

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN RASTGELE HIV/AIDS MODELİNİN
DAVRANIŞLARI**

YÜKSEK LİSANS

Selami ÖKTEM

**OCAK-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN RASTGELE HIV/AIDS MODELİNİN
DAVRANIŞLARI**

BEHAVIORS OF THE FRACTIONAL ORDER RANDOM HIV / AIDS MODEL

YÜKSEK LİSANS

Selami ÖKTEM

**OCAK-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN RASTGELE HIV/AIDS MODELİNİN
DAVRANIŞLARI**

BEHAVIORS OF THE FRACTIONAL ORDER RANDOM HIV / AIDS MODEL

YÜKSEK LİSANS

Selami ÖKTEM

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**OCAK-2022
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Kesirli Mertebeden Rastgele HIV/AIDS Modelinin Davranışları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

20/01/2022

.....
Selami ÖKTEM

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet MERDAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni bu günlere getiren, bugüne dek her konuda beni destekleyen bana inançlarını asla kaybetmeyen sevgili annem Aylene ÖKTEM, sevgili babam Yüksel ÖKTEM'e ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili eşim Elif ÖKTEM'e teşekkürlerimi sunarım.

Selami ÖKTEM
GÜMÜŞHANE-2022

ÖZET

AIDS hastalığı ilk olarak 1981 yılında ABD’de keşfedilmiştir. HIV virüsünün sebep olduğu bu hastalık sonuçları ölümcül olan ciddi bir rahatsızlıktır. Dünya genelinde her yıl yaklaşık olarak 25 milyon insan bu hastalıktan dolayı hayatını kaybetmektedir. Henüz herhangi bir çare bulunamadığı için AIDS hastalığı hayatımızı tehdit etmeye devam etmektedir. Çalışmamızda bir HIV/AIDS modeli incelenmiştir. Bir matematiksel modelleme yöntemi olan diferansiyel denklemler, mühendislikten finans ve ekonomiye, nüfus dinamiklerinden tıp bilimine kadar birçok alanda kendine uygulama alanı elde ederek günlük hayatımızda büyük ilgi görmektedirler. Çalışmamız kapsamında rastgele HIV/AIDS modeli ve rastgele kesirli mertebeden HIV/AIDS modeli farklı nümerik ve yarı analitik yöntemler yardımıyla çözümleri araştırılmıştır. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristikleri hesaplanarak elde edilen çözümlerin grafikleri MATLAB veya MAPLE paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik yöntemler, Diferansiyel denklemler, Hastalık, Matematiksel modelleme, Virüs

SUMMARY

AIDS was first discovered in the USA in 1981. This disease, caused by the HIV virus, is a serious illness with fatal consequences. Worldwide, approximately 25 million people die each year due to this disease. Since no cure has been found yet, AIDS continues to threaten our lives. A HIV/AIDS model was examined in our study. Differential equations, which is a mathematical modeling method, attracts great attention in our daily life by gaining application areas from engineering to finance and economics, from population dynamics to medical science.. Within the scope of our study, the random HIV/AIDS model and the random fractional HIV/AIDS model were investigated with the help of different numerical and semi-analytical methods. The probability characteristics of the obtained solutions were calculated and the graphs of the obtained solutions were drawn with the help of MATLAB or MAPLE package programs.

Keywords: Analytical methods, Differential equations, Disease, Mathematical modeling, Virus

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Olasılık Teorisi İle İlgili Teoremler Ve Kavramlar	4
1.2.1. Beklenen Değer	4
1.2.2. Varyans.....	5
1.3. Sürekli Dağılımlar.....	6
1.3.1. Normal Dağılım	6
1.3.2. Beta Dağılımı.....	9
1.3.3. Sürekli Düzgün Dağılım	10
1.3.4. Üstel Dağılım.....	12
1.3.5. Gama Dağılımı.....	13
1.4. VIM Yöntemi	14
1.5. DTM Yöntemi.....	15
1.6. Kesirli Mertebeden Türev	16
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	17
2.1. HIV/AIDS Modeli ve Rastgele Etketli HIV/AIDS Modeli	17
2.1.2. Virüse Karşı Duyarlılar.....	19
2.1.3. Enfekte Kişiler	25
2.1.4. Hasta Olan Kişiler.....	31
2.2. Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İle HIV/AIDS Modelinin Yaklaşık Çözümü	37
2.2.1. DTM İle Çözüm.....	37
2.2.2. MsDTM ile Çözüm.....	38

2.3. Kesirli Mertebeden Zaman Türevli (Rastgele) HIV/AIDS Modeli	43
2.4. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modelinin Çözüm Davranışları	49
2.4.1. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modeli Beklenen Değer ve Varyans	63
2.5. Başlangıç Koşulları Rastgele Olan HIV/AIDS Modelinin Çözüm Davranışı	69
2.6. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modeli Başlangıç Değerleri Rastgele Seçildiğinde.....	72
2.6.1. Beklenen Değer Ve Varyans Hesaplamaları	75
2.7. Üç Boyutlu Stokastik HIV/AIDS Modeli	82
2.7.1. Üç Boyutlu Stokastik Model	82
2.7.2. Stokastik Sonuçlar	83
3. İRDELEME	86
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	87
5. ÖNERİLER.....	88
KAYNAKÇA.....	89
ÖZGEÇMİŞ	92

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Temas türlerine göre hiv bulaş oranları (Akgül vd., 2018)	1
Tablo 2. 2020 yılı HIV verileri (URL-1, 2021; URL-4, 2021).....	3
Tablo 3. DTM yönteminde değerlerin orijinal halleri ve dönüştürülmüş halleri (URL-3, 2021).	15
Tablo 4. Parametre Açıklamaları ve Değerleri (El-Metwally vd.,2020).....	17
Tablo 5. HIV/AIDS modelinin Euler-Maruyama yöntemine göre aldığı değerler	84
Tablo 6. HIV/AIDS modelinin Milstein yöntemine göre aldığı değerler	85



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Yetişkinlerde HIV Prevalansı	2
Şekil 2. [0-1] zaman aralığında S'nin DTM beklenen değeri	20
Şekil 3. S'nin Pade [3,3] beklenen değeri	21
Şekil 4. S'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri.....	22
Şekil 5. S'nin DTM Varyansı.....	23
Şekil 6. S'nin Pade[3,3] Varyans değeri	24
Şekil 7. S'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri.....	25
Şekil 8. I'nin DTM beklenen değeri	26
Şekil 9. I'nin Pade[3,3] beklenen değeri	27
Şekil 10. I'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri.....	28
Şekil 11. I'nin DTM Varyans grafiği	29
Şekil 12. I'nin Pade[3,3] varyans değeri	30
Şekil 13. I'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri.....	31
Şekil 14. A'nın DTM beklenen değeri.....	32
Şekil 15. A'nın Pade[3,3] beklenen değeri.....	33
Şekil 16. A'nın Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri.....	34
Şekil 17. A'nın DTM Varyansı.....	35
Şekil 18. A'nın Pade[3,3] varyans değeri	36
Şekil 19. A'nın Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri	37
Şekil 20. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen S(t) virüse karşı duyarlı kişilerin çözüm davranışları.....	40
Şekil 21. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen I(t) virüs enfekte olmuş kişilerin çözüm davranışları.....	40
Şekil 22. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen A(t) hasta olmuş kişilerin çözüm davranışları.....	41
Şekil 23. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen I(t) – S(t) Faz Portreleri.....	41
Şekil 24. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen A(t) – S(t) Faz Portreleri. ..	42
Şekil 25. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen A(t) – I(t) Faz Portreleri. ...	42
Şekil 26. Virüse karşı duyarlı bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi.....	44
Şekil 27. Enfekte bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi.	45
Şekil 28. Hasta bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi	46
Şekil 29. Virüse karşı duyarlı bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi.....	47

Şekil 30. Enfekte bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi	48
Şekil 31. Hasta bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi	49
Şekil 32. S_2 nin farklı kesirli merteye türevler için beklenen değer davranışları	64
Şekil 33. S_2 nin farklı kesirli merteye türevler için varyans davranışları	65
Şekil 34. I_2 nin farklı kesirli merteye türevler için beklenen değer davranışları	66
Şekil 35. I_2 nin farklı kesirli merteye türevler için varyans davranışları	67
Şekil 36. A_2 nin farklı kesirli merteye türevler için beklenen değer davranışları	68
Şekil 37. A_2 'nin farklı kesirli merteye türevler için varyans davranışları	69
Şekil 38. Virüse karşı duyarlı kişilerin beklenen değer grafiği	76
Şekil 39. Virüse karşı duyarlı kişilerin beklenen varyans değeri grafiği	77
Şekil 40. Enfekte kişilerin beklenen değer grafiği	79
Şekil 41. Enfekte kişilerin beklenen varyans değeri grafiği	80
Şekil 42. Hasta kişilerin beklenen değer grafiği	81
Şekil 43. Hasta kişilerin beklenen varyans değeri grafiği	82
Şekil 44. HIV/AIDS modelinin Euler-Maruyama yöntemine göre çözümü	84
Şekil 45. HIV/AIDS modelinin Milstein yöntemine göre çözümü	84

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

HIV	: İnsan Bağışıklık Yetmezliği Virüsü
AIDS	: Kazanılmış Bağışıklık Yetersizliği Sendromu
DTM	: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
UNAIDS	: Birleşmiş Milletler HIV/AIDS Programı
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
MsDTM	: Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

AIDS hastalığı ilk olarak 1981 yılında ABD’de keşfedilmiştir. HIV (insan bağışıklık yetmezliği virüsü) etkeni insanlarda bağışıklık sistemini çökerterek AIDS hastalığına neden olmaktadır. 1960 yılında ilk kez ortaya çıktığı bilinen HIV virüsü, ilk olarak maymunlarda görülmüştür. 2017 yılında, HIV ilişkili 940 bin ölüm ve 1.8 milyon yeni HIV enfeksiyonu vakası tespit edilmiştir. HIV’in iki farklı varyasyonu mevcuttur. Bunlar, dünya genelinde yaygın olan HIV-1 ve daha çok Afrika kıtası ülkelerinde sıklıkla rastlanan olan HIV-2’dir. HIV-1’in ilk kez 1983 yılında Fransa-Paris’te izolasyonu yapılmıştır (Anderson, 1990). HIV-1’in, insana minimum 4 zoonotik köken ile bulaştığı varsayılmaktadır. Bu bulaşma durumunun elde bulunan moleküler filogenetik biyolojik bilgiler ışığında 1930’lu yıllarda (± 20 yıl) gerçekleşmiş olabileceği tahmin edilmektedir (Worobey vd., 2008: 455). HIV-2 izolasyonu ise 1986’da Clavel ve arkadaşları tarafından yapılmıştır (Clavel vd., 1986: 343-346). HIV-2, HIV-1’e göre daha az patojenik yapıdadır. Bu durumun bir sonucu olarak ise olgularda daha uzun bir prognoz gözlemlenir. İmmün yetmezlik belirtilerinin ve AIDS meydana gelmesinin daha geç gerçekleşmesi izlenirken, anne-bebek geçiş oranı HIV-1 (%10-40) ile karşılaştırıldığında çok daha düşüktür (%2-7) (Burgard vd., 2010: 833-843).

Tablo 1. Temas türlerine göre hiv bulaş oranları (Akgül vd., 2018).

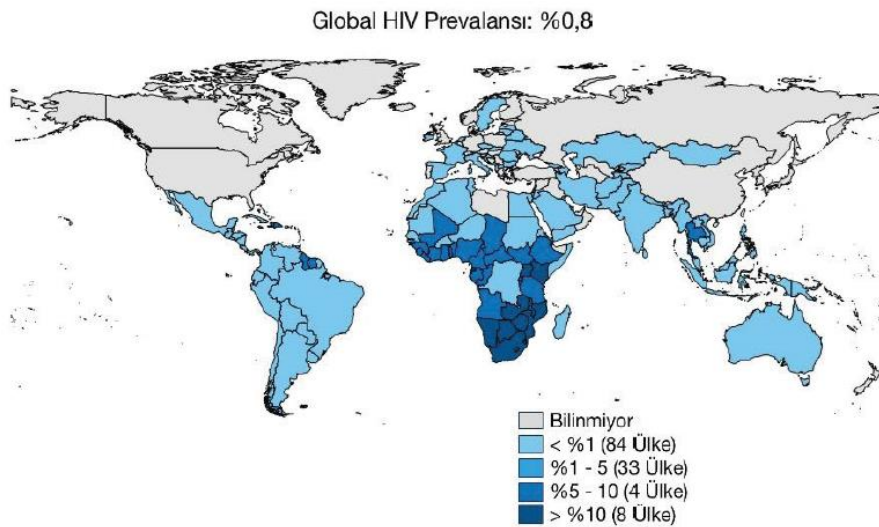
Temas Türü		Her Temastaki Yaklaşık Bulaş Oranı
Kan Transfüzyonu		>90/100
Anneden Çocuğa		25/100
Anal İlişki	Aktif	6/1.000
	Pasif	1/200
Vajinal İlişki	Erkekten kadına	1/1.000
	Kadından Erkeğe	5/10.000
İğne Batması		3/1.000
Oral Seks		$\leq 1/10.000$
İnfekte Enjektör Paylaşımı		6.7/1.000
Mukoz Membran Maruziyeti		1/1.000

HIV virüsünün sebep olduğu AIDS hastalığı sonuçları ölümcül olan ciddi bir rahatsızlıktır. Dünya genelinde her yıl yaklaşık olarak 25 milyon insan bu hastalıktan dolayı hayatını kaybetmektedir (Zafar vd., 2017).

Türkiye’de ise ilk defa 1985 yılında bir HIV pozitif hasta ve bir AIDS basamağına ulaşmış hasta bildirilmiş, daha sonra HIV/AIDS vakalarının sayısı her yıl giderek artmıştır (Sulukan vd., 2009). Sağlık Bakanlığının Haziran 2010 verilerine göre ülkemizde HIV enfekte 4177 kişi bulunmaktadır. Vakaların %70’ini erkekler oluşturmaktadır. Enfeksiyondan en fazla etkilenenler 25-39 yaş arasındaki kişilerdir. Bildirimi yapılan HIV pozitif vakaların %17.6’sı yabancı uyruklu kişilerden oluşmaktadır (URL-1, 2021).

UNAIDS (Birleşmiş Milletler HIV/AIDS Ortak Programı) verilerine göre 2020 yılı itibarıyla 1.5 milyon yeni HIV vakası tespit edilmiştir. 37.7 milyon insanın ise HIV ile yaşadığı anlaşıırken HIV’ den dolayı 680 bin kişinin öldüğü kayıt altına alınmıştır. Salgının başladığı zamandan bu yana toplamda 79.3 milyon kişiye HIV bulaşmış iken, yine aynı dönem içerisinde 36.3 milyon kişi AIDS’e bağlı hastalıklardan dolayı hayatını kaybetmiştir.

Hayatını kaybeden insanlar bir yana bu kişilerin ebeveynler olması sonucuyla birçok çocukta her yıl yetim ve öksüz kalmaktadır. Bununla beraber yine birçok çocuk doğum sırasında virüs kaparak zamanla hasta olmaktadır (Tablo 1.). Bu çocukların yaklaşık %90 kadarı Afrika’da yaşamaktadır. Bu durum HIV virüsünün AIDS hastalığına dönüştüğünde bulaştığı kişinin ve toplumun genel hayatını son derece olumsuz etkilediğini göstermektedir (Zinyemba vd., 2020).



Şekil 1. Yetişkinlerde HIV prevalansı (Akgül vd., 2018)

2020 yılı itibariyle HIV ile yaşayan kişi sayısı 37.7 milyondur. Bunun 1.5 milyonu virus ile 2020 yılında tanışmıştır. 680 bin kişinin HIV ile alakalı vakalar sonucu hayatını kaybettiği tespit edilmiştir.

2020 yılı itibariyle HIV ile yaşayan 37.7 milyon kişinin 25.4 milyonunun Afrika'da, 3.7 milyonunun Amerika'da, 3.7 milyonunun Güney-Doğu Asya'da, 2.6 milyonunun Avrupa'da, 420.000'inin Doğu Akdeniz'de ve 1.9 milyonunun Batı Pasifik'te olduğu bilinmektedir.

Tablo 2. 2020 yılı HIV verileri (URL-2, 2021; URL-4, 2021).

	2020 yılında HIV ile yaşayan insanlar	2020 yılında HIV bulaşan insanlar	HIV bağlantılı vakalar yüzünden hayatını kaybeden insanlar
Toplam	37.7 milyon	1.5 milyon	680 000
Yetişkin	36 milyon	1.3 milyon	580 000
Kadın	19.3 milyon	660 000	240 000
Erkek	16.7 milyon	640 000	340 000
Çocuk	1.7 milyon	150 000	99 000

2019 ve 2020 yılları incelendiği zaman HIV bağlantılı ölüm sayılarının Afrika, Amerika ve Güney-Doğu Asya'da düştüğünü görüyoruz. Ancak bu durum Avrupa, Doğu Akdeniz ve Batı Pasifik için maalesef böyle değildir. Özellikle Avrupa'da 2019 yılında 37 000 olan HIV bağlantılı ölüm sayısının 2020 yılında 40 000'e çıkması dikkat çekicidir. Bu hem miktar olarak hem de oransal olarak en büyük artışı göstermektedir. Avrupa'yı Doğu Akdeniz izlemiştir ve 2019'da 16 000 olan ölüm sayısının 17 000'e çıktığı görülmüştür. Bu durum Batı Pasifik'te ise 2019'da 40 000 olan ölüm sayısının 41 000'e çıkması şeklinde görülmüştür.

Henüz herhangi bir çare bulunamadığı için AIDS hastalığı hayatımızı tehdit etmeye devam etmektedir. Bu yüzden salgın dinamiklerini anlamak önemlidir ve bu alanda bizlere en büyük avantajı matematiksel bakış açısı kazandırmaktadır (Vyambwera, 2014). Bu çalışmalar salgın dinamiklerini anlamanın yanında bu süreci daha sağlıklı yönetebilmemizi ve hastalıkla ilgili tahminlerde bulunabilmemizi de sağlamaktadır (Kirschner, 1996).

Çalışmamızda Stokastik bir HIV/AIDS modeli incelenmiştir. Stokastik diferansiyel denklemler mühendislikten finans ve ekonomiye, nüfus dinamiklerinden tıp bilimine kadar birçok alanda kendine uygulama alanı elde ederek günlük hayatımızda büyük ilgi görmektedirler (Emvudu ve Bongor, 2012).

Rastgele denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerinin beklenen değerleri ve varyansları için fonksiyonlar elde edilmiştir. Çözümlerin yakınsaklığını iyileştirmek için Laplace-Padé metodu kullanılmıştır.

1.2. Olasılık Teorisi İle İlgili Teoremler Ve Kavramlar

1.2.1. Beklenen Değer

Matematiksel beklenti veya beklenen değer birçok defa tekrarlanan ve bu tekrarlarda mümkün tüm olasılıklarını değiştirmeyen rastgele deneylerin sonuçlarından beklenen ortalama değerdir. Bir ayrık rastgele değişkenin alabileceği bütün sonuç değerlerin tek tek o değerlere ait olasılıklarla çarpılması ve bulunan bütün değerlerin toplanmasıyla elde edilir.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken ve $F_x(x)$ bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. Eğer,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_x(x) < \infty$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_x(x)$$

sayısına X rastgele değişkeninin beklenen değeri denir. X rastgele değişkeninin beklenen değeri iki durumda incelenebilir.

1. X rastgele değişkeninin dağılımı mutlak sürekli sınıfa ait olduğunda X rastgele değişkeninin beklenen değerini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_x(x) < \infty$$

ise

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (1)$$

olarak ifade edilir.

