

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR
TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ÖZGE ARIBAŞ

HAZİRAN 2023

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR
TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Özge ARIBAŞ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Mustafa YILDIZ

ZONGULDAK

Haziran 2023

KABUL:

Özge ARIBAŞ tarafından hazırlanan “Kesirli Mertebeden Lineer Olmayan Difüzyon Denklemi İçin Bir Ters Problem” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 21/06/2023

Danışman: Doç. Dr. Mustafa YILDIZ
Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Haydar BULGAK
Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Kemal AYDIN
Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. İsmet GÖLGELEYEN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../20....

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Özge ARIBAŞ

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Özge ARIBAŞ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa YILDIZ

Haziran 2023, 73 Sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin diğer bölümleri için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, kesirli mertebeden türev içeren ve lineer olmayan bir difüzyon denklemi için başlangıç-sınır değer probleminin öngörülen formal çözümünün elde edilişi üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ise, düz problemin çözümün varlığı, tekliği ve ait olduğu uzay incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise, ters problem tanımlanmış ve problemin çözümü için koşullu kararlılık ispat edilmiştir. Son bölümde ise, tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden lineer olmayan difüzyon denklemi, başlangıç-sınır değer problemi, ters problem.

Bilim Kodu: 403.06.00.



ABSTRACT

Ph.D. Thesis

AN INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Özge ARIBAŞ

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa YILDIZ
June 2023, 73 Pages**

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, some necessary fundamental definitions and theorems which will be used in the other chapters are given. In the second chapter, it is considered on obtaining the formal solution of the initial-boundary value problem for a nonlinear fractional diffusion equation. In the third chapter, existence, uniqueness and space of the solution of the direct problem is examined. In the fourth chapter, the inverse problem is defined and the conditional stability for the solution is proved. The last chapter of the thesis provides a discussion and results.

Keywords: Nonlinear fractional diffusion equation, initial-boundary value problem, inverse problem.

Science Code: 403.06.00.



TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında kıymetli görüş ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa YILDIZ'a, değerli vakitlerinden ayırıp bilgi birikimlerini paylaşan ve tez çalışmama önemli katkılarda bulunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ve Doç. Dr. İsmet GÖLGELEYEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Kıymetli fikir ve tavsiyelerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Haydar BULGAK'a ve sayın Prof. Dr. Kemal AYDIN'a tez çalışmama katkıları için teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim süresince, manevi desteği için Arş. Gör. Dr. Özlem KAYTMAZ'a, bana gösterdikleri sabır ve anlayış için de aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
KABUL:	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
 BÖLÜM 1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	 1
1.1 KESİRLİ ANALİZ İÇİN TEMEL TANIMLAR	2
1.2 TEZ ÇALIŞMASINDA KULLANILAN BAZI UZAYLARIN TANIMLARI.....	5
1.2.1 Sürekli Fonksiyonlar, Lebesgue ve Sobolev Uzayları	5
1.2.2 Zaman İçeren Uzaylar	8
1.2.3 Kesirli Sobolev Uzayları.....	9
1.2.4 $\tilde{H}^s(\Omega)$ Uzayları	12
1.3 ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	15
 BÖLÜM 2 KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFÜZYON DENKLEMLERİ İÇİN DÜZ PROBLEMLERİN FORMAL ÇÖZÜMÜ	 19
2.1 GİRİŞ.....	19
2.2 $x \in \mathbb{R}$ DURUMUNDA LİNEER OLMAYAN DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FORMAL ÇÖZÜMÜN BULUNMASI	22
2.3 Ω BÖLGESİNİN BOYUTU $d = 3$ İKEN L OPERATÖRÜNÜN SELF- ADJOİNTLİĞİNİN GÖSTERİLMESİ	26
2.4 $x \in \mathbb{R}^d$ DURUMUNDA LİNEER OLMAYAN DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FORMAL ÇÖZÜMÜN BULUNMASI	29

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 3 KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR DÜZ PROBLEMİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN İNCELENMESİ	33
3.1 BİELECKİ YÖNTEMİ.....	34
3.2 TEOREM 3.1'İN İSPATI.....	36
3.2.1 Problemin Çözümünün Varlığı Ve Tekliği.....	36
3.2.2 Problemin Çözümünün $C([0, T]; L^2(\Omega))$ Uzayından Olduğunun İncelenmesi.....	41
3.2.3 $\partial_t u$ Teriminin Ait Olduğu Uzayın Belirlenmesi	46
3.2.4 Lu Teriminin Ait Olduğu Uzayın Belirlenmesi	50
BÖLÜM 4 KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ	53
4.1 DENKLEMDE $x = x_0$ YAZILABİLMESİ İÇİN İNCELEME.....	54
4.2 SERİ İLE İNTEGRALİN SIRASININ DEĞİŞMESİ İÇİN İNCELEME.....	59
4.3 KARARLILIK EŞİTSİZLİĞİNİN ELDE EDİLMESİ	62
BÖLÜM 5 TARTIŞMA VE SONUÇ	67
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

d	: Uzaysal bölgenin boyutu
k	: Sabitlenmiş pozitif bir reel sayı
r_1, r_2, r_3	: Pozitif reel sayılar
s	: Negatif olmayan bir reel sayı
$[s]$	: s sayısının tam değeri
$\{s\}$	: s sayısı ile $[s]$ arasındaki fark
t, x	: Zaman ve uzay değişkenleri
$\partial_t^\alpha u$	: u fonksiyonunun α –inci mertebeden Caputo kesirli türevi
α	: Kesirli türevin mertebesi
β	: Pozitif bir reel sayı
λ_j	: L operatörünün j –inci özdeğeri
ξ	: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ vektörü
φ_j	: λ_j özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon
Ω	: Uzaysal bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
A, L	: İkinci mertebeden simetrik ve düzgün eliptik operatörler
$B_{22}^s(\mathbb{R}^n)$	: Slobodeckij uzayı
C_j	: $j \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq j \leq 69$ için pozitif sabitler
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı, k –inci mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$E_{\alpha, \beta}$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{F}, \mathcal{L}$	: Fourier ve Laplace dönüşümleri
$L^p(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
$H^m(\Omega)$	: Kendisi ve m –inci mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ uzayına ait fonksiyonların uzayı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

$H_0^1(\Omega)$	: $H^1(\Omega)$ uzayının $\partial\Omega$ üzerinde sıfır değerini alan elemanlarından oluşan fonksiyonların uzayı
$H_2^s(\mathbb{R}^n), H^s(\Omega)$	: Kesirli Sobolev uzayları
$\tilde{H}^s(\Omega)$	: Eliptik operatör yardımıyla tanımlanan ve kesirli Sobolev uzayının alt kümesi olan bir uzay
M	: Bir dönüşüm
T	: Zamansal bölgenin pozitif üst sınırı
$Y(x)$	: L operatöründe bulunan $a_{ij}(x)$ katsayılarının oluşturduğu $d \times d$ matris
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$	: $L^2(\Omega)$ uzayında iç çarpım

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu tez çalışmasında, Caputo kesirli türev içeren ve lineer olmayan difüzyon denklemi, başlangıç ve sınır koşulları ile ele alınarak bir ters problemin çözümünün kararlılığının araştırılması amaçlanmıştır. Bu bölüm, tez boyunca yararlanılan temel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır.

Tanım 1.1 f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{L}[f]$, yukarıdaki integrali yakınsak yapan tüm s değerleri için tanımlı bir fonksiyondur (O'Neil 2012, s. 77).

Laplace dönüşümü, çeşitli tipteki başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan önemli bir yöntemdir. Söz konusu dönüşüm yardımıyla bazı başlangıç değer problemleri, çözülmesi daha kolay olan cebirsel denklemlere indirgenir, örneğin, dalga yayılımı ve difüzyon olayını analiz etmek amacıyla kısmi diferensiyel denklemleri içeren sınır değer problemlerini çözmede de kullanılır (O'Neil 2012, s. 77).

Tanım 1.2 Eğer f ve g fonksiyonları $[0, +\infty)$ üzerinde tanımlı ise, $t \geq 0$ için $f * g$ konvolüsyon fonksiyonu

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır (O'Neil 2012, s. 96).

Teorem 1.1 (Konvolüsyon Teoremi) Eğer $f * g$ tanımlı ise,

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] \quad (1.3)$$

eşitliği sağlanır (O'Neil 2012, s. 97).

Tanım 1.3 Eğer $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise, bu fonksiyonun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

ve ters Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}^{-1}[u](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

şeklindedir. Burada $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve

$$|e^{\pm ix\xi}| = |\cos(x\xi) \pm i \sin(x\xi)| = \sqrt{(\cos(x\xi))^2 + (\pm \sin(x\xi))^2} = 1 \quad (1.6)$$

olup bu integraller her bir $\xi \in \mathbb{R}^n$ için yakınsaktır (Evans 1998, s. 183).

Benzer şekilde, Fourier dönüşümü de bazı lineer kısmi diferansiyel denklemleri ya cebirsel denklemlere ya da daha az değişken içeren diferansiyel denklemlere dönüştürmede oldukça güçlü bir araçtır (Evans 1998, s. 182).

1.1 KESİRLİ ANALİZ İÇİN TEMEL TANIMLAR

Kesirli analiz, tamsayı-mertebeden diferansiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmesi ile oluşturulmuş keyfi mertebeden integral ve türevlerin teorisidir (Podlubny 1999, s. 42). Kesirli analizin en temel fonksiyonlarından biri Gamma fonksiyonu olup bu fonksiyon, $n!$ faktöriyel fonksiyonunu genelleştirerek n -in tamsayı olmayan hatta kompleks değerler almasını sağlar (Podlubny 1999, s. 1).

Tanım 1.4 Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.7)$$

integrali ile tanımlanır ve bu fonksiyon kompleks düzlemin sağ tarafı olan

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \quad (1.8)$$

üzerinde yakınsaktır (Podlubny 1999, s. 1-2).

e^z üstel fonksiyonu, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin teorisinde önemli bir rol oynar. Bu fonksiyonun genel hali olan Mittag-Leffler fonksiyonu ise, kesirli analizde aynı derecede önemlidir (Jin 2021, s. 59).

Tanım 1.5 İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere,

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999, s. 17).

Önerme 1.2 Mittag-Leffler fonksiyonu, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{2,1}(-z^2) = \cos(z), \quad E_{2,1}(z^2) = \cosh(z), \quad E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (1.10)$$

bağıntılarını sağlar (Podlubny 1999, s. 17; Gorenflo et al. 2014, s. 20).

Uyarı 1.1 Tanım gereği

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (1.11)$$

şeklinde yazılabileceğinden $E_{\alpha,1}(0) = 1$ olarak elde edilir.

Tanım 1.6 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (\operatorname{Re} s > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda s^{-\alpha}| < 1) \quad (1.12)$$

Laplace dönüşümü vardır (Kilbas et al. 2006, s. 50).

Teorem 1.3 $0 < \alpha < 2$, β keyfi bir reel sayı olsun ve $\mu, \pi\alpha < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ eşitsizliğini sağlasın. O halde, $|z| \geq 0$ iken

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{C_1}{1 + |z|}, \quad \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi \quad (1.13)$$

olacak şekilde bir $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \mu)$ sabiti vardır (Podlubny 1999, s. 35).

Lemma 1.4 $t, \alpha, \lambda > 0$ değerleri ve pozitif $m \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{d^m}{dt^m} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-m} E_{\alpha, \alpha-m+1}(-\lambda t^\alpha) \quad (1.14)$$

özellliği sağlanır (Sakamoto and Yamamoto 2011, s. 432).

Kesirli integral ve türevlerin tanımı ilk olarak Riemann-Liouville türünde olarak ortaya çıkmıştır ve tamsayı-mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünün bulunması, yeni fonksiyon sınıflarının tanımlanması gibi pür matematiğin uygulamalarının geliştiri-

rilmesinde önemli bir rol oynamıştır. Ancak modern teknolojinin yeni ihtiyaçlarıyla, kesirli türevlere olan ihtiyaç artmıştır. Viskoelasite ve katı cisimler mekanığı gibi teorilerde, kesirli türevler materyallerin özelliklerini daha iyi betimleme amacıyla kullanılmaktadır. Bu da Riemann-Liouville türevinin yetersiz kaldığı bazı durumlara yol açmıştır. Örneğin, Riemann-Liouville türevinin Laplace dönüşümü, yine bu türevi içeren başlangıç değerlerini içermekte, bu da fiziksel yorum için bazı sorunlara neden olabilmektedir. Ancak Caputo türevinin Laplace dönüşümü, fiziksel yorumu iyi bilinen klasik-mertebeden türevli başlangıç değerlerini içermektedir (Podlubny 1999, s. 78-80).

Tanım 1.7 (Caputo Kesirli Türevi) $n \geq 1$ bir tamsayı, $T > 0$ ve $f(t)$, $[0, T]$ içinde $n + 1$ mertebeye kadar sürekli ve sınırlı türevlere sahip olmak üzere, Caputo kesirli türevi,

$$\partial_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n, \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999, s. 79).

Tanım 1.8 Türevin mertebesi $n-1 < \alpha < n$ iken Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} \{\partial_t^\alpha f(t)\} dt = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1} f^{(k)}(0) \quad (1.16)$$

biçiminde yazılır (Podlubny 1999, s. 80).

İçerisinde kesirli türev bulunduran bir denkleme kesirli diferensiyel denklem denir (Podlubny 1999, s. 42). Aşağıda verilen teoremlerin ispatı Laplace dönüşümü yöntemi ile bulunabilmektedir, bu da yöntemin kesirli diferensiyel denklemler için başlangıç-değer problemleri için de oldukça önemli olduğu göstermektedir.

Teorem 1.5 $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $Q \subset \mathbb{R}^+$ bölgesi için $f \in C(\overline{Q})$ olsun. O halde,

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha y(t) = -\lambda y(t) + f(t), & t \in Q, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

başlangıç-değer probleminin y çözümü

$$y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau \quad (1.18)$$

eşitliğini sağlar (Jin 2021, s. 113).

Teorem 1.6 $0 < \alpha < 1$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\partial_t^\alpha y(t) = -\lambda y(t) + f(y(t)), \quad y(0) = y_0 \quad (1.19)$$

başlangıç-değer probleminin çözümü

$$y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) f(y(\tau)) d\tau \quad (1.20)$$

eşitliğini sağlar, burada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu global Lipschitz süreklidir (Diethelm 2019, s. 7).

1.2 TEZ ÇALIŞMASINDA KULLANILAN BAZI UZAYLARIN TANIMLARI

1.2.1 Sürekli Fonksiyonlar, Lebesgue ve Sobolev Uzayları

Tanım 1.9 (Sürekli Fonksiyonlar Uzayı) $\Omega, \mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge, $m \geq 0$ bir tam sayı ve $|\alpha| \leq m$ olsun. Her değeri için, $D^\alpha \varphi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olacak şekilde, tüm φ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir ve $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ biçiminde yazılır. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, Ω üzerinde $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $D^\alpha \phi$ sınırlı olacak şekildeki $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını oluşturur ve $C_B^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi| \quad (1.21)$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı da aynı norma sahiptir (Adams and Fournier 2003, s. 10, 80).

Tanım 1.10 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) $\Omega, \mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge, p bir pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \quad (1.22)$$

sağlanacak şekilde tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $1 \leq p < \infty$ olması durumunda

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.23)$$

$L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur. $0 < p < 1$ iken bir norm belirtmez (Adams and Fournier 2003, s. 23-24).

Teorem 1.7 $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayı olup $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad (1.24)$$

iç çarpımına sahip bir Hilbert uzayıdır (Adams and Fournier 2003, s. 29-31).

Tanım 1.11 ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) u , Ω bölgesinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer Ω bölgesinde $|u(x)| \leq K$ olacak biçimde bir K sabiti varsa, o takdirde u fonksiyonu Ω da esas sınırlıdır (essentially bounded) denir. Burada, K sabitlerinin en büyük alt sınırına Ω da $|u|$ nun esas supremumu (essential supremum) denir ve $\text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde esas sınırlı tüm u fonksiyonlarının vektör uzayı $L^\infty(\Omega)$ şeklinde tanımlanır.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| \quad (1.25)$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyoneli $L^\infty(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier 2003, s. 27).

