelerine neden olur. Ayrıca, zamansal ve konumsal boyutların ayrıştırılması zaman ve konumsal farklardan dolayı farklılık gösterebilir. Zamansal bir boyut için her zaman "başlangıç" ucundaki koşul bilinir ve "son zaman (t_{son})" diye adlandırılan sona doğru yürünmesi gerekir. Konumsal bir boyut için ise sınır koşulları herhangi bir uçta farklılık göstererek verilebilir. Bu her iki tür için kullanılan ayrıştırmalar farklı terim ve şemalar ile sonuçlanır. Farklı şemalardan ve ayrıştırmalardan bahsedilmeden önce, ikinci adımda bahsedilen fark yaklaşımlarının nasıl elde edildiğine değinilmelidir. Daha anlaşılır olması açısından tek değişken üzerinden formüllerin elde edilişi sunulacak daha sonra iki değişkenli denklemler üzerinde formüller sunulacaktır.

3.3 Taylor Seri Yöntemi Kullanarak Sonlu Fark Yaklaşımlarının Elde Edilmesi

3.3.1 Bir fonksiyon için Taylor seri açılımı

Bir fonksiyonun Taylor seri açılımı, fonksiyonun bir nokta civarındaki değerini bulmanın bir yoludur. Bir $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir aralıkta $(n + 1)$ defa türevlenebilir olsun. Taylor teoremi, aralıktaki her x için x ile x_0 arasında bir η değerinin olduğunu belirtir öyle ki;



Şekil 3.2 : Sonlu fark yöntemleri için grid temsili

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} + R_n(\eta)$$

dir. R_n kalan terimi ise

$$R_n(\eta) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \left. \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} \right|_{x=x\eta}$$

ile verilir.

3.3.2 Birinci mertebeden türev için sonlu fark formülleri

3.3.2.1 İki nokta ileri fark yaklaşımı

İki nokta sonlu fark formüllerini oluşturmak için fonksiyonun Taylor seri açılımı kullanılır. Yaklaşımlar elde edilirken yaklaşımdaki noktaların sayısı, noktalar arasındaki aralığın ölçüsü değişiklik gösterebilir. İki nokta arasındaki boşluk sabit ve $h = x_{i+1} - x_i$ seçilsin;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=\eta}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(\eta)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(\eta)$$

İkinci terim, h ile orantılı ve h mertebeden bir kesme hatasını verir.

$$\text{Kesme Hatası} = -\frac{h}{2!} f''(\eta) = O(h)$$

3.3.2.2 İki nokta geri fark yaklaşımı

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=\eta}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(\eta)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + \frac{h}{2!} f''(\eta)$$

ikinci terim, h ile orantılı ve h mertebeden bir kesme hatası verir.

$$\text{Kesme Hatası} = \frac{h}{2!} f''(\eta) = O(h)$$

Birinci mertebeden türev		
Yöntem	Formül	Kesme hatası
İki nokta ileri fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
Üç nokta ileri fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{2h}$	$O(h^2)$
İki nokta geri fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$	$O(h)$
üç nokta geri fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i))}{2h}$	$O(h^2)$
İki nokta merkezi fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$	$O(h^2)$
Dört nokta merkezi fark yaklaşımı	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 8f(x_{i-1}) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12h}$	$O(h^4)$

Çizelge 3.1 : Birinci mertebeden türev için sonlu fark yaklaşımları

3.3.2.3 İki nokta merkezi fark yaklaşımı

İki nokta ileri ve geri fark yaklaşımları göz önüne alınır

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=\eta_1}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=\eta_2}$$

ve

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\eta_1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(\eta_2)$$

buradan

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + \frac{h^2}{3!} f'''(\eta_1) - \frac{h^2}{3!} f'''(\eta_2)$$

yine ikinci ve üçüncü terimlerin ihmal edilmesi ile

$$Kesme Hatası = \frac{h^2}{3!} f'''(\eta_1) - \frac{h^2}{3!} f'''(\eta_2) = O(h^2)$$

olarak elde edilir. Üç yaklaşım arasında bir karşılaştırma yapılırsa, küçük h değerleri için merkezi fark yaklaşımı ileri ve geri fark yaklaşımına göre daha iyi bir yaklaşım sağlar. Merkezi fark yaklaşımı sadece iç noktalar için kullanışlıdır. Üç ve daha fazla nokta kullanılarak fark yaklaşımları benzer şekilde elde edilir. Bazı yaklaşımlar Çizelge 3.1’de sunulmuştur

3.3.3 İkinci mertebeden türev için sonlu fark formülleri

3.3.3.1 Üç nokta ileri fark yaklaşımı

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\eta_1)$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(\eta_2)$$

olup buradan

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} - \frac{8h}{3!}f'''(\eta_2) + \frac{h}{3!}f'''(\eta_1)$$

ve

$$Kesme Hatası = -\frac{8h}{3!}f'''(\eta_2) + \frac{h}{3!}f'''(\eta_1) = O(h)$$

şeklindedir.

3.3.3.2 Üç nokta geri fark yaklaşımı

Benzer şekilde üç nokta geri fark yaklaşımı $f(x_{i-1})$ ve $f(x_{i-2})$ kullanılarak

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^2} + \frac{8h}{3!}f'''(\eta_2) - \frac{h}{3!}f'''(\eta_1)$$

ve

$$Kesme Hatası = \frac{8h}{3!}f'''(\eta_2) - \frac{h}{3!}f'''(\eta_1) = O(h)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.3.3 Üç nokta merkezi fark yaklaşımı

Üç nokta merkezi fark yaklaşımı ise

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f''''(\eta_1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f''''(\eta_2)$$

kullanılarak

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2} + \frac{h^2}{4!}f''''(\eta_2) - \frac{h^2}{4!}f''''(\eta_1)$$

olup

$$Kesme Hatası = \frac{h^2}{4!}f''''(\eta_2) - \frac{h^2}{4!}f''''(\eta_1) = O(h^2)$$

bulunur. Aynı prosedür daha yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşımları geliştirmek için kullanılabilir. Sonuç Çizelge 3.2 de özetlenmiştir.

Birden fazla bağımsız değişken içeren fonksiyonlar için, fonksiyonun değişkenlerden birine göre kısmi türev alınırken, diğer değişken sabit tutulur. Sonlu fark yaklaşımını genellemek için x ve t ye bağlı bir U fonksiyonu alalım. U 'nun kısmi türevlerine x 'e göre yaklaşacağız. U fonksiyonunun Taylor seri açılımı;

İkinci mertebeden Türev		
Yöntem	Formül	Kesme hatası
Üç nokta ileri fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
Dört nokta ileri fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) - f(x_{i+3}))}{h^2}$	$O(h^2)$
Üç nokta geri fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
Dört nokta geri fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i-3}) + 4f(x_{i-2}) - 5f(x_{i-1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Üç nokta merkezi fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$	$O(h^2)$
beş nokta merkezi fark yaklaşımı	$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12h^2}$	$O(h^4)$

Çizelge 3.2 : İkinci mertebeden türev için sonlu fark yaklaşımları

$$U(x_0 + \Delta x, t) = U(x_0, t) + \Delta x U_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(x_0, t) + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} U_{(n-1)}(x_0, t) + O(\Delta x^n)$$

şeklinde yazılır. $n=2$ için ;

$$U(x_0 + \Delta x, t) = U(x_0, t) + \Delta x U_x(x_0, t) + O(\Delta x^2)$$

dır. Şimdi kısmi türevler için bazı sonlu fark yaklaşımlarını gösterelim. Yukarıdaki son eşitliği tekrar düzenlersek;

$$U_x(x_0, t) = \frac{U(x_0 + \Delta x, t) - U(x_0, t)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} = \frac{U(x_0 + \Delta x, t) - U(x_0, t)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

olup her (x_0, t) noktasında eşitlik sağlanır. Kısmi diferansiyel denklemin çözümü için nümerik şemalarda x in $x_1, x_2, \dots, x_N$ ve t 'nin $0 = t_1, t_2, \dots$ ayırık değerleri bir kafesle sınırlandırılır. $\Delta x, x$ için sabit bir aralık olarak kabul edilirse $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ olur. Denklem (x_i, t_n) noktası için yeniden değerlendirilir;

$$U_x(x_i, t_n) = \frac{U(x_{i+1}, t_n) - U(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

olur. $U_i^n = U(x_i, t_n)$ notasyonu kullanılarak eşitlik;

$$U_x(x_i, t_n) \approx \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}$$

şeklinde yazılabilir. Bu $U_x(x_i, t_n)$ için birinci mertebeden ileri fark yaklaşımıdır. Benzer şekilde elde edilen fark yaklaşımlarını Çizelge 3.3 ile gösterilmiştir [32].

Yukarıda verilen çizelgelerde görüldüğü üzere sonlu fark yöntemlerinin zamansal ve konumsal boyutların ayrıklaştırılmasına göre nümerik şemalarda farklılık gösterecektir. Böylece

Çizelge 3.3 : Çeşitli mertebeden fark yaklaşımları için hata mertebeleri

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Fark yaklaşım ismi
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}$	İleri Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}$	Geri Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$	Merkezi Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}$	$\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$	Merkezi Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial U}{\partial t} = U_t$	$\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta t}$	İleri Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial U}{\partial t} = U_t$	$\frac{U_i^n - U_{i-1}^{n-1}}{\Delta t}$	Geri Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial U}{\partial t} = U_t$	$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t}$	Merkezi Fark Yaklaşımı
$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = U_{tt}$	$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{(\Delta t)^2}$	Merkezi Fark Yaklaşımı

yukarıda Çizelgeler 3.1, 3.2 ve 3.3 ile verilen formüllerin kombinasyonuna göre en temel olarak üç farklı sonlu fark yöntemi ile karşılaşılır. Bunlar; Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir. Tezin bu bölümünde tanıttığımız sonlu fark yöntemlerinin daha iyi kavranması amacıyla yöntemlerin basit bir uygulamasını difüzyon denklemi üzerinde ele alalım;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D$$

olmak üzere x konum ve t zaman değişkenlerine göre u bilinmeyen bir fonksiyon olsun. Difüzyon denklemi aşağıda verilen başlangıç

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

ve $D = [a, b] \times [0, \infty)$ olmak üzere sınır şartları;

$$u(a, t) = g_1(t) \quad u(b, t) = g_2(t)$$

ile göz önüne alınsın. Burada u_0 , g_1 ve g_2 problemle birlikte verilen sürekli fonksiyonlardır. Denklemin nümerik çözümlerini sonlu fark yöntemleriyle bulmak için D çözüm bölgesi içinde bir grup düğüm noktası, konum adım uzunluğu $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ ve zaman adım uzunluğu Δt olmak üzere D çözüm bölgesi içinde dikey ve yatay çizgiler çizilerek, tüm (x_i, t_n) veya (i, n) kesim noktaları olacak şekilde belirlendikten sonra Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemaları sırasıyla aşağıda verildiği gibi elde edilir;

3.3.4 Açık (*Explicit*) yöntem

Difüzyon denkleminde sırasıyla $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ türevleri yerine (i, n) düğüm noktasında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_t \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

fark yaklaşımları yerine yazıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

bulunur. $\lambda = \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}$ olmak üzere

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

elde edilir. Bu eşitlik açık yöntem formülasyonudur.