2. X rastgele değişkeninin dağılımı kesikli sınıfa ait olduğunda beklenen değerini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$$

ise

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (2)$$

olarak ifade edilir (Karaarslan, 2019).

1.2.2.Varyans

Varyans bir rassal değişken, bir olasılık dağılımı veya örneklem için istatistiksel yayılımın, mümkün bütün değerlerin beklenen değer veya ortalama dan uzaklıklarının karelerinin ortalaması şeklinde bulunan bir ölçüdür. Ortalama bir dağılımın merkezsiz konum noktasını bulmaya çalışırken, varyans değerlerin ne ölçekte veya ne derecede yaygın olduklarını tanımlamayı hedef alır. Varyans için ölçülme birimi orijinal değişkenin biriminin karesidir (Feller, 1991).

$E[X - E(X)]^2$ sayısına X rastgele değişkeninin varyansı denir. Beklenen değer kullanılarak varyans

$$Var(X) = E(X^2) - 2XE(X) + (E(X))^2 \quad (3)$$

$$Var(X) = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \quad (4)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre varyans, karelerin ortalaması eksi ortalamanın karesine eşittir. Aralıklı rassal değişken için, varyans her bir veri noktasının veri ortalamasından uzaklıklarının karelerinin ortalamasıdır; yani ortalama sapma kareleridir.

Rastgele değişkenin varyansı, rastgele değişkenin değerlerinin beklenen değerinin etrafındaki yayılmasını belirten bir yayılım ölçüsüdür. Benzer şekilde varyansın karekökü olarak tanımlanan standart sapma ile birlikte rastgele değişkenlerin değerlerinin dağılımlarının incelenmesinde en çok kullanılan sayısal karakteristiklerdendir (Karaarslan, 2019).

1.3. Sürekli Dağılımlar

1.3.1. Normal Dağılım

Olasılık ve istatistik için normal dağılım oldukça önemlidir. İlk kez 1733'te De Moivre tarafından daha sonra ise 1809'da Gauss tarafından kullanılan ve aynı zamanda "Gauss dağılımı" olarak da bilinen normal dağılım, en çok kullanılan olasılık dağılım türüdür (Kolmogorov, 2018).

Tanım: Sürekli bir X rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0 \quad (6)$$

ise X normal dağılıma sahiptir denir. Burada

μ = Normal dağılımın ortalaması,

σ = Normal dağılımın standart sapması

$e = 2,71828$,

$\pi = 3,14159$ 'dur.

Normal dağılımı, ortalaması: μ ve varyansı: σ^2 olan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ simgesiyle göstereceğiz.

Beklenen değer (Ortalama değer) ve varyansın

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (7)$$

olduğu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (8)$$

$$\text{dir. } t = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ değişken dönüşümü yapılırsa:} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned} \quad (10)$$

$g(t) = te^{-\frac{1}{2}t^2}$ tek fonksiyondur: $g(-t) = -g(t)$ bağıntısını gerçekleştirmektedir.

Bu nedenle $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0$ olacaktır. Öte yandan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1$ dir.

Dolayısıyla:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \mu = \mu \quad (11)$$

Şimdi $E(X^2)$ 'yi bulalım.

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (12)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (13)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu^2 \quad (14)$$

sonucuna $E(X)$ 'in hesaplanmasında karşımıza çıkan integrallerin değerlerini kullanarak ulaşırız.

Kısmi integrasyon yöntemi ile de son integral hesaplanır.

$u = t$, $dv = te^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ olsun $v = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$, $du = dt$ olur.

$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ olsun.

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-\frac{1}{2}t^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0 + 1 = 1 \quad (15)$$

ve $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ bulunur. Buradan da

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2 \quad (16)$$

elde edilir.

Teorem: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahipse $Y = cX + d \sim N(c\mu + d, c^2\sigma^2)$ normal dağılımına sahiptir.

Normal dağılımda moment çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibidir.

Normal dağılıma sahip ve ortalaması μ , varyansı σ^2 şeklindeki bir rastgele değişken X 'in moment çıkaran fonksiyonunun

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \quad (17)$$

olduğu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2 - 2tx\sigma^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (19)$$

$$= \exp\left[t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu - t\sigma^2)^2\right] dx \right\} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (20)$$

sonucu,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu - t\sigma^2)^2\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} N(x; \mu + t\sigma^2, \sigma^2) dx = 1 \quad (21)$$

şeklinde elde edilir.

Beklenen değer ve varyans X 'in moment çıkaran fonksiyonu aracılığıyla da elde edilebilir.

$$E(X) = M'_X(t)|_{t=0} = (\mu + t\sigma^2)e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}|_{t=0} = \mu \quad (22)$$

$$E(X^2) = M''_X(t)|_{t=0} = [\sigma^2 + (\mu + t\sigma^2)^2]e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2 \quad (23)$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2 = \sigma^2 \quad (24)$$

Sanal birimi “i” ile gösterilen $\exp(itX)$ ifadesinin beklenen değeri karakteristik fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Dolayısıyla moment çıkaran fonksiyon içindeki “t” teriminin “it” ile değiştirilmesi sonucunda karakteristik fonksiyon elde edilir. Buna göre normal bir dağılımın karakteristik fonksiyonu

$$\varphi_x(t; \mu, \sigma) = M_x(it) = E[\exp(itX)] = \exp(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}) \text{ şeklindedir.}$$

Normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu ise ;

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R} \text{ şeklindedir}$$

(Karaarslan, 2019).

1.3.2. Beta Dağılımı

$$f(x) = \frac{1}{d^{(a+b-1)}B(a,b)} (x-c)^{a-1} (c+d-x)^{b-1}, c < x < c+d, a, b > 0 \quad (25)$$

şeklinde bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rastgele değişkeni “Genelleştirilmiş Beta” dağılımına sahiptir. $X \sim \text{Beta}(c, d, a, b)$ şeklinde gösterilir. Burada “c” olasılık yoğunluk fonksiyonunun rastgele değişkeninin alabileceği en küçük değeri gösterirken, d rastgele değişkenin alabileceği değerlerin açıklığını belirleyen parametrelerdir. “a” ve “b” sırasıyla sol ve sağ şekil parametreleridir. B (a,b) ise beta fonksiyonunu gösterir. Genelleştirilmiş Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = c + d \frac{a}{a+b} \quad (26)$$

$$\text{Var}(X) = c^2 \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad (27)$$

şeklindedir.

Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{a+r}{a+\beta+r} \right) \frac{t^k}{k!} \quad (28)$$

Beta dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu:

$$F(x; a, \beta) = \frac{B_x(a, \beta)}{B(a, \beta)} = I_x(a, \beta) \quad (29)$$

Burada $B_x(a, \beta)$ ifadesi bir tamamlanmamış beta fonksiyonu iken $I_x(a, \beta)$ ifadesi düzenlenmiş bir beta fonksiyonu olur.

Standart beta dağılımının herhangi bir $(c, c + d)$ aralığına genelleştirilmiş hali $(0,1)$ aralığında değerler alan Beta dağılımıdır. Y bir rastgele değişken olmak üzere

$$f(y) = \frac{1}{B(a, b)} y^{a-1} (1 - y)^{b-1}, y \in (0,1), a > 0, b > 0 \quad (30)$$

şeklinde bir olasılık yoğunluk fonksiyonu varsa standart Beta dağılımına sahiptir ve $Y \sim \text{Beta}(a, b)$ ile gösterilir. Bu dağılım için beklenen değer

$$E(Y) = \frac{a}{a + b} \quad (31)$$

ve varyans

$$\text{Var}(Y) = \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)} \quad (32)$$

şeklindedir.

1.3.3. Sürekli Düzgün Dağılım

Tanım: X , $[a, b]$ kapalı aralığında bir sürekli rastgele değişken, a ve b ise iki sabit değer olmak üzere, X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (33)$$

şeklindeyse X rastgele değişkenine düzgün dağılmış rastgele değişken ve $f(x)$ ' e düzgün dağılım denir. $X \sim U[a, b]$ şeklinde gösterilir.

Bu dağılımın birikimli olasılık fonksiyonu veya dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , & a \leq x \leq b \\ 1 & , & x > b \end{cases} \quad (34)$$

şeklindedir. Burada

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} \quad (35)$$

olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

Moment çıkaran fonksiyon tanımı kullanılarak bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b e^{xt} f(x) dx = \int_a^b e^{xt} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{t(b-a)} [e^{bt} - e^{at}]; t \neq 0 \quad (36)$$

Burada $t = 0$ alırsak $M(t) = 1$ elde edilir.

Moment çıkaran fonksiyon, beklenen değer ve varyans tanımları kullanılarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir. Bu durumda beklenen değer:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} \quad (37)$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki şekilde de varyans elde edilir.

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) \quad (38)$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (39)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) - \frac{(a+b)^2}{4} = 12 \quad (40)$$

(Erbaş, 2008).

1.3.4. Üstel Dağılım

X rastgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametre olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (41)$$

şeklinde verilmişse X'e üstel dağılmış rastgele değişken, $f(x)$ 'e de üstel dağılım denir (Erbaş, 2020).

Bu dağılımın tek parametresi λ 'dır. Bu durumda birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad (42)$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (43)$$

şeklindedir.

Moment çıkaran fonksiyon tanımı kullanılarak bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{xt} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx \quad (44)$$

$$= \frac{\lambda}{t - \lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_0^{\infty} \quad (45)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-\lambda)x} = 0$ olduğu için;

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad t < \lambda \text{ için elde edilir.}$$

Moment çıkaran fonksiyon, beklenen değer ve varyans tanımları kullanılarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir. Bu durumda beklenen değer:

$$E(X) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \quad (46)$$

Hesaplamamızda parçalı integral kullanırsak ($u = x, dv = \lambda e^{-\lambda x}$)

$$E(X) = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \quad (47)$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki şekilde de varyans elde edilir.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \quad (48)$$

$E(X^2)$ hesaplanırken de parçalı integral kullanılır.

$$(x^2 = u, dv = e^{-\lambda x} dx) ($$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (49)$$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (50)$$

(Erbaş, 2020).

1.3.5. Gama Dağılımı

Sürekli olasılık dağılım türlerinden biri de Gama dağılımıdır. Gama dağılımı İki parametrelili bir dağılımdır. Biri ölçek diğeri ise şekil parametresi olarak anılan bu parametreler θ ve k ile sembolize edilir. Dağılımda k parametresi tam sayı ise, bu dağılım k tane üstel dağılım gösteren rassal değişkenlerin toplamını temsil eder; rassal değişkenlerin her birinin üstel dağılımı için parametre $\frac{1}{\theta}$ olur (Choi ve Wette, 1969).

X bir rassal değişken olmak üzere bu değişkenin k şekil parametresi ve θ ölçek parametresi ile tanımlanan Gama dağılımı aşağıdaki gibidir:

$$X \sim \Gamma(k, \theta) \text{ veya } X \sim \text{Gamma}(k, \theta)$$

Gama dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde ile ifade edilebilir:

$$f(x; k, \theta) = x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} \quad \text{için } x > 0 \text{ ve } k, \theta > 0$$

Alternatif bir şekilde, gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu bir şekil parametresi $\beta = 1/\theta$ ile ölçek parametresinin tersi olan oran parametresi kullanılarak şöyle elde edilir:

$$g(x; a, \beta) = x^{a-1} \frac{\beta^a e^{-\beta x}}{\Gamma(a)} \text{ için } x > 0.$$

Eğer a bir pozitif tam sayı ise, o halde

$$\Gamma(a) = (a - 1)! \quad (51)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu her iki şekli de istatistikçiler tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır.

1.4. VIM Yöntemi

VIM (Variational İteration Method) ilk olarak Çinli Matematikçi J. Huan He tarafından keşfedilmiştir. Lineer ve non-lineer problemlerin analitik çözüme yakınsak yaklaşık çözümlerinin hızlı bir şekilde elde edilmesini sağlamaktadır. Bu teknik ile hesaplamalar daha sade hale gelmiştir. VIM yöntemi ile non-lineer problemlerin etkili, basit ve tam sonuç veren çözümleri elde edilir (He, 2000).

$Lu + Nu = g(x)$ denklemi diferansiyel eşitlik olmak üzere L ve N lineer ve lineer olmayan operatörler ve $g(x)$ homojen olmayan terim olsun. (1) denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemi ile düzeltme fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilir (He, 1999).

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t) (Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - g(t))dt, \quad (52)$$

(51) denkleminde varyasyon teorisine göre λ Lagrange çarpanı, u_n ise $\widetilde{\delta u_n} = 0$ anlamına gelen kısıtlı varyasyondur. Lagrange çarpanı sabit ya da bir fonksiyon şeklinde olabilir. Lagrange çarpanı VIM Yöntemi için oldukça önemli ve kritiktir. $u(x)$ 'in çözümünde $n \geq 0$ olmak üzere $u_{n+1}(x)$ kullanılarak ardışık yaklaşımla iterasyon formülü kullanılarak λ belirlenir. u_0 ile gösterilen sıfırınca yaklaşım seçilir. Buna karşın $u(0), u'(0)$ ve $u''(0)$ şeklinde verilen başlangıç koşulları sonradan karşımıza çıkabilecek olan sıfırınca yaklaşım yerine tercih edilebilir. Sonuç olarak çözüm;

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (53)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla detayları görmezden gelirsek (51) denkleminde λ ile verilen Lagrange çarpanının türetilerek elde edildiğini görürüz. (Öksüzer, 2012).

1.5. DTM Yöntemi

DTM (Diferansiyel Transform Method) ilk olarak Zhou tarafından 1986 yılında ortaya konuldu. Elektrik devre analizi için lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümü için uygulandı (Pukhov, 1982). Sonraları ise yürütülen birçok araştırmada farklı türlerdeki eşitliklerde diferansiyel transform metodu uygulandı. Bu araştırmalar göstermiştir ki DTM verimli ve güvenilir bir yöntem olarak geniş bir uygulanabilirliğe sahiptir (Zhou, 1986).

Bir fonksiyonun diferansiyel transform metodu $y(x)$ şeklinde tanımlansın.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (54)$$

$y(x)$ orijinal fonksiyon $Y(k)$ ise dönüştürülmüş hali olsun. Bu durumda $Y(k)$ 'nin ters dönüşüm fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k \approx y_N(x) = \sum_{k=0}^N Y(k) x^k \quad (55)$$

53 eşitliğinde 54 eşitliğini yerine koyarsak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} \quad (56)$$

anlarız ki Diferansiyel Transform Metodu, Taylor serisi açılımından türetilmiştir. Yukarıdaki tanımda $x = 0$ olarak kabul ettik ancak $x = x_0$ olmak üzere herhangi bir gerçek sayı için de doğrudur (Bervillier, 2012).

Tablo 3. DTM yönteminde değerlerin orijinal halleri ve dönüştürülmüş halleri (URL-3, 2021).

Orijinal Hali	Dönüştürülmüş Hali
$X(t) = Y(t) \pm Z(t)$	$\hat{X}(k) = \hat{Y}(k) \pm \hat{Z}(k)$
$X(t) = \lambda Y(t)$	$\hat{X}(k) = \lambda \hat{Y}(k)$
$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$	$\hat{Y}(k) = (k+1) \hat{X}(k+1)$
$X(t) = Y(t)Z(t)$	$\hat{X}(k) = \sum_{r=0}^k \hat{Y}(r) \hat{Z}(k-r)$

1.6. Kesirli Mertebeden Türev

İlk olarak 17. yüzyılın ikinci yarısında ortaya atılan kesirli mertebeden türev kavramı Leibniz ve Newton tarafından geliştirilmiştir. Kesirli mertebeden türev kavramı esasında tam sayılı türev kavramı kadar eskidir. Çünkü kesirli mertebeden türev aslında tam sayılı mertebeden türevin genelleştirilmiş bir halidir. Literatürde en çok değinilen tanımlar Rieman-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. (Lüleci, 2019)

Kesirli mertebeden türev 300 yıldan fazla süredir matematikte ilgiyi üzerine toplamıştır. Bilim insanları bu konuda çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu durum zaman zaman farklı tanımların da ortaya çıkmasını sağlamıştır (Samko vd., 1993).

Kesirli mertebeden türev özellikle tıp, biyoloji, biyomühendislik gibi uygulamalı alanlarda tam sayılı türeve göre birçok avantaj sağlamaktadır. Bu avantajlar günlük hayatımızda kolaylıklar sağlamanın yanında çeşitli modeller yardımıyla da hastalıkların yayılımı gibi konularda güçlü görüş açıları kazandırmaktadır (Miller vd., 1993).

Avantajları da göz önünde bulundurulduğunda son yıllarda matematiksel modellerde kesirli mertebeden diferansiyel denklemler günden güne daha popüler olmaya başlamıştır. Ancak bu tip denklemlerde analitik çözüm biraz da denklemin yapısına bağlıdır (İbiş, 2011).

Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi analitik yaklaşımlar kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılmışlardır. Ancak bu yöntemlerden sabit ve lineer katsayılı problemlerin çözümünde daha çok faydalanılmaktadır (Podlubny, 1999). Kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunabilmesi için yeni yöntemlerin keşfedilmesi gerekli olmuştur. Bu sebeple Varyasyonel İterasyon Metodu, Homotopy Perturbasyon Metodu, Homotopy Analiz Metodu, Adomian Ayırışım Metodu ve Diferansiyel Dönüşüm Metodu gibi yaklaşık çözüm yöntemleri öne çıkmaktadır (Bekiryazıcı, 2022).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. HIV/AIDS Modeli ve Rastgele Efektli HIV/AIDS Modeli

Tez çalışmasında kullanılacak olan matematiksel model El-Metwally, Sohaly ve Elbaz tarafından 2020 yılında “Stochastic global exponential stability of disease-free equilibrium of HIV/AIDS model” başlıklı çalışma ile yayınlanmıştır.

HIV virüsünün neden olduğu AIDS hastalığının yayılımını modelleyen (56-58) denklem sistemi deterministik diferansiyel denklemlerden oluşan bir sitemdir. Lineer olmayan HIV/AIDS modelinin deterministik formu

$$S'(t) = \mu - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \quad (57)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \delta I(t) \quad (58)$$

$$A'(t) = \delta I(t) - \mu A(t) - dA(t) \quad (59)$$

$$S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, A(t_0) = A_0 \quad (60)$$

şeklindedir (El-Metwally vd.,2020).