Tanım 1.12 (Sobolev Uzayı) m bir pozitif tam sayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ de $L^p(\Omega)$ uzayında bir norm olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (1.26)$$

uzayı, uygun her u için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.27)$$

veya

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.28)$$

normu ile birlikte Sobolev uzayı olarak adlandırılır (Adams and Fournier 2003, s. 59).

Tanım 1.13 ($H^m(\Omega)$ Uzayı) $m \geq 1$ olmak üzere, fonksiyonun kendisi ve m -inci mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ uzayına ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay $H^m(\Omega)$ ile belirtilir ve üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f_1 \overline{D^\alpha f_2} dx \quad (1.29)$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.30)$$

biçimindedir (Mikhailov 1978, s. 121).

Tanım 1.14 ($H_0^1(\Omega)$ Uzayı) $C^1(\Omega)$ ile Ω üzerinde kompakt supporta sahip sürekli fonksiyonların kesişiminden oluşan uzayın, $H^m(\Omega)$ da kapanışı $H_0^1(\Omega)$ ile gösterilir. $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ uzayının iç çarpımı ile tanımlı bir Hilbert uzayıdır (Brezis 2011, s. 107).

Teorem 1.8 $u \in H^1(\Omega)$ olsun. $u \in H_0^1(\Omega)$ olması ancak ve ancak $\partial\Omega$ üzerinde $u = 0$ iken sağlanır (Brezis 2011, s. 107).

Teorem 1.9 (L^p Uzayları İçin Gömme Teoremi)

$$vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx < \infty \quad (1.31)$$

ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olduğunu kabul edelim. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise, o halde $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_{L^q(\Omega)} \quad (1.32)$$

dır, böylece $L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ yazılır (Adams and Fournier 2003, s. 28).

Tanım 1.15 (Koni Koşulu) Ω bir bölge, $v, \mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı bir vektör, $0 < \kappa \leq \pi$ ve $\Pi(x, v)$ x, v arasındaki açı olmak üzere,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ veya } 0 < |x| \leq \rho, \Pi(x, v) \leq \kappa/2\} \quad (1.33)$$

kümesi, tepe noktası orijinde olan sonlu koni olarak adlandırılır. Eğer bir C sonlu konisi mevcut ise, öyle ki her bir $x \in \Omega$ noktası Ω içerisinde kalan C_x sonlu konisinin tepe noktasını oluşturduğu ve C_x, C konisine eşlenik olduğu takdirde, Ω koni koşulunu sağlıyor denir (Adams and Fournier 2003, s. 82).

Örnek 1.1 $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$ bölgesi koni koşulunu sağlar (Adams and Fournier 2003, s. 84).

Teorem 1.10 (Sobolev Gömme Teoremi) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $j \geq 0$, $m \geq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ tamsayılar olmak üzere, Ω koni koşulunu sağlasın. Eğer $mp > n$ veya $m = n$ ve $p = 1$ ise,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^j(\Omega) \quad (1.34)$$

dır, ve ek olarak $p \leq q \leq \infty$ için

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad (1.35)$$

dır (Adams and Fournier 2003, s. 85).

Lemma 1.11 Q sınırlı bir bölge olmak üzere, $C(\overline{Q}) \subset L^2(Q) \subset L^1(Q)$ sağlanır (Mikhailov 1978, s. 106).

Lemma 1.12 Eğer f ve $|f|$ fonksiyonları Lebesgue integrallenebilir ise,

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx \quad (1.36)$$

eşitsizliği sağlanır (Vladimirov 1971, s. 9).

1.2.2 Zaman İçeren Uzaylar

Parabolik tipte problemlerin iyi konulmuşluğunu ve regülerliğini incelemek için bu uzaylar oldukça kullanışlıdır (Jin 2021, s. 339). $(a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $L^p(a, b; X)$ uzayları evrim denklemleri teorisinde kilit rol oynar (Kufner et al. 1977, s. 117). $\Theta = [0, T]$ iken bu uzaylar, zaman içeren uzaylar olarak adlandırılır (Evans 1998, s. 285).

Tanım 1.16 X bir Banach uzayı ve $\Theta, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Tüm $u : \Theta \rightarrow X$ sürekli fonksiyonlarının uzayı $C(\Theta; X)$ ile gösterilir ve

$$\|u\|_{C(\Theta; X)} = \sup_{t \in \Theta} \|u(t)\|_X < \infty \quad (1.37)$$

normu ile tanımlanır. Benzer şekilde $m \in \mathbb{N}$ için $C^m(\Theta; X)$ ile gösterilir ve

$$\|u\|_{C^m(\Theta; X)} = \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{t \in \Theta} \|D^\beta u(t)\|_X < \infty \quad (1.38)$$

normu ile tanımlanır (Kufner et al. 1977, s. 40).

Teorem 1.13 $C(\overline{\Theta}; X)$ ve $C^m(\overline{\Theta}; X)$ birer Banach uzayıdır (Kufner et al. 1977, s. 40).

Tanım 1.17 X bir Banach uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $\Theta, \mathbb{R}^n$ de sınırlı, boş kümeden farklı bir bölge olsun. Bu takdirde,

$$\int_{\Theta} \|u(t)\|_X^p dt \quad (1.39)$$

Lebesgue integrali sonlu olan tüm kuvvetli ölçülebilir $u : \Theta \rightarrow X$ fonksiyonlarının kümesi $L^p(\Theta; X)$ ile gösterilir. Bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Theta; X)} = \left(\int_{\Theta} \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad (1.40)$$

normu ile tanımlanır (Kufner et al. 1977, s. 113).

Teorem 1.14 $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Theta; X)$ bir Banach uzayıdır (Kufner et al. 1977, s. 114).

Tanım 1.18 X bir Banach uzayı ve $\Theta, \mathbb{R}^n$ de sınırlı, boş kümeden farklı bir bölge olsun.

$$\operatorname{esssup}_{t \in \Theta} \|u(t)\|_X < \infty \quad (1.41)$$

olacak şekilde tüm kuvvetli ölçülebilir $u : \Theta \rightarrow X$ fonksiyonlarının kümesi $L^\infty(\Theta; X)$ ile gösterilir. Bu uzay

$$\|u\|_{L^\infty(\Theta; X)} = \operatorname{esssup}_{t \in \Theta} \|u(t)\|_X \quad (1.42)$$

normu ile tanımlanır (Kufner et al. 1977, s. 115).

1.2.3 Kesirli Sobolev Uzayları

Kesirli Sobolev uzaylarını tanımlamak için öncelikle $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ uzayı göz önüne alınmıştır. Burada $[\![s]\!]$, s reel sayısının tam değeri, $0 \leq \{s\} < 1$ için

$$0 < s \neq \text{tamsayı}, \quad s = [\![s]\!] + \{s\} \quad (1.43)$$

biçimindedir ve her $p \in [1, +\infty)$ olmak üzere, $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_{B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W^{[\![s]\!], p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[\![s]\!]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|D^\alpha f(x+h) - D^\alpha f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p}{|h|^{n+\{s\}p}} dh \right)^{1/p} \quad (1.44)$$

normu sonlu olan tüm $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarından oluşur. Özel olarak, $0 < s < 1$ iken

$$\|f\|_{B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p} \quad (1.45)$$

şeklindedir (Triebel 1992, s. 6-7). Diğer taraftan, $p = 2$ özel durumu için klasik Sobolev uzayları ve $B_{22}^s(\mathbb{R}^n)$ Slobodeckij uzayları Fourier dönüşümü ile tanımlanabilir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{22}^s(\mathbb{R}^n)} &\sim \left\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}[f](\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}[f](\xi) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (1.46)$$

dır, burada $\sim$ birbirine denk normları göstermektedir (Triebel 1992, s. 5-7). Böylece kesirli Sobolev uzayları,

$$H_p^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}[f](\xi) \right) \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (1.47)$$

şeklinde

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}[f](\xi) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.48)$$

normu ile tanımlanır. Bu uzay literatürde Liouville uzayları veya Bessel potansiyel uzayları olarak da bilinir (Triebel 1992, s. 11-12).

Teorem 1.15 *i) $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $H_p^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ dir,*

ii) $s > 0$ için $H_2^s(\mathbb{R}^n) = B_{22}^s(\mathbb{R}^n)$ dir (Triebel 1992, s. 12).

Tanım 1.19 $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq p \leq \infty$ için

$$B_{pp}^s(\Omega) = \left\{ f \in D'(\Omega) : g|_{\Omega} = f \text{ olacak biçimde bir } g \in B_{pp}^s(\mathbb{R}^n) \text{ vardır} \right\}. \quad (1.49)$$

Burada $g|_{\Omega}$ ile g nin Ω bölgesine kısıtlanışını, D' ile de tüm kompleks değerli dağılımların koleksiyonu gösterilmiştir ve $f \in B_{pp}^s(\Omega)$ için

$$\|f\|_{B_{pp}^s(\Omega)} = \inf \|g\|_{B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.50)$$

dir (Triebel 1992, s. 69).

Yukarıdaki tanım yardımıyla $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki fonksiyonların Ω bölgesine kısıtlanması olarak göz önüne alınır (Jin 2021, s. 339). Bunun için g fonksiyonu

$$g = \begin{cases} f, & \Omega \text{ bölgesinde,} \\ 0, & \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ bölgesinde} \end{cases} \quad (1.51)$$

şeklinde seçilebilir (Di Nezza et al. 2012, s. 546). Böylece, basitlik açısından H_2^s yerine H^s gösterimi yapılırsa $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ uzayları tüm reel $s > 0$ değerleri için tanımlanabilir.

Örnek 1.2 Kabul edelim ki, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $s > n/2$ için $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ise, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.52)$$

eşitsizliği vardır, burada C_2 sabiti sadece s ve n değerlerine bağlıdır (Evans 1998, s. 292).

İspat. $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için ters Fourier dönüşümü tanımından

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad (1.53)$$

yazılır. Buradan $e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + i \sin(x\xi)$ için $|e^{ix\xi}|^2 \leq 2 + 2i$ olup

$$|u(x)|^2 \leq \frac{\sqrt{2+2i}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) d\xi \leq \frac{\sqrt{2+2i}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq C_{27} \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.54)$$

elde edilir. Her iki taraftan $x \in \mathbb{R}^n$ üzerinde esas supremumu alınırsa

$$\operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| = \|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.55)$$

bulunur. Şimdi $\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ incelenirse, $\langle \xi \rangle := \sqrt{1 + |\xi|^2}$ için

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi \rangle^s \langle \xi \rangle^{-s}) |\hat{u}(\xi)| d\xi = (\langle \xi \rangle^{-s}, \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi)|)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\hat{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (1.56)$$

olur, (1.56) eşitsizliğinin üçüncü satırında Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılmıştır. $\langle \cdot \rangle$ fonksiyonu, 0 noktasının komşuluğunda singülerliğe sahip olmadığından, eğer $n < 2s$ ise, $\|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ dır. Böylece (1.52) eşitsizliği gösterilmiş olur. ■

1.2.4 $\tilde{H}^s(\Omega)$ Uzayları

$s \geq 0$ bir reel sayı olmak üzere, $\tilde{H}^s(\Omega)$ uzayları,

$$A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (1.57)$$

eliptik operatörü ile ilişkilendirilerek tanımlanır ve A operatörünün simetrik, ikinci merbeden düzgün eliptik bir operatör olduğu kabul edilir (Jin 2021, s. 337). Burada, söz konusu operatörün tanım kümesi

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \partial\Omega \text{ üzerinde } u = 0\} \quad (1.58)$$

şeklinde (Brezis 2011, s. 219). A operatörünün (1.57) şeklinde tanımlanabilmesi amacıyla, Teorem 1.10 gereği $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ iken $d < 4$ şartının sağlanması, yani başka bir deyişle $d \in \{1, 2, 3\}$ olarak seçilmesi gerekmektedir. Aşağıdaki teorem yardımıyla ele alınan operatörün ve özdeğerlerinin özellikleri verilmiştir.

Teorem 1.16 (Simetrik Eliptik Operatörlerin Özdeğerleri) $\Omega, \mathbb{R}^d$ düzleminde açık ve sınırlı bir bölge,

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \partial x_i (a_{ij}(x) \partial x_j u), x \in \bar{\Omega}, \quad (1.59)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (1.60)$$

olsun ve pozitif bir θ sabiti ile her $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ için

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad (1.61)$$

düzgün eliptiklik koşulu sağlansın. Bu takdirde,

i) A operatörünün her bir özdeğeri reeldir.

ii) A operatörünün her bir özdeğeri, (sonlu) katlılığı ve tekrarlılığına göre sıralanarak

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

$$j \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda_j \rightarrow \infty \quad (1.62)$$

olacak şekilde $\Sigma = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ elde edilir, burada Σ, A operatörünün (reel) spektrumunu göstermektedir.

iii) $j = 1, 2, \dots$ için

$$A\omega_j = \lambda_j \omega_j, \Omega \text{ içinde} \quad (1.63)$$

$$\omega_j = 0, \partial\Omega \text{ üzerinde} \quad (1.64)$$

probleminin çözümü $\omega_j \in H_0^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda, $L^2(\Omega)$ uzayının bir $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ ortonormal bazı vardır (Evans 1998, s. 335).

Her $s \geq 0$ için $\tilde{H}^s(\Omega)$ uzayı

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^s |(v, \varphi_j)|^2 < \infty \right\}, \quad (1.65)$$

ve

$$\|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^s |(v, \varphi_j)|^2 \quad (1.66)$$

normu ile birlikte bir Hilbert uzayıdır (Jin 2021, s. 338). Bu da, Sakamoto and Yamamoto (2011) de $\tilde{H}^s(\Omega) = D(A^{s/2}v)$ ile verilen duruma karşılık gelmektedir. Aşağıdaki lemma göz önüne alınarak $\tilde{H}^s(\Omega)$ ile $L^2(\Omega)$ uzayları arasındaki geçiş verilmiştir.

Lemma 1.17 *Kabul edelim ki, H bir Hilbert uzayı ve $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ ortonormal bir baz olsun. O takdirde, her $u \in H$ için*

$$u = \sum_{j=1}^\infty (u, \varphi_j) \varphi_j, \text{ yani } u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (u, \varphi_j) \varphi_j \quad (1.67)$$

yazılabilir ve

$$\|u\|_H^2 = \sum_{j=1}^\infty |(u, \varphi_j)|^2 \quad (1.68)$$

şeklindedir (Brezis 2011, s. 143).

Böylece

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^\infty |(v, \lambda_j^{s/2} \varphi_j)|^2 = \sum_{j=1}^\infty |(v, A^{s/2} \varphi_j)|^2 = \sum_{j=1}^\infty |(A^{s/2} v, \varphi_j)|^2 \\ &= \|A^{s/2} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (1.69)$$

olup $s > 0$ için $\tilde{H}^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$ dir. Özel olarak,

$$\tilde{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega), \quad \tilde{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega), \quad \tilde{H}^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (1.70)$$

şeklindedir. $\tilde{H}^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ olduğundan, $(L^2(\Omega))'$ duali ile $L^2(\Omega)$ özdeşleştirilerek

$$\tilde{H}^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (\tilde{H}^s(\Omega))' \quad (1.71)$$

yazılır. Burada

$$\tilde{H}^{-s}(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\lambda_j^s} |(v, \varphi_j)|^2 < \infty \right\} = (\tilde{H}^s(\Omega))' \quad (1.72)$$

ile verilmiştir (Jin 2021, s. 338).

Lemma 1.18 *A operatörünün özdeğerleri λ_n olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq C_4 n^{2/d}$ özelliği sağlanır (Sakamoto and Yamamoto 2011, s. 435).*

Teorem 1.19 (Lebesgue Teoremi) *$Q, \mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge olsun. $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisinin Q bölgesinde hemen hemen her yerde bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını kabul edelim. Ayrıca $g(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, hemen hemen her yerde $|f_k(x)| \leq g(x)$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. Böylece $f(x)$ fonksiyonu da integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k(x) dx = \int_Q f(x) dx \quad (1.73)$$

dir (Mikhailov 1978, s. 53).