3.3.5 Kapalı (*Implicit*) yöntem

Difüzyon denkleminde $(i, n+1)$ düğüm noktasındaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$u_t \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

fark yaklaşımları yerine yazılırsa

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = c^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}$ olarak yeniden adlandırılırsa;

$$u_i^n = -\lambda u_{i+1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

ile verilen kapalı yöntem formülasyonuna ulaşılır.

3.3.6 Crank-Nicolson yöntemi

Bu yöntem (i, n) noktasındaki açık yöntem şemasıyla, $(i, n + 1)$ deki kapalı yöntem şemasının ortalamasıdır.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}c^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

eşitliğinde $\lambda = c^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ olmak üzere;

$$-\frac{\lambda}{2}u_{i-1}^{n+1} + (1 + \lambda)u_i^{n+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i+1}^{n+1} = \frac{\lambda}{2}u_{i-1}^n + (1 - \lambda)u_i^n + \frac{\lambda}{2}u_{i+1}^n, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

Crank-Nicolson formülasyonudur [33].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Kesirli Mertebeden Burgers Denklemi İçin Sonlu Fark Şemaları

Bu bölümde zamana göre kesirli mertebeden,

$$\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (4.1.1)$$

Burgers denklemi,

$$u(a,t) = h_1(t), \quad u(b,t) = h_2(t), t \geq 0 \quad (4.1.2)$$

sınır ve

$$u(x,0) = g(x) \quad (4.1.3)$$

başlangıç koşulları ile ele alındı. Burada ν viskozite parametresi ve denklemdeki $\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma}$ terimi

$$\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (4.1.4)$$

Caputo anlamında kesirli türevidir [3].

Tezin bu bölümünde (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesi için sonlu fark yöntemleri kullanılacaktır. Çalışmada dört farklı sonlu fark şeması ile problemin çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır. İlk olarak kapalı yöntem kullanılarak lineer olmayan uu_x terimi için iç iterasyon uygulanarak elde ettiğimiz yarı lineerleştirme daha sonra ise Rubin Graves [34] yaklaşımı lineerleştirme işlemi uygulanarak sonlu fark şemaları elde edildi. İkinci durumda ise, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi, iç iterasyon yardımı ile elde edilen lineerleştirme ve Rubin Graves [34] yaklaşımları ile birleştirilerek yine iki farklı nümerik şema elde edilerek toplamda dört farklı şema yardımı ile kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edildi.

Sonlu fark şemaları elde edilirken denklemde görülen zamana göre kesirli mertebeden türevin ayrıklaştırılması için $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere;

$$\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma [U_j^{n-k} - U_j^{n-1-k}] \quad (4.1.5)$$

ile verilen $L1$ formülü ve denklemde görülen birinci ve ikinci mertebeden konuma göre türev içeren terimlerin ayrıklaştırılması için ise sırasıyla x 'e göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri yerine birinci mertebeden merkezi ve ikinci mertebeden simetrik fark yaklaşımları kullanılacaktır.

4.1.1 Kesirli mertebeden Burgers denklemi için kapalı sonlu fark yöntemleri

Sonlu fark yöntemlerinin her biri farklı nümerik özelliklere sahip açık ve kapalı yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Önceki bölümlerde bahsedilmiştir. Kapalı sonlu fark yönteminde bütün türevler ve diğer parametreler (x, t) gridleri boyunca ileri zaman çizgisinde $(n + 1)$ zaman adımında yer alan bilinmeyenleri kullanılarak bulunması amaçlanır. Bu yöntemde, çözüm bir zaman çizgisinden diğerine eş zamanlı olarak tüm noktaları taşır.

Bu bölümde (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi göz önüne alınacak ve denklem için kapalı sonlu fark şemaları elde edilecektir. Bu amaçla, (4.1.4) ile verilen kesirli türeve yaklaşım, x 'e göre merkezi ve simetrik sonlu fark yaklaşımları (4.1.1) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma [u_j^{n-k} - u_j^{n-1-k}] + [U^{n+1} (U_x)^{n+1}] - v [(U_{xx})^{n+1}] &= f(x, t) \\ \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma [u_j^{n-k} - u_j^{n-1-k}] + \left[z_j \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \right] \\ - v \left[\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] &= f(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada lineer olmayan terimin lineerleştirilmesinde $z_j = u_j^n$ olarak alınmıştır. $n \rightarrow n + 1$ ötelemesi yapılır, toplam ifadesi $k = 0$ için açık bir şekilde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise kapalı yöntem ile elde edilen sonlu fark şeması;

$$\begin{aligned} U_{j-1}^{n+1} \left(-\frac{S}{2\Delta x} z_j - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 + \frac{2Sv}{(\Delta x)^2} \right] + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{S}{2\Delta x} z_j - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right) \\ = U_j^n + Sf(x, t) - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma [U_j^{n+1-k} - U_j^{n-k}] \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

olarak elde edilir. Burada; $S = (\Delta t)^\gamma \Gamma(2 - \gamma)$ olmak üzere $j = 1, 2, \dots, N - 1$ için (4.1.6) ile verilen şema bir cebirsel denklem sistemi oluşturur bu sistemin açık bir şekilde yazılması ile $(N - 1) \times (N - 1)$ tipinde bir tridiagonal matris elde edilir. Matrisin elemanlarını oluşturan terimlerde $U_j^n = z_j$ değişken ataması yapılacak ve U_j^n değişkeninin bilinen t_n zaman adımıdaki değeri kullanılarak sistem 1-3 adım yinelenerek çözülecektir. Tez boyunca bu şekilde çözümü yapılan nümerik şema ise iç iterasyon şeması olarak adlandırılacaktır.

İkinci nümerik şemayı elde etmek için lineer olmayan uu_x terimi yerine Rubin Graves [34] yaklaşımı;

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1} (U_x)^n + U^n (U_x)^{n+1} - U^n (U_x)^n \quad (4.1.7)$$

(4.1.1) ile verilen denklemde bulunan uu_x lineer olmayan terimi yerine yazılır ise kesirli mertebeden Burgers denklemi için Rubin Graves kapalı sonlu fark şeması;

$$\begin{aligned} & U_{j-1}^{n+1} \left(-\frac{S}{2\Delta x} U_j^n - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 + \frac{2Sv}{(\Delta x)^2} + \frac{S}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \right] + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{S}{2\Delta x} U_j^n - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right) \\ & = U_j^n \left(1 + \frac{S}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \right) + Sf(x, t) - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[U_j^{n+1-k} - U_j^{n-k} \right] \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

olarak elde edilir

4.1.2 Kesirli mertebeden Burgers denklemi için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi

Crank-Nicolson yöntemi, sonlu fark yöntemleri arasında en popüler olan kapalı sonlu fark yöntemlerinden biridir. Bu yöntemde n -inci ve $(n+1)$ -inci zaman seviyelerinin ortalaması alınarak elde edilir. Yöntem ile elde edilen nümerik şemaların yarı açık ve yarı kapalı şemalar oluşturması pratik uygulamalarda önemli bir yer almasına neden olmuştur.

Tezin bu kısmında (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı uygulanarak üçüncü ve dördüncü nümerik şemalar elde edilecektir. Üçüncü nümerik şemada, Crank-Nicolson yöntemi için yine $U_j^n = z_j$ yardımıyla lineerleştirme işlemleri yardımıyla iç iterasyon içeren nümerik şema elde edilecektir. O halde, denklemde görülen uu_x lineer olmayan terim ve u_{xx} lineer terimi için Crank-Nicolson yaklaşımı uygulanır ise;

$$\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma} + \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} - v \left[\frac{(U_{xx})^{n+1} + (U_{xx})^n}{2} \right] = f(x, t) \quad (4.1.9)$$

elde edilir. Daha sonra denklemi ayırtırmak için zamana göre kesirli mertebeden türev yerine (4.1.4) ile verilen $L1$ algoritması, klasik mertebeden türevler için ise merkezi ve simetrik fark yaklaşımları kullanıldığında;

$$\begin{aligned} & U_j^{n+1} - U_j^n + \frac{S}{2} \left[U_j^{n+1} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + U_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \\ & - \frac{Sv}{2} \left[\left(\frac{U_{j-1}^{n+1} + 2U_j^{n+1} - U_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{U_{j-1}^n + 2U_j^n - U_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \right] \\ & = Sf(x, t) - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[U_j^{n+1-k} - U_j^{n-k} \right] \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında kesirli mertebeden Burgers denklemi için Crank-Nicolson-Nicolson iç iterasyon şeması;

$$\begin{aligned}
& U_{j-1}^{n+1} \left(-\frac{S}{4\Delta x} z_j - \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 + \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right] + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{S}{4\Delta x} z_j - \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) \\
& = U_{j-1}^n \left(\frac{S}{4\Delta x} z_j + \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right] + U_{j+1}^{n+1} \left(-\frac{S}{4\Delta x} z_j + \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) \\
& + Sf(x, t) - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[U_j^{n+1-k} - U_j^{n-k} \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Son nümerik şema elde edilirken, göz önüne alınan denklemin Crank-Nicolson yaklaşımı uygulanmış hali olan (4.1.9) denkleminde $(UU_x)^{n+1}$ terimi için (4.1.7) ile verilen Rubin Graves yaklaşımı uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa kesirli mertebeden Burgers denklemini için Crank-Nicolson şeması ;

$$\begin{aligned}
& U_{j-1}^{n+1} \left(-\frac{S}{4\Delta x} U_j^n - \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 + \frac{Sv}{(\Delta x)^2} + \frac{S}{4\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \right] \\
& + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{S}{4\Delta x} U_j^n - \frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) \\
& = U_{j-1}^n \left(\frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) + U_j^{n+1} \left[1 - \frac{Sv}{(\Delta x)^2} \right] \\
& + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{Sv}{2(\Delta x)^2} \right) + Sf(x, t) - \sum_{k=1}^n b_k^\gamma \left[U_j^{n+1-k} - U_j^{n-k} \right]
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olarak elde edilir. (4.1.6)-(4.1.11) ile verilen dört nümerik şema $AU^{n+1} = B$ formunda lineer denklem sistemleridir. Burada A , $(N-1) \times (N-1)$ tipinde bir üçlü bant matris, B ise $(N-1) \times 1$ tipinde bir vektördür. Elde edilen nümerik şemalarda bulunması istenilen U^{n+1} bilinmeyen değerleri U^n bilinen değerleri yardımıyla iteratif olarak yaklaşık çözüm serisi oluşturmak amacı ile çözülür.

4.2 Sonlu Fark Yöntemleriyle Kesirli Mertebeden Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri

Bu kısımda, kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümlerini araştırmak amacı ile üç temel problem göz önüne alınacaktır. Nümerik sonuçlar, Δt zaman adımları, N bölüntü sayısı, kesirli mertebeden türevin mertebesi olan γ ve ν viskozite parametrelerinin farklı değerleri için çizelgeler ve grafiklerle sunulacaktır.