Bu modelde enfekte olanlar $I(t)$ ile gösterilmiştir. Enfekte olanlar $S(t)$ ile gösterilen duyarlı kişilere hastalığı bulaştırabilmektedirler. Ayrıca modelimizde enfekte olan kişiler hasta olduğunda $A(t)$ ile gösterilirler. Modelimizin parametreleri μ, β, δ ve d şeklindedirler ve $[0, \infty)$ aralığında değerler almaktadırlar. Bu parametrelerin değerleri ve açıklamaları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 4. Parametre açıklamaları ve değerleri (El-Metwally vd., 2020)

Parametre	Açıklama	Değer
μ	Doğum ve doğal ölüm oranı	2
β	Enfeksiyonun bulaşma hızı	1.5
δ	Enfekte bireylerin AIDS olma oranı	4
d	AIDS hastalığından kaynaklanan ölüm oranı	1

$$S(k+1) = \frac{(\mu\delta(k) - \beta \sum_{r=0}^k S(r)I(k-r) - \mu S(k))}{k+1}, \quad (61)$$

$$I(k+1) = \frac{(\beta \sum_{r=0}^k S(r)I(k-r) - \mu I(k) - \delta I(k))}{k+1}, \quad (62)$$

$$A(k+1) = \frac{(\delta I(k) - (\mu + d)A(k))}{k+1}, \quad (63)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, A(0) = A_0, \quad (64)$$

Yukarıdaki (56)–(58) modelinde parametreler rastgele seçilerek sistemin yaklaşık analitik çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemi ile $\mu, \beta, \delta, d \sim U(a,b)$ elde edilecektir. Elde edilen bu çözümün beklenen değer ve varyans gibi olasılık karakteristikleri hesaplanacaktır. Modelimiz virüse karşı duyarlı olanlar $S(t)$, enfekte olanlar $I(t)$ ve hasta olanlar $A(t)$ olmak üzere üç farklı grubun meydana getirdiği denklemlerden oluşmaktadır. İlk olarak bu yukarıda verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü için DTM yöntemi uygulandı ve

$$\begin{aligned} S(t) = & 0.5 + 0.5t\mu - 1.5t\beta + 1.875t^2\beta^2 + 0.75t^2\beta\delta - 0.25t^2\mu^2 \\ & + 0.75t^2\mu\beta - 0.8125t^3\beta^3 - 2t^3\beta^2\delta - 3t^3\mu\beta^2 + 0.25t^3\mu^2\beta \\ & - 0.25t^3\beta\delta^2 - 0.25t^3\mu\beta\delta \\ & + 0.08333333333t^3\mu^3 \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} I(t) = & 3 + 1.5t\beta - 3t\mu - 3t\delta - 1.875t^2\beta^2 - 1.5t^2\beta\delta - 0.75t^2\mu\beta \\ & + 1.5t^2\mu^2 + 3t^2\mu\delta + 1.5t^2\delta^2 + 0.8125t^3\beta^3 + 2.625t^3\beta^2\delta + 3t^3\mu\beta^2 \\ & - 0.25t^3\beta\mu^2 + 0.75t^3\beta\delta^2 + 0.75t^3\mu\beta\delta - 0.5t^3\mu^3 - 1.5t^3\mu^2\delta \\ & - 1.5t^3\mu\delta^2 - 0.5t^3\delta^3 \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
A(t) = & -1.5t \mu + 0.75 t^2 \mu^2 - 0.25 t^3 \mu^3 + 3 t \delta - 1.5 t^2 \delta^2 + 0.5 t^3 \delta^3 \\
& -0.5 t^3 \mu \beta \delta + 1.5 t^3 \mu d \delta - 0.25 t^3 d \beta \delta + 0.75 t^2 \beta \delta - 0.625 t^3 \beta^2 \delta \\
& - 0.5 t^3 \beta \delta^2 + 1.5 t^3 \mu^2 \delta + 1.5 t^3 \mu \delta^2 - 3 t^2 \mu \delta \\
& + 0.5 t^3 d \delta^2 - 0.75 t^3 \mu^2 d - 0.75 t^3 \mu d^2 - 1.5 t^2 d \delta \\
& + 0.5 t^3 d^2 \delta + 1.5 t^2 \mu d + 1.5 - 1.5 t d + 0.75 t^2 d^2 \\
& - 0.25 t^3 d^3
\end{aligned} \tag{67}$$

şeklindeki sonuçlar elde edildi. Sonra ise denklemlerimizin beklenen değer ve varyansları düzgün dağılıma göre hesaplandı. Parametreleri için değerler $\mu, \beta, \delta, d \sim U(a = 2, b = 4)$ olarak alındı.

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} \tag{68}$$

2.1.2. Virüse Karşı Duyarlılar

Virüse karşı duyarlı kişileri ifade eden denkleminiz $S(t)$ için beklenen değerimiz

$$\begin{aligned}
E(S(t)) = & 0.5 + 0.5t E(\mu) - 1.5t E(\beta) + 1.875t^2 E(\beta^2) \\
& + 0.75 t^2 E(\beta) E(\delta) - 0.25 t^2 E(\mu^2) + 0.75 t^2 E(\mu) E(\beta) - 0.8125 t^3 E(\beta^3) \\
& - 2 t^3 E(\beta^2) \delta - 3 t^3 E(\mu) E(\beta^2) + 0.25 t^3 E(\mu^2) E(\beta) \\
& - 0.25 t^3 E(\beta) E(\delta^2) - 0.25 t^3 E(\mu) E(\beta) E(\delta) \\
& + 0.08333333333 t^3 E(\mu^3)
\end{aligned} \tag{69}$$

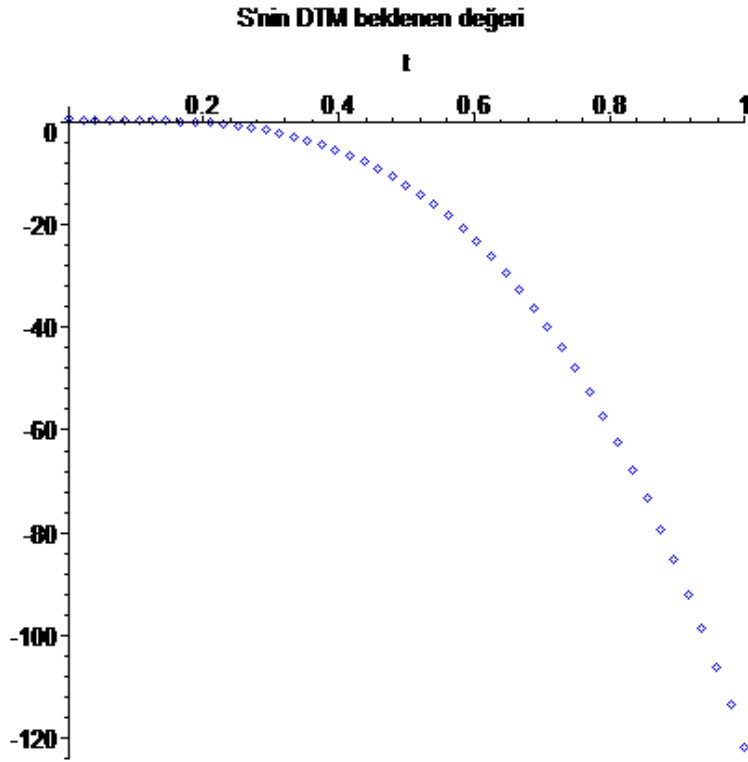
şeklinde bulundu.

Denklemden düzgün dağılıma göre hesaplama yapılmış

$$E(S(t)) = 0.5 - 3t + 28.66666667t^2 - 147.84375t^3 \tag{70}$$

şeklinde çözüm elde edildi.

Bu hesaplamamıza göre “S’nin DTM beklenen değeri” aşağıdaki grafikte görselleştirildi.



Şekil 2. [0-1] zaman aralığında S'nin DTM beklenen değeri

Laplace dönüşümü genel anlamda bir fonksiyonun tanım kümesini zamandan frekansa çevirir. Zaman tanım kümesinde çözmesi zor olan diferansiyel denklemler frekans tanım kümesinde daha basit cebirsel denklemlere dönüştüğünden diferansiyel denklemleri çözmekte kullanılırlar. Beklenen değer formülümüz laplace dönüşümü ile çözüldü.

$$B = \frac{0.5}{s^1} - \frac{3}{s^2} + \frac{57.33333334}{s^3} - \frac{887.0625000}{s^4} \quad (71)$$

Denklemine $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 0.5 t - 3 t^2 + 57.33333334 t^3 - 887.0625000 t^4 \quad (72)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{0.5t - 1.996873710t^2 + 132.8217223t^3}{1 + 2.006252581t + 163.0142934t^2 + 2522.160465t^3} \quad (73)$$

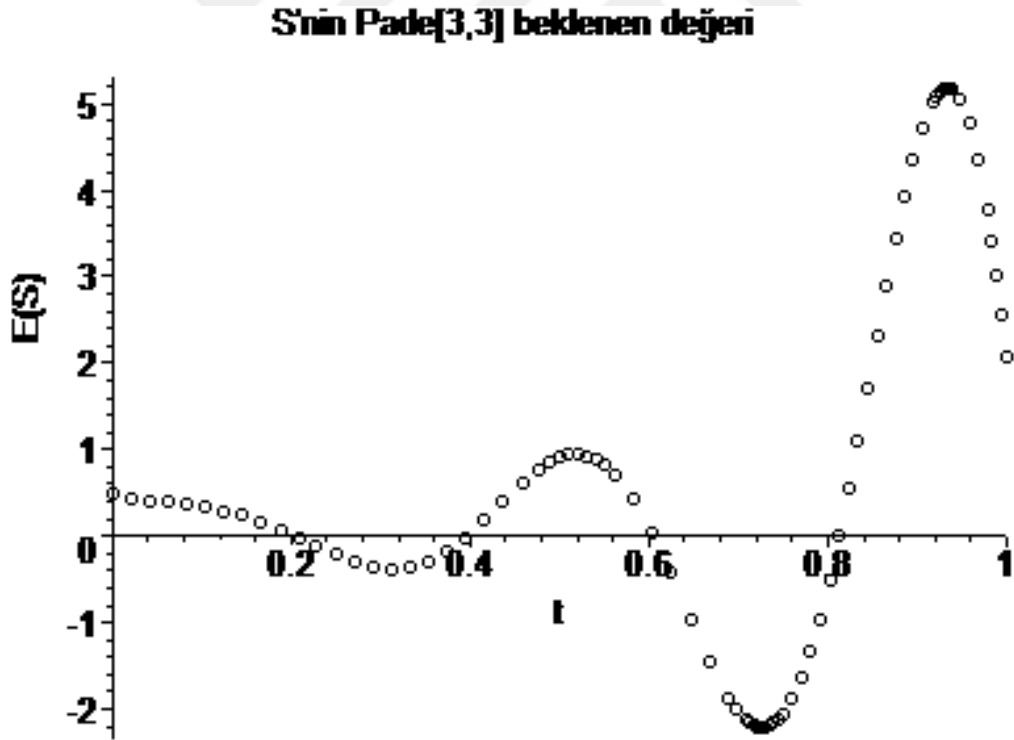
Denklemine $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü uygulandı.

$$L = \frac{10(5 \cdot 10^8 s^2 - 199687371 \cdot 10^9 s + .1328217223 \cdot 10^{11})}{0.1s^3 + 0.2006252581 \cdot 10^{10} s^2 + 0.1630142934 \cdot 10^{12} s + 0.2522160465 \cdot 10^{13}} \quad (74)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yapılarak S'nin Pade[3,3] beklenen değeri elde edildi.

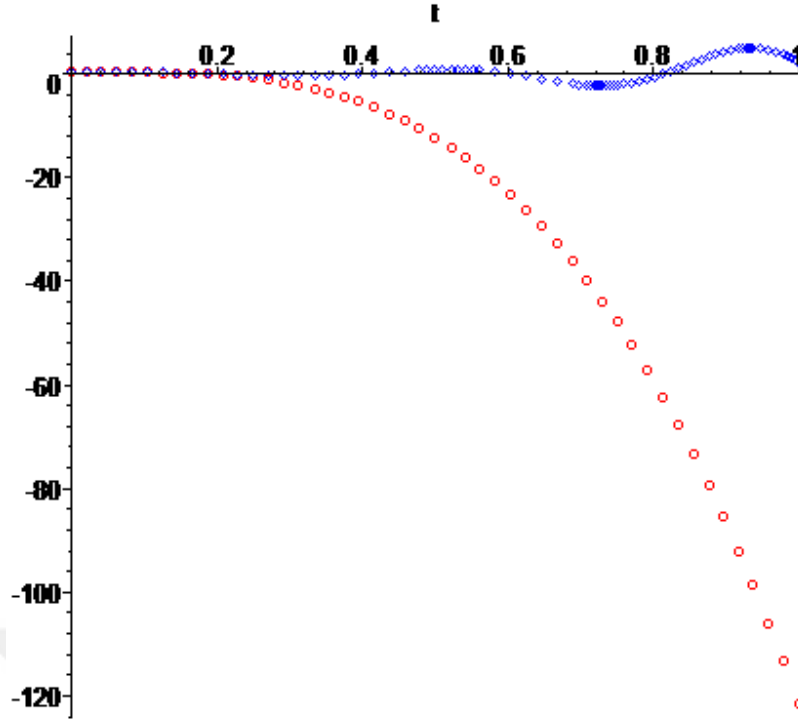
$$\begin{aligned} M = & 0.4720640795e^{(-10.21595992 t)} \\ & + 0.01396796028e^{((4.104853668-15.16688863 I)t)} + \\ & 0.05630406106Ie^{(4.104853668-15.16688863 I)t} + \\ & 0.01396796028e^{(4.104853668+15.16688863 I)t} - \\ & 0.05630406106Ie^{(4.104853668+15.16688863 I)t} \end{aligned} \quad (75)$$

Bu hesaplamamıza göre “S'nin Pade[3,3] beklenen değeri” aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 3. S'nin Pade [3,3] beklenen değeri

S'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değerinin grafikleri birleştirildi.



Şekil 4. S'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri

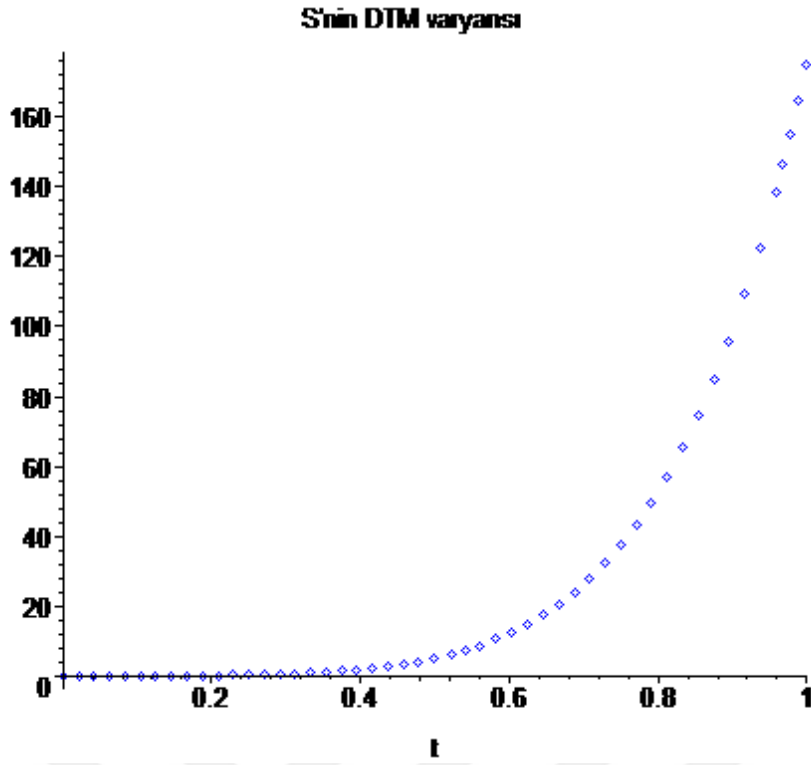
Duyarlı kişileri gösteren S(t) için varyans değeri hesaplandı.

$$\begin{aligned}
 &Var(S(t)) \\
 &= (0.5t)^2 Var(\mu) + (1.5t)^2 Var(\beta) + (1.875t^2)^2 Var(\beta^2) \\
 &+ (0.75t^2)^2 Var(\beta)Var(\delta) + (0.25t^2)^2 Var(\mu^2) + (0.75t^2)^2 Var(\mu)E(\beta) \\
 &+ (0.8125t^3)^2 Var(\beta^3) + (2t^3)^2 Var(\beta^2)Var(\delta) + (3t^3)^2 Var(\mu)Var(\beta^2) \\
 &+ (0.25t^3)^2 Var(\beta)Var(\mu^2) + (0.25t^3)^2 Var(\beta)Var(\delta^2) \\
 &+ (0.25t^3)^2 Var(\mu)Var(\beta)Var(\delta) \\
 &+ (0.8333333333t^3)^2 Var(\mu^3)
 \end{aligned} \tag{76}$$

Düzgün dağılıma göre hesaplama yapılıncı aşağıdaki denklem elde edildi.

$$Var(S(t)) = 0.8333333333t^2 + 43.88055556t^4 + 130.2748842t^6 \tag{77}$$

Buna göre S'nin DTM Varyans grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5. S'nin DTM Varyansı

Varyans değerimiz için laplace dönüşümü yapıldı.

$$B = \frac{0.2 \cdot 10^9 (0.8333333333 \cdot 10^{10} s^4 + 0.5265666667 \cdot 10^{13} s^2 + 0.4689895831 \cdot 10^{15})}{s^7} \quad (78)$$

Denklemimize $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 0.2 \cdot 10^{-9} (0.8333333333 \cdot 10^{10} + 0.5265666667 \cdot 10^{13} t^2 + 0.4689895831 \cdot 10^{15} t^4) t^3 \quad (79)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{1.666666667 t^3}{0.9999999998 - 631.8799996 t^2} \quad (80)$$

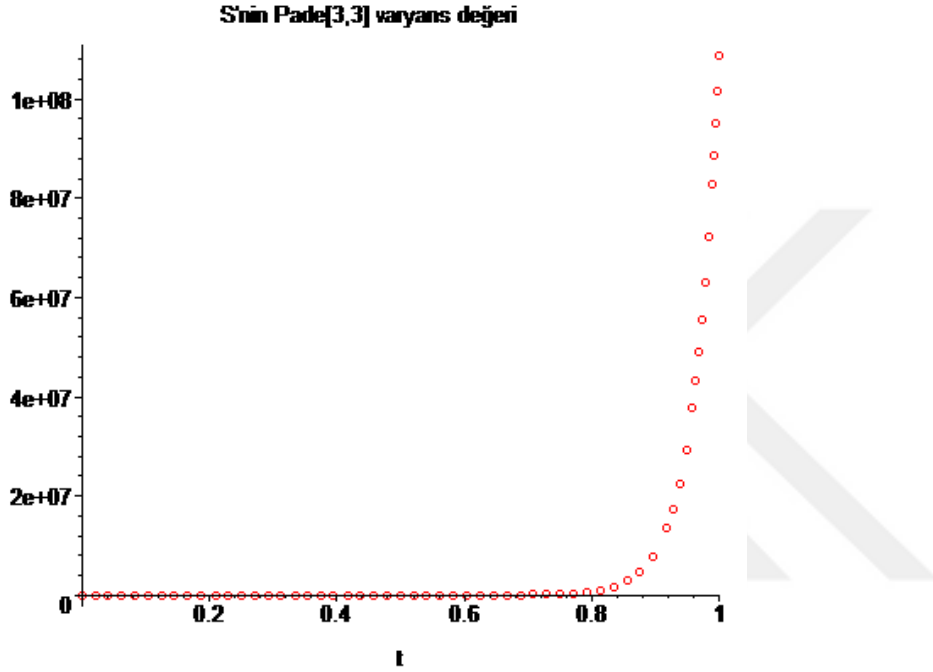
Denklemimize $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü yapıldı.

$$L = \frac{0.8333333335 \cdot 10^{10}}{s \cdot (0.4999999999 \cdot 10^{10} s^2 - 0.3159399998 \cdot 10^{13})} \quad (81)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yaparak S'nin Pade[3,3] varyans değeri elde edildi.