Uyarı 1.2 *Yukarıdaki teoremde $f_k(x) = \sum_{n=1}^k m_n(x)$ şeklinde alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:*

$$\begin{aligned} \int_Q \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x) dx &= \int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k m_n(x) dx = \int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_Q f(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q \sum_{n=1}^k m_n(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_Q m_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Q m_n(x) dx. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Teorem 1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(x)$ serisi $[a, b]$ içerisinde her bir x değeri içerisinde $F(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını kabul edelim, $m'_n(x)$ mevcut ve $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli, öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} m'_n(x)$ serisi $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olsun. Bu durumda, $\sum_{n=1}^{\infty} m'_n(x) = F'(x)$ eşitliği geçerlidir (Buck and Buck 1978, s. 270).

Lemma 1.21 (Konvolüsyon İçin Young Eşitsizliği) *$v \in L^1(0, T)$, $w \in L^q(0, T)$ ve $1 \leq q \leq \infty$ olsun. O halde,*

$$\|v * w\|_{L^q(0, T)} \leq \|v\|_{L^1(0, T)} \|w\|_{L^q(0, T)} \quad (1.75)$$

eşitsizliği sağlanır (Kubica et al. 2020, s. 123).

Lemma 1.22 (Genelleştirilmiş Grönwall Eşitsizliği) $C_5 > 0$ bir sabit, $0 < \alpha < 1$ ve $(0, T)$ bölgesinde $f \in L^1(0, T)$ olsun. Ayrıca $u \in L^1(0, T)$ için

$$0 \leq u(t) \leq f(t) + C_5 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.76)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilirse,

$$u(t) \leq f(t) + C_6 e^{C_7 t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.77)$$

elde edilir. Burada $C_6, C_7 > 0$ sabitleri α, C_5 değerlerine bağlıdır, ancak $T > 0$ değerinden bağımsızdır (Kubica et al. 2020, s. 124-125).

Teorem 1.23 (Green Formülü) $p(x)$ ve $q(x)$ reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları için

$$L_1 = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \quad (1.78)$$

diferensiyel operatörünü göz önüne alalım. u ve v , $[a, b]$ aralığı üzerinde iki kez integralenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_a^b (v L_1 u - u L_1 v) dx = p(-vu' + v'u)|_a^b \quad (1.79)$$

ifadesine Green formülü denir (Cahill 2013, s. 206).

Uyarı 1.3 Eğer u ve v fonksiyonları, (1.79) Green formülünde $(v'u - vu')|_a^b = 0$ eşitliğini sağlıyor ise, L_1 diferensiyel operatörü simetriktir denir (Cahill 2013, s. 207).

1.3 ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Tanım 1.20 $G \subset \mathbb{R}^n$ için L_2 lineer operatörünün tanım kümesi $M_{L_2} \subset L^2(G)$ olsun. Eğer $f, g \in M_{L_2}$ için

$$(L_2 f, g) = (f, L_2 g) \quad (1.80)$$

eşitliği sağlanıyorsa, o takdirde $L_2 : M_{L_2} \rightarrow L^2(G)$ dönüşümü ile tanımlı operatöre self-adjoint denir (Vladimirov 1971, s. 25).

Teorem 1.24 *Eğer L_2 operatörü self-adjoint ise, tüm özdeğerleri reel ve farklı özdeğerlere karşılık gelen tüm özfonksiyonlar ortogonaldır (Vladimirov 1971, s. 26).*

G sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$L_2 u \equiv -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (1.81)$$

denklemini ve

$$\alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = 0 \quad (1.82)$$

koşulunu sağlayan $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ çözümünü bulma problemi ele alalım. Burada

$$p \in C^1(\overline{G}), \quad q \in C(\overline{G}), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in \overline{G}, \quad (1.83)$$

$$\alpha \in C^1(\partial G), \quad \beta \in C^1(\partial G), \quad \alpha(x) \geq 0, \quad \beta(x) \geq 0, \quad (1.84)$$

$$0 < \alpha(x) + \beta(x), \quad x \in \partial G \quad (1.85)$$

dır.

Lemma 1.25 $\lambda = 0$ değerinin L_2 operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $q = 0$ ve $\alpha = 0$ olmasıdır (Vladimirov 1971, s. 259).

Bu lemma yardımıyla Neumann sınır koşulu içeren problemler için $\lambda = 0$ özdeğerinin spektruma dahil edilmesi gerektiği ancak Dirichlet sınır koşulu içeren problemler için bu özdeğerin bulunmayacağı söylenebilir.

Teorem 1.26 L_2 operatörünün özdeğerlerinin kümesi sayılabilir ve sonlu sayıda limit noktasına sahip değildir; her özdeğer sonlu katlara sahiptir. M_{L_2} bölgesine ait her fonksiyon L_2 operatörünün özfonksiyonunu içeren Fourier serisine açılabilir (Vladimirov 1971, s. 260).

Bu teorem yardımıyla L_2 operatörünün özdeğerleri, $k \rightarrow \infty$ iken $\lambda_k \rightarrow \infty$ olmak üzere, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ şeklinde numaralandırılabilir. Burada her $k = 1, 2, \dots$, değeri için $\{\lambda_k\}$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\varphi_k \in M_{L_2}$ ile gösterilir, böylece her bir λ_k özdeğerine karşılık gelen bir ve yalnız bir φ_k özfonksiyon vardır. Burada $\{\varphi_k\}$ özfonksiyonları reel ve ortonormal seçilerek

$$(L_2 \varphi_k, \varphi_i) = \lambda_k (\varphi_k, \varphi_i) = \lambda_k \delta_{ki} \quad (1.86)$$

yazılabilir. M_{L_2} bölgesine ait her fonksiyon L_2 operatörünün $\{\varphi_k\}$ özfonksiyonlarını içeren Fourier serisine açılabilir, yani

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \quad (1.87)$$

biçimindedir ve bu seri $\overline{G}$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Vladimirov 1971, s. 261).

Tanım 1.21 (Leibniz İntegral Formülü) f ve $\partial f / \partial x$,

$$R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$$

dikdörtgeni içinde sürekli olsun ve $u_0(x)$ ile $u_1(x)$, $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve değer kümeleri (c, d) açık aralığının bir alt kümesi olsun.

Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x, t) dt = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f[x, u_1(x)] u_1'(x) - f[x, u_0(x)] u_0'(x) \quad (1.88)$$

eşitliği vardır (Protter and Morrey 2012, s. 425).

Aşağıda verilen Reynolds transport teoremi, Leibniz integral kuralının üç boyuta genişletilmesi olarak düşünülebilir (Kundu et al. 2012, s. 85).

Tanım 1.22 (Reynolds Transport Denklemi) $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere,

$$\frac{D}{Dt} \int_R G(\vec{x}, t) dV = \int_R \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{x}, t) dv + \int_{\partial R} G(\vec{x}, t) v_k n_k dv$$

eşitliğine Reynolds transport denklemi denir. Burada n_k ∂R yüzeyine dış birim normal vektör ve J Jakobiyen determinantı olmak üzere, $dv = JdV$ dır. Eğer R bölgesi sabitlenmiş bir bölge ise, sınırlar t değişkeninden bağımsız olup

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R G(\vec{x}, t) dv = \int_R \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{x}, t) dv \quad (1.89)$$

dır (Sadd 2018, s. 139-140).

Teorem 1.27 (Fubini Teoremi) Ω_1 ve Ω_2 reel eksen üzerinde aralıklar olmak üzere, bir f fonksiyonu $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde sürekli ve sınırlı olsun. Bu takdirde,

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) dy dx \quad (1.90)$$

eşitliği geçerlidir (Krantz 1999, s. 8).

Tanım 1.23 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı olsun ve X üzerinde norm

$$\|x\| = \sqrt{|(x, x)|} \quad (1.91)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x, y \in X$ ise,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (1.92)$$

eşitsizliği sağlanır (Hunter and Nachtergaele 2001, s. 128).



BÖLÜM 2

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFÜZYON DENKLEMLERİ İÇİN DÜZ PROBLEMLERİN FORMAL ÇÖZÜMÜ

2.1 GİRİŞ

Rastgele moleküler hareketler sonucu, maddenin, ele alınan sistemin bir parçasından diğerine taşınma sürecine difüzyon adı verilir (Crank 1975, s. 1).

Tanım 2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ve $T > 0$ olmak üzere, $\Omega \times (0, T)$ silindiri üzerinde tanımlı

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (2.1)$$

difüzyon denklemi olarak adlandırılır. Burada ϱ, p, q katsayıları t zaman değişkenine bağlı olmayıp $x \in \overline{\Omega}$ iken $\varrho(x), p(x) > 0, q(x) \geq 0$ ve $p \in C^1(\overline{\Omega}), \varrho, q \in C(\overline{\Omega})$ dır (Vladimirov 1971, s. 53).

Tanım 2.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip ve sınırlı bir bölge olsun. Burada $T > 0$ ve L düzgün simetrik eliptik operatör olmak üzere,

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (Lu)(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (2.2)$$

denklemine $0 < \alpha < 1$ iken kesirli difüzyon denklemi, $1 < \alpha < 2$ iken de kesirli difüzyon-dalga denklemi veya kesirli dalga denklemi denir (Sakamoto and Yamamoto 2011, s. 427).

Kesirli difüzyon denkleminde, kesirli türevin mertebesinin değeri yayılımın hızını değiştirmektedir. $\alpha = 1$ iken normal difüzyon, $\alpha = 2$ iken balistik difüzyon olarak bilinmektedir (Metzler and Klafter 2000, s. 7). $0 < \alpha < 1$ durumu, normalden daha yavaş difüzyonu (subdiffusion), $1 < \alpha < 2$ ise normalden daha hızlı difüzyonu (superdiffusion) göstermektedir (Gitterman 2000, s. 6065). Örnek olarak, kesirli difüzyon denklemi, kaya, tortu veya toprak gibi oldukça farklı bileşenlerden oluşan ve suyu geçiren bir yeraltı tabakasındaki olağandışı yayılım olayı için bir model denklemdir (Xu et al. 2011, s. 1356).

Kesirli mertebeden kısmi diferensiyel denklemler için bazı modeller bilinmekle birlikte bu türden denklemler için tam bir sınıflandırma henüz mevcut değildir (Rogosin 2013, s. 51). Ancak literatürde üzerine çalışılan denklemlerin özelinde lineer, hemen-hemen lineer ve lineer olmayan olarak isimlendirilen denklemler mevcuttur. Jin (2021)'in altıncı bölümünde, kesirli difüzyon denklemini, lineer difüzyon, $F(x, t) = F(u(x, t))$ iken ise lineer olmayan difüzyon denklem olarak belirtilmektedir. Son zamanlarda, kesirli mertebeden lineer olmayan difüzyon denklemleri önem kazanmıştır. Düzensiz sistemlerde olağandışı taşıma, gazların gözenekli ortamda süzülmesi ve yine gözenekli ortamda ince tabakalı doygun çözelti bölgelerinin incelenmesi gibi uygulamaları vardır (Vishal and Das 2012, s. 203).

Literatürde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ olmak üzere,

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = Lu(x, t) + F(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$u(x, t_0) = b(x), \quad x \in \Omega, \quad t_0 \in \{0, T\}, \quad (2.5)$$

zaman değişkenine göre Caputo kesirli türevi, uzay değişkenine göre L türev operatörünü içeren probleminin çözümünü elde eden çalışmalar dikkate alınmıştır. (2.4) eşitliğinin sol tarafındaki Bu ise sınır koşulunu belirtmektedir.

Bu tez çalışmasında ele alınan formdaki bir problemin formal çözümünün bulunmasının temeli, klasik kısmi diferensiyel denklemler için

$$\partial_t u(x, t) = L_0 u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (2.6)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = b(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

probleminin çözümünün, değişkenlere ayırma (Fourier, özfonksiyonlar açılımı) yöntemi ile

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \exp(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x) \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilmesine dayanır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir bölge, operatör

$$L_0 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (2.10)$$

biçiminde, $\varphi_n(x)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} L_0 \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n, & \Omega \text{ içinde,} \\ \varphi_n = 0, & \partial\Omega \text{ üzerinde,} \end{cases} \quad (2.11)$$

probleminin bir çözümü ve $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} L^2(\Omega)$ uzayının bir bazıdır (Brezis 2011, s. 325-332). Luchko (2010) çalışmasında (2.3)-(2.5) problemini, $F(x, t, u(x, t)) = 0$ homojen ve lineer durumunda göz önüne almış ve (2.9) çözümünde üstel fonksiyon yerine Mittag-Leffler fonksiyonu içeren şekilde elde ederek genelleştirmiştir. Daha sonra, Sakamoto and Yamamoto (2011), bu yöntemi $F(x, t, u(x, t)) = F(x, t)$ iken parametrelerin değişimi mantığından yararlanarak homojen olmayan lineer denklemlere uygulamıştır. Beckers and Yamamoto (2013) çalışmasında, $\alpha_1 < \alpha$ için $F(x, t) = \partial_t^{\alpha_1} u(x, t)$ alınması ise, söz konusu yöntemin lineer olmayan denklemlere uygulanması için temel hazırlamıştır. Yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümü için kullanan başlıca çalışmalar, Luchko et al. (2013), Kian and Yamamoto (2017), Jin et al. (2018), Jing et al. (2019) ve Ngoc et al. (2019) olarak sayılabilir ve sırasıyla Neumann sınır koşulu, kesirli türevin mertebesi $1 < \alpha < 2$, F fonksiyonu, L operatörü ve $u(x, t_0) = u(x, T)$ seçilmesi ile ele aldığımız düz problemten farklılık göstermektedir. Söz konusu çalışmalar, ele aldığımız problemin çözümünün bulunması için ışık tutmuştur.

Bu bölümde, $d \in \{1, 2, 3\}$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ve $r_1, r_2, r_3, T > 0$ birer reel sayı olmak üzere,

$$\Omega = \begin{cases} (0, r_1), & d = 1 \text{ ise,} \\ (0, r_1) \times (0, r_2), & d = 2 \text{ ise,} \\ (0, r_1) \times (0, r_2) \times (0, r_3), & d = 3 \text{ ise,} \end{cases} \quad (2.12)$$

biçimindeki $\Omega \times (0, T)$ bölgesinde

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = Lu(x, t) + F(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.13)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.14)$$

$$u(x, 0) = b(x), \quad x \in \Omega \quad (2.15)$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer probleminin çözümü ele alınmıştır. Burada u fonksiyonu problemin çözümünü, $\alpha \in (0, 1)$ bir rasyonel sayıyı, ∂_t^α Caputo kesirli türev operatörünü, $b(x)$ ve $F(x, t, u(x, t))$ bilinen birer fonksiyonu ve $a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ katsayıları $a_{ij} = a_{ji}$ şartını sağlayacak şekilde tanımlanan

$$Lu = \sum_{i,j=1}^d \partial x_i (a_{ij}(x) \partial x_j u), \quad x \in \Omega \quad (2.16)$$

ikinci mertebeden türev içeren lineer bir operatörü temsil etmektedir. Konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, ilk olarak, Lu için en basit durum olan $d = 1$ ve $a_{ij}(x) = 1$ iken $Lu = u_{xx}$ durumunda çözüm elde edilmiştir. Daha sonra, L operatörü için (2.16) genel durumunda (2.13)-(2.15) problemi göz önüne alınarak çözümü bulunmuştur.