Ayrıca, elde edilen yeni sonuçlar ile literatürde bulunan farklı yöntemlerle karşılaştırılması yöntemin etkisini ve güvenilirliğini göstermek amacıyla yine çizelgeler ile ifade edilecektir.

4.2.1 Problem 1

İlk model problem olarak (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x,t) = \frac{2t^{2-\gamma} \sin(2\pi x)}{\Gamma(3-\lambda)} + 2\pi t^4 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) + 4\nu\pi^2 t^2 \sin(2\pi x)$$

olmak üzere;

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0, t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile verilsin. Bu problemin tam çözümü;

$$U(x,t) = t^2 \sin(2\pi x)$$

dir [1].

Problem 1 de, kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümü için ilk olarak bir önceki kısımda elde edilen ve (4.1.6) ile verilen kapalı iç iterasyon şeması göz önüne alındı ve nümerik sonuçlar Çizelge (4.1)-(4.4) ile verildi. İlk olarak, $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t_f = 1$, ve viskosite değeri $\nu = 1$ olarak seçildi. N bölüntü sayısının farklı değerleri için nümerik sonuçlar Çizelge 4.1’de sunuldu. Çizelge 4.1’in dikkatlice incelendiğinde N bölüntü sayısının artması ile her bir x noktasında elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere daha yakın olduğu, L_2 ve L_∞ hata normlarının ise beklendiği gibi artan bölüntü sayıları ile birlikte gittikçe azaldığı gözlenir. Çizelge 4.2’de N bölüntü sayısı $N = 120$ sabit seçilerek Δt zaman adımlarının azalan farklı değerleri için kapalı yöntem ile elde edilen nümerik sonuçlar sunuldu. Çizelgeden bir öncekine benzer davranışın Δt değerlerinin azalması ile gerçekleştiği görüldü. Çizelge 4.3’de değişen γ değerler için bulunan sonuçlar gösterildi. γ değerlerinin değişimi ile elde edilen sonuçlar arasında dikkate değer bir değişimin olmadığı çizelgeden açıkça görülmektedir. Çizelge 4.4’de ν viskosite parametresinin değerinin küçülmesi ile hata normlarının azaldığı görüldü.

Çizelge 4.5-4.8 ile Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı yöntem yardımıyla elde edilen nümerik sonuçlar sunuldu. Çizelge 4.5’de N bölüntü sayısının artan değerlerinde elde edilen sonuçlar, Çizelge 4.6’da Δt ’nin azalan değerleri, Çizelge 4.7’de γ ’nın değişen değerleri ve son olarak Çizelge 4.8’de farklı ν viskosite parametrelerinin değerleri için elde edilen sonuçlar gösterildi. Çizelgeler incelendiğinde bu yöntem ile elde edilen sonuçların

Çizelge 4.1 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 40$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.588958	0.588537	0.588082	0.587977	0.587785
0.2	0.952948	0.952267	0.951531	0.951362	0.951057
0.3	0.952938	0.952259	0.951525	0.951355	0.951057
0.4	0.588943	0.588524	0.588071	0.587967	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.588943	-0.588524	-0.588071	-0.587967	-0.587785
0.7	-0.952938	-0.952259	-0.951525	-0.951355	-0.951057
0.8	-0.952948	-0.952267	-0.951531	-0.951362	-0.951057
0.9	-0.588958	-0.588537	-0.588082	-0.587977	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.402415	0.897282	0.350539	0.224444	
$L_\infty \times 10^3$	1.983510	1.267463	0.495854	0.317553	

Çizelge 4.2 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $v = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587962	0.587953	0.587934	0.587924	0.587785
0.2	0.951299	0.951292	0.951279	0.951273	0.951057
0.3	0.951241	0.951246	0.951256	0.951261	0.951057
0.4	0.587868	0.587878	0.587896	0.587905	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587868	-0.587878	-0.587896	-0.587905	-0.587785
0.7	-0.951241	-0.951246	-0.951256	-0.951261	-0.951057
0.8	-0.951299	-0.951292	-0.951279	-0.951273	-0.951057
0.9	-0.587962	-0.587953	-0.587934	-0.587924	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.161884	0.159984	0.157131	0.156206	
$L_\infty \times 10^3$	0.242421	0.235754	0.225276	0.221856	

Çizelge 4.3 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.75$	$\gamma=0.9$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587925	0.587925	0.587924	0.587926	0.587785
0.2	0.951274	0.951274	0.951272	0.951275	0.951057
0.3	0.951263	0.951262	0.951261	0.951263	0.951057
0.4	0.587906	0.587906	0.587905	0.587907	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587906	-0.587906	-0.587905	-0.587907	-0.587785
0.7	-0.951263	-0.951262	-0.951261	-0.951263	-0.951057
0.8	-0.951274	-0.951274	-0.951272	-0.951275	-0.951057
0.9	-0.587925	-0.587925	-0.587924	-0.587926	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.157654	0.157090	0.156116	0.158260	
$L_\infty \times 10^3$	0.223896	0.223104	0.221706	0.224691	

Çizelge 4.4 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu=0.25$	$\nu=0.75$	$\nu=1$	Tam Çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.005879	0.005879	0.005879	0.005879	0.005878
0.2	0.009512	0.009512	0.009513	0.009513	0.009511
0.3	0.009512	0.009512	0.009513	0.009513	0.009511
0.4	0.005879	0.005878	0.005879	0.005879	0.005878
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.005879	-0.587864	-0.005879	-0.005879	-0.005878
0.7	-0.009512	-0.951232	-0.009513	-0.009513	-0.009511
0.8	-0.009512	-0.951279	-0.009513	-0.009513	-0.009511
0.9	-0.005879	-0.587941	-0.005879	-0.005879	-0.005878
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.001292	0.001382	0.001504	0.001528	
$L_\infty \times 10^3$	0.001831	0.001956	0.002128	0.002161	

Çizelge 4.5 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 40$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.588954	0.588533	0.588077	0.587972	0.587785
0.2	0.952944	0.952264	0.951528	0.951358	0.951057
0.3	0.952941	0.952262	0.951527	0.951358	0.951057
0.4	0.588948	0.588529	0.588076	0.587971	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.588948	-0.588529	-0.588076	-0.587971	-0.587785
0.7	-0.952941	-0.952262	-0.951527	-0.951358	-0.951057
0.8	-0.952944	-0.952264	-0.951528	-0.951358	-0.951057
0.9	-0.588954	-0.588533	-0.588077	-0.587972	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.402149	0.897013	0.350257	0.224153	
$L_\infty \times 10^3$	1.983017	1.266356	0.495358	0.317013	

ilk yöntem ile elde edilen sonuçlara benzer davranışlar sergilediği, Rubin Graves yöntemi ile elde edilen sonuçların iç iterasyonla elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü.

Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen sonuçlar Çizelge 4.9-4.16 ile verildi. İç iterasyon şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 4.9-4.12'de sunuldu. $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N 'in farklı değerleri için elde edilen nümerik çözümler Çizelge 4.9'da verildi. Çizelgeden N bölüntü sayısının artmasıyla hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.10'da $\gamma = 0.5$, $N=120$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ için Δt nin farklı değerleri elde edilen sonuçlar gösterildi. Çizelge 4.11 ve 4.12'de sırasıyla γ ve ν parametrelerinin farklı değerleri için bulunan çözümler gösterildi. Yine burada da γ parametresinin değişimi ile kayda değer değişikliklerin olmadığı ancak ν viskozite parametresinin küçülen değerlerinde hatalarında küçüldüğü gözlemlendi. Çizelge 4.13-4.16'da Rubin Graves tekniği yardımı ile sırasıyla N bölüntü sayısı, Δt zaman adımı, γ kesirli türev mertebesi ve ν viskozite değerlerinin farklı değerlerinde alınan sonuçlar verildi.

Şekil 4.1'de farklı zaman adımları için elde edilen çözümlerin tam çözümler ile birlikte grafiği verildi. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi nümerik ve tam çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.6 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587916	0.587916	0.587915	0.587915	0.587785
0.2	0.951268	0.951267	0.951266	0.951266	0.951057
0.3	0.951267	0.951267	0.951266	0.951266	0.951057
0.4	0.587915	0.587915	0.587914	0.587914	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587915	-0.587915	-0.587914	-0.587914	-0.587785
0.7	-0.951267	-0.951267	-0.951266	-0.951266	-0.951057
0.8	-0.951268	-0.951267	-0.951266	-0.951266	-0.951057
0.9	-0.587916	-0.587916	-0.587915	-0.587915	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.156679	0.156379	0.155894	0.155723	
$L_\infty \times 10^3$	0.221597	0.221169	0.220477	0.220235	

Çizelge 4.7 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587916	0.587916	0.587915	0.587917	0.587785
0.2	0.951268	0.951267	0.951266	0.951269	0.951057
0.3	0.951265	0.951267	0.951266	0.951268	0.951057
0.4	0.587916	0.587915	0.587914	0.587916	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587916	-0.587915	-0.587914	-0.587916	-0.587785
0.7	-0.951268	-0.951267	-0.951266	-0.951268	-0.951057
0.8	-0.951268	-0.951267	-0.951266	-0.951269	-0.951057
0.9	-0.587916	-0.587916	-0.587915	-0.587917	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.157225	0.156655	0.155532	0.157647	
$L_\infty \times 10^3$	0.222357	0.221551	0.219965	0.222952	

Çizelge 4.8 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1.0$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.005879	0.005879	0.005879	0.005879	0.005878
0.2	0.009513	0.009512	0.009513	0.009513	0.009511
0.3	0.009513	0.009512	0.009513	0.009513	0.009511
0.4	0.005879	0.005878	0.005879	0.005879	0.005878
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.005879	-0.005878	-0.005879	-0.005879	-0.005878
0.7	-0.009513	-0.009512	-0.009513	-0.009513	-0.009511
0.8	-0.009513	-0.009512	-0.009513	-0.009513	-0.009511
0.9	-0.005879	-0.005879	-0.005879	-0.005879	-0.005878
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.001291	0.001382	0.001464	0.001528	
$L_\infty \times 10^3$	0.001826	0.001955	0.002071	0.002161	

Çizelge 4.9 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 40$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.588955	0.588534	0.588078	0.587973	0.587785
0.2	0.952941	0.952261	0.951525	0.951355	0.951057
0.3	0.952931	0.952253	0.951518	0.951348	0.951057
0.4	0.588939	0.588520	0.588067	0.587962	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.588939	-0.588520	-0.588067	-0.587962	-0.587785
0.7	-0.952931	-0.952253	-0.951518	-0.951348	-0.951057
0.8	-0.952941	-0.952261	-0.951525	-0.951355	-0.951057
0.9	-0.588955	-0.588534	-0.588078	-0.587973	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.397469	0.892344	0.345610	0.219519	
$L_\infty \times 10^3$	1.976522	1.260533	0.488887	0.310637	