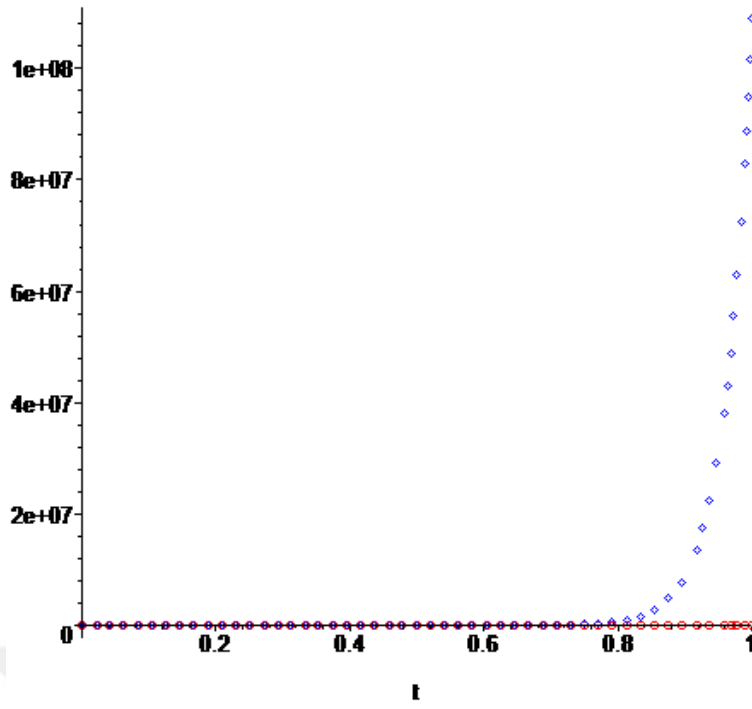
$$M = -0.002637631620 + 0.002637631620 * \cosh(25.13722339t) \quad (82)$$

Bu hesaplamamıza göre “S'nin Pade[3,3] varyans değeri” aşağıdaki grafikte görselleştirilmiştir.



Şekil 6. S'nin Pade[3,3] Varyans değeri

S'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değerinin grafikleri birleştirildi.



Şekil 7. S'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri

2.1.3. Enfekte Kişiler

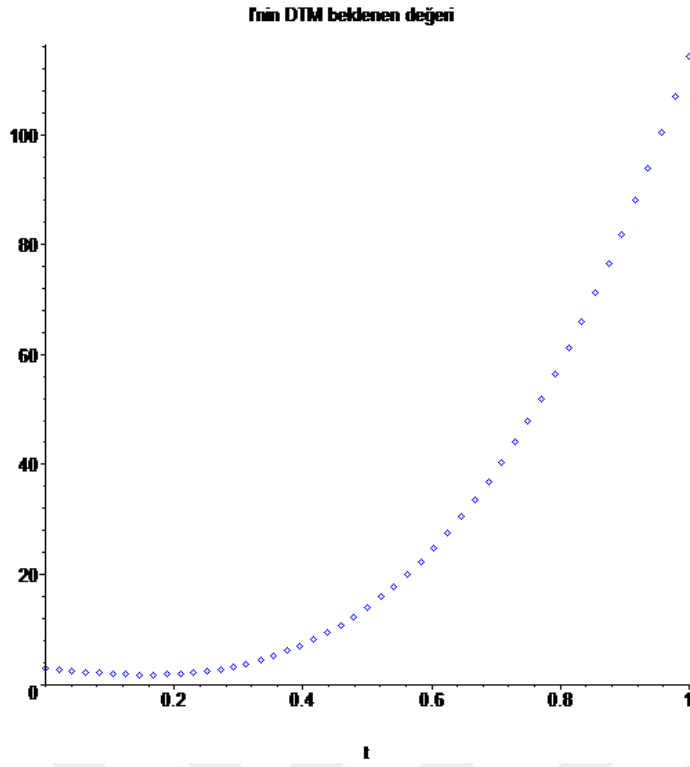
Enfekte kişileri ifade eden denklem $I(t)$ için beklenen değer elde edildi.

$$\begin{aligned}
 E(I(t)) = & 3. + 1.5 t E(\beta) - 3 t E(\mu) - 3 t E(\delta) - 1.875 t^2 E(\beta^2) \\
 & - 1.5 t^2 E(\beta) E(\delta) - 0.75 t^2 E(\mu) E(\beta) + 1.5 t^2 E(\mu^2) \\
 & + 3 t^2 E(\mu) E(\delta) + 1.5 t^2 E(\delta^2) + 0.8125 t^3 E(\beta^3) \\
 & + 2.625 t^3 E(\beta^2) E(\delta) + 3 t^3 E(\mu) E(\beta^2) - 0.25 t^3 E(\beta) E(\mu^2) \\
 & + 0.75 t^3 E(\beta) E(\delta^2) + 0.75 t^3 E(\mu) E(\beta) E(\delta) - 0.5 t^3 E(\mu^3) \\
 & - 1.5 t^3 E(\mu^2) E(\delta) - 1.5 t^3 E(\mu) E(\delta^2) - 0.5 t^3 E(\delta^3)
 \end{aligned} \tag{83}$$

Düzgün dağılıma göre hesaplama yapılırken aşağıdaki denklem elde edildi.

$$E(I(t)) = 3 - 13.5t + 17.25 t^2 + 107.46875 t^3 \tag{84}$$

Bu hesaplamamıza göre “I'nin DTM beklenen değeri” aşağıdaki grafikte görselleştirildi.



Şekil 8. I'nin DTM beklenen değeri

Beklenen değer formülümüze laplace dönüşümü uygulandı.

$$B = \frac{0.1875 (16 s^3 - 72 s^2 + 184 s + 3439)}{s^4} \quad (85)$$

Denklemimize $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 0.1875 (16 - 72 t + 184 t^2 + 3439 t^3) t \quad (86)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{3 t - 23.63293557 t^2 + 102.8786666 t^3}{1 - 3.37764519 t + 7.593485512 t^2 - 141.9238956 t^3} \quad (87)$$

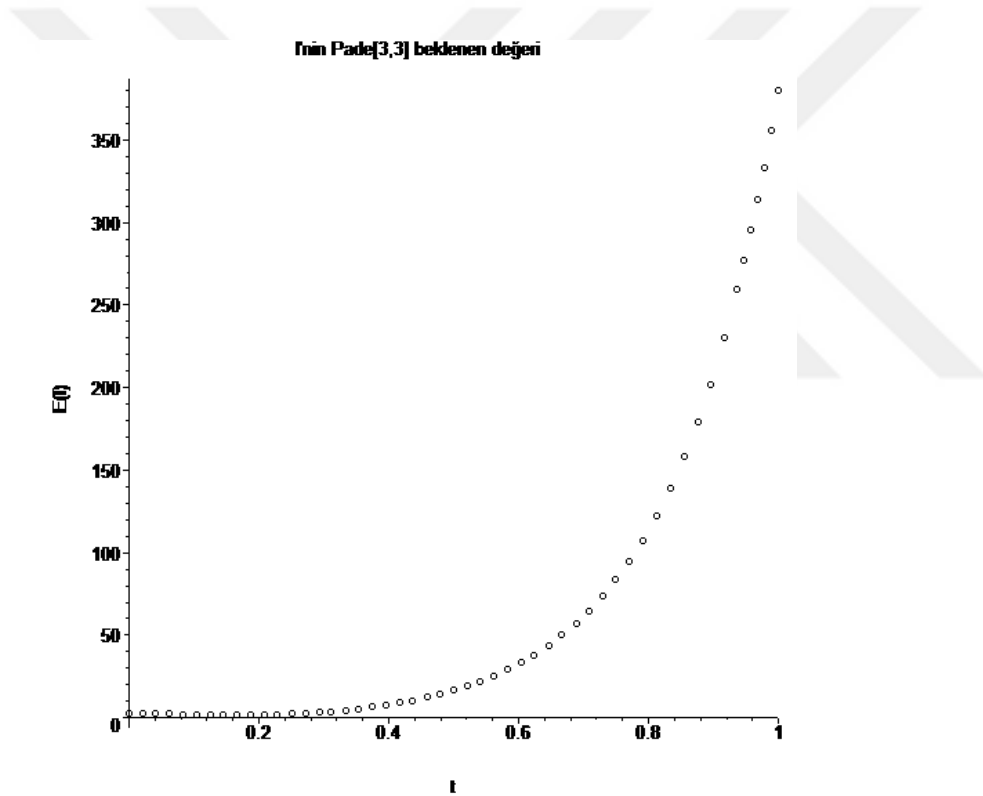
Denklemimize $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü uygulandı.

$$L = \frac{5 (0.3 \cdot 10^9 s^2 - 0.2363293557 \cdot 10^{10} s + 0.1028786666 \cdot 10^{11})}{0.5 \cdot 10^9 s^3 - 0.1688822595 \cdot 10^{10} s^2 + 0.3796742756 \cdot 10^{10} s - 0.709619478 \cdot 10^{11}} \quad (88)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yapılarak I'nin Pade[3,3] beklenen değeri elde edildi.

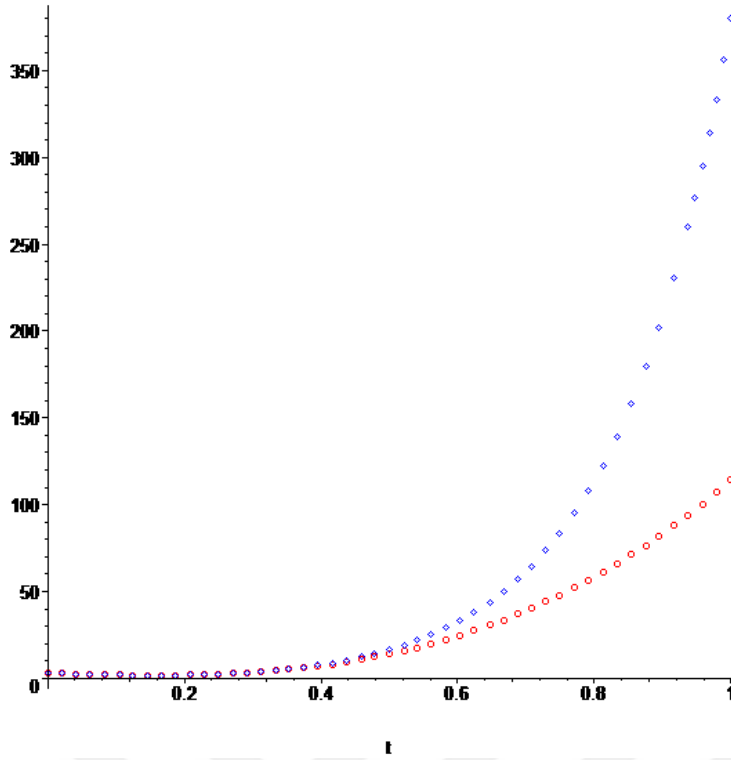
$$\begin{aligned}
 M = & 1.042327440 e^{(-1.324155656-4.668908446 I) t} \\
 & - 1.740816137 I e^{(-1.324155656-4.668908446 I) t} \\
 & + 1.042327440 e^{(-1.324155656+4.668908446 I) t} \\
 & + 1.740816137 I e^{(-1.324155656+4.668908446 I) t} \\
 & + 0.9153451204 e^{6.025956501 t}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Bu hesaplamamıza göre “I'nin Pade[3,3] beklenen değeri” aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 9. I'nin Pade[3,3] beklenen değeri

I'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değerinin grafikleri birleştirildi.



Şekil 10. I'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri

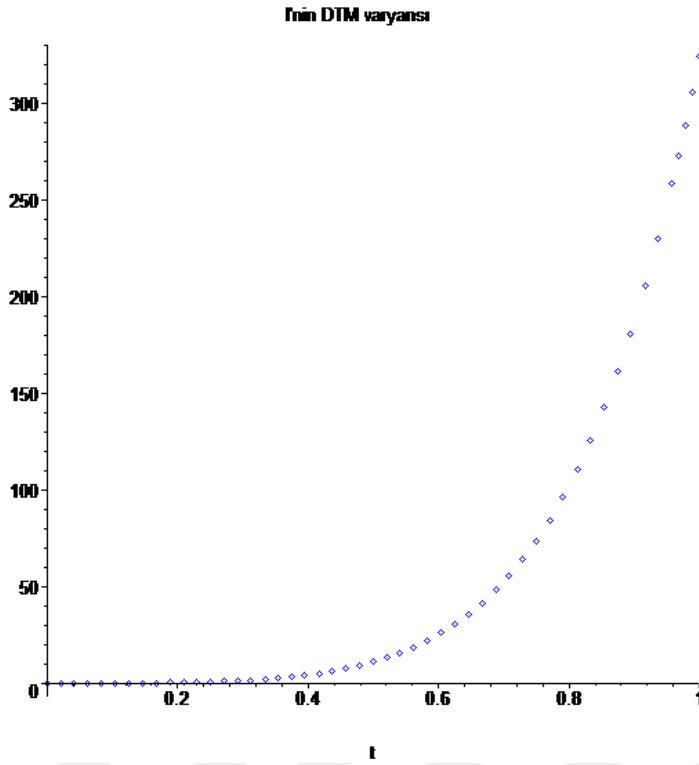
Enfekte kişileri gösteren $I(t)$ için varyans değeri hesaplandı.

$$\begin{aligned}
 Var(I(t)) = & (1.5t)^2 Var(\beta) + (3t)^2 Var(\mu) + (3t)^2 Var(\delta) \\
 & + (1.875t^2)^2 Var(\beta^2) + (1.5t^2)^2 Var(\beta)Var(\delta) + (0.75t^2)^2 Var(\mu)Var(\beta) \\
 & + (1.5t^2)^2 Var(\mu^2) + (3t^2)^2 Var(\mu)Var(\delta) \\
 & + (1.5t^2)^2 Var(\delta^2) + (0.8125t^3)^2 Var(\beta^3) \\
 & + (2.625t^3)^2 Var(\beta^2)Var(\delta) + (3t^3)^2 Var(\mu)Var(\beta^2) \\
 & + (0.25t^3)^2 Var(\beta)Var(\mu^2) + (0.75t^3)^2 Var(\beta)Var(\delta^2) \\
 & + (0.75t^3)^2 Var(\mu)Var(\beta)Var(\delta) + (0.5t^3)^2 Var(\mu^3) \\
 & + (1.5t^3)^2 Var(\mu^2)Var(\delta) + (1.5t^3)^2 Var(\mu)Var(\delta^2) \\
 & + (0.5t^3)^2 Var(\delta^3)
 \end{aligned} \tag{90}$$

Düzgün dağılıma göre hesaplama yapılıncı aşağıdaki denklem elde edildi.

$$Var(I(t)) = 6.75t^2 + 98.2125t^4 + 219.2841437t^6 \tag{91}$$

Buna göre I'nin DTM Varyans grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 11. I'nin DTM Varyans grafiği

Varyans değerimiz için laplace dönüşümü yapıldı.

$$B = \frac{13.5}{s^3} + \frac{2357.1}{s^5} + \frac{157884.5835}{s^7} \quad (92)$$

Denklemimize $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 13.5t^3 + 2357.1t^5 + 157884.5835t^7 \quad (93)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{13.5t^3}{1 - 174.6t^2} \quad (94)$$

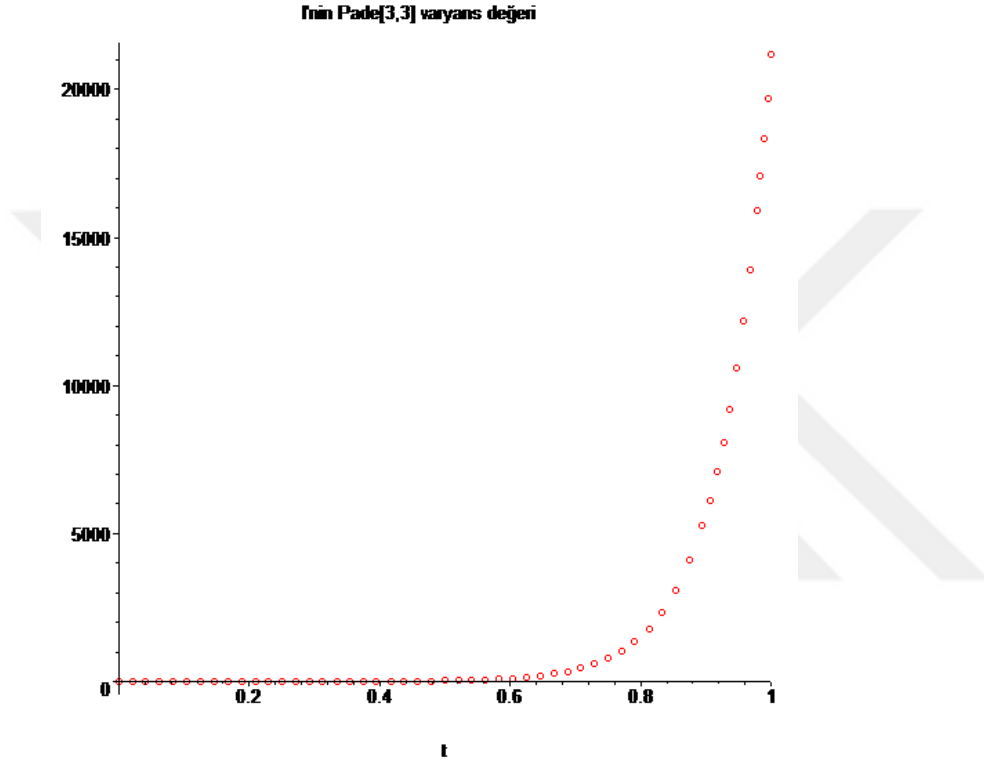
Denklemimize $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü uygulandı.

$$L = \frac{67.5}{s(5s^2 - 873)} \quad (95)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yapılarak I'nin Pade[3,3] varyans değeri elde edildi.

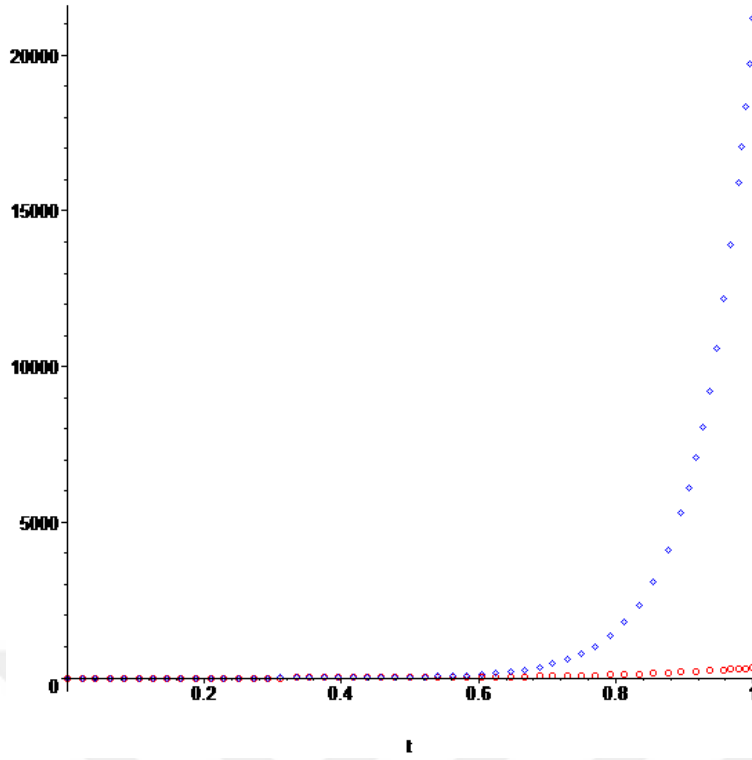
$$M = -0.07731958763 + 0.07731958763 \cosh(13.21362933t) \quad (96)$$

Bu hesaplamamıza göre I'nin Pade[3,3] varyans değeri aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 12. I'nin Pade[3,3] varyans değeri

I'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değerinin grafikleri birleştirildi.