2.2 $x \in \mathbb{R}$ DURUMUNDA LİNEER OLMAYAN DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FORMAL ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Bu kısımda,

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \quad (2.17)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.18)$$

$$u(x, 0) = b(x), \quad x \in (0, \pi) \quad (2.19)$$

şeklindeki problem ele alınmıştır. Formal çözümün elde edilmesi için öncelikle

$$\partial_t^\alpha u_h(x, t) = (u_h)_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \quad (2.20)$$

$$u_h(0, t) = u_h(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.21)$$

$$u_h(x, 0) = b(x), \quad x \in (0, \pi) \quad (2.22)$$

lineer ve homojen denklem için başlangıç-sınır değer probleminin incelenmesi gerekmektedir. Çözüm özfonksiyonlar cinsinden

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_h)_n(t) \varphi_n(x) \quad (2.23)$$

ele alınmıştır, buradan elde edilen φ_n yardımıyla homojen olmayan denklem için başlangıç-sınır değer probleminin çözümü de

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) \quad (2.24)$$

biçimindedir. Bunun için öngörülen çözüm

$$u_h(x, t) = T_h(t) \varphi(x), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T] \quad (2.25)$$

şeklinde aranırsa homojen denklem ve koşullar

$$\varphi(x) \partial_t^\alpha (T_h(t)) = T_h(t) \varphi''(x), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \quad (2.26)$$

$$T_h(t) \varphi(0) = T_h(t) \varphi(\pi) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.27)$$

$$T_h(0) \varphi(x) = b(x), \quad x \in (0, \pi) \quad (2.28)$$

haline gelir. Burada öncelikle koşullar incelenecek olursa, (2.27) koşulunda her $t \in [0, T]$ için $T_h(t) = 0$ olması sadece $u = 0$ aşıkâr çözümünün gerçekleşmesine yol açacaktır. O halde, (2.27) eşitliği

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \quad (2.29)$$

şeklini almalıdır. (2.28) koşulu ise,

$$T_h(0) = \frac{b(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in (0, \pi) \quad (2.30)$$

olup T_h fonksiyonunun x bileşenine bağlı olması, ancak $T_h(0) = C_8$ biçiminde bir sabite eşit iken sağlanır. (2.26) denklemi ele alındığında ise,

$$\frac{\partial_t^\alpha (T_h(t))}{T_h(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (2.31)$$

eşitliğine dönüştür ve denklemin sol tarafı t ve sağ tarafı x değişkenlerine bağlı olduğundan bir sabit değere eşit olmalıdır. Aşağıda (2.33) şeklinde yazılan özdeğer probleminin, Teorem 1.16 ile uyumlu olması açısından bu sabit değer $-\lambda$ olarak seçilmiştir. Yukarıdaki bağıntı ve koşullardan

$$(\partial_t^\alpha T_h)(t) + \lambda T_h(t) = 0, \quad T_h(0) = C_8 \quad (2.32)$$

kesirli mertebeden adi diferensiyel denklem için bir başlangıç değer problemi ve

$$L_3 \varphi = \varphi'' = -\lambda \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \quad (2.33)$$

olarak ifade edilen, özdeğeri $-\lambda$ ve karşılık gelen özfonksiyon φ olan eliptik kısmi diferensiyel denklem için bir sınır değer problemi elde edilmiştir. (2.33) problemi çözülerek elde edilen

$$\varphi(x) = C_9 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_{10} \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.34)$$

özfonksiyonu için $\varphi_n(0) = C_9 = 0$ koşulu dikkate alınarak

$$\varphi(x) = C_{10} \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.35)$$

yazılır. Burada $\varphi(\pi) = C_{10} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ eşitliği göz önüne alınır ve

$$\sqrt{\lambda_n}\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.36)$$

bulunur. Böylece $C_{10} = \sqrt{2/\pi}$ seçimi ile $n \in \mathbb{Z}$ için, L_3 operatörünün özdeğeri

$$-\lambda_n = -n^2, \quad (2.37)$$

ve özfonksiyonu

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad (2.38)$$

olarak elde edilir. Burada $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right)_{L^2(0,\pi)} = \begin{cases} 1, & m = n \text{ iken,} \\ 0, & m \neq n \text{ iken,} \end{cases} \quad (2.39)$$

olduğundan $\varphi_n, L^2(0, \pi)$ uzayında ortonormaldir.

Şimdi, (2.17)-(2.19) problemine geri dönülürse, denklem ve başlangıç koşulu φ_n özfonksiyonu ile çarpılarak uzaysal bölge üzerinde x değişkenine göre integral alınırsa

$$(\partial_t^\alpha u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} = (u_{xx}(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} + (F(\cdot, t, u(\cdot, t)), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)}, \quad t > 0, \quad (2.40)$$

$$(u(\cdot, 0), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} = (b, \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} \quad (2.41)$$

elde edilir. Yukarıdaki problemi, kesirli mertebeden adi diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemi biçimine getirmek amacıyla denklem ve koşuldaki her bir terimin incelenmesi gerekir. Denklemin sol tarafındaki terim üçüncü satırda Fubini teoremi ve dördüncü satırda Leibniz integral formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} (\partial_t^\alpha u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^\pi \partial_t^\alpha u(x, t) \varphi_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_\tau [u(x, \tau)]}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \varphi_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_\tau [u(x, \tau) \varphi_n(x)]}{(t-\tau)^\alpha} d\tau dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left[\int_0^\pi \partial_\tau [u(x, \tau) \varphi_n(x)] dx \right] \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\int_0^\pi u(x, \tau) \varphi_n(x) dx \right] \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\ &= \partial_t^\alpha \left[\int_0^\pi u(x, t) \varphi_n(x) dx \right] = \partial_t^\alpha (u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0,\pi)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

bulunur. (2.40) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim olan

$$L_3 u = \frac{d}{dx} \left[a_1(x) \frac{du}{dx} \right] + a_2(x) u, \quad (2.43)$$

$a_1(x) = 1, a_2(x) = 0$ özel durumu için $(L_3 u, \varphi_n)_{L^2(0,\pi)}$ ifadesine karşılık gelmektedir. O halde, burada

$$\int_a^b (v L_3 u - u L_3 v) dx = a_1 (-vu' + v'u) \Big|_a^b \quad (2.44)$$

bir boyutlu Green formülü uygulanabilir ve $v = \varphi_n(x)$, $u = u(x, t)$ için

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi [\varphi_n(x) \{L_3 u(x, t)\} - u(x, t) \{L_3 \varphi_n(x)\}] dx \\
&= [-\varphi_n(x) u_x(x, t) + \varphi'_n(x) u(x, t)]_0^\pi \\
&= -u_x(\pi, t) \varphi_n(\pi) + u(\pi, t) \varphi'_n(\pi) + u_x(0, t) \varphi_n(0) - u(0, t) \varphi'_n(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

olup $(L_3 u, \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} = (u, L_3 \varphi_n)_{L^2(0, \pi)}$ eşitliği sağlanır.

$$\begin{aligned}
(u_{xx}(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} &= (L_3 u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} = (u(\cdot, t), L_3 \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} \\
&= (u(\cdot, t), -\lambda_n \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} = -\lambda_n (u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0, \pi)}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

yazılır. Basitlik için

$$(u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} = u_n(t), \tag{2.47}$$

$$(F(\cdot, t, u(\cdot, t)), \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} = F_n^{(1)}(u(t)) \tag{2.48}$$

gösterimleri kullanılarak problem

$$\partial_t^\alpha u_n(t) = -\lambda_n u_n(t) + F_n^{(1)}(u(t)), \quad t > 0, \tag{2.49}$$

$$u_n(0) = (b, \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} \tag{2.50}$$

başlangıç değer problemine indirgenmiştir. (2.49) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^\alpha \mathcal{L}(u_n(s)) - \sum_{k=0}^0 s^{\alpha-k-1} u_n^{(k)}(0) = -\lambda_n \mathcal{L}(u_n(s)) + \mathcal{L}(F_n^{(1)}(u(s))) \tag{2.51}$$

eşitliğinden

$$\mathcal{L}(u_n(s)) = (b, \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda_n} + \frac{1}{s^\alpha + \lambda_n} \mathcal{L}(F_n^{(1)}(u(t))) \tag{2.52}$$

elde edilir ve (1.12) gereği

$$\mathcal{L}[E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda_n}, \quad \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)](s) = \frac{1}{s^\alpha + \lambda_n} \tag{2.53}$$

olup (2.52) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanarak

$$u_n(t) = (b, \varphi_n)_{L^2(0, \pi)} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)] * F_n^{(1)}(u(t)) \tag{2.54}$$

bulunur. O halde ararılan formal çözüml

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (F(\cdot, \tau, u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} (b, \varphi_n) E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

biçimindedir. (2.37) özdeğeri ve (2.38) özfonksiyonu çözümlde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-n^2 (t-\tau)^\alpha) (F_n^{(2)}(u)) d\tau \right) \sin(nx) \\
&+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (b, \sin(nx)) E_{\alpha, 1}(-n^2 t^\alpha) \sin(nx)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

elde edilir, burada basitlik için $\left(F_n^{(2)}(u(\tau)) \right) = (F(\cdot, \tau, u(\cdot, \tau)), \sin(n\cdot))_{L^2(0, \pi)}$ olarak gösterilmiştir.

Bir sonraki kısımda $x \in \mathbb{R}^d$ durumunda ele alınan operatör için Green formülü elde edilmiş ve operatörün self-adjointliği gösterilmiştir.

2.3 Ω BÖLGESİNİN BOYUTU $d = 3$ İKEN L OPERATÖRÜNÜN SELF-ADJOİNTLİĞİNİN İNCELENMESİ

Bu kısımda ele alınacak problemde bulunan operatör, Ω bölgesinin boyutunun $d = 3$ özel durumda incelenmiştir. $d = 2$ iken de, işlemler benzer şekilde yapılmaktadır. $Y(x) = (a_{ij}(x))_{d \times d}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Lu &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{i3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left((a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(a_{21}, a_{22}, a_{23}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(a_{31}, a_{32}, a_{33}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

ve

$$\begin{aligned}
Lu &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (Y(x) \nabla u) \\
&= \nabla \cdot [Y(x) \nabla u] \\
&= \operatorname{div} [Y(x) \operatorname{grad} u]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

yazılabilir. Burada

$$wL[u] - uL[w] = w(\nabla \cdot [Y(x) \nabla u]) - u(\nabla \cdot [Y(x) \nabla w]) \tag{2.59}$$

olup türev atma işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&wL[u] - uL[w] \\
&= \nabla \cdot [wY(x) \nabla u] - \nabla w \cdot [Y(x) \nabla u] - [\nabla \cdot [uY(x) \nabla w] - \nabla u \cdot [Y(x) \nabla w]] \\
&= \nabla \cdot [wY(x) \nabla u] - \nabla w \cdot [Y(x) \nabla u] - \nabla \cdot [uY(x) \nabla w] + \nabla u \cdot [Y(x) \nabla w]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

olduğu görülmür. Y matrisinin simetrikliği olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
&\nabla w \cdot [Y(x) \nabla u] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ a_{31} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial w}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial w}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \\
&\quad + \frac{\partial w}{\partial x_3} \left(a_{31} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \\
&= \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + a_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \\
&\quad + a_{23} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \left(a_{31} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_3} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_3} + a_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

yazılır ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \nabla u \cdot [Y(x) \nabla w] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) \\
&= a_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{21} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{31} \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\
&\quad + a_{32} \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{13} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_3} + a_{23} \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} + a_{33} \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

elde edilir. Böylece $\nabla w \cdot [Y(x) \nabla u] = \nabla u \cdot [Y(x) \nabla w]$ eşitliği gösterilmiştir. O halde

$$\begin{aligned}
wL[u] - uL[w] &= \nabla \cdot [wY(x) \nabla u] - \nabla \cdot [uY(x) \nabla w] \\
&= \nabla \cdot [wY(x) \nabla u - uY(x) \nabla w]
\end{aligned} \tag{2.63}$$

olup her iki taraftan x -e göre integral alınır ve basitlik için $\partial\Omega = S$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} wL[u] - uL[w] dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [wY(x) \nabla u - uY(x) \nabla w] dx \\
&= \int_S [uY(x) \nabla w - wY(x) \nabla u] \cdot ndS \\
&= \int_S Y(x) (u \nabla w - w \nabla u) \cdot ndS \\
&= \int_S Y(x) \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS
\end{aligned} \tag{2.64}$$

bulunur. Bu da ikinci Green formülü olarak adlandırılır (Vladimirov 1971, s. 257). Ele alınan şart, (1.82) gibi genel yazılırsa, u ve w fonksiyonları

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.65}$$

$$\alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.66}$$

koşullarını sağlar. Yukarıdaki homojen sistemin sıfırdan farklı α, β çözümleri olması için katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır, buradan

$$\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial n} \\ w & \frac{\partial w}{\partial n} \end{vmatrix}_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.67}$$

ve

$$u \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} - w \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.68}$$

bulunur. Böylece Green formülünün sağ tarafındaki integral sıfıra eşit olarak

$$\int_{\Omega} wL[u] - uL[w] dx = 0 \quad (2.69)$$

yazılır, buradan da

$$(Lu, w)_{L^2(\Omega)} = (u, Lw)_{L^2(\Omega)} \quad (2.70)$$

eşitliği elde edilir.

2.4 $x \in \mathbb{R}^d$ DURUMUNDA LİNEER OLMAYAN DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FORMAL ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Şimdi, bölümün başında verilmiş olan (2.13)-(2.15) probleminin öngörülen çözümü elde edilmiştir. İşlem sıralaması 2.2 altbaşlığında incelenen $d = 1$ durumuna benzer şekildedir. Burada $A = -L$ olacak şekilde $\tilde{H}^s(\Omega)$, $s \geq 0$ uzayları tanımlanabilir ve Teorem 1.16 gereği $n = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{cases} L\varphi_n = -\lambda_n\varphi_n, & \Omega \text{ içinde,} \\ \varphi_n = 0, & \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (2.71)$$

probleminin çözümü olan $\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ özfonksiyonları, $L^2(\Omega)$ uzayının ortonormal bir baz sistemini oluşturur. Burada $1 \leq i, j \leq d$ olacak şekildeki her i, j değeri için $a_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ olduğu ve

$$v \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad (2.72)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $v > 0$ sabitinin var olduğu kabul edilmiştir. Dikkat edilmesi gerekir ki, bir önceki kısımda incelenen $L_3u = u_{xx}$, L operatörü için $a_{ij}(x) = 1$, $d = 1$ özel durumudur. Dolayısıyla formal çözüm elde edilirken yapılan işlemler bir önceki kısma oldukça benzerdir.

İşlemlere yine homojen denklem için

$$\partial_t^\alpha u_h(x, t) = (Lu_h)(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.73)$$

$$u_h(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.74)$$

$$u_h(x, 0) = b(x), \quad x \in \Omega \quad (2.75)$$

problemi ele alınarak başlayalım. Çözüm

$$u_h(x, t) = T_h(t) \varphi(x), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2.76)$$

şeklinde aranarak problem

$$\varphi(x) \partial_t^\alpha (T_h(t)) = T_h(t) (L\varphi)(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.77)$$

$$T_h(t) \varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.78)$$

$$T_h(0) \varphi(x) = b(x), \quad x \in \Omega \quad (2.79)$$

biçiminde yazılır. O halde, (2.78) şartı

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.80)$$

dır. (2.79) koşulu ise,

$$T_h(0) = \frac{b(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in \Omega \quad (2.81)$$

olup T_h fonksiyonunun x bileşenine bağlı olması, ancak $T_h(0) = C_{11}$ biçiminde bir sabite eşit olduğu durumda sağlanır. (2.77) denklemi ise,

$$\frac{\partial_t^\alpha (T_h(t))}{T_h(t)} = \frac{(L\varphi)(x)}{\varphi(x)} \quad (2.82)$$

eşitliğine dönüşür ve denklemin sol tarafı t ve sağ tarafı x değişkenlerine bağlı olarak bir sabit değere eşit olmalıdır. Aşağıda x değişkeni için elde edilen problemin, Teorem 1.16 ile uyumlu olması açısından bu sabit değer $-\lambda$ olarak seçilir, böylece

$$(\partial_t^\alpha T_h)(t) + \lambda T_h(t) = 0, \quad T_h(0) = C_{11} \quad (2.83)$$

kesirli mertebeden adi diferensiyel denklem için bir başlangıç değer problemi ve

$$L\varphi = -\lambda\varphi, \quad \varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.84)$$

özdeğeri $-\lambda$ ve karşılık gelen özfonksiyon φ olan eliptik kısmi diferensiyel denklem için bir sınır değer problemi elde edilir. Teorem 1.16 gereği, $L^2(\Omega)$ uzayının bir $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormal bazı vardır.