Çizelge 4.10 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587925	0.587923	0.587919	0.587917	0.587785
0.2	0.951236	0.951242	0.951254	0.951260	0.951057
0.3	0.951175	0.951193	0.951229	0.951247	0.951057
0.4	0.587826	0.587843	0.587879	0.587897	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587826	-0.587843	-0.587879	-0.587897	-0.587785
0.7	-0.951175	-0.951193	-0.951229	-0.951247	-0.951057
0.8	-0.951236	-0.951242	-0.951254	-0.951260	-0.951057
0.9	-0.587925	-0.587923	-0.587919	-0.587917	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.115992	0.122629	0.138020	0.146580	
$L_\infty \times 10^3$	0.181231	0.185566	0.198810	0.208372	

Çizelge 4.11 : Problem 1'in $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.0005$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587919	0.587918	0.587917	0.587919	0.587785
0.2	0.951263	0.951262	0.951260	0.951263	0.951057
0.3	0.951250	0.951249	0.951247	0.951251	0.951057
0.4	0.587899	0.587898	0.587896	0.587899	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587899	-0.587898	-0.587896	-0.587899	-0.587785
0.7	-0.951250	-0.951249	-0.951247	-0.951251	-0.951057
0.8	-0.951263	-0.951262	-0.951260	-0.951263	-0.951057
0.9	-0.587919	-0.587918	-0.587917	-0.587919	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.148899	0.147906	0.146502	0.148983	
$L_\infty \times 10^3$	0.211623	0.210233	0.208255	0.211719	

Çizelge 4.12 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1.0$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.005864	0.005871	0.005874	0.005877	0.005878
0.2	0.009489	0.009499	0.009505	0.009509	0.009511
0.3	0.009489	0.009499	0.009505	0.009509	0.009511
0.4	0.005864	0.005871	0.005874	0.005877	0.005878
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.005864	-0.005871	-0.005874	-0.005877	-0.005878
0.7	-0.009489	-0.009499	-0.009505	-0.009509	-0.009511
0.8	-0.009489	-0.009499	-0.009505	-0.009509	-0.009511
0.9	-0.005864	-0.005871	-0.005874	-0.005877	-0.005878
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.016325	0.008398	0.004102	0.001451	
$L_\infty \times 10^3$	0.023087	0.011877	0.005801	0.002053	

Çizelge 4.13 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N=40$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.588803	0.588382	0.587926	0.587821	0.587785
0.2	0.952700	0.952020	0.951284	0.951114	0.951057
0.3	0.952696	0.952017	0.951283	0.951113	0.951057
0.4	0.588796	0.588378	0.587924	0.587820	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.588796	-0.588378	-0.587924	-0.587820	-0.587785
0.7	-0.952696	-0.952017	-0.951283	-0.951113	-0.951057
0.8	-0.952700	-0.952020	-0.951284	-0.951114	-0.951057
0.9	-0.588803	-0.588382	-0.587926	-0.587821	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.220073	0.715072	0.168462	0.042393	
$L_\infty \times 10^3$	1.725529	1.009600	0.238266	0.059969	

Çizelge 4.14 : Problem 1'in $\gamma = 0.5$, $N = 120$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

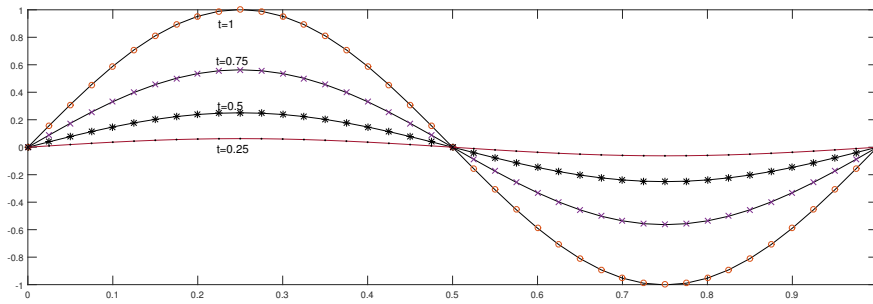
x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.586408	0.586709	0.587312	0.587613	0.587785
0.2	0.948825	0.949313	0.950289	0.950778	0.951057
0.3	0.948821	0.949310	0.950288	0.950877	0.951057
0.4	0.586402	0.586704	0.587309	0.587612	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.586402	-0.586704	-0.587309	-0.587612	-0.587785
0.7	-0.948821	-0.949310	-0.950288	-0.950877	-0.951057
0.8	-0.948825	-0.949313	-0.950289	-0.950778	-0.951057
0.9	-0.586408	-0.586709	-0.587312	-0.587613	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	1.660756	1.297570	0.571082	0.207766	
$L_\infty \times 10^3$	2.348579	1.834972	0.807594	0.293801	

Çizelge 4.15 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma = 0.1$	$\Delta t = 0.25$	$\Delta t = 0.75$	$\Delta t = 0.9$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.587766	0.587765	0.587764	0.587764	0.587785
0.2	0.951024	0.951023	0.951021	0.951022	0.951057
0.3	0.951024	0.951023	0.951020	0.951021	0.951057
0.4	0.587765	0.587764	0.587762	0.587763	0.587785
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.587765	-0.587764	-0.587762	-0.587763	-0.587785
0.7	-0.951024	-0.951023	-0.951020	-0.951021	-0.951057
0.8	-0.951024	-0.951023	-0.951021	-0.951022	-0.951057
0.9	-0.587766	-0.587765	-0.587764	-0.587764	-0.587785
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.024119	0.024905	0.026695	0.025792	
$L_\infty \times 10^3$	0.034099	0.035211	0.037745	0.036467	

Çizelge 4.16 : Problem 1'in $N = 120$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\Delta t = 1.0$	Tam çözüm
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.005835	0.005842	0.005845	0.005847	0.005878
0.2	0.009441	0.009452	0.009458	0.009461	0.009511
0.3	0.009441	0.009452	0.009457	0.009461	0.009511
0.4	0.005835	0.005841	0.005845	0.005847	0.005878
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.005835	-0.005841	-0.005845	-0.005847	0.005878
0.7	-0.009441	-0.009452	-0.009457	-0.009461	-0.009511
0.8	-0.009441	-0.009452	-0.009458	-0.009461	-0.009511
0.9	-0.005835	-0.005842	-0.005845	-0.005847	-0.005878
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$L_2 \times 10^3$	0.051652	0.043744	0.039456	0.036810	
$L_\infty \times 10^3$	0.073047	0.061864	0.055799	0.052058	



Şekil 4.1 : Problem 1'in Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri

4.2.2 Problem 2

İkinci model problem olarak 4.1.1 ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x,t) = \frac{2t^{2-\gamma} \cos(\pi x)}{\Gamma(3-\gamma)} - \pi t^4 \cos(\pi x) \sin(\pi x) + \nu \pi^2 t^2 \cos(\pi x)$$

olmak üzere;

$$U(0,t) = t^2, U(1,t) = -t^2, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

başlangıç şartı ile verilsin. Bu problemin tam çözümü;

$$U(x,t) = t^2 \cos(\pi x).$$

dir [1].

Bu kısımda verilen ikinci problemin nümerik çözümleri için ilk olarak (4.1.6) ile verilen iç iterasyon tekniği ile ele alınan kapalı sonlu fark şeması çözümleri göz önüne alınarak Çizelge 4.17-4.20 ile verildi. N bölüntü sayısının farklı değerleri için $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$ ve $\nu = 1$ değerleri için nümerik çözümler Çizelge 4.17’de verildi. Çizelgede görüldüğü gibi artan bölüntü sayısı ile her bir x noktasında elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere daha yakın olduğu, L_2 ve L_∞ hata normlarının ise beklendiği gibi artan bölüntü sayıları ile birlikte gittikçe azalmıştır. Çizelge 4.18’de Δt zaman adımlarının azalan değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanarak kapalı yöntem ile elde edilen nümerik sonuçlar sunuldu. Δt değerlerinin azalması ile hatalarda azalmaktadır. Çizelge 4.19’da kesirli türevin mertebesini gösteren γ değerlerinin farklı seçilmesiyle elde edilen çözümler gösterildi. γ değerlerinin değişimi ile elde edilen sonuçlar arasında dikkate değer bir değişimin olmadığı görüldü. Çizelge 4.20’de $t = 0.1$ zamanında ν viskozite parametresinin değerinin küçülmesi ile hatalarında küçüldüğü görüldü.

İkinci olarak, Çizelge 4.21-4.24’de (4.1.8) ile verilen Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı yöntem yardımıyla elde edilen nümerik sonuçlar gösterildi. Çizelge 4.21’de N bölüntü sayısının, Çizelge 4.22’de Δt ’nin değişen değerlerinde, Çizelge 4.23’de γ ’nın ve Çizelge 4.24’de ν ’nin değişen değerleri için oluşturuldu.

(4.1.2) ile verilen iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümler Çizelge 4.25-4.28 ile verildi. Çizelge 4.25’de $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$,

Çizelge 4.17 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951878	0.951259	0.951103	0.951064	0.951057
0.2	0.810098	0.809282	0.809076	0.809025	0.809017
0.3	0.588716	0.588013	0.587835	0.587791	0.587785
0.4	0.309543	0.309145	0.309045	0.309019	0.309017
0.5	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000
0.6	-0.309543	-0.309145	-0.309045	-0.309019	-0.309017
0.7	-0.588716	-0.588013	-0.587835	-0.587791	-0.587785
0.8	-0.810098	-0.809282	-0.809076	-0.809025	-0.809017
0.9	-0.951878	-0.951259	-0.951103	-0.951064	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.772790	0.189490	0.042345	0.005587	
$L_\infty \times 10^3$	1.080553	0.264864	0.059420	0.008363	

Çizelge 4.18 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951015	0.951026	0.951048	0.951059	0.951057
0.2	0.808943	0.808961	0.808997	0.809016	0.809017
0.3	0.587706	0.587724	0.587762	0.587781	0.587785
0.4	0.308966	0.308978	0.309002	0.309013	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.308966	-0.308978	-0.309002	-0.309013	-0.309017
0.7	-0.587706	-0.587724	-0.587762	-0.587781	-0.587785
0.8	-0.808943	-0.808961	-0.808997	-0.809016	-0.809017
0.9	-0.951015	-0.951026	-0.951048	-0.951059	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.056951	0.043210	0.015704	0.002681	
$L_\infty \times 10^3$	0.081742	0.062204	0.023225	0.004354	

Çizelge 4.19 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.75$	$\gamma=0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951064	0.951064	0.951064	0.951066	0.951057
0.2	0.809025	0.809025	0.809026	0.809027	0.809017
0.3	0.587790	0.587790	0.587791	0.587793	0.587785
0.4	0.309019	0.309019	0.309020	0.309021	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309019	-0.309019	-0.309020	-0.309021	-0.309017
0.7	-0.587790	-0.587790	-0.587791	-0.587793	-0.587785
0.8	-0.809025	-0.809025	-0.809026	-0.809027	-0.809017
0.9	-0.951064	-0.951064	-0.951064	-0.951066	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.005400	0.005436	0.006040	0.007264	
$L_\infty \times 10^3$	0.008149	0.008190	0.008943	0.010545	