Şekil 13. I'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri

2.1.4. Hasta Olan Kişiler

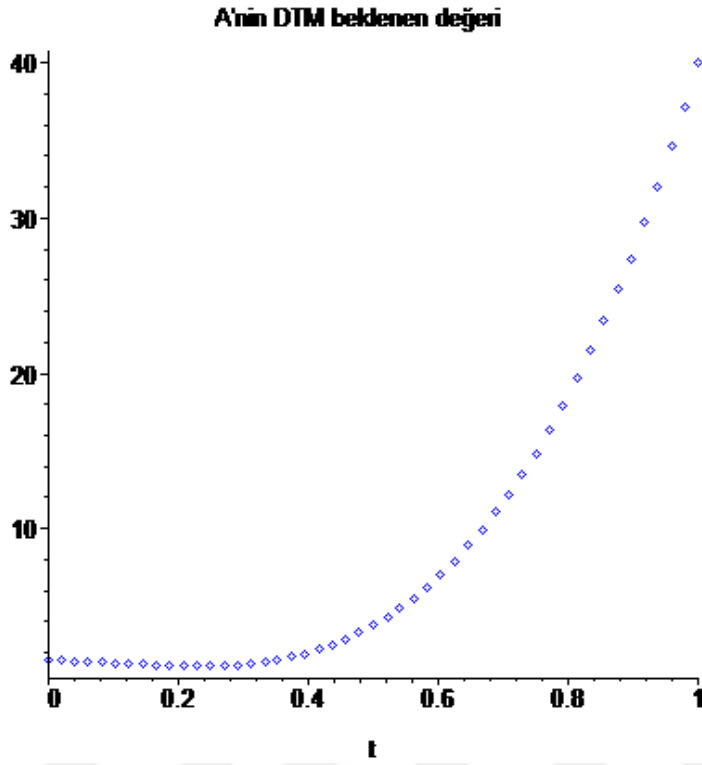
Modelimizde enfekte olan kişiler hastalığa yakalandığında $A(t)$ ile gösterilmektedir. Denklemimizde $A(t)$ için beklenen değerimiz bulundu.

$$\begin{aligned}
 E(A(t)) = & 0.75t^2 E(\mu^2) - 0.25t^3 E(\mu^3) - 1.5t E(\mu) \\
 & + 0.75t^2 E(\beta)E(\delta) - 0.625t^3 E(\beta^2)E(\delta) - 0.5t^3 E(\beta)E(\delta^2) \\
 & + 1.5t^3 E(\mu^2)E(\delta) + 1.5t^3 E(\mu)E(\delta^2) - 3t^2 E(\mu)E(\delta) - 0.75t^3 E(\mu^2)E(d) \\
 & + 0.5t^3 E(d^2)E(\delta) + 1.5t^2 E(\mu)E(d) - 1.5t^2 E(d)E(\delta) \\
 & - 0.75t^3 E(\mu)E(d^2) + 1.5 - 0.5t^3 E(\mu)E(\beta)E(\delta) \\
 & + 1.5t^3 E(\mu)E(d)E(\delta) - 0.25t^3 E(d)E(\beta)E(\delta) + 3t E(\delta) \\
 & - 1.5t^2 E(\delta^2) + 0.5t^3 E(\delta^3) - 1.5t E(d) + 0.75t^2 E(d^2) \\
 & - 0.25t^3 E(d^3) + 0.5t^3 E(d)E(\delta^2)
 \end{aligned} \tag{97}$$

Düzgün dağılıma göre hesaplama yapılmıca aşağıdaki denklem elde edildi.

$$E(A(t)) = -20.25t^2 + 58.75t^3 + 1.5 \tag{98}$$

Bu hesaplamamıza göre A'nın DTM beklenen değeri aşağıdaki grafikte görselleştirildi.



Şekil 14. A'nın DTM beklenen değeri

Beklenen değer formülümüze laplace dönüşümü uygulandı.

$$B = \frac{1.5 (-27 s + 235 + s^3)}{s^4} \quad (99)$$

Denklemimize $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 1.5 (-27 t^2 + 235 t^3 + 1) t \quad (100)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{1.5 t - 7.230108041 t^2 - 103.4287181 t^3}{1 - 4.820072027 t - 41.95247876 t^2 - 365.1419447 t^3} \quad (101)$$

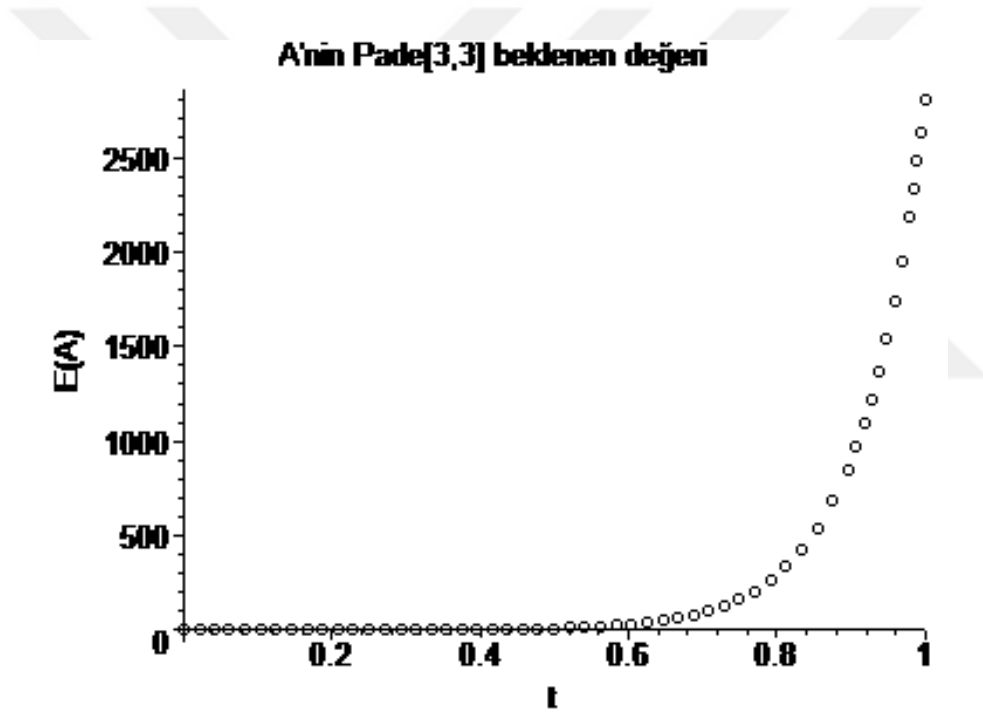
Denklemimize $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü uygulandı.

$$L = \frac{0.15 10^{10} s^2 - 0.7230108041 10^{10} s - 0.1034287181 10^{12}}{0.1 10^{10} s^3 - 0.4820072027 10^{10} s^2 - 0.4195247876 10^{11} s - 0.3651419447 10^{12}} \quad (102)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yaparak A'nin Pade[3,3] beklenen değeri elde edildi.

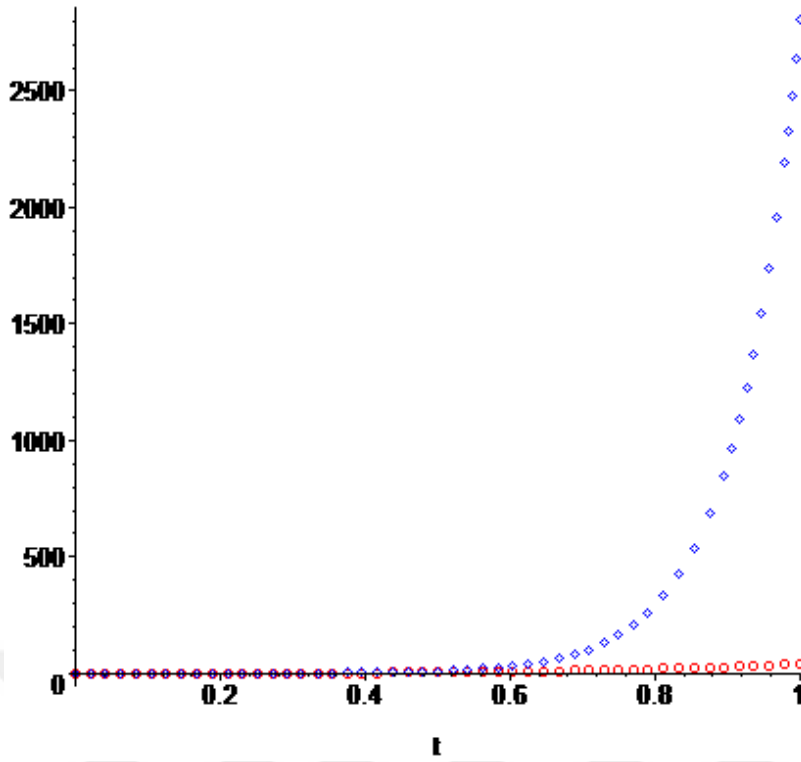
$$\begin{aligned}
 M = & 0.7335091194 e^{(-3.265178634-4.637724460 I) t} \\
 & + 0.4760653094 I e^{(-3.265178634-4.637724460 I) t} \\
 & + 0.7335091194 e^{(-3.265178634+4.637724460 I) t} \\
 & - 0.4760653094 I e^{(-3.265178634+4.637724460 I) t} \\
 & + 0.3298176116 e^{11.35042929 t}
 \end{aligned} \tag{103}$$

Bu hesaplamamıza göre A'nin Pade[3,3] beklenen değeri aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 15. A'nin Pade[3,3] beklenen değeri

A'nin Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değerinin grafikleri birleştirildi



Şekil 16. A'nın Pade[3,3] beklenen değeri ile DTM beklenen değeri

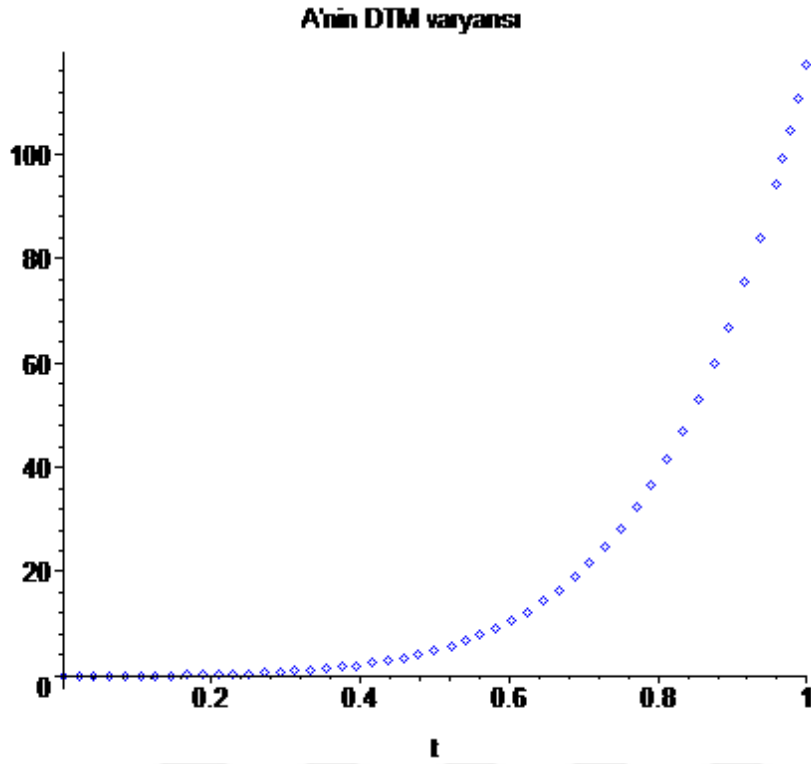
Hasta kişileri gösteren $A(t)$ için varyans değerini hesaplandı.

$$\begin{aligned}
 V(A(t)) = & (0.75 t^2)^2 Var(\mu^2) + (0.25 t^3)^2 Var(\mu^3) + (1.5 t)^2 Var(\mu) \\
 & + (0.75 t^2)^2 Var(\beta) Var(\delta) + (0.625 t^3)^2 Var(\beta^2) Var(\delta) \\
 & + (0.5 t^3)^2 Var(\beta) Var(\delta^2) + (1.5 t^3)^2 Var(\mu^2) Var(\delta) \\
 & + (1.5 t^3)^2 Var(\mu) Var(\delta^2) + (3 t^2)^2 Var(\mu) Var(\delta) \\
 & + (0.75 t^3)^2 Var(\mu^2) Var(d) + (0.5 t^3)^2 Var(d^2) Var(\delta) \\
 & + (1.5 t^2)^2 Var(\mu) Var(d) + (1.5 t^2)^2 Var(d) Var(\delta) \\
 & + (0.75 t^3)^2 Var(\mu) Var(d^2) + (0.5 t^3)^2 Var(\mu) Var(\beta) Var(\delta) \\
 & + (1.5 t^3)^2 Var(\mu) Var(d) Var(\delta) \\
 & + (0.25 t^3)^2 Var(d) Var(\beta) Var(\delta) + (3 t)^2 Var(\delta) \\
 & + (1.5 t^2)^2 Var(\delta^2) + (0.5 t^3)^2 Var(\delta^3) + (1.5 t)^2 Var(d) \\
 & + (0.75 t^2)^2 Var(d^2) + (0.25 t^3)^2 Var(d^3) \\
 & + (0.5 t^3)^2 Var(d) Var(\delta^2)
 \end{aligned} \tag{104}$$

Düzgün dağılıma göre hesaplama yapılırken aşağıdaki denklem elde edildi.

$$V(A(t)) = 41.8625t^4 + 70.85787038t^6 + 4.5t^2 \tag{105}$$

Buna göre A'nin DTM Varyans grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 17. A'nin DTM Varyansı

Varyans değerimiz için laplace dönüşümü yapıldı.

$$B = \frac{1004.7}{s^5} + \frac{51017.66667}{s^7} + \frac{9}{s^3} \quad (106)$$

Denklemimize $s = \frac{1}{t}$ dönüşümü uygulandı.

$$C = 1004.7t^5 + 51017.66667t^7 + 9t^3 \quad (107)$$

[3,3] Pade uygulandı.

$$K = \frac{9t^3}{0.9999999996 - 111.6333333t^2} \quad (108)$$

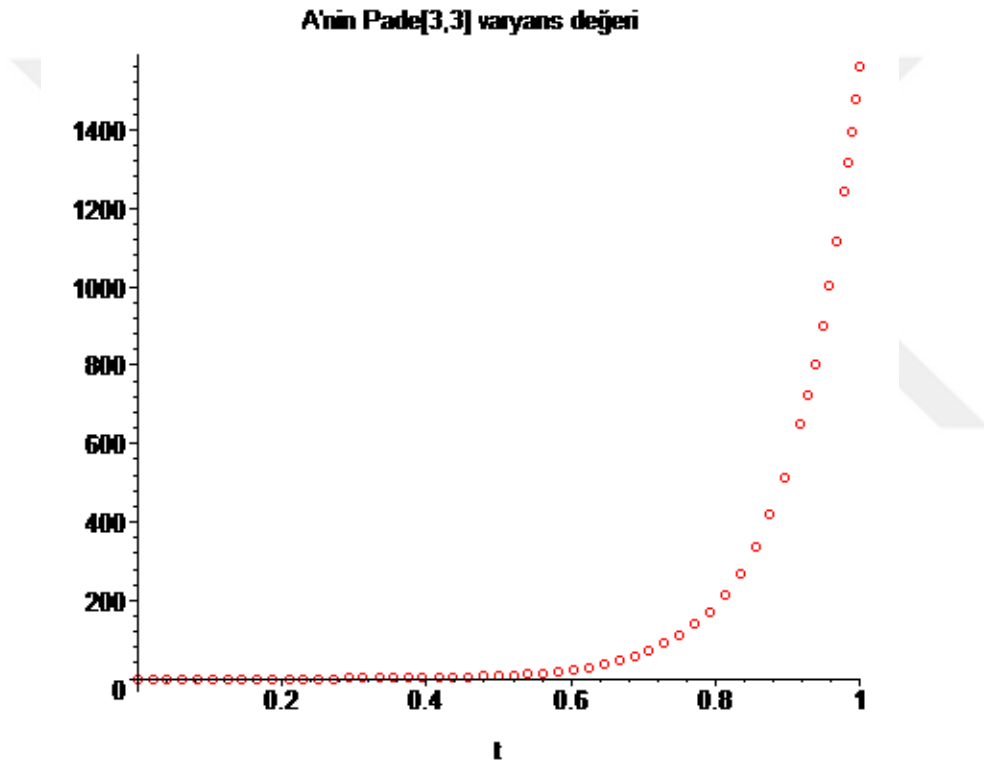
Denklemimize $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü uygulandı.

$$L = \frac{0.75 * 10^{10}}{s(0.8333333333 10^9 s^2 - 0.9302777775 10^{11})} \quad (109)$$

Son olarak ters laplace dönüşümü yapılarak A'nin Pade[3,3] varyans değeri elde edildi.

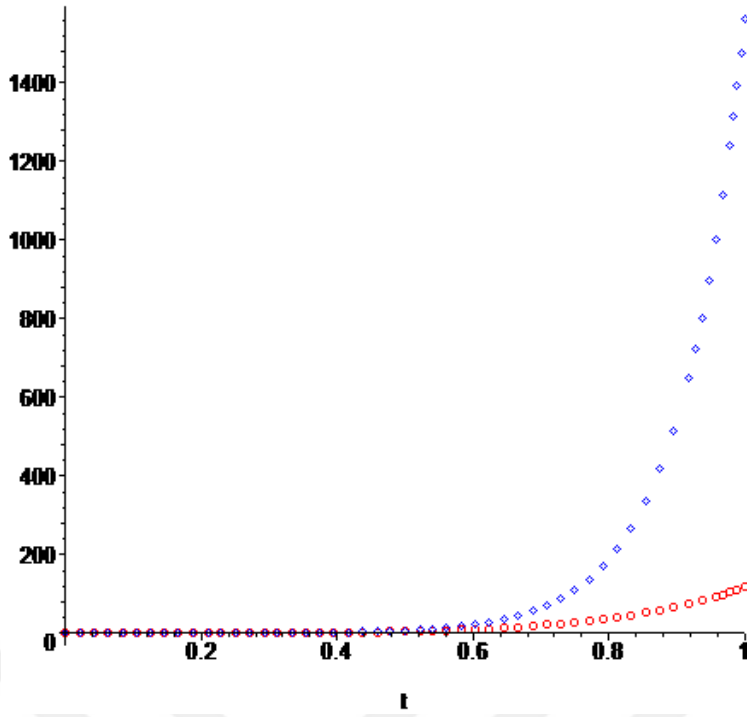
$$M = -0.08062108094 + 0.08062108094 \cosh(10.56566767t) \quad (110)$$

Bu hesaplamamıza göre A'nın Pade[3,3] varyans değeri aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 18. A'nın Pade[3,3] varyans değeri

I'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değerinin grafikleri birleştirildi.



Şekil 19. A'nin Pade[3,3] varyans değeri ile DTM varyans değeri

2.2. Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İle HIV/AIDS Modelinin Yaklaşık Çözümü

İntegral denklemleri, adi ve kısmi diferansiyelleri ve diferansiyel sistemleri çözmek için kullanılan diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) yaklaşık analitik bir yöntemdir. Bu yöntem ile kolay hesaplanabilen bileşenlerle yakınsak seri çözüm elde edilmektedir (Khatib, 2016). İlk olarak Zhou tarafından ortaya atılan bu yöntemin ilk kullanım yeri elektrik devrelerinde hem doğrusal hem de doğrusal olmayan başlangıç değer problemleriydi. Bu yöntem diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için yinelemeli bir prosedürdür (Rashidi, 2009).