Böylece, lineer olmayan denklem için (2.13)-(2.15) problemine geri dönülebilir. Buradan denklem ve başlangıç koşulu φ_n özfonksiyonu ile çarpılıp uzaysal bölge üzerinde x değişkenine göre integral alındığı takdirde

$$(\partial_t^\alpha u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = (Lu(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} + (F(\cdot, t, u(\cdot, t)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)}, \quad t > 0, \quad (2.85)$$

$$(u(\cdot, 0), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = (b, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.86)$$

bulunur. Bu problemi, kesirli mertebeden adi diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemi biçimine getirmek amacıyla denklemdeki her bir terimin incelenmesi gerekmektedir. Denklemin sol tarafındaki terim önceki kısma benzer şekilde incelenmiştir, integrale d kez üst üste Fubini teoremi uygulanmış ve Leibniz integral formülünün genelleştirilmiş hali olan Reynolds transport denklemi kullanılarak

$$(\partial_t^\alpha u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = \partial_t^\alpha (u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.87)$$

yazılmıştır. Bir önceki başlıkta elde edilen d boyut için Green formülü yardımıyla (2.85) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim

$$(Lu(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = (u(\cdot, t), L\varphi_n)_{L^2(\Omega)} = -\lambda_n (u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.88)$$

şeklindedir. Basitlik için

$$(u(\cdot, t), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = u_n(t), \quad (2.89)$$

$$(F(\cdot, t, u(\cdot, t)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = F_n^{(3)}(u(t)) \quad (2.90)$$

gösterimleri kullanılarak problem

$$\partial_t^\alpha u_n(t) = -\lambda_n u_n(t) + F_n^{(3)}(u(t)), \quad t > 0, \quad (2.91)$$

$$u_n(0) = (b, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.92)$$

kesirli mertebeden başlangıç değer problemine indirgenmiş olur. (2.91) denkleminin her iki taraftan sırasıyla Laplace ve ters Laplace dönüşümleri alınır

$$u_n(t) = (b, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)] * F_n^{(3)}(u(t)) \quad (2.93)$$

yazılır. O halde öngörülen çözüm

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (F(\cdot, \tau, u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (b, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (2.94)$$

biçiminde elde edilir.



BÖLÜM 3

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR DÜZ PROBLEMİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümden itibaren, sadece başlangıç koşulunun sıfıra eşit olduğu durum incelenmiştir ve (2.13)-(2.15) probleminin $b = 0$ özel durumu olan

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = Lu(x, t) + F(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

düz problemi ele alınmıştır. Burada $F(x, t, u(x, t)) = s(t)p(x) + g(u(x, t))$ olarak belirlenmiştir. $\partial_t^\alpha u$, $0 < \alpha < 1$ için u fonksiyonunun Caputo kesirli türevini göstermek üzere, Ω bölgesi (2.12), L operatörü ise (2.16) biçimindedir. Başlangıç koşulu için yapılan (3.3) seçiminin nedeni, bir sonraki bölümde ele alınan ters problemin Sakamoto and Yamamoto (2011) çalışmasındaki denklemin lineer olmayan duruma genelleştirilmesi olmasıdır. Söz konusu çalışmada ele alınan ters problem aynı başlangıç koşuluna sahiptir.

Klasik mertebeden türevli bir diferensiyel denklem için bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlık ve tekliliğinin ispatı için Bielecki yöntemi kullanılır ve söz konusu yöntem, Jin et al. (2018) tarafından $L = \Delta$ ve $F(x, t, u(x, t)) = F(u(x, t))$ özel durumunda lineer olmayan kesirli difüzyon denklemi için (3.1)-(3.3) problemine uygulanmıştır. Aynı teknikten lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemler için yararlanılan literatürdeki bazı çalışmalar ise, Kian and Yamamoto (2017), Ngoc et al. (2019), Jing et al. (2019) ve Au et al. (2021) olarak sıralanabilir. Söz konusu makalelerin ışığında Arıbaş et al. (2022), (2023a), (2023b) çalışmaları yapılmıştır ve buradaki sonuçlar kullanılarak aşağıdaki teorem yazılmıştır. Teorem 3.1 bu bölümün ana sonucunu belirtmektedir.

Teorem 3.1 *Kabul edelim ki, $p \in L^2(\Omega)$, $r \in C[0, T]$, $g(0) = 0$,*

$$\left| \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{d^k g}{d\xi^k}(\xi) \right| < \infty, \quad k = 0, 1 \quad (3.4)$$

ve her $v, w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ için

$$\|g(v) - g(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|v - w\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C_0 > 0$ sabiti olsun. Bu durumda (3.1)-(3.3) probleminin $\partial_t^\alpha u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ olacak şekilde tek bir $u \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, T]; L^2(\Omega))$ çözümü vardır ve

$$\|u\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C_{12} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]} \quad (3.6)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C_{12} > 0$ sabiti mevcuttur.

Teoremin ispatı için aşağıda açıklanan Bielecki yönteminden yararlanılmıştır.

3.1 BİELECKİ YÖNTEMİ

Bielecki yöntemi, ağırlıklı bir norma göre sınırlı elemanlardan oluşan fonksiyon uzaylarında kullanılır (Corduneanu et al. 2016, s. 43). Önemli kullanım alanlarından biri Picard teoreminin ispatıdır ve Banach sabit nokta teoremine dayanır. Bir E Banach uzayında, C_{13} ve C_{14} birer sabit olmak üzere, her $x \in E$ için

$$C_{13} \|x\|_1 \leq \|x\| \leq C_{14} \|x\|_1 \quad (3.7)$$

eşitsizliğini sağlayan iki norm varsa, bu takdirde bir normda Lipschitz sürekli olan bir dönüşümün diğer normda da Lipschitz sürekli olduğu dikkate alınır. Örneğin, $k > 0$ ve $u \in C[0, T]$ için

$$\|u\|_k = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-kt} |u(t)| \quad (3.8)$$

olmak üzere,

$$C_{15} e^{-kt} \|u\|_{C[0, T]} \leq \|u\|_k \leq C_{16} \|u\|_{C[0, T]} \quad (3.9)$$

eşitsizliğini gerçekleyen $\|\cdot\|_{C[0, T]}$ ile $\|\cdot\|_k$ normları şeklindedir (Tarafdar and Chowdhury 2008, s. 34).

Tanım 3.1 (Sabit Nokta) $E \neq \emptyset$ için, $M : E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Bir $x \in E$ noktası için $M(x) = x$ eşitliği sağlanıyorsa, x noktasına M dönüşümünün bir sabit noktasıdır denir (Hunter and Nachtergaele 2001, s. 62).

Tanım 3.2 (Daralma, Daralma Dönüşümü) (E, d) bir metrik uzay olsun. Eğer, her $x, \tilde{x} \in E$ için

$$d(M(x) - M(\tilde{x})) \leq cd(x - \tilde{x}) \quad (3.10)$$

bağıntısına $0 \leq c < 1$ olacak şekilde sağlayan bir c sabiti varsa, $M : E \rightarrow E$ dönüşümüne bir daralma ya da daralma dönüşümü denir (Hunter and Nachtergaele 2001, s. 61).

Teorem 3.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi) E bir Banach uzayı, $M : E \rightarrow E$ lineer olmayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $x, \tilde{x} \in E$ ve bir $\gamma < 1$ sabiti için

$$\|M(x) - M(\tilde{x})\| \leq \gamma \|x - \tilde{x}\| \quad (3.11)$$

sağlansın. Bu durumda M dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Evans 1998, s. 498).

Teorem 3.3 (Picard Teoremi) Kabul edelim ki, E bir Banach uzayı ve $F : E \rightarrow E$ fonksiyonu için her $u, v \in E$ için

$$\|F(u) - F(v)\|_E \leq C_{17} \|u - v\|_E \quad (3.12)$$

sağlansın. O halde, her $u_0 \in E$ için

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Fu(t), & [0, +\infty) \text{ üzerinde} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

probleminin bir tek $u \in C^1([0, +\infty); E)$ çözümü mevcuttur (Brezis 2011, s. 184).

İspat. Problemin çözümünün varlığı. (3.13) probleminin çözümünün bulunması,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds \quad (3.14)$$

integral denklemin sağlayan bir $u \in C([0, +\infty); E)$ bulunmasına denktir. Değeri daha sonra belirlenmek üzere, $k > 0$ için

$$X = \left\{ u \in C([0, +\infty); E) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|_E < \infty \right\} \quad (3.15)$$

uzayı

$$\|u\|_X = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|_E \quad (3.16)$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Her $u \in X$ için

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds \quad (3.17)$$

ile tanımlı Φu fonksiyonu da X uzayına aittir. Buradan, her $u, v \in X$ için

$$\|\Phi u - \Phi v\|_X \leq \frac{C_{18}}{k} \|u - v\|_X \quad (3.18)$$

olduğu görülür. $k > C_{18}$ seçilerek, Φ dönüşümünün X uzayında bir (tek) u sabit noktası vardır, bu da (3.14) ile verilen integral denklemdir.

Problemnin çözümünün teklifi. Kabul edelim ki, (3.13) probleminin u ve $\tilde{u}$ şeklindeki iki çözümü olsun. Bu durumda, her $t \geq 0$ için $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_E \equiv 0$ elde edilir, bu da ispatı tamamlar. ■

Jin et al. (2018), yukarıdaki ispat ile benzer şekilde lineer olmayan kesirli kısmi diferensiyel denklem için başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü incelemiştir. Bu çalışmanın ışığında (3.1)- (3.3) probleminin çözümünün varlığı ve teklifi araştırılmış ve işlemler (2.94) çözümü göz önüne alınarak yapılmıştır. Önceki bölümde, farklı d boyutları için u çözümünün formunda değişen bir durum bulunmadığı görüldüğünden bu bölümde ayrıca bir incelemeye ihtiyaç duyulmamıştır.

3.2 TEOREM 3.1'İN İSPATI

3.2.1 Problemin Çözümünün Varlığı Ve Tekliğinin İncelenmesi

(3.1)-(3.3) probleminin formal çözümü olan (2.94) ifadesinde $b = 0$ alınarak

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t - \tau)^\alpha) (F(\cdot, \tau, u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \quad (3.19)$$

yazılır. Sabit noktası, (3.19) çözümü olan bir $M : C([0, T]; L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$ dönüşümü $Mu(x, t) = u(x, t)$ şeklinde tanımlansın. M dönüşümünün, $C([0, T]; L^2(\Omega))$ uzayında

$$\|v\|_k = \max_{t \in [0, T]} \left\{ \|e^{-kt} v(t)\|_{L^2(\Omega)} \right\} \quad (3.20)$$

normu ile bir daralma dönüşümü olması durumunda, söz konusu dönüşümün tek bir sabit noktaya sahip olduğu görülür. Böylece, problemin u çözümünün var ve tek olduğunu gösterilmiş olur.

Banach sabit nokta teoremini uygulamak amacıyla, $k > 0$ değeri, işlemlerin sonunda belirlenmiştir. (3.19) integral denkleminin u ve v şeklinde iki çözümü olsun. O halde

$$\begin{aligned}
& M(u(x, t)) - M(v(x, t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (s(\tau) p(\cdot) + g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (s(\tau) p(\cdot) + g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau), v(\tau)) d\tau \right) \varphi_n(x) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, işlemlerde basitlik için, son satırda

$$(g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \tag{3.22}$$

ifadesi yerine $g_n^{(1)}(u(\tau))$ gösterimi kullanılmıştır. (3.21) ifadesinde her iki tarafına $L^2(\Omega)$ normu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \|M(u(\cdot, t)) - M(v(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau)) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau)) d\tau \right) \varphi_n, \varphi_j \right)_{L^2(\Omega)} \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau)) d\tau \right) \varphi_n(x) \varphi_j(x) dx \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega} I_1(x, t) dx \right|^2 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

olup I_1 teriminde integral ile serinin sırasının değişebilmesi incelenmelidir. Lebesgue

teoremi gereği

$$\begin{aligned}
& I_2(x, t) \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau)) d\tau \right) \varphi_n(x) \varphi_j(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq t} g_n^{(1)}(u(\tau)) \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right) \varphi_n(x) \varphi_j(x) \right| \\
&\leq \left| C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq t} (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x) \varphi_j(x) \right| \\
&\leq \left| C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n \right)_{L^2(\Omega)} \right| \tag{3.24}
\end{aligned}$$

bulunur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \int_{\Omega} \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n \right)_{L^2(\Omega)} dx \\
&\leq C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \left\| \max_{0 \leq \tau \leq t} g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_j\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0 C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau) - v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0 C_{19} \frac{t^\alpha}{\alpha} \max_{0 \leq \tau \leq t} \left[2 \|u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

yazılır. $u, v \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ olarak kabul edildiğinden (3.25) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifade sonludur. Böylece

$$\begin{aligned}
& \|M(u(\cdot, t)) - M(v(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau), v(\tau)) d\tau \right) \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_n dx \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau), v(\tau)) d\tau \right) \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) g_n^{(1)}(u(\tau), v(\tau)) d\tau \right|^2 \tag{3.26}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir ve $g_n^{(1)}(u(\tau), v(\tau))$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& e^{-2kt} \|M(u(\cdot, t)) - M(v(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-kt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right|^2 \tag{3.27}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de (3.27) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integralin incelenmesi gerekir ve basitlik açısından

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{(g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)}{e^{k\tau}} = I_3(\tau) \quad (3.28)$$

gösterimi kullanılarak

$$\begin{aligned} & e^{-kt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \\ &= e^{-kt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) e^{k\tau-k\tau} d\tau \\ &\leq I_3(\tau) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) e^{k\tau} e^{-kt} d\tau \\ &\leq I_3(\tau) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{C_{20}}{1+|-\lambda_n(t-\tau)^\alpha|} e^{-k(t-\tau)} d\tau \\ &\leq I_3(\tau) C_{20} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-k(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Sırasıyla $\tau = tw_1$ ve $1 - w_1 = w_2$ değişken dönüşümleri yapılarak

$$\begin{aligned} & e^{-kt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \\ &= I_3(\tau) C_{20} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-w_1)^{\alpha-1} e^{-kt(1-w_1)} t dw_1 \\ &= I_3(\tau) C_{20} t^\alpha \int_0^1 w_2^{\alpha-1} e^{-ktw_2} dw_2 = I_3(\tau) C_1 k^{-\alpha} \int_0^1 (kt)^\alpha w_2^{\alpha-1} e^{-ktw_2} dw_2 \\ &= I_3(\tau) C_{20} k^{-\alpha} (kt) \int_0^1 (ktw_2)^{\alpha-1} e^{-ktw_2} dw_2 \\ &\leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{(g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)}{e^{k\tau}} C_{20} k^{-\alpha} (kt) \\ &\quad \cdot \int_0^1 \left[\sup_{k,t,w_2} (ktw_2)^{\alpha/2} e^{-ktw_2} \right] (ktw_2)^{(\alpha/2)-1} dw_2 \\ &= I_3(\tau) C_{21} k^{-\alpha} (kt)^{\alpha/2} \int_0^1 w_2^{(\alpha/2)-1} dw_2 = I_3(\tau) C_2 k^{-\alpha} (kt)^{\alpha/2} \frac{1}{\alpha/2} \\ &\leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{(g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)}{e^{k\tau}} C_{22} k^{-\alpha/2} t^{\alpha/2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur. Böylece (3.30), (3.27) ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& e^{-2kt} \|M(u(\cdot, t)) - M(v(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)}{e^{k\tau}} C_{22} k^{-\alpha/2} t^{\alpha/2} \right|^2 \\
& \leq \left[\frac{C_{22} t^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}} \right]^2 \max_{0 \leq \tau \leq T} \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau)), \varphi_n)^2}{e^{2k\tau}} \right| \\
& = \frac{C_{22}^2 t^{\alpha}}{k^{\alpha}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \left| \frac{\|g(u(\cdot, \tau)) - g(v(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)}^2}{e^{2k\tau}} \right| \\
& \leq \frac{C_{22}^2 t^{\alpha}}{k^{\alpha}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \left| \frac{C_0^2 \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{e^{2k\tau}} \right| \\
& = \frac{C_0^2 C_{22}^2 t^{\alpha}}{k^{\alpha}} \|u - v\|_k^2 \\
& = \frac{C_0^2 C_3^2 t^{\alpha}}{k^{\alpha}} \|M(u) - M(v)\|_k^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

dir ve (3.3) eşitsizliğinin her iki tarafından t -ye göre maksimum alınırsa

$$\|M(u) - M(v)\|_k \leq \frac{C_0 C_{22} T^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}} \|M(u) - M(v)\|_k \tag{3.32}$$

elde edilir. Burada

$$k^{\alpha/2} > C_0 C_{22} T^{\alpha/2} \tag{3.33}$$

seçimi ile $C([0, T]; L^2(\Omega))$ uzayında $\|\cdot\|_k$ normu ile bir daralma dönüşümü haline gelir. Banach sabit nokta teoremi gereği M dönüşümünün bir sabit noktasının (3.19) şeklinde verilen u çözümü olduğu görülür: Böylece (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün varlığı gösterilmiştir.