Çizelge 4.20 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu=0.25$	$\nu=0.75$	$\nu=0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.009511	0.009511	0.009511	0.009511	0.009511
0.2	0.008091	0.008091	0.008091	0.008090	0.008090
0.3	0.005878	0.005878	0.005878	0.005878	0.005878
0.4	0.003091	0.003090	0.003090	0.003090	0.003090
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.003091	-0.003090	-0.003090	-0.003090	-0.003090
0.7	-0.005878	-0.005878	-0.005878	-0.005878	-0.005878
0.8	-0.008091	-0.008090	-0.008090	-0.008090	-0.008090
0.9	-0.009511	-0.009511	-0.009511	-0.009511	-0.009511
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.000528	0.000355	0.000277	0.000235	
$L_\infty \times 10^3$	0.000738	0.000495	0.000386	0.000328	

Çizelge 4.21 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951884	0.951264	0.951109	0.951070	0.951057
0.2	0.810107	0.809291	0.809086	0.809034	0.809017
0.3	0.588726	0.588022	0.587845	0.587800	0.587785
0.4	0.309554	0.309151	0.309151	0.309025	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309554	-0.309151	-0.309151	-0.309025	-0.309017
0.7	-0.588726	-0.588022	-0.587845	-0.587800	-0.587785
0.8	-0.810107	-0.809291	-0.809086	-0.809034	-0.809017
0.9	-0.951884	-0.951264	-0.951109	-0.951070	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.779787	0.196372	0.049187	0.012318	
$L_\infty \times 10^3$	1.089974	0.274139	0.068658	0.017208	

Çizelge 4.22 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951070	0.951070	0.951070	0.951070	0.951057
0.2	0.809035	0.808935	0.809034	0.809034	0.809017
0.3	0.587800	0.587800	0.587800	0.587800	0.587785
0.4	0.309026	0.309026	0.309025	0.309025	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309026	-0.309026	-0.309025	-0.309025	-0.309017
0.7	-0.587800	-0.587800	-0.587800	-0.587800	-0.587785
0.8	-0.809035	-0.808935	-0.809034	-0.809034	-0.809017
0.9	-0.951070	-0.951070	-0.951070	-0.951070	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.012594	0.012555	0.012427	0.012352	
$L_\infty \times 10^3$	0.017583	0.017532	0.017359	0.017255	

Çizelge 4.23 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $v = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

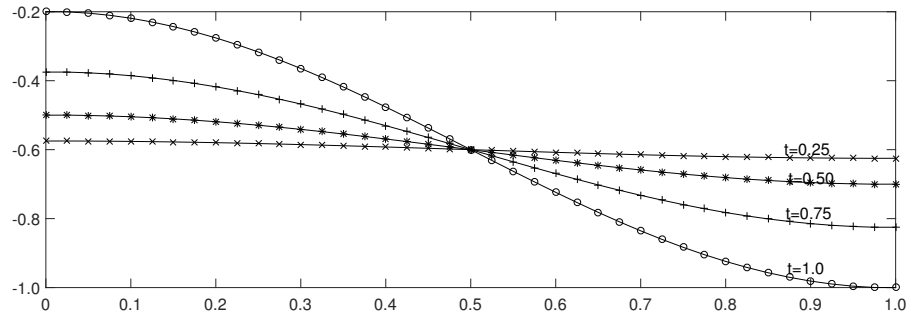
x	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951070	0.951070	0.951070	0.951071	0.951057
0.2	0.809034	0.809034	0.809035	0.809036	0.809017
0.3	0.587800	0.587800	0.587801	0.587802	0.587785
0.4	0.309025	0.309025	0.309026	0.309027	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309025	-0.309025	-0.309026	-0.309027	-0.309017
0.7	-0.587800	-0.587800	-0.587801	-0.587802	-0.587785
0.8	-0.809034	-0.809034	-0.809035	-0.809036	-0.809017
0.9	-0.951070	-0.951070	-0.951070	-0.951070	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.012337	0.012315	0.012643	0.013824	
$L_\infty \times 10^3$	0.017235	0.017205	0.017660	0.019302	

Çizelge 4.24 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve v 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$v = 0.1$	$v = 0.25$	$v = 0.5$	$v = 1.0$	Tam çözüm
0.0	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000
0.1	0.009511	0.009511	0.009511	0.009511	0.009511
0.2	0.008091	0.008091	0.008091	0.008091	0.008090
0.3	0.005879	0.005878	0.005878	0.005878	0.005878
0.4	0.003091	0.003090	0.003090	0.003090	0.003090
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.003091	-0.003090	-0.003090	-0.003090	-0.003090
0.7	-0.005879	-0.005878	-0.005878	-0.005878	-0.005878
0.8	-0.008091	-0.008091	-0.008091	-0.008091	-0.008090
0.9	-0.009511	-0.009511	-0.009511	-0.009511	-0.009511
1.0	-0.010000	-0.010000	-0.010000	-0.010000	-0.010000
$L_2 \times 10^3$	0.000583	0.000389	0.000298	0.000247	
$L_\infty \times 10^3$	0.000812	0.000542	0.000416	0.000345	

Çizelge 4.25 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951879	0.951260	0.951104	0.951065	0.951057
0.2	0.810101	0.809285	0.809080	0.809028	0.809017
0.3	0.588721	0.588017	0.587839	0.587794	0.587785
0.4	0.309546	0.309148	0.309047	0.309022	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309546	-0.309148	-0.309047	-0.309022	-0.309017
0.7	-0.588721	-0.588017	-0.587839	-0.587794	-0.587785
0.8	-0.810101	-0.809285	-0.809080	-0.809028	-0.809017
0.9	-0.951879	-0.951260	-0.951104	-0.951065	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.775325	0.191943	0.044769	0.007906	
$L_\infty \times 10^3$	1.083828	0.268041	0.062573	0.011113	



Şekil 4.2 : Problem 2'nin Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri

$\nu = 1$ ve N 'nin farklı değerleri için elde edilen nümerik çözümler verildi. Çizelgeden N bölüntü sayısının artmasına paralel olarak hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.26'da $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ için Δt nin farklı değerlerinde elde edilen çözümler gösterildi. Çizelge 4.27 ve 4.28'de sırasıyla γ ve ν parametrelerinin farklı değerleri için bulunan çözümler gösterildi. γ 'nın değişiminin çözümler üzerinde fazla etkili olmadı fakat $t = 0.1$ de ν parametresinin değerlerinin küçülmesiyle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görüldü. Çizelge 4.29-4.32'de (4.1.11) ile verilen Rubin Graves tekniği kullanılarak Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen sonuçlar verildi. Sırasıyla N bölüntü sayısı, Δt zaman adımı, γ kesirli türev mertebesi ve ν viskozite değerlerinin farklı değerlerinde alınan sonuçlar Çizelge 4.29-4.32'de gösterildi.

Çizelge 4.26 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951027	0.951036	0.951053	0.951061	0.951057
0.2	0.808973	0.808985	0.809010	0.809022	0.809017
0.3	0.587743	0.587755	0.587777	0.587789	0.587785
0.4	0.308992	0.308998	0.309012	0.309019	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.308992	-0.308998	-0.309012	-0.309019	-0.309017
0.7	-0.587743	-0.587755	-0.587777	-0.587789	-0.587785
0.8	-0.808973	-0.808985	-0.809010	-0.809022	-0.809017
0.9	-0.951027	-0.951036	-0.951053	-0.951061	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.032175	0.023266	0.005506	0.003531	
$L_\infty \times 10^3$	0.045012	0.032586	0.007923	0.005191	

Çizelge 4.27 : Problem 2'nin $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00025$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951065	0.951065	0.951066	0.951057	0.951057
0.2	0.809028	0.809028	0.809029	0.809031	0.809017
0.3	0.587795	0.587794	0.587795	0.587797	0.587785
0.4	0.309022	0.309022	0.309022	0.309023	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309022	-0.309022	-0.309022	-0.309023	-0.309017
0.7	-0.587795	-0.587794	-0.587795	-0.587797	-0.587785
0.8	-0.809028	-0.809028	-0.809029	-0.809031	-0.809017
0.9	-0.951065	-0.951065	-0.951066	-0.951057	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.008049	0.007910	0.008354	0.009711	
$L_\infty \times 10^3$	0.011327	0.011129	0.011725	0.013597	

Çizelge 4.28 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=1.0$	Tam çözüm
0.0	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000
0.1	0.009495	0.009502	0.009506	0.009508	0.009511
0.2	0.008070	0.008079	0.008084	0.008087	0.008090
0.3	0.005861	0.005868	0.005872	0.005875	0.005878
0.4	0.003080	0.003085	0.003087	0.003089	0.003090
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.003080	-0.003085	-0.003087	-0.003089	-0.003090
0.7	-0.005861	-0.005868	-0.005872	-0.005875	-0.005878
0.8	-0.008070	-0.008079	-0.008084	-0.008087	-0.008090
0.9	-0.009495	-0.009502	-0.009506	-0.009508	-0.009511
1.0	-0.010000	-0.010000	-0.010000	-0.010000	-0.010000
$L_2 \times 10^3$	0.014581	0.007985	0.004459	0.002297	
$L_\infty \times 10^3$	0.020327	0.011132	0.006217	0.003202	

Çizelge 4.29 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.952058	0.951438	0.951283	0.951244	0.951057
0.2	0.810224	0.809408	0.809202	0.809151	0.809017
0.3	0.588798	0.588094	0.587917	0.587872	0.587785
0.4	0.309583	0.309185	0.309085	0.309060	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309583	-0.309185	-0.309085	-0.309060	-0.309017
0.7	-0.588798	-0.588094	-0.587917	-0.587872	-0.587785
0.8	-0.810224	-0.809408	-0.809202	-0.809151	-0.809017
0.9	-0.952058	-0.951438	-0.951283	-0.951244	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.872593	0.298252	0.161425	0.131827	
$L_\infty \times 10^3$	1.207060	0.399943	0.245778	0.241493	

Çizelge 4.30 : Problem 2'nin $\gamma = 0.5$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.952851	0.952503	0.951805	0.951457	0.951057
0.2	0.810255	0.810021	0.809553	0.809319	0.809017
0.3	0.588565	0.588421	0.588133	0.587989	0.587785
0.4	0.309394	0.309326	0.309188	0.309119	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309394	-0.309326	-0.309188	-0.309119	-0.309017
0.7	-0.588565	-0.588421	-0.588133	-0.587989	-0.587785
0.8	-0.810255	-0.810021	-0.809553	-0.809319	-0.809017
0.9	-0.952851	-0.952503	-0.951805	-0.951457	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	1.227758	0.990365	0.515832	0.279069	
$L_\infty \times 10^3$	2.306967	1.848901	0.932808	0.474783	