DTM yöntemi ile aslında kesik serili bir çözüm elde ederiz. Bu çözüm küçük bir bölgede gerçek çözüme iyi bir yaklaşım sağlıyorsa da problemin gerçek davranışlarını sergilemekte yetersiz kalmaktadır. Bu eksikliğin üstesinden gelebilmek için daha uzun aralıklarda iyi sonuç veren Çok Adımlı DTM yöntemi iyi bir alternatif olmaktadır. Ancak elbette ki bu yöntemin de bazı dezavantajları olabilmektedir.

2.2.1. DTM İle Çözüm

n'inci mertebeden adi bir diferansiyel denklemin en genel halini düşünelim.

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{başlangıç koşulları,} \quad y^{(k)}(0) = d_k, k = 0, \dots, n - 1 \quad (111)$$

olsun.

DTM yönteminin diferansiyel denklem sistemlerinde nasıl uygulandığını görmek için aşağıdaki adımlar tatbik edilebilir. $y(t)$; D bölgesinde bir analitik ve $t = t_0$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $y(t)$; merkezi t_0 'da bulunan bir kuvvet serisi ile temsil edilir. Böylece bir $y(t)$ fonksiyonunun k 'ıncı türevinin diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibidir (Rashidi and Erfani, 2011).

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \forall t \in D \quad (112)$$

Yukarıdaki ifadede $y(t)$ orijinal fonksiyon $Y(k)$ ise dönüştürülmüş fonksiyondur. $Y(k)$ 'nın ters dönüşümü ise aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (t - t_0)^k, \quad \forall t \in D \quad (113)$$

Verilen dönüşüm ve ters dönüşüm denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \quad \forall t \in D \quad (114)$$

Böylece diferansiyel dönüşüm yönteminin Taylor Serisi açılımından türetildiği anlaşılmaktadır. Gerçek uygulamalarda, $y(t)$ fonksiyonu sonlu bir seri ile ifade edilir:

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k) (t - t_0)^k, \quad \forall t \in D \quad (115)$$

Eşitlikten anlaşılaçağı üzere $\sum_{k=N+1}^{\infty} Y(k)(t - t_0)^k$ ihmal edilebilecek kadar küçüktür (Ertürk vd., 2008).

2.2.2. MsDTM ile Çözüm

(117)-(118) başlangıç değer probleminin çözümü $[0, T]$ aralığı üzerinde elde edilir. DTM'nin gerçek uygulamalarında, başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü sonlu serilerle ifade edilebilir,

$$y(t) = \sum_{k=0}^N b_k t^k, \quad t \in [0, T] \quad (116)$$

$[0, T]$ aralığının M eşit adım boyutu $h = T/M$ $t_i = ih$ düğümleri kullanılarak $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, M$ alt aralığa bölündüğünü varsayalım. İlk olarak, DTM denkleme uygulanır. $[0, t_1]$ aralığı boyunca aşağıdaki yaklaşık çözümü elde edilir.

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^N b_{1k} t^k, \quad t \in [0, t_1] \quad (117)$$

$y_1^{(k)}(0) = d_k$ başlangıç koşullarını kullanarak $i \geq 2$ için, her $[t_{i-1}, t_i]$ alt aralığında, $y_i^{(k)}(t_{i-1}) = y_{i-1}^{(k)}(t_{i-1})$ koşullarını kullanarak (116) denkleme DTM uygulayalım. $y(t)$ çözümü için $y_i(t)$ de $i = 1, 2, \dots, M$ yaklaşık çözümleri elde edilir (Gökdoğan vd., 2012)

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^N b_{ik} (t - t_{i-1})^k, \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (118)$$

Yukarıdaki işlemlerin sonucu olarak MsDTM ile aşağıdaki çözüm bulunur;

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [0, t_1] \\ y_2(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ y_M(t), & t \in [t_{M-1}, t_M] \end{cases} \quad (119)$$

(117) sistemine MsDTM uygulanırsa,

$$S_i(k+1) = \frac{(\mu \text{Dirac}(k) - \beta \sum_{r=0}^k S(r)I(k-r) - \mu S(k))}{k+1}, \quad (120)$$

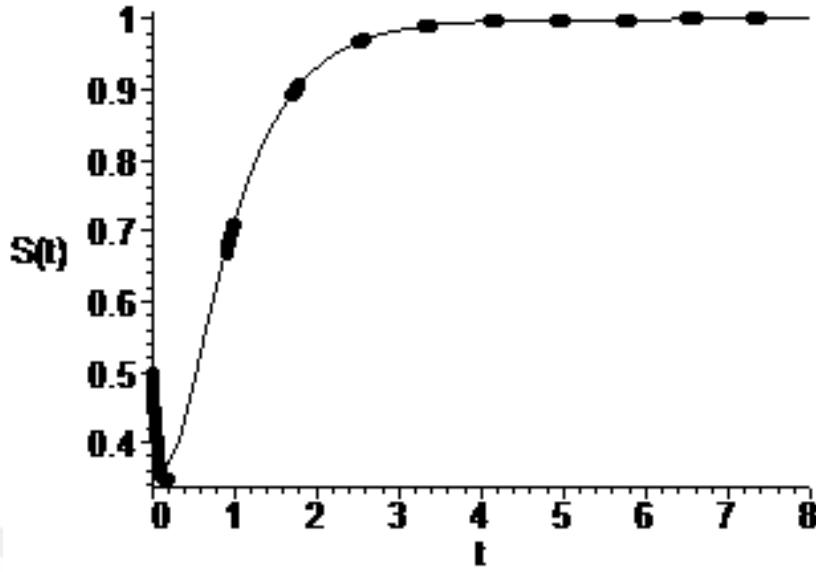
$$I_i(k+1) = \frac{(\beta \sum_{r=0}^k S(r)I(k-r) - \mu I(k) - \delta I(k))}{k+1}, \quad (121)$$

$$A_i(k+1) = \frac{(\delta I(k) - (\mu + d)A(k))}{k+1}, \quad (122)$$

$$S(0) = S_0, \quad S_i(0) = S_{i-1}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, K \leq M$$

$$I(0) = I_0, \quad I_i(0) = I_{i-1}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, K \leq M$$

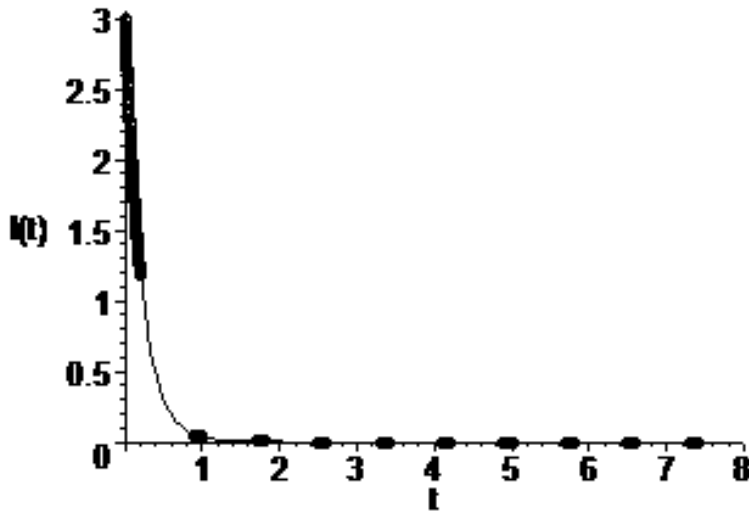
$$A(0) = S_0, \quad A_i(0) = A_{i-1}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, K \leq M$$



Şekil 20. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $S(t)$ virüse karşı duyarlı kişilerin çözüm davranışları

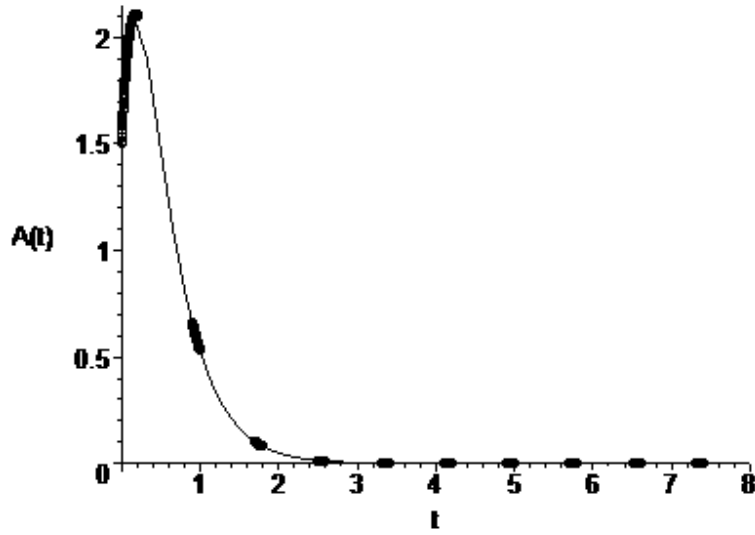
Gerçek çözüme çok yakın çözümler elde edilen literatürde çok sık kullanılan RK4 yöntemi ile MsDTM'den elde edilen çözümlerin uzun süreli davranışlarının uyumlu olduğu Şekil 20'de gözlenmektedir.

$S(t)$ Virüse karşı duyarlı bireylerin sayısı başlangıçta hızla azalır en küçük değeri aldıktan sonra hızla artarak $t=2$ 'den sonra denge durumuna gelmektedir.



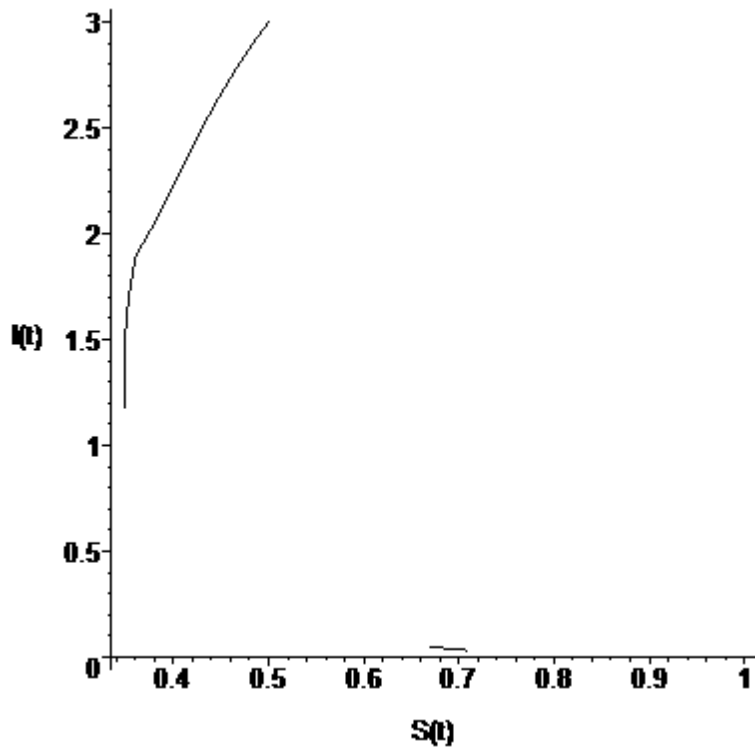
Şekil 21. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $I(t)$ virüs enfekte olmuş kişilerin çözüm davranışları.

Virüse enfekte olmuş kişilerin sayısı başlangıçta hızla artıyor ve $t=1$ 'den sonra azalarak denge durumuna gelmektedir.



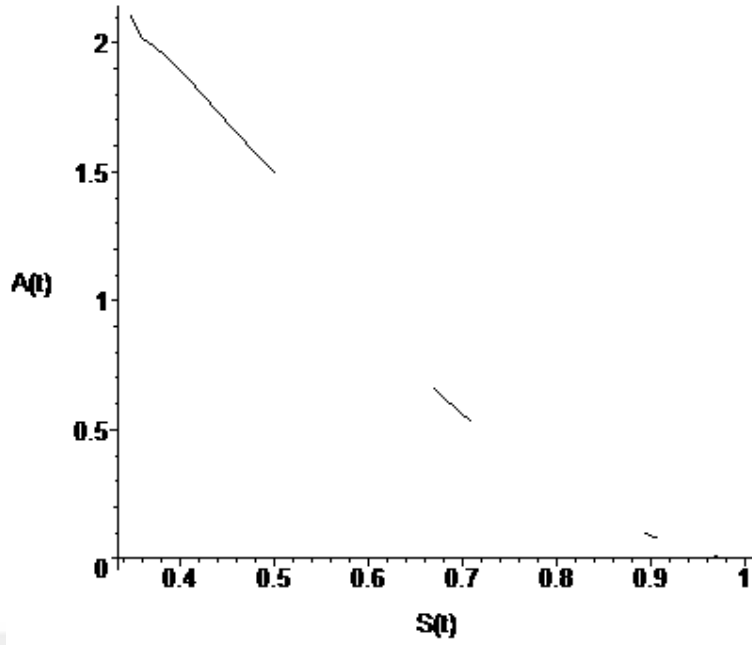
Şekil 22. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $A(t)$ hasta olmuş kişilerin çözüm davranışları.

Hasta bireylerin sayısı başlangıçta artıp $t=1$ 'de maksimum değere ulaştıktan sonra azalarak $t=3$ 'ten sonra denge durumuna gelmektedir.



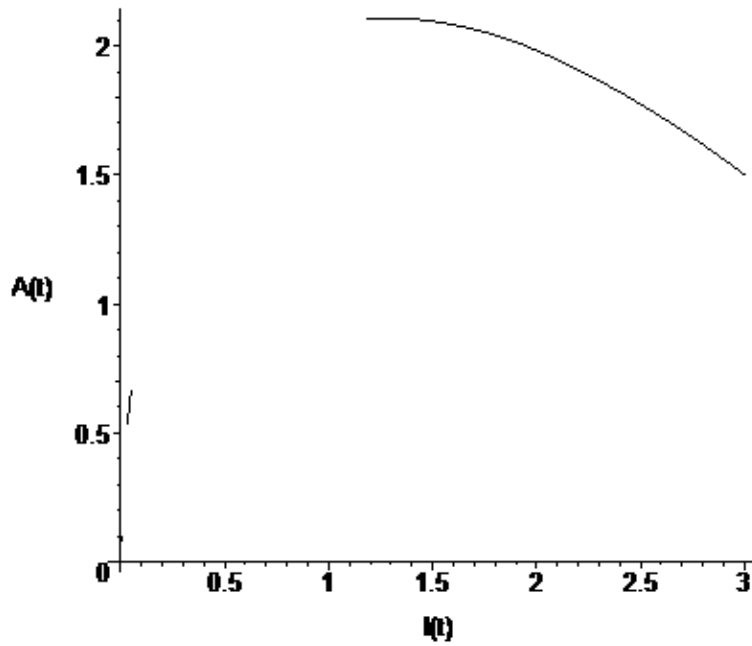
Şekil 23. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $I(t) - S(t)$ Faz Portreleri.

Yukarıda elde edilen çözümler özgün olduğundan gidiş yolları birbiri ile kesişmemektedir.



Şekil 24. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $A(t) - S(t)$ Faz Portreleri.

Yukarıda elde ettiğimiz çözümlerin uzun süreli davranışları kararlı olduğundan kapalı yörüngeler oluşmamaktadır.



Şekil 25. $h = 0.1$ MsDTM ve $h = 0.01$ RK4'den elde edilen $A(t) - I(t)$ Faz Portreleri.

$A(t)$ ve $I(t)$ çözümleri incelendiğinde çözümlerin belli bir değerden sonra denge durumuna geçtiği gözlemlendiğinden faz portrelerinin de birbirini kesmeyen yörünge oluşturduğu görülmektedir.

2.3. Kesirli Mertebeden Zaman Türevli (Rastgele) HIV/AIDS Modeli

Lineer olmayan HIV/AIDS modelinin deterministik formu

$$D_t^{q_1} S(t) = \mu - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \quad (123)$$

$$D_t^{q_2} I(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \delta I(t) \quad (124)$$

$$D_t^{q_3} A(t) = \delta I(t) - \mu A(t) - dA(t) \quad (125)$$

$$S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, A(t_0) = A_0 \quad (126)$$

şeklindedir.

$$S(k+1) = \frac{\Gamma(q_1(k+1))(\mu\delta(k) - \beta\sum(S(r)I(k-r), r=0..k) - \mu S(k))}{\Gamma(q_1(k+1)+1)} \quad (127)$$

$$I(k+1) = \frac{\Gamma(q_2(k+1))(\beta\sum(S(r)I(k-r), r=0..k) - (\mu + \delta)I(k))}{\Gamma(q_2(k+1)+1)} \quad (128)$$

$$A(k+1) = \frac{\Gamma(q_3(k+1))(\delta I(k) - (\mu + d)A(k))}{\Gamma(q_3(k+1)+1)} \quad (129)$$

Modelimizin $q_1 = \frac{9}{10}$, $q_2 = \frac{9}{10}$, $q_3 = \frac{9}{10}$ olmak üzere kesirli mertebeden türevi

$$\begin{aligned} S(t) = & S_0 + 8.318033072t^{\frac{9}{10}} - 1.559631201t^{\frac{9}{10}}S_0I_0 \\ & - 2.079508268t^{\frac{9}{10}}S_0 - 4.954320892t^{\frac{9}{5}} - 1.342089092t^{\frac{9}{5}}(S_0)^2I_0 \\ & + 8.947260614t^{\frac{9}{5}}S_0I_0 - 7.157808491t^{\frac{9}{5}}I_0 \\ & + 1.342089092t^{\frac{9}{5}}S_0(I_0)^2 \\ & + 2.385936164t^{\frac{9}{5}}S_0 \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} I(t) = & I_0 + 1.559631201t^{\frac{9}{10}}S_0I_0 - 6.238524804t^{\frac{9}{10}}I_0 \\ & + 1.342089092t^{\frac{9}{5}}(S_0)^2I_0 - 12.52616486t^{\frac{9}{5}}S_0I_0 \\ & + 28.63123396t^{\frac{9}{5}}I_0 - 1.342089092t^{\frac{9}{5}}S_0(I_0)^2 \end{aligned} \quad (131)$$

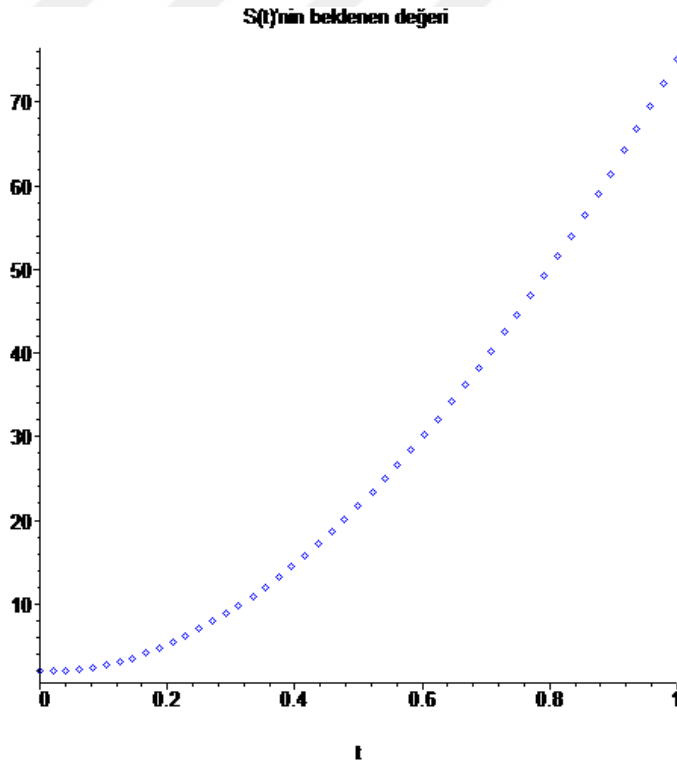
$$A(t) = A_0 + 4.159016536 t^{\frac{9}{10}} I_0 - 3.119262402 t^{\frac{9}{10}} A_0 + 3.578904245 t^{\frac{9}{5}} S_0 I_0 - 21.47342548 t^{\frac{9}{5}} I_0 + 5.368356368 t^{\frac{9}{5}} A_0 \quad (132)$$

şeklindedir.