Problemin çözümün tekliğinin gösterilmesi için ise, problemin u ve $\tilde{u}$ şeklinde iki çözümü olduğu kabul edelim. $C_{23} = \frac{C_0 C_{22} T^{\alpha/2}}{k^{\alpha/2}}$ olarak isimlendirilirse, (3.33) seçiminden dolayı $C_{23} < 1$ şeklindedir. Buradan

$$\|M(u) - M(\tilde{u})\|_k = \|u - \tilde{u}\|_k \leq C_{23} \|u - \tilde{u}\|_k \tag{3.34}$$

ve

$$(1 - C_{23}) \|u - \tilde{u}\|_k \leq 0 \tag{3.35}$$

olup $1 - C_{23} > 0$ gereği norm negatif olamayacağından (3.35) eşitsizliği ancak $\|u - \tilde{u}\|_k = 0$ iken sağlanır. Böylece $u = \tilde{u}$ bulunmuş olup (3.1)-(3.3) probleminin çözümü tektir.

3.2.2 Problemin Çözümünün $C([0, T]; L^2(\Omega))$ Uzayından Olduğunun İncelenmesi

(3.19) çözümünün $L^2(\Omega)$ uzayında normu ve her iki tarafının karesi alınır

$$\begin{aligned}
& \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq 2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + 2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& = 2 [I_4(\cdot, t)]^2 + 2 [I_5(\cdot, t)]^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. Sırasıyla I_4 ve I_5 terimleri incelenecektir.

I_4 teriminin incelenmesi amacıyla seri ile integralin sırasını değişiminin incelenmesi gerekmektedir, bunun için Lebesgue teoreminden yararlanılmıştır. Aşağıda Mittag-Leffler fonksiyonunun (1.13) özelliği ve Lemma 1.17 gereği

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \varphi_n(x) (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{C_{24}}{1 + |-\lambda_n(t-\tau)^\alpha|} r(\tau) \\
& \leq C_{24} (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \varphi_n(x) = C_{24} (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) p
\end{aligned} \tag{3.37}$$

olup (3.37) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\begin{aligned}
p C_{24} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) d\tau & \leq \|r\|_{C[0, T]} p C_{24} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq \|r\|_{C[0, T]} p C_{24} \frac{T^\alpha}{\alpha} < \infty
\end{aligned} \tag{3.38}$$

yazılır. Böylece söz konusu ifade, ele alınan aralıkta integrallenebilir. Bu durumda Lebesgue teoreminin hipotezleri sağlandığından

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \int_0^t \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
& = \int_0^t \left[\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& = \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& \leq C_{25} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(p, \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& = C_{25} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) \|p\|_{L^2(\Omega)} d\tau = C_{25} D(t)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

yazılabilir. Sonndan üçüncü satırda Lemma 1.17 gereği ortonormal bir (φ_n) bazına sahip bir Hilbert uzayının her $p \in L^2(\Omega)$ elemanının $p = \sum (p, \varphi_n) \varphi_n$ şeklinde yazılabildiği kullanılmıştır.

I_5 teriminin incelenmesi için, Lebesgue teoreminden yararlanılmış ve I_4 için yapılan incelemeye benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

yazılıp Mittag-Leffler fonksiyonunun (1.13) özelliği ve Lemma 1.17 gereği

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right| \\
& \leq \left| \tau^{\alpha-1} C_{26} \sum_{n=1}^{\infty} (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right| \\
& = \left| \tau^{\alpha-1} C_{26} g(u(x, t-\tau)) \right|
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olduğu görülür. (3.41) eşitsizliğinin sağ tarafındaki fonksiyonun istenen aralıkta integralenebilir olması aşağıda incelenmiştir. Burada (3.4) hipotezi gereği

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega, \tau \in \mathbb{R}} |g(u(x, \tau))| \leq g(\varepsilon_1) \tag{3.42}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır, böylece

$$\begin{aligned}
C_{26} \int_0^t |\tau^{\alpha-1} g(u(x, t-\tau))| d\tau &\leq C_{26} \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| |g(u(x, \tau))| d\tau \\
&= C_{26} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= C_{26} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{t^\alpha}{\alpha} \leq C_{26} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{T^\alpha}{\alpha} < \infty
\end{aligned} \tag{3.43}$$

bulunur. Lebesgue Teoremi gereği integral ile serinin yeri değişebilir ve bu şekilde ifade, içerisinde seri bulundurmaktan yazılabilir. Ancak bunun için bir incelemeye daha ihtiyaç vardır. Burada integrali hesaplamak için

$$\int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right] d\tau := v(\cdot, t) \tag{3.44}$$

olmak üzere, aşağıdaki ifadenin dördüncü satırında Fubini teoremi ve altıncı satırında Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= (v(\cdot, t), v(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau, v(\cdot, t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_{\Omega} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau dx \\
&= \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) v(x, t) dx d\tau \\
&= \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x), v(\cdot, t) \right)_{L^2(\Omega)} d\tau \\
&\leq \int_0^t \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
&= \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \int_0^t \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau
\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Her iki taraftan $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ ile bölünürse

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau \tag{3.46}$$

dır ve böylece

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \int_0^t \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
& = \int_0^t \left[\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& = \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \varphi_n, \varphi_n \right)_{L^2(\Omega)} \right|^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& = \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \right|^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& \leq C_{27} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} d\tau \\
& = C_{27} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \|g(u(\cdot, t-\tau))\|_{L^2(\Omega)} d\tau
\end{aligned} \tag{3.47}$$

olur.

Son olarak, (3.39) ve (3.47) eşitsizlikleri, (3.36) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_{25}^2 [D(t)]^2 + 2C_{27}^2 \left[\int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} d\tau \right]^2 \tag{3.48}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} & \leq C_{25} D(t) + C_{27} \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
& = C_{25} D(t) + C_{27} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} d\tau
\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Burada, Teorem 3.1'in hipotezlerinden

$$\begin{aligned}
\|g(u(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)} & = \|g(u(\cdot, t)) - g(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|u(\cdot, t) - 0\|_{L^2(\Omega)} \\
& = C_0 \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitsizlik

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{25} D(t) + C_{27} C_0 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \tag{3.51}$$

halini ahr. Grönwall eşitsizliğinden yararlanılması amacıyla, $C_{25}D(t)$ terimi incelenmelidir. $k_1(\tau) = \tau^{\alpha-1}$ olmak üzere, aşağıdaki ifadenin ikinci satırında Young eşitsizliği kullanılır ve

$$\begin{aligned}
\|C_{25}D(t)\|_{L^1(0,T)} &= \int_0^T C_{25}D(t) dt = C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^T \left[\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) d\tau \right] dt \\
&= C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \|k_1 * r\|_{L^1(0,T)} \leq C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \|k_1\|_{L^1(0,T)} \|r\|_{L^1(0,T)} \\
&\leq C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\int_0^T \tau^{\alpha-1} d\tau \right) \|r\|_{L^1(0,T)} \\
&= C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|r\|_{L^1(0,T)} < \infty
\end{aligned} \tag{3.52}$$

dır, yani $C_{25}D(t) \in L^1(0, T)$ dir. Böylece Grönwall eşitsizliği gereği

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{25}D(t) + C_{25}C_{28}e^{C_{29}t} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} D(\tau) d\tau \tag{3.53}$$

olur. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki integral incelenerek

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} D(\tau) d\tau = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta d\tau \tag{3.54}$$

yazılır ve integrallerin sırası değiştirilerek

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta d\tau = \int_0^t \left[\int_\theta^t (\tau-\theta)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right] r(\theta) d\theta \tag{3.55}$$

bulunur. (1.75) formülünde $b = t$, $a = \theta$, $t = \tau$, $p = q = \alpha$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta d\tau &= \int_0^t \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (t-\theta)^{2\alpha-1} \right] r(\theta) d\theta \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} r(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilerek (3.53) eşitsizliğinde yerine yazılır ve

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta \right. \\
&\quad \left. + C_{28}e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} r(\theta) d\theta \right]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0,T]} \left[\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} d\theta \right. \\
&\quad \left. + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} d\theta \right] \\
&\leq C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0,T]} \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{3.58}$$

şeklinde ifade edilerek $[0, T]$ aralığı üzerinde her iki taraftan t -ye göre maksimum alınırsa (3.6) elde edilir, böylece $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ uzayına ait olduğu gösterilmiş olur.

Uyarı 3.1 g fonksiyonu için (3.50) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\|g(u(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0 C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} r(\theta) d\theta \right] \\
&\leq C_0 C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} \left(\max_{\theta \in [0, T]} r(\theta) \right) d\theta \right. \\
&\quad \left. + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} \left(\max_{\theta \in [0, T]} r(\theta) \right) d\theta \right] \\
&\leq C_0 C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]} \left[\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} d\theta + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{2\alpha-1} d\theta \right] \\
&\leq C_0 C_{25} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]} \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} + C_{28} e^{C_{29}t} \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right] \\
&\leq C_0 C_{30} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

olduğu görülebilir.

3.2.3 $\partial_t u$ Teriminin Ait Olduğu Uzayın Belirlenmesi

(3.19) çözümünde, ele alınan serilerde seri ile integralin sırasının değişebileceği yukarıda incelenmişti. Bu durumda, u çözümünün t değişkenine göre türevlenebilmesi için

$$\begin{aligned}
u(\cdot, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \\
&\quad + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau
\end{aligned} \tag{3.60}$$

biçiminde yazılmıştır. Burada (3.60)'ın her iki tarafının türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\partial_t u(\cdot, t) &= \partial_t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right) \\
&\quad + \partial_t \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

yazılır. Leibniz integral kuralı, $u(x, 0) = 0$ başlangıç koşulu ve $g(0) = 0$ hipotezi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\partial_t u(\cdot, t) &= \partial_t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right) \\
&\quad + \partial_t \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right) \\
&= \partial_t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \right) \\
&\quad + \int_0^t \partial_t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right) d\tau
\end{aligned} \tag{3.62}$$

elde edilir. (3.62) ifadesinde, serilerin türevlerin alınabilmesi için yakınsak olduğu bilinmelidir. (3.62) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci seri için bu inceleme I_5 terimi göz önüne alındığında yapılmıştır. Birinci seri ise,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) \varphi_n(x) d\tau \\
&\leq C_{31} \|r\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \varphi_n(x) \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \leq C_{32} T^\alpha p(x) \|r\|_{C[0,T]}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

olduğundan yakınsaktır. Ayrıca Leibniz integral kuralından

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \left(\int_0^t \partial_t [(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] r(\tau) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&\leq \|r\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&\leq C_{33} t^{\alpha-1} p(x) \|r\|_{C[0,T]}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \partial_t \left((g(u(\cdot, t-\tau)), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \right) \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g'(u(\cdot, t-\tau)) u_t(\cdot, t-\tau), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x) \\
&\leq C_{33} \tau^{\alpha-1} g'(u(x, t-\tau)) u_t(x, t-\tau) \leq C_{33} \tau^{\alpha-1} \left[\operatorname{esssup}_{\varepsilon_2 \in \mathbb{R}} g'(\varepsilon_2) \right] u_t(x, t-\tau) \\
&\leq C_{33} \tau^{\alpha-1} \|g'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} u_t(x, t-\tau)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

bulunur. Burada hipotez gereği

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega, \tau \in \mathbb{R}} |g'(u(x, \tau))| \leq g'(\varepsilon_2) \tag{3.66}$$

olacak şekilde $\varepsilon_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır ve $u_t \in L^2(\Omega)$ kabul edilmiştir. O halde,

$$\begin{aligned}
\|v_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (v_2(\cdot, t), v_2(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_0^t \tau^{\alpha-1} u_t(\cdot, t-\tau) d\tau, v_2(\cdot, t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u_t(\cdot, \tau) d\tau, v_2(\cdot, t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_{\Omega} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u_t(x, \tau) d\tau v_2(x, t) dx \\
&= \int_0^t \int_{\Omega} (t-\tau)^{\alpha-1} u_t(x, \tau) v_2(x, t) dx d\tau
\end{aligned} \tag{3.67}$$

şeklinde ifade edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\|v_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^t ((t-\tau)^{\alpha-1} u_t(x, \tau), v_2(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} u_t(x, \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|v_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} d\tau\end{aligned}\quad (3.68)$$

ve

$$\left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u_t(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} u_t(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \quad (3.69)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}& \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq 2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + 2 \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (g'(u(\cdot, t-\tau)) u_t(\cdot, t-\tau), \varphi_n)_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = 2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n)^2 \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right|^2 \\ & \quad + 2C_{34}^2 \left\| \int_0^t \tau^{\alpha-1} u_t(\cdot, t-\tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}\quad (3.70)$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{35} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)} t^{\alpha-1} \\ &\quad + C_{35} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|u_t(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau\end{aligned}\quad (3.71)$$

elde edilir ve genelleştirilmiş Grönwall eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{36} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)} t^{\alpha-1} \\ &\quad + C_{36} C_{37} e^{C_{38}t} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} C_{55} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)} t^{\alpha-1} d\tau \\ &\leq C_{39} t^{\alpha-1} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\quad (3.72)$$

bulunur. α değerinin seçiminden dolayı $\alpha - 1 < 0$ şeklindedir, bu nedenle $t = 0$ durumu dahil edilmeyerek (3.58) ve (3.72) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa, $u \in C^1((0, T]; L^2(\Omega))$ sonucunu verir.

3.2.4 Lu Teriminin Ait Olduğu Uzayın Belirlenmesi

Bu başlık altında u çözümünün her iki tarafına L operatörü uygulanmıştır. L operatörünün x değişkenine göre bir türev operatörü olduğu göz önüne alınırsa, seri ile yer değiştirmesi için yapılan incelemenin benzer şekilde olması gerektiği açıktır. Yukarıda yapılan incelemeler gereği u çözümünü oluşturan seriler yakınsaktır. Böylece,

$$\begin{aligned}
& I_6(x, t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (r(\tau)p(\cdot) + g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \varphi_n(x) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (r(\tau)p(\cdot) + g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) L(\varphi_n(x)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \quad (3.73)
\end{aligned}$$

yazılır, burada $w = t - \tau$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
-\lambda_n(t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) &= -\lambda_n w^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n w^\alpha) = \partial_w [E_{\alpha,1}(-\lambda_n w^\alpha)] \\
&= \partial_\tau [E_{\alpha,1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] \tau_w \\
&= -\partial_\tau [E_{\alpha,1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] \quad (3.74)
\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
I_6(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_\tau [E_{\alpha,1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_\tau [E_{\alpha,1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \quad (3.75)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki terimler göz önüne alınırsa, eşitliğin sağ tarafındaki ilk seri incelenerek

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_\tau [E_{\alpha,1}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha)] r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right| \\
&\leq \|r\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} [E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) - E_{\alpha,1}(0)] (p, \varphi_n) \varphi_n(x) \\
&\leq \|r\|_{C[0,T]} C_{40} \sum_{n=1}^{\infty} (p, \varphi_n) \varphi_n(x) = C_{40} \|r\|_{C[0,T]} p(x), \quad (3.76)
\end{aligned}$$

elde edilir, ve ikinci seri ise

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \left(\int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] d\tau \right) \\
& \leq C_{41} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) = C_{41} \max_{0 \leq \tau \leq T} g(u(\cdot, t))
\end{aligned} \tag{3.77}$$

şeklindedir. Böylece her iki seri de sınırlıdır ve

$$\begin{aligned}
& \|Lu(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq 2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + 2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right|^2 \\
& \quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t -\partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right|^2 \\
& \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \|r\|_{C[0,T]}^2 |(p, \varphi_n)|^2 \left| - \int_0^t \partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] d\tau \right|^2 \\
& \quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |(g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n)|^2 \left| - \int_0^t \partial_{\tau} [E_{\alpha,1} (-\lambda_n (t - \tau)^{\alpha})] d\tau \right|^2 \\
& \leq 2C_{42}^2 \left[\|r\|_{C[0,T]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(p, \varphi_n)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |(g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n)|^2 \right] \\
& \leq 2C_{42}^2 \left[\|r\|_{C[0,T]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(p, \varphi_n)|^2 + \max_{0 \leq \tau \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} |(g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n)|^2 \right] \\
& = 2C_{42}^2 \left[\|r\|_{C[0,T]}^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max_{0 \leq \tau \leq T} \|g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
& \leq 2C_{42}^2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + 2C_{42}^2 \max_{0 \leq \tau \leq T} \left[C_0 C_{30} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0,T]} \left(\frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} + \frac{\tau^{2\alpha}}{2\alpha} \right) \right]^2 \\
& \leq C_{43}^2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned} \tag{3.78}$$

olup

$$\|Lu(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{43} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.79)$$

biçimindedir. Burada (1.69) ve (1.70) gereği,

$$\|Lu(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(\cdot, t)\|_{\tilde{H}^2(\Omega)} \quad (3.80)$$

yazıldığından

$$\|u(\cdot, t)\|_{\tilde{H}^2(\Omega)} \leq C_{43} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.81)$$

şeklindedir. Böylece her iki taraftan t -ye göre maksimum alınırsa

$$u \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad (3.82)$$

elde edilir.