Çizelge 4.31 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951245	0.951244	0.951244	0.951245	0.951057
0.2	0.809153	0.809152	0.809151	0.809153	0.809017
0.3	0.587874	0.587873	0.587872	0.587874	0.587785
0.4	0.309061	0.309060	0.309060	0.309061	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309061	-0.309060	-0.309060	-0.309061	-0.309017
0.7	-0.587874	-0.587873	-0.587872	-0.587874	-0.587785
0.8	-0.809153	-0.809152	-0.809151	-0.809153	-0.809017
0.9	-0.951245	-0.951244	-0.951244	-0.951245	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.132897	0.132390	0.131943	0.133064	
$L_\infty \times 10^3$	0.241679	0.241588	0.241532	0.241753	

Çizelge 4.32 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1.0$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.951258	0.951254	0.951248	0.951244	0.951057
0.2	0.809187	0.809172	0.809159	0.809151	0.809017
0.3	0.587922	0.587896	0.587881	0.587872	0.587785
0.4	0.309097	0.309076	0.309065	0.309060	0.309017
0.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	-0.309097	-0.309076	-0.309065	-0.309060	-0.309017
0.7	-0.587922	-0.587896	-0.587881	-0.587872	-0.587785
0.8	-0.809187	-0.809172	-0.809159	-0.809151	-0.809017
0.9	-0.951258	-0.951254	-0.951248	-0.951244	-0.951057
1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
$L_2 \times 10^3$	0.154513	0.143903	0.136465	0.131827	
$L_\infty \times 10^3$	0.242371	0.242515	0.241985	0.241493	

4.2.3 Problem 3

Son model problem olarak (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Burgers denklemi

$$f(x, t) = \frac{2t^{2-\gamma}e^x}{\Gamma(3-\gamma)} + t^4e^{2x} - \nu t^2e^{2x}$$

olmak üzere;

$$U(0, t) = t^2, U(1, t) = et^2, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve;

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile verilsin. Bu problemin tam çözümü ;

$$U(x, t) = t^2e^x$$

dir [1].

Problem 3 ile verilen kesirli mertebeden Burgers denkleminin nümerik çözümü için ilk olarak (4.1.6) ile verilen iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark şeması göz önüne alındı ve elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 4.33-4.36 ile verildi. $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, ve viskozite değeri $\nu = 1$ olarak seçilip, N bölüntü sayısının farklı değerleri için nümerik sonuçlar Çizelge 4.33'de sunuldu. Çizelge dikkatli incelendiğinde N bölüntü sayısının

artması ile tam çözümlere daha yakın çözümler elde edildiği görüldü. Çizelge 4.34’de ise $N = 80$ değeri için Δt zaman adımlarının farklı değerleri için kapalı yöntem ile elde edilen nümerik sonuçlar gösterildi. Artan zaman adımı sayısı ile birlikte hatalarda azaldı. Daha sonra sırasıyla, kesirli mertebeden türevin mertebesi γ değerinin farklı değerleri için sonuçlar Çizelge 4.35’de ve ν viskozitenin değişen değerleri için bulunan sonuçlar Çizelge 4.36’da verildi.

Çizelge 4.37-4.40’da verilen tablolarda ise (4.1.8) ile verilen Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar yine sırasıyla, N , Δt , γ ve ν viskozitenin değişen değerleri için Çizelge 4.37-4.40’da gösterildi. Çizelgeler incelendiğinde kapalı yöntem iç iç iterasyon tekniği kullanılarak elde edilen çözümlerin Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilene göre daha iyi olduğu görüldü.

Daha sonra Problem 3 için (4.1.2) ile verilen iç iterasyon lineerleştirme tekniği yardımıyla Crank-Nicolson şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 4.41-4.44’de verildi. $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N ’in farklı değerleri için elde edilen nümerik çözümler Çizelge 4.41’de gösterildi. N bölüntü sayısının artmasıyla hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.42’de $\gamma = 0.50$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ için Δt ’nin farklı değerleri elde edilen sonuçlar verildi. Δt ’nin azalışına paralel hatalarda azaldı. Çizelge 4.43 ve Çizelge 4.44’de sırasıyla γ ve ν ’nin farklı değerleri için nümerik sonuçlar elde edildi.

Çizelge 4.45-4.48’de (4.1.11) ile verilen Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılması ile elde edilen Crank Nicolson sonlu fark şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar sırasıyla N , Δt , γ ve ν viskozitenin farklı değerleri için sunuldu. Çizelgeler incelendiğinde iç iterasyon tekniği kullanılarak oluşturulan Crank-Nicolson sonlu fark şeması yardımıyla bulunan çözümlerin Rubin Graves lineerleştirme tekniği ile bulunanlara göre daha iyi olduğu gözlemlendi.

Şekil 4.2 ’de farklı zaman adımları için Problem 2nin çözüm grafikleri sadece Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Carank-Nicolson sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerin tam çözümler ile birlikte grafiği verildi. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi nümerik ve tam çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.49-4.51 ’de $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N ’ in farklı değerleri için Problem 1, Problem 2 ve Problem 3’ün hata normlarının Referans [1]’daki değerlerle karşılaştırması yapılmıştır. Birinci ve üçüncü problemler için hazırlanan Çizelge 4.49 ve 4.51’de Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak oluşturulan Crank-Nicolson sonlu fark şeması

Çizelge 4.33 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105107	1.105155	1.105167	1.105170	1.105171
0.2	1.221277	1.221371	1.221395	1.221401	1.221403
0.3	1.349674	1.349813	1.349847	1.349856	1.349859
0.4	1.491585	1.491765	1.491810	1.491821	1.491825
0.5	1.648435	1.648650	1.648704	1.648717	1.648721
0.6	1.821801	1.822039	1.822099	1.822114	1.822119
0.7	2.013426	2.013671	2.013733	2.013748	2.013753
0.8	2.225244	2.225467	2.225523	2.225537	2.225541
0.9	2.459401	2.459553	2.459591	2.459600	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.230230	0.057485	0.014168	0.003331	
$L_\infty \times 10^3$	0.326796	0.081579	0.020159	0.004751	

Çizelge 4.34 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105326	1.105295	1.105232	1.105201	1.105171
0.2	1.221703	1.221642	1.221521	1.221461	1.221403
0.3	1.350292	1.350204	1.350029	1.349942	1.349859
0.4	1.492374	1.492262	1.492041	1.491931	1.491825
0.5	1.649363	1.649233	1.648974	1.648845	1.648721
0.6	1.822819	1.822677	1.822394	1.822254	1.822119
0.7	2.014458	2.014315	2.014030	2.013889	2.013753
0.8	2.226169	2.226042	2.225788	2.225662	2.225541
0.9	2.460022	2.459937	2.459768	2.459684	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.507392	0.404593	0.199733	0.097787	
$L_\infty \times 10^3$	0.711241	0.567157	0.279985	0.137055	

Çizelge 4.35 : Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.75$	$\gamma=0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105185	1.105185	1.105186	1.105189	1.105171
0.2	1.221430	1.221430	1.221432	1.221438	1.221403
0.3	1.349897	1.349898	1.349900	1.349909	1.349859
0.4	1.491873	1.491874	1.491877	1.491887	1.491825
0.5	1.648778	1.648779	1.648782	1.648794	1.648721
0.6	1.822181	1.822182	1.822185	1.822197	1.822119
0.7	2.013815	2.013816	2.013819	2.013831	2.013753
0.8	2.225596	2.225597	2.225600	2.225610	2.225541
0.9	2.459640	2.459641	2.459643	2.459649	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.044908	0.045639	0.048036	0.056978	
$L_\infty \times 10^3$	0.062816	0.063867	0.067169	0.079325	

Çizelge 4.36 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$ ve ν 'nin farklı değerleri için iç iterasyon kullanarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=1.0$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.011053	0.011052	1.105170	1.105170	0.011052
0.2	0.012216	0.012215	0.012215	0.012215	0.012214
0.3	0.013501	0.013500	0.013500	0.013499	0.013499
0.4	0.014921	0.014920	0.014920	0.014919	0.014918
0.5	0.016490	0.016489	0.016489	0.016488	0.016487
0.6	0.018224	0.018223	0.018223	0.018222	0.018221
0.7	0.020140	0.020140	0.020139	0.020138	0.020138
0.8	0.022258	0.022257	0.022257	0.022256	0.022255
0.9	0.024598	0.024597	0.024597	0.024596	0.024596
1.0	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183
$L_2 \times 10^3$	0.002200	0.001612	0.001105	0.000672	
$L_\infty \times 10^3$	0.002919	0.002171	0.001501	0.000917	

Çizelge 4.37 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105107	1.051263	1.105167	1.105170	1.105171
0.2	1.221277	1.221371	1.221395	1.221401	1.221403
0.3	1.349674	1.349813	1.349847	1.349856	1.349859
0.4	1.491585	1.491765	1.491810	1.491821	1.491825
0.5	1.648435	1.648650	1.648704	1.648717	1.648721
0.6	1.821801	1.822039	1.822099	1.822114	1.822119
0.7	2.013426	2.013671	2.013733	2.013748	2.013753
0.8	2.225244	2.225467	2.225523	2.225537	2.225541
0.9	2.459401	2.459553	2.459591	2.459600	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.230247	0.057491	0.014168	0.003329	
$L_\infty \times 10^3$	0.326826	0.081591	0.020162	0.004751	

Çizelge 4.38 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105184	1.105174	1.105173	1.105171	1.105171
0.2	1.221427	1.221409	1.221406	1.221403	1.221403
0.3	1.349893	1.349867	1.349864	1.349858	1.349859
0.4	1.491867	1.491835	1.491831	1.491824	1.491824
0.5	1.648770	1.648733	1.648728	1.648720	1.648721
0.6	1.822170	1.822131	1.822125	1.822117	1.822119
0.7	2.013802	2.013764	2.013759	2.013751	2.013753
0.8	2.225583	2.22550	2.225546	2.225539	2.225541
0.9	2.459629	2.459609	2.459606	2.459602	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.036817	0.008728	0.004871	0.001000	
$L_\infty \times 10^3$	0.051061	0.012040	0.006707	0.001615	

Çizelge 4.39 : Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma = 0.25$	$\gamma = 0.75$	$\gamma = 0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105170	1.105170	1.1051701	1.105175	1.105171
0.2	1.221401	1.221401	1.221403	1.221410	1.221401
0.3	1.349856	1.349856	1.349859	1.349869	1.349856
0.4	1.491821	1.491821	1.491825	1.491837	1.491825
0.5	1.648716	1.648717	1.648721	1.648734	1.648721
0.6	1.822113	1.822114	1.822118	1.822132	1.822119
0.7	2.013747	2.013747	2.013752	2.013765	2.013753
0.8	2.225536	2.225536	2.225540	2.225551	2.225541
0.9	2.459600	2.459600	2.459602	2.459609	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.003851	0.003743	0.000538	0.009836	
$L_\infty \times 10^3$	0.005468	0.005318	0.001018	0.013485	