Modelimizde S_0 üstel dağılım, I_0 normal dağılım ve A_0 beta dağılımı olmak üzere üç farklı dağılım kullanılmıştır. Bu dağılımları yaparken üstel dağılımda $\lambda = 2$; *normal* dağılımda $\mu = 3$ ve $\sigma = 3$; beta dağılımda ise $\alpha = 3$ ve $\beta = 3$ olarak alındı. Bu dağılımlara göre beklenen değerler bulunarak hesaplandı.

$$\begin{aligned} E(S(t)) = & E(S_0) + 8.318033072 t^{\frac{9}{10}} - 1.559631201 t^{\frac{9}{10}} E(S_0) E(I_0) \\ & 2.079508268 t^{\frac{9}{10}} E(S_0) - 4.954320892 t^{\frac{9}{5}} - 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} E((S_0)^2) E(I_0) + \\ & 8.947260614 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) E(I_0) - 7.157808491 t^{\frac{9}{5}} E(I_0) \\ & + 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) E((I_0)^2) + 2.385936164 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) \end{aligned} \quad (133)$$

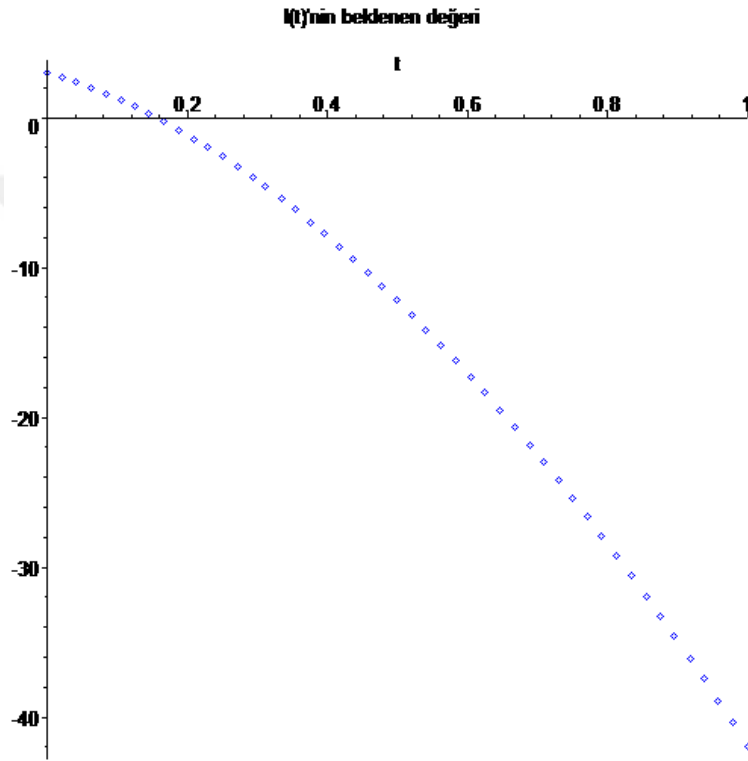
$$E(S(t)) = 2 - 5.198770670 t^{\frac{9}{10}} + 78.32976332 t^{\frac{9}{5}} \quad (134)$$



Şekil 26. Virüse karşı duyarlı bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi

$$\begin{aligned}
E(I(t)) = & E(I_0) + 1.559631201 t^{\frac{9}{10}} E(S_0) E(I_0) \\
& - 6.238524804 t^{\frac{9}{10}} E(I_0) + 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} E(S_0)^2 E(I_0) \\
& - 12.52616486 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) E(I_0) + 28.63123396 t^{\frac{9}{5}} E(I_0) \\
& - 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) E((I_0)^2)
\end{aligned} \tag{135}$$

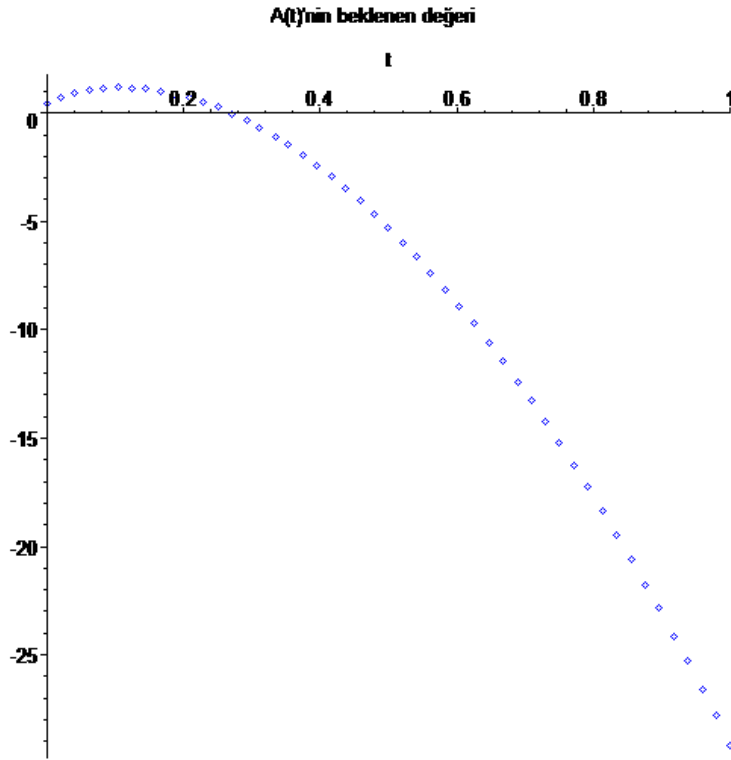
$$E(I(t)) = 3 - 9.357787204 t^{\frac{9}{10}} - 35.56536095 t^{\frac{9}{5}} \tag{136}$$



Şekil 27. Enfekte bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi.

$$\begin{aligned}
E(A(t)) = & E(A_0) + 4.159016536 t^{\frac{9}{10}} E(I_0) - 3.119262402 t^{\frac{9}{10}} E(A_0) \\
& + 3.578904245 t^{\frac{9}{5}} E(S_0) E(I_0) - 21.47342548 t^{\frac{9}{5}} E(I_0) \\
& + 5.368356368 t^{\frac{9}{5}} E(A_0)
\end{aligned} \tag{137}$$

$$E(A(t)) = \frac{2}{5} + 11.22934465 t^{\frac{9}{10}} - 40.79950842 t^{\frac{9}{5}} \tag{138}$$



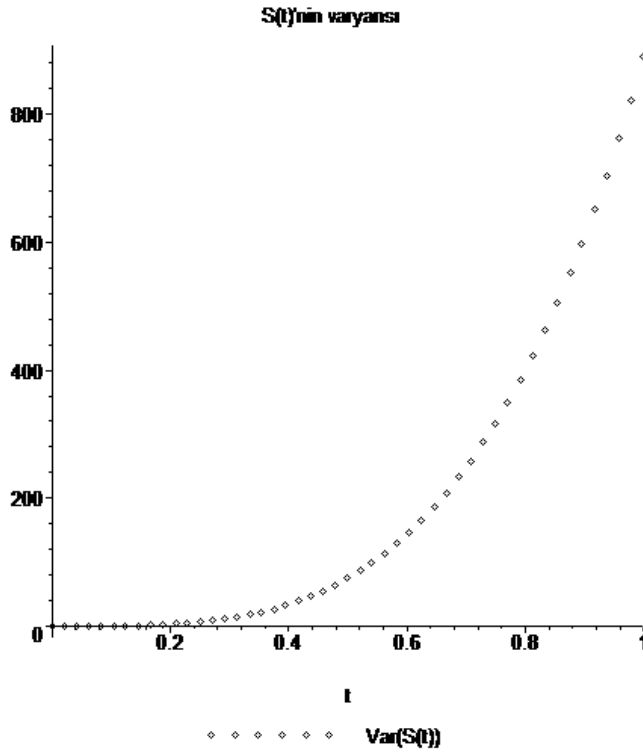
Şekil 28. Hasta bireylerin beklenen değerinin zamana bağlı değişimi

Modelimizde yukarıda verilen değerlere ve dağılımlara göre varyans değerleri bulunarak hesaplandı.

$$\begin{aligned}
 Var(S(t)) = & Var(S_0 + 8.318033072t^{\frac{9}{10}} - 1.559631201t^{\frac{9}{10}}S_0I_0 \\
 & - 2.079508268t^{\frac{9}{10}}S_0 - 4.954320892t^{\frac{9}{5}} - 1.342089092t^{\frac{9}{5}}(S_0)^2I_0 \\
 & + 8.947260614t^{\frac{9}{5}}S_0I_0 - 7.157808491t^{\frac{9}{5}}I_0 \\
 & + 1.342089092t^{\frac{9}{5}}S_0(I_0)^2 + 2.385936164t^{\frac{9}{5}}S_0) \quad (139)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(S(t)) = & Var(S_0) + \left(1.559631201t^{\frac{9}{10}}\right)^2 Var(S_0)Var(I_0) \\
 & + (2.079508268t^{\frac{9}{10}})^2 Var(S_0) \\
 & + (1.342089092t^{\frac{9}{5}})^2 Var((S_0)^2) Var(I_0) \\
 & + (8.947260614t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) Var(I_0) + (7.157808491t^{\frac{9}{5}})^2 Var(I_0) \\
 & + (1.342089092t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) Var((I_0)^2) \\
 & + (2.385936164t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) \quad (140)
 \end{aligned}$$

$$Var(S(t)) = \frac{1}{4} + 6.554099996t^{\frac{9}{5}} + 881.7612031t^{\frac{18}{5}} \quad (141)$$

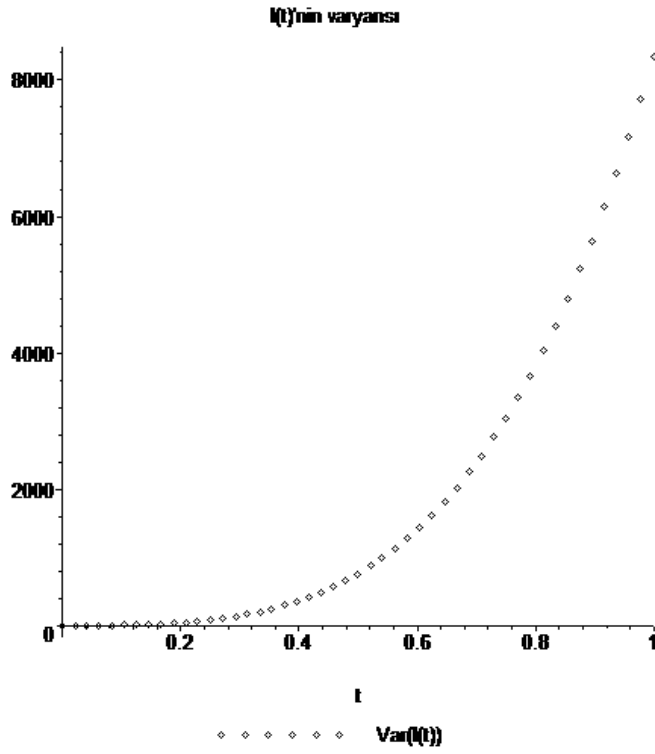


Şekil 29. Virüse karşı duyarlı bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi

$$\begin{aligned} Var(I(t)) = & Var\left(I_0 + 1.559631201 t^{\frac{9}{10}} S_0 I_0 - 6.238524804 t^{\frac{9}{10}} I_0\right. \\ & + 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} (S_0)^2 I_0 - 12.52616486 t^{\frac{9}{5}} S_0 I_0 \\ & \left.+ 28.63123396 t^{\frac{9}{5}} I_0 - 1.342089092 t^{\frac{9}{5}} S_0 (I_0)^2\right) \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} Var(I(t)) = & Var(I_0) + (1.559631201 t^{\frac{9}{10}})^2 Var(S_0) Var(I_0) \\ & + (6.238524804 t^{\frac{9}{10}})^2 Var(I_0) \\ & + (1.342089092 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0)^2 Var(I_0) \\ & + (12.52616486 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) Var(I_0) \\ & + (28.63123396 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(I_0) \\ & + (1.342089092 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) Var((I_0)^2) \end{aligned} \quad (143)$$

$$Var(I(t)) = 9 + 352.0970627t^{\frac{9}{5}} + 7969.873553t^{\frac{18}{5}} \quad (144)$$

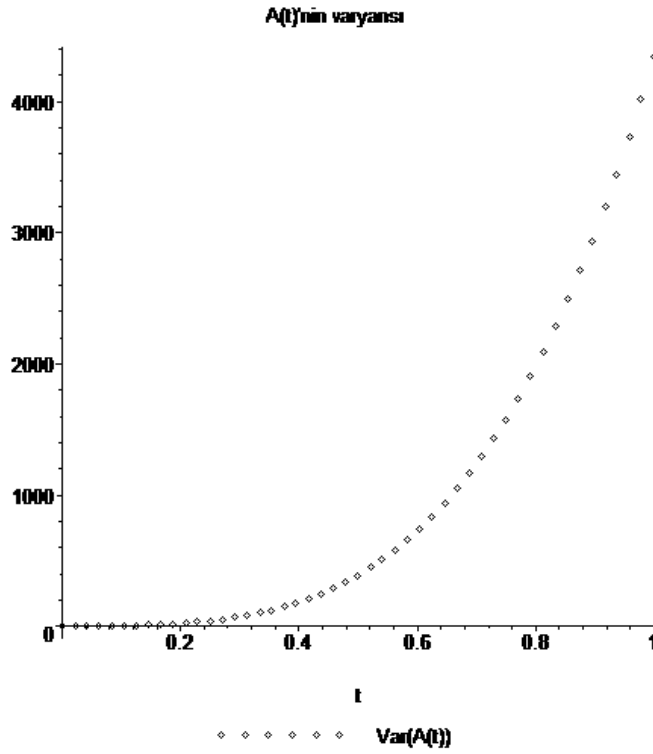


Şekil 30. Enfekte bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi

$$\begin{aligned} Var(A(t)) = & Var(A_0 + 4.159016536 t^{\frac{9}{10}} I_0 - 3.119262402 t^{\frac{9}{10}} A_0 \\ & + 3.578904245 t^{\frac{9}{5}} S_0 I_0 - 21.47342548 t^{\frac{9}{5}} I_0 + 5.368356368 t^{\frac{9}{5}} A_0) \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned} Var(A(t)) = & Var(A_0) + \left(4.159016536 t^{\frac{9}{10}}\right)^2 Var(I_0) \\ & + (3.119262402 t^{\frac{9}{10}})^2 Var(A_0) \\ & + (3.578904245 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(S_0) Var(I_0) \\ & + (21.47342548 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(I_0) + (5.368356368 t^{\frac{9}{5}})^2 Var(A_0) \end{aligned} \quad (146)$$

$$Var(A(t)) = \frac{1}{25} + 156.0659589 t^{\frac{9}{5}} + 4179.944036 t^{\frac{18}{5}} \quad (147)$$



Şekil 31. Hasta bireylerin varyans değerinin zamana bağlı değişimi

2.4. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modelinin Çözüm Davranışları

Kat sayıları rastgele olan kesirli mertebeden HIV/AIDS modelinin çözüm davranışının VIM yöntemi ile çözümü için aşağıdaki adımlar uygulanır:

$$S'(t) = \mu - \beta SI - \mu S \quad (148)$$

$$I'(t) = \beta SI - \mu I - \delta I \quad (149)$$

$$A'(t) = \delta I - \mu A - dA \quad (150)$$

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) + \int_0^t \lambda [S'_n(s) - \mu + \beta S_n^2(s) I_n^2(s) + \mu S_n^2(s)] ds \quad (151)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) + \int_0^t \lambda [I'_n(s) - \beta S_n^2(s) I_n^2(s) + \mu I_n^2(s) + \delta I_n^2(s)] ds \quad (152)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) + \int_0^t \lambda [A'_n(s) - \delta I_n(s) + (\mu + d)A_n(s)] ds \quad (153)$$

$$\delta S_{n+1}(t) = \delta S_n(t) + \delta \int_0^t \lambda [S'_n(s) - \mu + \beta S_n^2(s) I_n^2(s) + \mu S_n^2(s)] ds \quad (154)$$

$$\delta I_{n+1}(t) = \delta I_n(t) + \delta \int_0^t \lambda [I'_n(s) - \beta S_n^2(s) I_n^2(s) + \mu I_n^2(s) + \delta I_n^2(s)] ds \quad (155)$$

$$\delta A_{n+1}(t) = \delta A_n(t) + \delta \int_0^t \lambda [A'_n(s) - \delta I_n(s) + (\mu + d) A_n(s)] ds \quad (156)$$

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) + I^{q_1} \left[\lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu S_n(\tau)) \right] \right] d\tau \quad (157)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) + I^{q_2} \left[\lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] \right] d\tau \quad (158)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) + I^{q_3} \left[\lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d) A_n(\tau)) \right] \right] d\tau \quad (159)$$

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) + \frac{1}{\Gamma(q_1)} \int_0^t (t - \tau)^{q_1-1} \lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu S_n(\tau)) \right] d\tau \quad (160)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) + \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_0^t (t - \tau)^{q_2-1} \lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] d\tau \quad (161)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) + \frac{1}{\Gamma(q_3)} \int_0^t (t - \tau)^{q_3-1} \lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d) A_n(\tau)) \right] d\tau \quad (162)$$

Yukarıda ki ifadeler elde edilir. Düzeltme fonksiyonun da ise

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) + \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (163)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (164)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d) A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (165)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, A(0) = A_0, \delta Y_n^2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$\delta S_{n+1}(t) = \delta S_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \delta \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n^2(\tau) I_n^2(\tau) - \mu S_n^2(\tau)) \right] (d\tau)^{q_1} \quad (166)$$

$$= \delta S_n(t) + \lambda_1 \delta S_n(\tau) |_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_1} \lambda_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} \delta S_n(\tau) (d\tau)^{q_1} \quad (167)$$

$$\delta S_n(t) \text{ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, } (\tau) |_{\tau=t} = 0, \frac{d^{q_1} \lambda_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} = 0, \lambda_1(\tau) = -1$$

$$\delta I_{n+1}(t) = \delta I_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \delta \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n^2(\tau) I_n^2(\tau) - \mu I_n^2(\tau) - \delta I_n^2(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (168)$$

$$= \delta I_n(t) + \lambda_2 \delta I_n(\tau) |_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_2} \lambda_2(\tau)}{d\tau^{q_2}} \delta I_n(\tau) d\tau^{q_2} \quad (169)$$

$\delta I_n(t)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, $1 + \lambda_2(\tau)|_{\tau=t} = 0$, $\frac{d^{q_2}\lambda_2(\tau)}{d\tau^{q_2}} = 0$, $\lambda_2(\tau) = -1$

$$\delta A_{n+1}(t) = \delta A_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \delta \int_0^t \lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n^2(\tau) - (\mu + d)A_n^2(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (170)$$

$$= \delta A_n(t) + \lambda_3 \delta A_n(\tau)|_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_3} \lambda_3(\tau)}{d\tau^{q_3}} \delta A_n(\tau) d\tau^{q_3} \quad (171)$$

$\delta A_n(t)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, $1 + \lambda_3(\tau)|_{\tau=t} = 0$, $\frac{d^{q_3}\lambda_3(\tau)}{d\tau^{q_3}} = 0$, $\lambda_3(\tau) = -1$

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n(\tau)I_n(\tau) - \mu S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (172)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n(\tau)I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (173)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d)A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (174)$$