Uyarı 3.2 $\partial_t^\alpha u$ ifadesinin ait olduğu uzayın belirlenmesi için, (3.1) denklemi göz önüne alınır ve

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2 \|Lu(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4 [r(t)]^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4 \|g(u(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2C_{43}^2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4 [r(t)]^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 4 \left[C_0 C_{30} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0,T]} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right) \right]^2 \\ &\leq C_{44}^2 \|r\|_{C[0,T]}^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

eşitsizliğinin ve her iki taraftan t -ye göre maksimum alınırsa $\partial_t^\alpha u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ olduğu görülür.

BÖLÜM 4

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

Bu bölümde, önceki kısımlarda elde edilen sonuçlar göz önüne alınarak ters problemin çözümünün kararlılığı incelenmiştir. Bu inceleme sırasında Sakamoto and Yamamoto (2011), Luchko et al. (2013), Kian and Yamamoto (2017), Jing et al. (2019), Au et al. (2021) çalışmalarından yararlanılmıştır. Burada

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (Lu)(x, t) + p(x)r(t) + g(u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.3)$$

problemi ele alınmıştır, p ve g bilinen fonksiyonlardır. Bir önceki bölümde göz önüne alınan düz problemdeki gibi $0 < \alpha < 1$ için ∂_t^α Caputo kesirli türev operatörünü göstermektedir, L operatörü (2.16) ve Ω bölgesi (2.13) şeklindedir. Ek bilgi, Sakamoto and Yamamoto (2011)'de lineer denklemler için yapılan çalışmaya benzer şekilde $x_0 \in \Omega$ ve $0 < t < T$ için $u(x_0, t) = h(t)$ olarak ele alınmıştır. Ters problem ise, (u, r) fonksiyon çiftinin bulunması şeklindedir.

Teorem 4.1 *Kabul edelim ki, $g(0) = 0$,*

$$\left| \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{d^k g}{d\xi^k}(\xi) \right| < \infty, \quad k = 0, 1, \quad (4.4)$$

ve her $v, w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ için

$$\|g(v) - g(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|v - w\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.5)$$

eşitsizliğini sağlayan ve x, t, w_1, w_2 değerlerinden bağımsız bir $C_0 > 0$ sabiti mevcut olsun. Ayrıca $p \in \tilde{H}^{2\beta}(\Omega)$, $\beta > 1 + \frac{3d}{4}$ ve $r \in C[0, T]$ için u çözümü (4.1)-(4.3) problemini sağlasın, öyle ki $p(x_0) \neq 0$, $\|r\|_{L^1(0, T)} < \infty$ olsun. O halde,

$$\|r\|_{C[0, T]} \leq C_{45} \left(\|\partial_t^\alpha h\|_{C[0, T]} + \|g(h)\|_{C[0, T]} \right) \quad (4.6)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C_{45} > 0$ sabiti vardır.

Bundan sonraki kısım yukarıdaki koşullu kararlılık teoreminin ispatına ayrılmıştır ve (2.94) çözümü, Teorem 3.1'in hipotezleri ile Uyarı 3.1 ispatında kullanılan temel araçlardır.

4.1 DENKLEMDE $x = x_0$ YAZILABİLMESİ İÇİN İNCELEME

Öncelikle (3.19) şeklinde elde edilen u çözümü, (4.1) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \partial_t^\alpha u(x, t) \\
&= L \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right) \\
&+ L \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x) \right) \\
&+ p(x)r(t) + g(u(x, t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \\
&+ p(x)r(t) + g(u(x, t))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada her iki taraftan norm alınırsa

$$\begin{aligned}
& \|\partial_t^\alpha u(x, \cdot)\|_{C[0, T]}^2 \\
&\leq 4 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \right\|_{C[0, T]}^2 \\
&+ 4 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) (-\lambda_n \varphi_n(x)) \right\|_{C[0, T]}^2 \\
&+ 4 [p(x)]^2 \|r\|_{C[0, T]}^2 + 4 \|g(u(x, \cdot))\|_{C[0, T]}^2 \\
&= 4 \max_{0 \leq t \leq T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \lambda_n \varphi_n(x) \right]^2 \\
&+ 4 \max_{0 \leq t \leq T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \lambda_n \varphi_n(x) \right]^2 \\
&+ 4 [p(x)]^2 \|r\|_{C[0, T]}^2 + 4 \|g(u(x, \cdot))\|_{C[0, T]}^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8) ifadesinde I_7 ve I_8 isimlendirilmeleri yapılarak

$$\begin{aligned} & \|\partial_t^\alpha u(x, \cdot)\|_{C[0,T]}^2 \\ = & 4[I_7(x, t)]^2 + 4[I_8(x, t)]^2 + 4[p(x)]^2 \|r\|_{C[0,T]}^2 + 4\|g(u(x, \cdot))\|_{C[0,T]}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir ve burada $x = x_0$ yazıldığı takdirde eşitsizliğin sağ tarafındaki son iki terimin yakınsak olacağı açıktır. O halde, I_7 ve I_8 serilerinin $C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ uzayında yakınsak olup olmadığının incelenmesi gerekir. İlk terim göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} I_7(x, t) &= \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n \varphi_n(x) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n(x) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} \lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n(x) \right| \\ &\quad \times \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) d\tau \right| \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçiminde elde edilir. $I_7(x, t)$ teriminde önce ilk mutlak değer içerisindeki ifadeyi inceleyelim. Burada $\beta > 1 + \frac{3d}{4}$ kabulünden $(2\beta - 2 - d) > (d/2)$ olur ve sırasıyla (1.52) eşitsizliği, kesirli Sobolev uzayları ve $\tilde{H}^s(\Omega)$ uzayının özellikleri gereği

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} \lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n(x) \right| &= \|\lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_{46} \|\lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n\|_{H^{2\beta-2-d}(\Omega)} \\ &\leq C_{47} \|\lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n\|_{\tilde{H}^{2\beta-2-d}(\Omega)} \\ &= C_{47} \|(-L)^{\beta-1-d/2} \lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{47} \|\lambda_n(p, \varphi_n) (-L)^{\beta-1-d/2} \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{47} \left\| \lambda_n(p, \varphi_n) \lambda_n^{\beta-1-d/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{47} \lambda_n^{-d/2} \|(\lambda_n^\beta p, \varphi_n) \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{47} \lambda_n^{-d/2} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{47} \lambda_n^{-d/2} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılır. $I_7(x, t)$ terimindeki integral incelenirse

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) r(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |\tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) r(t-\tau)| d\tau \\
&= \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) |r(t-\tau)| d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{-1}{\lambda_n} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \tau^\alpha) \right) |r(t-\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{-1}{\lambda_n} \int_0^t \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \tau^\alpha) \max_{0 \leq \tau, t \leq T} |r(t-\tau)| d\tau \\
&\leq -\frac{\|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} \int_0^t \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \tau^\alpha) d\tau = \frac{\|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} (-E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + E_{\alpha,1}(0)) \\
&= \frac{\|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} ([-E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + E_{\alpha,1}(0)]^2)^{1/2} \\
&\leq \frac{\|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} [2[E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)]^2 + 2[E_{\alpha,1}(0)]^2]^{1/2} \\
&\leq \frac{\|r\|_{C[0,T]} \sqrt{2}}{\lambda_n} \left[\frac{C_{48}^2}{(1 + \lambda_n t^\alpha)^2} + C_{49}^2 \right]^{1/2} \leq \frac{C_{50} \|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Lemma 1.18, d değerinin seçimi gereği yazılan $(4/d) + 2 > 1$ ve Cauchy-Schwarz eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_7(x, t) &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \|\lambda_n(p, \varphi_n) \varphi_n(x)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) r(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} C_{47} \lambda_n^{-d/2} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \frac{C_{50} \|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} C_{47} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \frac{C_{50} \|r\|_{C[0,T]}}{\lambda_n^{1+d/2}} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} C_{47} \sum_{n=1}^{\infty} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \frac{C_{50} \|r\|_{C[0,T]}}{C_{51} n^{(2/d)+1}} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \frac{C_{47} C_{50}}{C_{51}} \|r\|_{C[0,T]} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |((-L)^\beta p, \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(4/d)+2}} \right]^{1/2} \\
&= \max_{0 \leq t \leq T} \frac{C_{47} C_{50}}{C_{51}} \|r\|_{C[0,T]} \|(-L)^\beta p\|_{L^2(\Omega)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(4/d)+2}} \right]^{1/2} \\
&= \max_{0 \leq t \leq T} \frac{C_{47} C_{50}}{C_{51}} \|r\|_{C[0,T]} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(4/d)+2}} \right]^{1/2} \leq C_{52} \|r\|_{C[0,T]} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $I_8(x, t)$ terimi incelenmiştir. Cauchy-Schwarz ve (3.59) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
& I_8(x, t) \\
&= \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) \|g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} d\tau (\lambda_n \varphi_n(x)) \\
&= \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \varphi_n(x)) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) \|g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} C_0 C_{30} \|p\|_{L^2(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]} (\lambda_n \varphi_n(x)) \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) \left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \frac{\tau^{2\alpha}}{2\alpha} \right) d\tau \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} C_0 C_{30} \|r\|_{C[0, T]} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n \|p\|_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x) \right| \\
&\quad \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau
\end{aligned} \tag{4.14}$$

yazılır ve $t \in (0, T)$ nedeniyle

$$\begin{aligned}
I_8(x, t) &\leq C_0 C_{53} \|r\|_{C[0, T]} \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad \times \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right|
\end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur. Aşağıda sırasıyla (4.15) ifadesindeki terimler incelenmektedir ve $I_7(x, t)$ terimi ile benzer işlem sıralaması ile ilerlenilmiştir. $p \in \tilde{H}^{2\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{54} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{H^{2\beta-2-d}(\Omega)} \leq C_{55} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{\tilde{H}^{2\beta-2-d}(\Omega)} \\
&= C_{55} \left\| (-L)^{\beta-1-d/2} \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n (-L)^{\beta-1-d/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \lambda_n^{\beta-1-d/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n^{\beta-d/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{55} \left\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(p, \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} \lambda_n^{\beta-d/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \lambda_n^{-d/2} \left\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} |(p, \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} \varphi_n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \lambda_n^{-d/2} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{55} \lambda_n^{-d/2} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right| &= \left| \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t |\tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha)| d\tau \\
&= \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) d\tau \\
&= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{-1}{\lambda_n} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \tau^\alpha) \right) d\tau \\
&= \frac{-1}{\lambda_n} \int_0^t \frac{d}{d\tau} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \tau^\alpha) d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda_n} [-E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + E_{\alpha,1}(0)] \\
&= \frac{1}{\lambda_n} ([-E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + E_{\alpha,1}(0)]^2)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} [2(E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha))^2 + 2(E_{\alpha,1}(0))^2]^{1/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} \left[\frac{C_{48}^2}{(1+\lambda_n t^\alpha)^2} + C_{49}^2 \right]^{1/2} \leq \frac{C_{57}}{\lambda_n} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.17) ile (4.18) eşitsizlikleri, (4.15) ifadesinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
I_8(x, t) &\leq C_0 C_{53} \|r\|_{C[0,T]} \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \|p\|_{L^2(\Omega)} \lambda_n \varphi_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad \cdot \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) d\tau \right| \\
&\leq C_0 C_{53} C_{55} C_{57} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \|r\|_{C[0,T]}^2 \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-d/2} \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \tag{4.19}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_8(x, t) &\leq C_0 C_{53} C_{55} C_{57} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]}^2 \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2/d+1}} \\
&\leq C_0 C_{58} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \|r\|_{C[0, T]}^2 \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{18} n^{4/d+2}} \\
&\leq C_0 C_{59} \|r\|_{C[0, T]}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir.

Böylece serilerin $C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ uzayında yakınsak olduğu gösterildiğinden (4.7) denkleminde $x = x_0$ yazılabilir.

4.2 SERİ İLE İNTEGRALIN SIRASININ DEĞİŞMESİ İÇİN İNCELEME

Bir önceki kısımda yapılan inceleme gereği, $0 < t < T$ iken

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha u(x_0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) r(\tau) (p, \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x_0) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) d\tau \right) \varphi_n(x_0) \\
&\quad + p(x_0) r(t) + g(u(x_0, t))
\end{aligned} \tag{4.21}$$

yazılabilir. Burada seri ile integralin sırasının değişmesini incelemek için Lebesgue teoreminden yararlanılmıştır. İlk olarak,

$$Q_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) (p, \varphi_n) \varphi_n(x_0), \tag{4.22}$$

$$Q_2(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) \varphi_n(x_0) \tag{4.23}$$

eşitliklerini ele alalım. Q_1 terimini incelemek için, aşağıda I_9 teriminin $C[0, T]$ normu dikkate alınır. Aşağıdaki ifadede Teorem 1.3, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 1.18

kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|I_9(x, \cdot)\|_{C[0,T]} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)(p, \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{C[0,T]} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n (p, \varphi_n) E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x) \right| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \|-\lambda_n (p, \varphi_n) \varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} |E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)| \right| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_{47} \lambda_n^{-d/2} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \frac{C_{60}}{1 + \lambda_n t^\alpha} \right| \\
&\leq \left| C_{47} C_{60} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{d/2}} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \right| \\
&\leq \left| \frac{C_{47} C_{60}}{C_{61}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ((-L)^\beta p, \varphi_n) \right| \\
&\leq \left| \frac{C_{47} C_{60}}{C_{61}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} ((-L)^\beta p, \varphi_n)^2 \right]^{1/2} \right| \\
&\leq C_{62} \|(-L)^\beta p\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{62} \|p\|_{\tilde{H}^{2\beta}(\Omega)} \leq C_{63}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. $I_9(x, t) \in C[0, T]$ olarak hesaplandığından ve $I_9(x_0, t) = Q_1(t)$ olduğundan $Q_1 \in C[0, T]$ dir. Burada,

$$|(t - \tau)^{\alpha-1} Q_1(t)| \leq (t - \tau)^{\alpha-1} C_{63} \tag{4.25}$$

eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin incelenmesi gerekmektedir. Böylece

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} C_{63} d\tau = C_{63} \int_0^t \tau_1^{\alpha-1} d\tau_1 = C_{63} \lim_{t_1 \rightarrow t} \int_0^{t_1} \tau_1^{\alpha-1} d\tau_1 = C_{63} \frac{t^\alpha}{\alpha} \tag{4.26}$$

yazıldığından, (4.25) eşitsizliğin sol tarafındaki ifade de $[0, t]$ bölgesinde τ değişkenine göre integrallenebilir ve Lebesgue teoreminden integral ve seri sırası değiştirilerek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} Q_1(t) d\tau \right) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} Q_1(t) d\tau \tag{4.27}$$

yazılabilir.

Son olarak, benzer şekilde I_{10} terimi için Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 1.18 gereği

$$\begin{aligned}
& \|I_{10}(x, \cdot)\|_{C[0,T]} \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) \varphi_n(x) \right\|_{C[0,T]} \\
&= \left\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x)]^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} \right\|_{C[0,T]} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\lambda_n \frac{C_{64}}{1 + \lambda_n t^\alpha} \varphi_n(x) \right]^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n)|^2 \right]^{1/2} \right| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n C_{64} \varphi_n(x)]^2 \right]^{1/2} \|g(u(\cdot, \tau))\|_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| C_{64} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n \varphi_n(x)]^2 \right]^{1/2} C_0 C_{30} \|p\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \times \left. \left[\int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta + \int_0^\tau (\tau - \theta)^{2\alpha-1} r(\theta) d\theta \right] \right| \\
&\leq C_0 C_{64} C_{30} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n \|p\|_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x)]^2 \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times \left. \left[\int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right] \right| \\
&\leq C_0 C_{64} C_{30} \max_{0 \leq t \leq T} \left| \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n \|p\|_{L^2(\Omega)} \varphi_n(x)]^2 \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \times \left. \left[\int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right] \right| \\
&\leq C_0 C_{64} C_{30} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n^{d/2}} \right)^2 \right|^{1/2} \left| \int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right| \\
&\leq C_0 C_{64} C_{30} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{C_{31} n} \right)^2 \right|^{1/2} \left| \int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right| \\
&\leq C_{65} \left| \int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right| \tag{4.28}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.28) eşitsizliğinden ve $I_{10}(x_0, t) = Q_2(t)$ olduğundan $Q_2 \in C[0, T]$ dır.