Çizelge 4.40 : Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak kapalı sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1.0$	Tam çözüm
0.0	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000
0.1	0.011053	0.011052	0.011052	0.0110532	0.011052
0.2	0.012216	0.012215	0.012215	0.012215	0.012214
0.3	0.013501	0.013500	0.013500	0.013499	0.013499
0.4	0.014921	0.014920	0.0149210	0.014919	0.014918
0.5	0.016490	0.016489	0.016489	0.016488	0.016487
0.6	0.018224	0.018223	0.018223	0.018222	0.018223
0.7	0.020140	0.020140	0.020139	0.020138	0.020138
0.8	0.022258	0.0222587	0.022257	0.022256	0.022255
0.9	0.024598	0.024597	0.0245987	0.024596	0.024596
1.0	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183
$L_2 \times 10^3$	0.002204	0.001616	0.001107	0.000673	
$L_\infty \times 10^3$	0.002924	0.002175	0.001504	0.000920	

Çizelge 4.41 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105094	1.105142	1.105154	1.105157	1.105171
0.2	1.221253	1.221347	1.221371	1.221377	1.221403
0.3	1.349640	1.349779	1.349814	1.349823	1.349859
0.4	1.491544	1.491724	1.491769	1.491780	1.491825
0.5	1.648390	1.648604	1.648658	1.648671	1.648721
0.6	1.821753	1.821991	1.822051	1.822066	1.822119
0.7	2.013379	2.013625	2.013686	2.013701	2.013753
0.8	2.225205	2.225427	2.225483	2.225497	2.225541
0.9	2.459376	2.459527	2.459565	2.459575	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.265093	0.092458	0.049227	0.038438	
$L_\infty \times 10^3$	0.373211	0.129281	0.068029	0.052844	

Çizelge 4.42 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 80$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0025$	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105046	1.105070	1.105120	1.105145	1.105171
0.2	1.221167	1.221213	1.221306	1.221353	1.221403
0.3	1.349530	1.349595	1.349724	1.349790	1.349859
0.4	1.491423	1.491501	1.491660	1.491740	1.491825
0.5	1.648269	1.648357	1.648536	1.648626	1.648721
0.6	1.821645	1.821738	1.821924	1.822019	2.013753
0.7	2.013295	2.013385	2.013565	2.013556	2.013753
0.8	2.225151	2.225227	2.225381	2.225458	2.225541
0.9	2.459354	2.459403	2.459501	2.459550	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.345428	0.277950	0.141819	0.073052	
$L_\infty \times 10^3$	0.474025	0.381456	0.194693	0.100339	

Çizelge 4.43 : Problem 3'ün $N = 80$, $t = 1$, $v = 1$, $\Delta t = 0.00025$ ve γ 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.75$	$\gamma=0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105159	1.1051598	1.105158	1.105162	1.105171
0.2	1.221379	1.221378	1.221379	1.221386	1.221403
0.3	1.349826	1.349824	1.349825	1.349835	1.349859
0.4	1.491785	1.4917852	1.491783	1.491795	1.491825
0.5	1.648676	1.648673	1.648674	1.648688	1.648721
0.6	1.822071	1.822068	1.822069	1.822084	1.822119
0.7	2.013706	2.013704	2.013705	2.013719	2.013753
0.8	2.225501	2.225499	2.225500	2.225512	2.225541
0.9	2.459577	2.459576	2.459577	2.459584	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.034812	0.036822	0.036043	0.025343	
$L_\infty \times 10^3$	0.047833	0.050618	0.049566	0.034880	

Çizelge 4.44 : Problem 3'ün $N = 80$, $\Delta t = 0.0005$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve v 'nin farklı değerleri için iç iterasyon lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$v=0.1$	$v=0.25$	$v=0.5$	$v=1.0$	Tam çözüm
0.0	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000
0.1	0.011024	0.011032	0.011038	0.011043	0.011052
0.2	0.012169	0.012179	0.012189	0.012198	0.012214
0.3	0.013441	0.013452	0.013465	0.013477	0.013499
0.4	0.014851	0.014864	0.014878	0.014893	0.014918
0.5	0.016413	0.016428	0.016444	0.016460	0.016487
0.6	0.018143	0.018160	0.018177	0.018194	0.018221
0.7	0.020058	0.020079	0.020097	0.020112	0.020138
0.8	0.022184	0.022206	0.022222	0.022235	0.022255
0.9	0.024546	0.024565	0.024576	0.024584	0.024596
1.0	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183
$L_2 \times 10^3$	0.060173	0.045724	0.032519	0.020416	
$L_\infty \times 10^3$	0.079564	0.061279	0.044027	0.027818	

Çizelge 4.45 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve N bölüntü sayısının farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105103	1.105146	1.105156	1.105158	1.105171
0.2	1.221257	1.221349	1.221372	1.221378	1.221403
0.3	1.349640	1.349779	1.349814	1.349823	1.349859
0.4	1.491538	1.491721	1.491768	1.491780	1.491825
0.5	1.648377	1.648598	1.648655	1.648670	1.648721
0.6	1.821732	1.821981	1.822046	1.822063	1.822119
0.7	2.013348	2.013609	2.013678	2.013698	2.013753
0.8	2.225158	2.225404	2.225472	2.225491	2.225541
0.9	2.459310	2.459495	2.459549	2.459567	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.286587	0.103489	0.054610	0.041012	
$L_\infty \times 10^3$	0.405121	0.143835	0.074610	0.055822	

Çizelge 4.46 : Problem 3'ün $\gamma = 0.5$, $N = 40$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta t = 0.0002$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.001$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105246	1.105366	1.105565	1.105963	1.105171
0.2	1.221457	1.221551	1.221708	1.222022	1.221403
0.3	1.349897	1.349971	1.350096	1.350345	1.349859
0.4	1.491851	1.491914	1.492018	1.492227	1.491825
0.5	1.648753	1.648803	1.648903	1.649104	1.648721
0.6	1.822146	1.822216	1.822333	1.822569	1.822119
0.7	2.013798	2.013897	2.014062	2.014393	2.013753
0.8	2.225625	2.225779	2.226037	2.226552	2.225541
0.9	2.459757	2.460007	2.460423	2.461257	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.083444	0.222522	0.454979	0.920404	
$L_\infty \times 10^3$	0.236483	0.597225	1.198489	2.401079	

Çizelge 4.47 : Problem 3'ün $N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 1$, $\nu = 1$ ve γ 'nın farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.75$	$\gamma=0.9$	Tam çözüm
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.105366	1.105366	1.105369	1.105375	1.105171
0.2	1.221552	1.221551	1.221557	1.221569	1.221403
0.3	1.349971	1.349970	1.349980	1.349997	1.349859
0.4	1.491913	1.491912	1.491925	1.491945	1.491825
0.5	1.648802	1.648801	1.648816	1.648687	1.648721
0.6	1.822214	1.822213	1.822230	1.822254	1.822119
0.7	2.013896	2.013894	2.013910	2.013934	2.013753
0.8	2.225778	2.225777	2.225791	2.225811	2.225541
0.9	2.460006	2.460006	2.460046	2.460027	2.459603
1.0	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282
$L_2 \times 10^3$	0.222173	0.221436	0.228891	0.241114	
$L_\infty \times 10^3$	0.597232	0.596919	0.599327	0.603158	

Çizelge 4.48 : Problem 3'ün $N = 40$, $\Delta t = 0.00025$, $t = 0.1$, $\gamma = 0.5$ ve ν 'nin farklı değerleri için Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırması

x	$\nu=0.1$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=1.0$	Tam çözüm
0.0	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000	0.010000
0.1	0.011024	0.011032	0.011038	0.011043	0.011052
0.2	0.012169	0.012179	0.012189	0.012198	0.012214
0.3	0.013441	0.013452	0.013465	0.013477	0.013499
0.4	0.014851	0.014864	0.014878	0.014893	0.014918
0.5	0.016413	0.016428	0.016444	0.016460	0.016487
0.6	0.018143	0.018160	0.018177	0.018194	0.018221
0.7	0.020058	0.020079	0.020097	0.020112	0.020138
0.8	0.022184	0.022206	0.022222	0.022235	0.022255
0.9	0.024546	0.024565	0.024576	0.024584	0.024596
1.0	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183	0.027183
$L_2 \times 10^3$	0.060191	0.045736	0.032528	0.020422	
$L_\infty \times 10^3$	0.079578	0.061290	0.044035	0.027824	

Çizelge 4.49 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N ' in farklı değerleri için problem 1'in hata normlarının Referans [1]'da verilen değerlerle karşılaştırılması

	$N = 40$		$N = 80$		$N = 100$	
	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]
$L_2 \times 10^3$	1.220073	2.899344	0.168462	0.577021	0.042393	0.305178
$L_\infty \times 10^3$	1.725529	4.064677	0.238266	0.814546	0.059969	0.434508

Çizelge 4.50 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için problem 2'nin hata normlarının Referans [1] teki değerlerle karşılaştırılması

	$N = 20$		$N = 40$		$N = 80$	
	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]
$L_2 \times 10^3$	0.189490	0.183000	0.042345	0.041977	0.005587	0.001982
$L_\infty \times 10^3$	0.264864	0.273318	0.059420	0.063233	0.008363	0.004192

ile elde edilen çözümler kuadratik B-spline Galerkin [1] ile verilen çözümlerle karşılaştırıldı. Çizelgelerden açıkça görüldüğü gibi bu çalışmada sunulan Rubin Graves lineerleştirme tekniğinin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümler daha iyi sonuçlar vermiştir. İkinci problem için hazırlanan Çizelge 4.50'de sonlu eleman yöntemi ile elde edilen çözümlerin daha iyi olduğu gözlemlendi.

Çizelge 4.52-4.53'de Problem 1 için bu çalışmada kullanılan iç iterasyon ve Rubin Graves lineerleştirme teknikleri ile kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleri ayrı ayrı karşılaştırıldı. Problem 1'de Rubin Graves lineerleştirilmesi ile elde edilen çözümlerin daha iyi olduğu görüldü. Ayrıca Crank-Nicolson yönteminin, kapalı yöntemle göre daha iyi sonuçlar verdiği de görülmektedir.

Çizelge 4.54 ve 4.55 'de Problem 2 için bu çalışmada kullanılan iç iterasyon ve Rubin Graves lineerleştirme teknikleri ile kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleri ayrı ayrı karşılaştırıldı. Problem 1'de Rubin Graves lineerleştirilmesi ile elde edilen çözümlerin daha iyi olduğu görüldü. Bu çizelgelerden de görüldüğü gibi Problem 2'de iç iterasyonla elde edilen çözümler öne çıkmaktadır. Problem 1'den farklı olarak burada kapalı yöntem daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.51 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için problem 3 nin hata normlarının Referans [1] teki değerlerle karşılaştırılması

	$N = 20$		$N = 40$		$N = 80$	
	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]	Sunulan yöntem	[1]
$L_2 \times 10^3$	0.057491	0.447720	0.014168	0.161833	0.003329	0.092624
$L_\infty \times 10^3$	0.081591	0.625018	0.020162	0.227352	0.004751	0.133125

Çizelge 4.52 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı' in hata normlarının karşılaştırılması

	$N = 40$		$N = 80$		$N = 100$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	1.402415	1.402149	0.350539	0.350257	0.224444	0.224153
$L_\infty \times 10^3$	1.983510	1.983017	0.495854	0.495358	0.317553	0.317013

Çizelge 4.53 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç İterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 1' in hata normlarının karşılaştırılması

	$N = 40$		$N = 80$		$N = 100$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	1.397469	1.220073	0.345610	0.168462	0.219519	0.042393
$L_\infty \times 10^3$	1.976522	1.725529	0.488887	0.238266	0.310637	0.059969

Çizelge 4.54 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı Yöntem İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 2'in hata normlarının karşılaştırılması

	$N = 10$		$N = 20$		$N = 40$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	0.772790	0.779787	0.189490	0.196372	0.042345	0.049187
$L_\infty \times 10^3$	1.080553	1.089974	0.264864	0.274139	0.059420	0.068658

Çizelge 4.55 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 2'in hata normlarının karşılaştırılması

	$N = 10$		$N = 20$		$N = 40$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	0.775325	0.872593	0.191943	0.298252	0.044769	0.161425
$L_\infty \times 10^3$	1.083828	1.207060	0.268041	0.245778	0.062573	0.245778

Çizelge 4.56 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Kapalı Yöntem İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 3'in hata normlarının karşılaştırılması

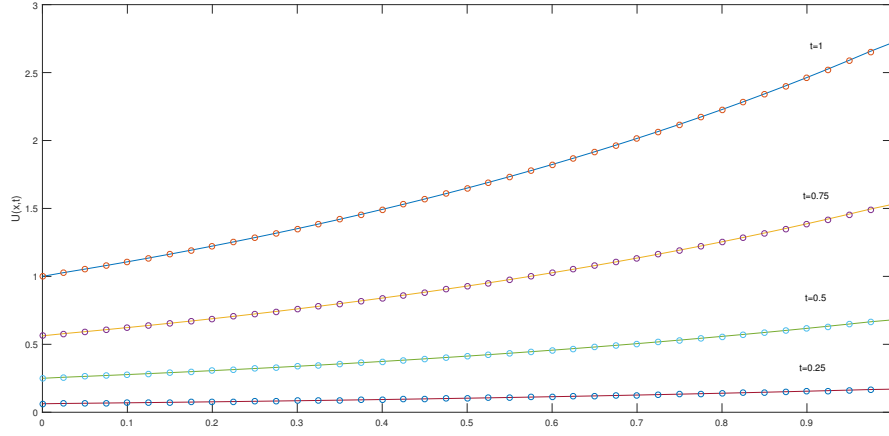
	$N = 10$		$N = 20$		$N = 40$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	0.230230	0.230247	0.057485	0.057491	0.014168	0.014168
$L_\infty \times 10^3$	0.326796	0.326826	0.081579	0.081591	0.020159	0.020162

Çizelge 4.57 : $\Delta t = 0.00025$, $\gamma = 0.5$, $t_f = 1$, $\nu = 1$ ve N in farklı değerleri için Crank Nicolson Yönteminde İç iterasyon ve Rubin Graves ile elde edilen problem 3'in hata normlarının karşılaştırılması

	$N = 10$		$N = 20$		$N = 40$	
	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves	İç iterasyon	Rubin Graves
$L_2 \times 10^3$	0.265093	0.286587	0.092458	0.103489	0.049227	0.054610
$L_\infty \times 10^3$	0.373211	0.405121	0.129281	0.143835	0.068029	0.074610

Son olarak Çizelge 4.56 ve 4.57 'de Problem 3 için önceki çizelgelere benzer olarak hazırlanmıştır. Bu çizelgelerden iç iterasyon tekniği ile bulunan çözümlerin Rubin Graves ile elde edilenlere göre daha iyi olduğu görülmektedir. Bununla birlikte çizelgelerden Problem 3 için kapalı yöntem daha öne çıkmaktadır.

Şekil 4.3'de farklı zaman adımları için çözüm grafikleri birbirinin aynısı olacağından sadece Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerin tam çözümler ile birlikte grafiği verildi. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi nümerik ve tam çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 4.3 : Problem 3'ün Rubin Graves lineerleştirme tekniği kullanarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle $\nu = 1$, $N = 40$, $\gamma = 0.5$ ve $\Delta t = 0.0025$ değerleri için farklı zamanlarda nümerik ve tam çözümleri

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kesirli mertebeden Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar tam sonuçlarıyla birlikte çizelgeler yardımıyla sunuldu. Ayrıca elde edilen sonuçların doğruluğunu kontrol etmek için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Sunulan yöntemlerle bulunan nümerik çözümlerin tam çözümle uyum içerisinde olduğu görüldü. Problem 1 ve 3 için sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik sonuçların Ref. [1]'de verilen kuadratik B-spline sonlu eleman Galerkin yöntemi ile elde edilenlere göre daha iyi olduğu görüldü. Problem 2 için Ref. [1]'de verilen sonuçlarla uyumlu çözümler elde edildi. Bunun dışında kullanılan yöntemler de kendi aralarında karşılaştırıldı. Problem 1 için kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerinde Rubin Graves ile elde edilen sonuçların, iç iterasyonla elde edilen nümerik sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü. Buna karşılık Problem 2 ve Problem 3 için iç iterasyonla elde edilen sonuçların, Rubin Graves ile bulunan yaklaşık değerlerden daha iyi sonucuna varıldı.

Sonuç olarak kesirli mertebeden Burgers denklemleri için kullanılan sonlu fark yöntemlerinde ister iç iterasyonla ister Rubin Graves ile yapılan lineerleştirmelerin tam çözüme gayet yakın sonuçlar verdiği, bu tür kesirli mertebeden problemlerin çözümü için uygun olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Taşbozan, O.** (2015). *Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin B-Spline Sonlu Eleman Yöntemleri İle Çözümleri* (Doktora Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [2] **Podlubny, I.** (1993). *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill, New York.
- [3] **Oldham, K. ve Spanier, J.** (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Elsevier.
- [4] **Murillo, J.Q. ve Yuste, S.B.** (2011). An explicit difference method for solving fractional diffusion and diffusion-wave equations in the Caputo form, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6(2).
- [5] **Hopf, E.** (1950). The partial differential equation $u_t + u u_x = \mu x x$, *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3), 201–230.
- [6] **Benton, E.R. ve Platzman, G.W.** (1972). A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30(2), 195–212.
- [7] **Ali, A., Gardner, G. ve Gardner, L.** (1992). A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(3), 325–337.
- [8] **Kutluay, S., Bahadır, A. ve Özdeş, A.** (1999). Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103(2), 251–261.
- [9] **Wang, Q.** (2006). Numerical solutions for fractional KdV–Burgers equation by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 182(2), 1048–1055.
- [10] **Mittal, R. ve Jain, R.** (2012). Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 218(15), 7839–7855.
- [11] **Liu, H., Li, J. ve Zhang, Q.** (2009). Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burgers' equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 1–9.
- [12] **Jia-Qi, M. ve Xian-Feng, C.** (2010). Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation, *Chinese Physics B*, 19(10), 100203.
- [13] **Yıldırım, A. ve Mohyud-Din, S.T.** (2010). Analytical approach to space-and time-fractional burgers equations, *Chinese Physics Letters*, 27(9), 090501.
- [14] **El-Danaf, T.S. ve Hadhoud, A.R.** (2012). Parametric spline functions for the solution of the one time fractional Burgers' equation, *Applied Mathematical Modelling*, 36(10), 4557–4564.

- [15] **Khan, N.A., Ara, A. ve Mahmood, A.** (2012). Numerical solutions of time-fractional Burgers equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- [16] **Xu, Y. ve Agrawal, O.P.** (2013). Numerical solutions and analysis of diffusion for new generalized fractional Burgers equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(3), 709–736.
- [17] **Esen, A., Yagmurlu, N. ve Tasbozan, O.** (2013). Approximate analytical solution to time-fractional damped Burger and Cahn-Allen equations, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7(5), 1951.
- [18] **Baskonus, H.M., Bulut, H. ve Pandir, Y.** (2014). On the solution of nonlinear time-fractional generalized burgers equation by homotopy analysis method and modified trial equation method, *International Journal of Modeling and Optimization*, 4(4), 305.
- [19] **Bhrawy, A., Zaky, M. ve Baleanu, D.** (2015). New numerical approximations for space-time fractional Burgers' equations via a Legendre spectral-collocation method, *Rom. Rep. Phys*, 67(2), 340–349.
- [20] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2016). Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(3), 1325–1337.
- [21] **Prakash, A., Kumar, M. ve Sharma, K.K.** (2015). Numerical method for solving fractional coupled Burgers equations, *Applied Mathematics and Computation*, 260, 314–320.
- [22] **Li, D., Zhang, C. ve Ran, M.** (2016). A linear finite difference scheme for generalized time fractional Burgers equation, *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12), 6069–6081.
- [23] **Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A. ve Tasbozan, O.** (2017). New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative, *Waves in Random and complex Media*, 27(1), 103–116.
- [24] **Saad, K.M., Atangana, A. ve Baleanu, D.** (2018). New fractional derivatives with non-singular kernel applied to the Burgers equation, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(6), 063109.
- [25] **Asgari, Z. ve Hosseini, S.** (2018). Efficient numerical schemes for the solution of generalized time fractional Burgers type equations, *Numerical Algorithms*, 77(3), 763–792.
- [26] **Gaber, A., Aljohani, A., Ebaid, A. ve Machado, J.T.** (2019). The generalized Kudryashov method for nonlinear space–time fractional partial differential equations of Burgers type, *Nonlinear Dynamics*, 95(1), 361–368.
- [27] **Olver, P.J.** (2008). Numerical analysis lecture notes, *Retrieved on*, 18, 2017.
- [28] **Courant, R., Friedrichs, K. ve Lewy, H.** (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische annalen*, 100(1), 32–74.

- [29] **O'Brien, G.G., Hyman, M.A. ve Kaplan, S.** (1950). A study of the numerical solution of partial differential equations, *Journal of Mathematics and Physics*, 29(1-4), 223–251.
- [30] **Forsythe, G.E. ve Wasow, W.R.** (1960). Finite Difference Methods, *Partial Differential*.
- [31] **Thomée, V.**, (2001). From finite differences to finite elements A short history of numerical analysis of partial differential equations, *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century*, Elsevier, s.361–414.
- [32] **Causon, D. ve Mingham, C.** (2010). *Introductory finite difference methods for PDEs*, Bookboon.
- [33] **Davis, M.** (2010). Finite difference methods, *MSc Course in Mathematics and Finance*, Imperial College London.
- [34] **Rubin, S. ve Graves, R.** (1975). *A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics*, NASA technical report, U.S. National Aeronautics and Space Administration, <https://books.google.com.tr/books?id=tzbGKg7dV-IC>.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Murat ÖNAL

Doğum Tarihi ve Yeri : 11.06.1984, Malatya

E-Posta : mrt_onal@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** İnönü Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans

ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Onal, M., Esen, A. 2020.** A Crank-Nicolson Approximation for the time Fractional Burgers Equation, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(2) 177–184