Ayrıca

$$C_{65} \left[\int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right] \quad (4.29)$$

ifadesinin τ -ya göre integrallenebilir olup olmadığının bulunması amacıyla aşağıdaki inceleme yapılır. Aşağıdaki ifadenin üçüncü satırında $k_1(\tau) = \tau^{\alpha-1} + \tau^{2\alpha-1}$ olmak üzere, Young eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} & \int_0^t C_{65} \left| \int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right| d\tau \\ &= \left\| C_{65} \left[\int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta \right] \right\|_{L^1(0,t)} \\ &= C_{65} \|k_1 * r\|_{L^1(0,t)} \leq C_{65} \|k_1\|_{L^1(0,t)} \|r\|_{L^1(0,t)} \\ &\leq C_{65} \|r\|_{L^1(0,t)} \int_0^t [\tau^{\alpha-1} + \tau^{2\alpha-1}] d\tau \\ &\leq C_{65} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} \right) \|r\|_{L^1(0,t)} \\ &\leq C_{66} \|r\|_{L^1(0,T)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

bulunur. Burada unutmamak gerekir ki, $[0, t]$ bölgesinde $\|r\|_{L^1(0,T)}$ ifadesi sonlu ise, o takdirde (4.29) ifadesi τ -ya göre integrallenebilirdir. Bu da Teorem 4.1'in kabullerinden biri olduğundan Lebesgue teoreminden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} Q_2(\tau, t) d\tau \right) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} Q_2(\tau, t) d\tau \quad (4.31)$$

şeklinde ifade edilir.

4.3 KARARLILIK EŞİTSİZLİĞİNİN ELDE EDİLMESİ

Gereken tüm araçlar elde edildiğinden artık kararlılık eşitsizliği hesaplanmaya başlanır. Son iki alt başlıktaki elde edilen sonuçlardan, $0 < t < T$ için

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u(x_0, t) &= \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t - \tau)^\alpha) (p, \varphi_n) \varphi_n(x_0) r(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t -\lambda_n (t - \tau)^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (t - \tau)^\alpha) (g(u(\cdot, \tau)), \varphi_n) \varphi_n(x_0) d\tau \\ &+ p(x_0) r(t) + g(u(x_0, t)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

yani

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u(x_0, t) &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_1(t-\tau) r(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_2(t-\tau) d\tau \\ &\quad + p(x_0) r(t) + g(u(x_0, t)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

yazilabilir. Teorem 4.1'de $p(x_0) \neq 0$ kabulünden $0 < t < T$ için

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{p(x_0)} \left[\partial_t^\alpha u(x_0, t) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_1(t-\tau) r(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_2(t-\tau) d\tau - g(u(x_0, t)) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklindedir. $\tau_1 = t - \tau$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} |r(t)|^2 &= \frac{2}{[p(x_0)]^2} \left[2 |\partial_t^\alpha u(x_0, t)|^2 + 2 |g(u(x_0, t))|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_1(t-\tau) r(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Q_2(t-\tau) d\tau \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{2}{[p(x_0)]^2} \left[2 \max_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^\alpha u(x_0, t)|^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} |g(u(x_0, t))|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \tau_1^{\alpha-1} \left[\max_{0 \leq \tau_1 \leq T} Q_1(\tau_1) \right] r(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \max_{0 \leq \tau_1 \leq T} Q_2(t, \tau) d\tau \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{2}{[p(x_0)]^2} \left[2 \max_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^\alpha u(x_0, t)|^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} |g(u(x_0, t))|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \tau_1^{\alpha-1} \left[\max_{0 \leq \tau_1 \leq T} Q_1(\tau_1) \right] r(t-\tau_1) d\tau_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} C_{65} \int_0^\tau [(\tau-\theta)^{\alpha-1} + (\tau-\theta)^{2\alpha-1}] |r(\theta)| d\theta d\tau \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur. (4.35) ifadesinin sağ tarafındaki dördüncü terim için aşağıdaki integral incelenerek

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau [(\tau-\theta)^{\alpha-1} + (\tau-\theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta d\tau \\ &= \int_0^t \left[\int_\theta^t (\tau-\theta)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right] r(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_\theta^t (\tau-\theta)^{\alpha-1} (t-\tau)^{2\alpha-1} d\tau \right] r(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

yazılır. (4.36) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci ve ikinci integraller, sırasıyla, $b = t$, $a = \theta$, $t = \tau$, $p = q = \alpha$ durumunda ve $b = t$, $a = \theta$, $t = \tau$, $p = \alpha$, $q = 2\alpha$ durumunda (1.75) formülüne karşılık gelmektedir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau [(\tau - \theta)^{\alpha-1} + (\tau - \theta)^{2\alpha-1}] r(\theta) d\theta d\tau \\
&= \int_0^t \left[\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (t - \theta)^{2\alpha-1} \right] r(\theta) d\theta + \int_0^t \left[\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha)}{\Gamma(3\alpha)} (t - \theta)^{3\alpha-1} \right] r(\theta) d\theta \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t (t - \theta)^{2\alpha-1} r(\theta) d\theta + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha)}{\Gamma(3\alpha)} \int_0^t (t - \theta)^{3\alpha-1} r(\theta) d\theta \\
&\leq \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^t \left[\max_{0 \leq \theta \leq T} (t - \theta)^\alpha \right] (t - \theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha)}{\Gamma(3\alpha)} \int_0^t \left[\max_{0 \leq \theta \leq T} (t - \theta)^{2\alpha} \right] (t - \theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta \\
&= \left[\frac{(\Gamma(\alpha))^2 t^\alpha}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha) t^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha)} \right] \int_0^t (t - \theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta \tag{4.37}
\end{aligned}$$

bulunur ve (4.35) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|r(t)|^2 &\leq \frac{2}{[p(x_0)]^2} \left[2 \|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]}^2 + 2 \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[\|Q_1\|_{C[0,T]} + \frac{(\Gamma(\alpha))^2 t^\alpha}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha) t^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha)} \right] \int_0^t (t - \theta)^{\alpha-1} r(\theta) d\theta \right]^2 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

olup $0 < t < T$ için

$$\begin{aligned}
|r(t)| &\leq C_{67} \left[\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right. \\
&\quad \left. + \left[\|Q_1\|_{C[0,T]} + \frac{(\Gamma(\alpha))^2 t^\alpha}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(2\alpha) t^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha)} \right] \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |r(\tau)| d\tau \right] \tag{4.39}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $u(x_0, t) = h(t)$ ek bilgisi dikkate alınarak

$$C_{67} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right) \in L^1(0, T) \tag{4.40}$$

biçimindedir ve (4.39) eşitsizliğinde genelleşmiş Grönwall eşitsizliği uygulanabilir. Böylece $0 < t < T$ için

$$\begin{aligned}
|r(t)| &\leq C_{67} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right) \\
&\quad + C_{67} C_{68} e^{C_{69}t} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right) d\tau \\
&= C_{67} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right) \\
&\quad \times \left(1 + C_{68} e^{C_{69}t} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

yazılır ve

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \int_0^t \tau^{\alpha-1} d\tau = \frac{t^\alpha}{\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{\alpha} \tag{4.42}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|r(t)| &\leq C_{67} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right) \left(1 + C_{68} e^{C_{69}T} \frac{T^\alpha}{\alpha} \right) \\
&\leq C_{45} \left(\|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. Her $0 < t < T$ için $r(t) \leq |r(t)|$ olduğundan, (4.43) eşitsizliğinin sol tarafı daha küçültülerek

$$r(t) \leq C_{45} \|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + C_{45} \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \tag{4.44}$$

eşitsizliği elde edilir ve $[0, T]$ üzerinde (4.44) ifadesinin her iki tarafından t -ye göre maksimum alınırsa

$$\|r\|_{C[0,T]} \leq C_{45} \|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0,T]} + C_{45} \|g(u(x_0, \cdot))\|_{C[0,T]} \tag{4.45}$$

bulunur ve bu da $u(x_0, t) = h(t)$ olduğundan (4.6) eşitsizliğine karşılık gelmektedir. Böylece ispat tamamlanır.



BÖLÜM 5

TARTIŞMA VE SONUÇ

Kesirli difüzyon denkleminin klasik difüzyon denkleminden, kesirli türevin özelliklerinden kaynaklanan bazı farklılıkları vardır. Bu da ayrı bir teorinin oluşturulması ihtiyacını doğurur.

Bu çalışmada, kesirli mertebeden lineer difüzyon denklemleri için uygulanan spektral teorisi, Grönwall ve Young eşitsizlikleri gibi temel eşitsizliklerden yararlanarak lineer olmayan difüzyon denklemi için bir ters problemin çözümünün koşullu kararlılığı araştırılmıştır. Lineer olmayan kesirli mertebeden difüzyon denklemlerinin, bilim ve teknolojinin birçok alanında ortaya çıkma potansiyeli göz önüne alındığında bu tür problemlerin çözülebilirliğinin ve yaklaşık çözümlerinin incelenmesi günümüzün önemli bir konusu olarak görülmektedir.



KAYNAKLAR

- Adams R A and Fournier J J F** (2003) *Sobolev Spaces*. Second Edition, Elsevier, Amsterdam, 305 pp.
- Arıbaş Ö, Gölgeleyen İ and Yıldız M** (2022) On the Existence and Uniqueness of an Initial-Boundary Problem for a Semilinear Fractional Diffusion Equation. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2022)*, September 22-24 2022, Denizli, Turkey, 75-76.
- Arıbaş Ö, Gölgeleyen İ and Yıldız M** (2023a) On the Solvability of an Initial-Boundary Value Problem for a Non-Linear Fractional Diffusion Equation. *AIMS Mathematics*, 8 (3): 5432-5444.
- Arıbaş Ö, Gölgeleyen İ and Yıldız M** (2023b) An Inverse Problem for a Nonlinear Fractional Diffusion Equation. *2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting (ICOMSS'23)*, June 5-7 2023, Konya, Turkey, 39.
- Au V V, Hossein J, Zakia H and Huy T N** (2021) On a Final Value Problem for a Nonlinear Fractional Pseudo-Parabolic Equation. *Electronic Research Archive*, 29 (1): 1709-1734.
- Beckers S and Yamamoto M** (2013) Regularity and Unique Existence of Solution to Linear Diffusion Equation with Multiple Time-Fractional Derivatives. *Control and Optimization with PDE Constraints*, Birkhäuser, Bredies K, Clason C, Kunisch K and Winckel G (Ed.), Basel, 45-55.
- Brezis H** (2011) *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 599 pp.
- Buck R C and Buck E F** (1978) *Advanced Calculus*. Third Edition, McGraw-Hill, New York, 622 pp.
- Cahill K** (2013) *Physical Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 666 pp.
- Corduneanu C, Li Y and Mahdavi M** (2016) *Functional Differential Equations: Advances and Applications*. Wiley, New Jersey, 368 pp.
- Crank J** (1975) *The Mathematics of Diffusion*. Second Edition, Clarendon Press, London, 414 pp.
- Di Nezza E, Palatucci G and Valdinoci E** (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin Des Sciences Mathématiques*, 136 (5): 521-573.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Diethelm K** (2019) General Theory of Caputo-Type Fractional Differential Equations. *Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 2: Fractional Differential Equations*, Kochubei A and Luchko Y (Ed.), De Gruyter, Berlin, 1-20.
- Evans L C** (1998) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 662 pp.
- Gitterman M** (2000) Mean First Passage Time for Anomalous Diffusion. *Physical Review E*, 62 (5), 6065-6070.
- Gorenflo R, Kilbas A A, Mainardi F and Rogosin S V** (2014) *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer, Berlin, 443 pp.
- Hunter J K and Nachtergaele B** (2001) *Applied Analysis*. World Scientific, Singapore, 438 pp.
- Jin B** (2021) *Fractional Differential Equations*. Springer, Cham, 368 pp.
- Jin B, Li B and Zhou Z** (2018) Numerical Analysis of Nonlinear Subdiffusion Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 56 (1): 1–23.
- Jing X, Jia J and Peng J** (2019) Well-Posedness for a Nonlocal Nonlinear Diffusion Equation and Applications to Inverse Problems. *Applicable Analysis*, 99 (15): 2609-2623.
- Kian Y and Yamamoto M** (2017), On Existence and Uniqueness of Solutions for Semilinear Fractional Wave Equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20, 117–138.
- Kilbas A A, Srivastava H M and Trujillo J J** (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 523 pp.
- Krantz S** (1999) *A Panorama of Harmonic Analysis*. The Mathematical Association of America, Washington, 357 pp.
- Kubica A, Ryszewska K and Yamamoto M** (2020) *Introduction to a Theory of Time-Fractional Partial Differential Equations*. Springer, Singapore, 134 pp.
- Kundu P K, Cohen I M and Dowling D R** (2012) *Fluid Mechanics*. Fifth Edition, Elsevier, 891 pp.
- Kufner A, John O and Fucik S** (1977) *Function Spaces*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 454 pp.
- Luchko Y** (2010) Some Uniqueness and Existence Results for the Initial-Boundary-Value Problems for the Generalized Time-Fractional Diffusion Equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 59: 1766-1772.
- Luchko Y, Rundell W, Yamamoto M and Zuo L** (2013) Uniqueness and Reconstruction of an Unknown Semilinear Term in a Time-Fractional Reaction-Diffusion Equation. *Inverse Problems*, 29: 1-16.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Metzler R and Klafter J** (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, 339 (1), 1-77.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow, 396 pp.
- Ngoc T B, Tuan N H and O'Regan D** (2019) Existence and Uniqueness of Mild Solutions for a Final Value Problem for Nonlinear Fractional Diffusion Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 78: 1-13.
- O'Neil P V** (2012) *Advanced Engineering Mathematics*. Seventh Edition, Cengage Learning, 893 pp.
- Podlubny I** (1998) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 340 pp.
- Protter M H and Morrey C B Jr** (2012) *Intermediate Calculus*. Second Edition, Springer, Berlin, 555 pp.
- Rogosin S V** (2013) The Role Of S. G. Samko in the Establishing and Development of the Theory of Fractional Differential Equations and Related Integral Operators. *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory*, Almeida A, Castro L and Speck F O (Ed.), Birkhauser, Heidelberg, 49-65.
- Sadd M H** (2018) *Continuum Mechanics Modelling of Material Behaviour*. Academic Press, London, 414 pp.
- Sakamoto K and Yamamoto M** (2011) Initial Value/Boundary Value Problems for Fractional Diffusion-Wave Equations and Applications to Some Inverse Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382 (1): 426-447.
- Tarafdar E U and Chowdhury M S R** (2008) *Topological Methods for Set-Valued Nonlinear Analysis*. World Scientific, New Jersey, 612 pp
- Triebel H** (1992) *Theory of Function Spaces II*. Birkhäuser, Basel, 372 pp.
- Vishal K and Das S** (2012) Solution of the Nonlinear Fractional Diffusion Equation with Absorbent Term and External Force Using Optimal Homotopy-Analysis Method. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 67 (3-4): 203-209.
- Vladimirov V S** (1971) *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, New York, 418 pp.
- Xu X, Cheng J and Yamamoto M** (2011) Carleman Estimate for a Fractional Diffusion Equation with Half Order and Application. *Applicable Analysis*, 90 (9): 1355-1371.



ÖZGEÇMİŞ

Özge ARIBAŞ, ilk ve orta öğrenimini Ankara’da tamamladıktan sonra, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2012 yılında mezun oldu. 2015 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı. 2017 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programını tamamlayarak doktora eğitimine başladı.