$S_0(0) = S_0 = 0.5$, $I_0(0) = I_0 = 3$, $A_0(0) = A_0 = 1.5$
 $n = 0$ için,

$$S_1(t) = S_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_0(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_0(\tau)I_0(\tau) - \mu S_0(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (175)$$

$$S_1(t) = 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_0(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_0(\tau) I_0(\tau) - \mu S_0(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (176)$$

$$S_1(t) = 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\beta + 0.5\mu] t^{q_1} \quad (177)$$

$$S_2(t) = S_1(t)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_1(\tau) I_1(\tau) - \mu S_1(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (178)$$

$$= 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\beta + 0.5\mu] t^{q_1} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_1(\tau) I_1(\tau) - \mu S_1(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (179)$$

$$I_1(t) = I_0(t)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_0(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_0(\tau) I_0(\tau) - \mu I_0(\tau) - \delta I_0(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (180)$$

$$I_1(t) =$$

$$3 - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_0(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_0(\tau) I_0(\tau) - \mu I_0(\tau) - \delta I_0(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (181)$$

$$I_1(t) = 3 - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} [-\beta 1.5 + 3\mu + 3\delta] t^{q_2} \quad (182)$$

$$A_1(t) = A_0(t)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_0(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_0(\tau) - (\mu + d) A_0(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (183)$$

$$A_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_0(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_0(\tau) - (\mu + d) A_0(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (184)$$

$$A_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} [-3\delta + 1.5\mu + 1.5d] t^{q_3} \quad (185)$$

$$\begin{aligned} S_1(t) = & 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\beta + 0.5\mu] t^\alpha \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t [-\mu + 1.5\beta + 0.5\mu] - \mu + \beta [0.5 \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\mu + 0.5t] t^{q_1} [3 \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} [1.5\beta + 3\mu + 3\sigma] t^{q_2} \\ & - \mu \left[0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\mu + 0.5t] t^{q_1} \right] d\tau^{q_1} t^{q_1+q_2} \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} S_2(t) = & S_1(t) - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [(-1.5\beta + 0.5\mu) t^{q_1}] - \frac{\beta}{\Gamma(q_1 + 1)} [0.5 \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [-\mu + 1.5\beta + 0.5\mu]] [3 \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} [1.5\beta + 3\mu + 3\sigma] t^{2q_1+q_2} \cdot \frac{\Gamma(q_1 + q_2 + 1) \cdot \Gamma(q_1 + 1)}{\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} \end{aligned} \quad (187)$$

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) = & S_n(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} I_{n+1}(t) = & I_n(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} A_{n+1}(t) = & A_n(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d) A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \end{aligned} \quad (190)$$

1. Analiz Parametreler Rastgele Seçildi. $\mu, \beta, \delta, d \in N(a, \sigma^2)$

a) $n=0$ için $S_0(t) = 0.5$

$$S_1(t) = 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} 0.5}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta \cdot (0.5) \cdot 3 - \mu \cdot (0.5)) \right] d\tau^{q_1} \quad (191)$$

$$S_1(t) = 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{0.5\tau^{-q_1}}{\Gamma(1 - q_1)} - 0.5\mu + 1.5\beta \right] d\tau^{q_1} \quad (192)$$

$$S_1(t) = 0.5 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \left[\frac{0.5}{\Gamma(1 - q_1)} \cdot \frac{\Gamma(1 - q_1)\Gamma(q_1 + 1)}{\Gamma(1)} \tau^0 + \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)\Gamma(q_1 + 1)}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \right] \quad (193)$$

$$S_1(t) = 0.5 - 0.5 + \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} \quad (194)$$

$$S_1(t) = \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} \quad (195)$$

n=1 için $S_1(t) = \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1}$ olmak üzere;

$$S_2(t) = S_1(t) - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (\mu - \beta S_1(\tau) I_1(\tau) - \mu S_1(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (196)$$

$$S_2(t) = \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} (1.5\beta - 0.5\mu)}{d\tau^{q_1} \Gamma(q_1 + 1)} \tau^{q_1} - (\mu - \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} \tau^{q_1} (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} \tau^{q_1} \right] d\tau^{q_1} \quad (197)$$

$$\begin{aligned}
S_2(t) = & \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} \\
& - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(q_1 + 1)} \Gamma(q_1 + 1) \right. \\
& - \left[\mu - \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)} \tau^{q_1+q_2} \right] \\
& \left. - \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} \tau^{q_1} \right] (d\tau)^{q_1}
\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
S_2(t) = & \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} [(1.5\beta - 0.5\mu). t^{q_1} \\
& - \mu t^{q_1} \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)} \cdot \frac{\Gamma(q_1 + q_2 + 1)\Gamma(q_1 + 1)}{\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1+q_2} \\
& + \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} \cdot \frac{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_1)}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1}]
\end{aligned} \tag{199}$$

$$\begin{aligned}
S_2(t) = & \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} t^{q_1} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} (1.5\beta - 0.5\mu). t^{q_1} + \frac{\mu}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
& + \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))\Gamma(q_1 + q_2 + 1)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1+q_2} \\
& + \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1}
\end{aligned} \tag{200}$$

$$\begin{aligned}
S_2(t) = & \frac{\mu}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
& + \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))\Gamma(q_1 + q_2 + 1)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1+q_2} \\
& - \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1}
\end{aligned} \tag{201}$$

b) n=0 için $I_0(t) = 3$

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(t) = & I_n(t) \\
& - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} \right. \\
& \left. - (\beta S_n(\tau) I_n(\tau) - \mu I_n(\tau) - \delta I_n(\tau)) \right] (d\tau)^{q_2}
\end{aligned} \tag{202}$$

$$I_1(t) = I_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_0(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_0(\tau) I_n(\tau) - \mu I_0(\tau) - \delta I_0(\tau)) \right] (d\tau)^{q_2} \quad (203)$$

$$I_1(t) = 3 - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} 3}{d\tau^{q_2}} - (\beta 1.5 - \mu 3 - \delta 3) \right] d\tau^{q_2} \quad (204)$$

$$I_1(t) = 3 - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{\tau^{-q_2} 3}{\Gamma(1 - q_2)} + (3(\mu + \delta) - \beta 1.5) \right] (d\tau)^{q_2} \quad (205)$$

$$I_1(t) = 3 - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \left[\frac{3}{\Gamma(1 - q_2)} \cdot \frac{\Gamma(1 - q_2) \Gamma(1 + q_2)}{\Gamma(1)} \tau^0 + (3(\mu + \delta) - 1.5\beta) \cdot \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \right] \quad (206)$$

$$I_1(t) = 3 - 3 + (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \quad (207)$$

$$I_1(t) = (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \quad (208)$$

$$n=1 \text{ için } I_1(t) = (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)}$$

$$I_2(t) = I_1(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_1(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (\beta S_1(\tau) I_1(\tau) - \mu I_1(\tau) - \delta I_1(\tau)) \right] (d\tau)^{q_2} \quad (209)$$

$$I_2(t) = (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2}}{d\tau^{q_2}} (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - [(\beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(1 + q_1)} \tau^{q_1} (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - (\mu + \delta)(1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)}] \right] (d\tau)^{q_2} \quad (210)$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) = & (1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \\
& - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_2)} \Gamma(1 + q_2) \right. \\
& - \left[\left(\beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)} \tau^{q_1+q_2} \right) \frac{t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\mu + \delta)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_2)} \right) \tau^{q_2} \right] (d\tau)^{q_2} \quad (211)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) = & \frac{(1.5\beta - 3(\mu + \delta))t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} [(1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \\
& - \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)} \cdot \frac{\Gamma(1 + q_1 + q_2)\Gamma(1 + q_2)}{\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} t^{q_1+2q_2} \\
& + \frac{(\mu + \delta)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + q_2)} \cdot \frac{\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_2)}{\Gamma(1 + 2q_2)} t^{2q_2}] \quad (212)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) = & \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))\Gamma(1 + q_1 + q_2)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} t^{q_1+2q_2} \\
& - \frac{(\mu + \delta)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + 2q_2)} t^{2q_2} \quad (213)
\end{aligned}$$

c) n=0 için $A_0(t) = 1.5$

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(t) = & A_n(t) \\
& - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_n(\tau) - (\mu + d)A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (214)
\end{aligned}$$

$$A_1(t) = A_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_0(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_0(\tau) - (\mu + d)A_0(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (215)$$

$$A_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} 1.5}{d\tau^{q_3}} - (\delta 3 - (\mu + d)1.5) \right] d\tau^{q_3} \quad (216)$$

$$A_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{\tau^{-q_3} 1.5}{\Gamma(1 - q_3)} + 1.5(\mu + d) - 3\delta \right] d\tau^{q_3} \quad (217)$$

$$A_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \left[\frac{1.5}{\Gamma(1 - q_3)} \cdot \frac{\Gamma(1 - q_3)\Gamma(1 + q_3)}{\Gamma(1)} \tau^0 + 1.5(\mu + d) - 3\delta \right] \frac{t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \quad (218)$$

$$A_1(t) = (3\delta - 1.5(\mu + d)) \frac{t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \quad (219)$$

n=1 için $A_1(t) = (3\delta - 1.5(\mu + d)) \frac{t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)}$ olmak üzere

$$A_2(t) = A_1(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_1(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (\delta I_1(\tau) - (\mu + d)A_1(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (220)$$

$$A_2(t) = (3\delta - 1.5(\mu + d)) \frac{t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3}}{d\tau^{q_3}} \left[(3\delta - 1.5(\mu + d)) \frac{\tau^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \right] - (\delta(1.5\beta - 3(\mu + \delta)) \frac{\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - (\mu + d)(3\delta - 1.5(\mu + d)) \frac{\tau^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)}) \right] d\tau^{q_3} \quad (221)$$

$$A_2(t) = \frac{(3\delta - 1.5(\mu + d))t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{(3\delta - 1.5(\mu + d))}{\Gamma(1 + q_3)} \Gamma(1 + q_3) - \frac{(\delta(1.5\beta - 3(\mu + \delta))\tau^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} - \frac{(\mu + d)(3\delta - 1.5(\mu + d))\tau^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \right] d\tau^{q_3} \quad (222)$$

$$\begin{aligned}
A_2(t) = & \frac{(3\delta - 1.5(\mu + d)t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \\
& - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \frac{(3\delta - 1.5(\mu + d))}{\Gamma(1 + q_3)} \Gamma(1 \\
& + q_3) \left[+ \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \cdot \frac{(\delta(1.5\beta - 3(\mu + \delta)))}{\Gamma(1 + q_2)} \cdot \frac{\Gamma(1 + q_2)\Gamma(q_3 + 1)}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} t^{q_2 + q_3} \right. \\
& \left. + \frac{(\mu + d)(3\delta - 1.5(\mu + d))}{\Gamma(1 + q_3)\Gamma(1 + q_3)} \cdot \frac{\Gamma(1 + q_3)\Gamma(q_3 + 1)}{\Gamma(1 + 2q_3)} t^{2q_3} \right] \quad (223)
\end{aligned}$$

$$A_2(t) = \frac{(\delta(1.5\beta - 3(\mu + \delta)))}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} t^{q_2 + q_3} + \frac{(\mu + d)(3\delta - 1.5(\mu + d)t^{2q_3}}{\Gamma(1 + 2q_3)} \quad (224)$$

Beklenen değerler; parametre değerleri $\mu \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda = \frac{1}{2}; \beta \sim N(m, \sigma^2), m = 2, \sigma^2 = 1; \delta \sim \text{Beta}(k, l), k = 3, l = 4; d \sim \text{Gama}(a, b), a = 2, b = 3$

1) S denklemleri için;

$$\begin{aligned}
S_2(t) = & \frac{\mu}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
& + \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))\Gamma(q_1 + q_2 + 1)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1 + q_2} \\
& - \mu \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1} \quad (225)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E(S_2(t)) \\
= & \frac{E(\mu)}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
& + E(\beta) \frac{(1.5E(\beta) - 0.5E(\mu))(1.5E(\beta) - 3(E(\mu) + E(\delta)))\Gamma(q_1 + q_2 + 1)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1 + q_2} \\
& - E(\mu) \frac{(1.5E(\beta) - 0.5E(\mu))}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1} \quad (226)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E(S_2(t)) \\
&= \frac{E(\mu)}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
&+ \frac{\left(\frac{2.25E(\beta^3) - 5.25E(\beta^2)E(\mu) - 4.5E(\beta^2)E(\delta)}{+ 1.5E(\beta)E(\mu^2) + 1.5E(\beta)E(\mu)E(\delta)} \right) * \Gamma(q_1 + q_2 + 1)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} t^{2q_1 + q_2} \\
&- \frac{1.5E(\beta)E(\mu) - 0.5E(\mu^2)}{\Gamma(2q_1 + 1)} t^{2q_1}
\end{aligned} \tag{227}$$

$$\begin{aligned}
E(S_2(t)) &= \frac{\beta}{\Gamma(q_1 + 1)} t^{q_1} \\
&+ \frac{\left(\frac{6.75 \sigma^2 \mu + 2.25 \mu^3 - 5.25(\sigma^2 + \mu^2)\beta}{- \frac{4.5(\sigma^2 + \mu^2)\alpha}{\alpha + \beta} + 3\mu\beta^2 + 1.5\mu\beta \frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \right) \Gamma(q_1 + q_2 + 1) t^{2q_1 + q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} \\
&- \frac{(1.5\mu\beta - \beta^2) t^{2q_1}}{\Gamma(2q_1 + 1)}
\end{aligned} \tag{228}$$

2) I denklemleri için;

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \beta \frac{(1.5\beta - 0.5\mu)(1.5\beta - 3(\mu + \delta)\Gamma(1 + q_1 + q_2))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} t^{q_1 + 2q_2} \\
&- \frac{(\mu + \delta)(1.5\beta - 3(\mu + \delta))}{\Gamma(1 + 2q_2)} t^{2q_2}
\end{aligned} \tag{229}$$

$$\begin{aligned}
& E(I_2(t)) \\
&= E(\beta) \frac{(1.5E(\beta) - 0.5E(\mu))(1.5E(\beta) - 3(E(\mu) + E(\delta))\Gamma(1 + q_1 + q_2))}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} t^{q_1 + 2q_2} \\
&- \frac{(E(\mu) + E(\delta))(1.5E(\beta) - 3(E(\mu) + E(\delta)))}{\Gamma(1 + 2q_2)} t^{2q_2}
\end{aligned} \tag{230}$$

$$\begin{aligned}
& E(I_2(t)) \\
&= \frac{\left(\frac{2.25E(\beta^3) - 5.25E(\beta^2)E(\mu)}{-4.5E(\beta^2)E(\delta) + 1.5E(\beta)E(\mu^2) + 1.5E(\beta)E(\mu)E(\delta)} \right) \Gamma(1 + q_1 + q_2)}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} t^{q_1 + 2q_2} \\
&- \frac{1.5E(\mu)E(\beta) - 3E(\mu) + 1.5E(\delta)E(\beta) - 3E(\delta)}{\Gamma(1 + 2q_2)} t^{2q_2}
\end{aligned} \tag{231}$$

$$E(I_2(t)) = \frac{\left(\frac{6.75\sigma^2\mu + 2.25\mu^3 - 5.25(\sigma^2 + \mu^2)\beta}{\alpha + \beta} + 3\mu\beta^2 + \frac{1.5\mu\beta\alpha}{\alpha + \beta} \right) \Gamma(q_1 + q_2 + 1) t^{q_1+q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(1 + q_1 + 2q_2)} - \frac{\left(1.5\mu\beta - 3\beta + \frac{1.5\alpha\mu}{(\alpha + \beta)} - \frac{3\alpha}{\alpha + \beta} \right) t^{2q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \quad (232)$$

3) A denklemleri için;

$$A_2(t) = \frac{(\delta(1.5\beta - 3(\mu + \delta)))}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} t^{q_2+q_3} + \frac{(\mu + d)(3\delta - 1.5(\mu + d)t^{2q_3})}{\Gamma(1 + 2q_3)} \quad (233)$$

$$E(A_2(t)) = \frac{(E(\delta)(1.5E(\beta) - 3(E(\mu) + E(\delta))))}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} t^{q_2+q_3} + \frac{(E(\mu) + E(d))(3E(\delta) - 1.5(E(\mu) + E(d))t^{2q_3})}{\Gamma(1 + 2q_3)} \quad (234)$$

$$E(A_2(t)) = \frac{(1.5E(\beta)E(\delta) - 3E(\delta))}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} t^{q_2+q_3} + \frac{(3E(\mu)E(\delta) - 1.5E(\mu) + 3E(d)E(\delta) - 1.5E(d))t^{2q_3}}{\Gamma(1 + 2q_3)} \quad (235)$$

$$E(A_2(t)) = \frac{1.5 \frac{\mu\alpha}{\alpha + \beta} t^{q_2+q_3}}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)} + \frac{\left(\frac{3\beta\alpha}{\alpha + \beta} - 1.5\beta + \frac{3\alpha^2\beta}{\alpha + \beta} - 1.5\alpha\beta \right) t^{2q_3}}{\Gamma(1 + 2q_3)} \quad (236)$$

Varyans Değerler, parametre değerleri parametre değerleri $\mu \sim \ddot{U}(\lambda), \lambda = \frac{1}{2}; \beta \sim N(m, \sigma^2), m = 2, \sigma^2 = 1; \delta \sim Beta(k, l), k = 3, l = 4; d \sim Gama(a, b), a = 2, b = 3$

1) S denklemleri için;

$$\begin{aligned}
& Var(S_2(t)) \\
& \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)^2} t^{2q_1} \right) (33.75\sigma^6 + 321.0994898\sigma^4 + 59.68239796\sigma^2) \Gamma(q_1 + q_2 \\
& + 1)^2 \frac{t^{4q_1+2q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)^2 \Gamma(1 + q_2)^2 \Gamma(2q_1 + q_2 + 1)^2} \\
& - \frac{(0.375\sigma^2 - 0.625)t^{4q_1}}{\Gamma(2q_1 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{237}$$

2) I denklemleri için;

$$\begin{aligned}
& Var(I_2(t)) \\
& = \left(\frac{(33.75\sigma^6 + 318.4744898\sigma^4 + 38.68239796\sigma^2) \Gamma(q_1 + q_2 + 1)^2 t^{2q_1+2q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)^2 \Gamma(1 + q_2)^2 \Gamma(1 + q_1 + 2 * q_2)^2} \right) \\
& - \frac{2 \left(0.4209183674\sigma^2 - \frac{165}{196} \right) t^{2q_2}}{\Gamma(1 + q_2)^2}
\end{aligned} \tag{238}$$

3) A denklemleri için;

$$Var(A_2(t)) = \frac{0.4591836735\sigma^2 t^{2q_2+2q_3}}{\Gamma(1 + q_2 + q_3)^2} - \frac{16.95153061 t^{4q_3}}{\Gamma(1 + 2q_3)^2} \tag{239}$$

2.4.1. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modeli Beklenen Değer Ve Varyans

Beklenen değer ve varyansların farklı üs değerlerine göre denklemlerinin bulunup grafiklerinin çizilmesi

$$1. \text{ denklemler } q_1=1, q_2=0.9, q_3=0.9; \tag{240}$$

$$2. \text{ denklemler } q_1=1, q_2=0.9, q_3=0.9; \tag{241}$$

$$3. \text{ denklemler } q_1=0.8, q_2=0.7, q_3=0.7; \tag{242}$$

$$4. \text{ denklemler } q_1=0.7, q_2=0.6, q_3=0.6; \tag{243}$$

$$5. \text{ denklemler } q_1=0.6, q_2=0.5, q_3=0.5 \quad (244)$$

1) a) S denklemi için beklenen değer denklemleri ve grafiği

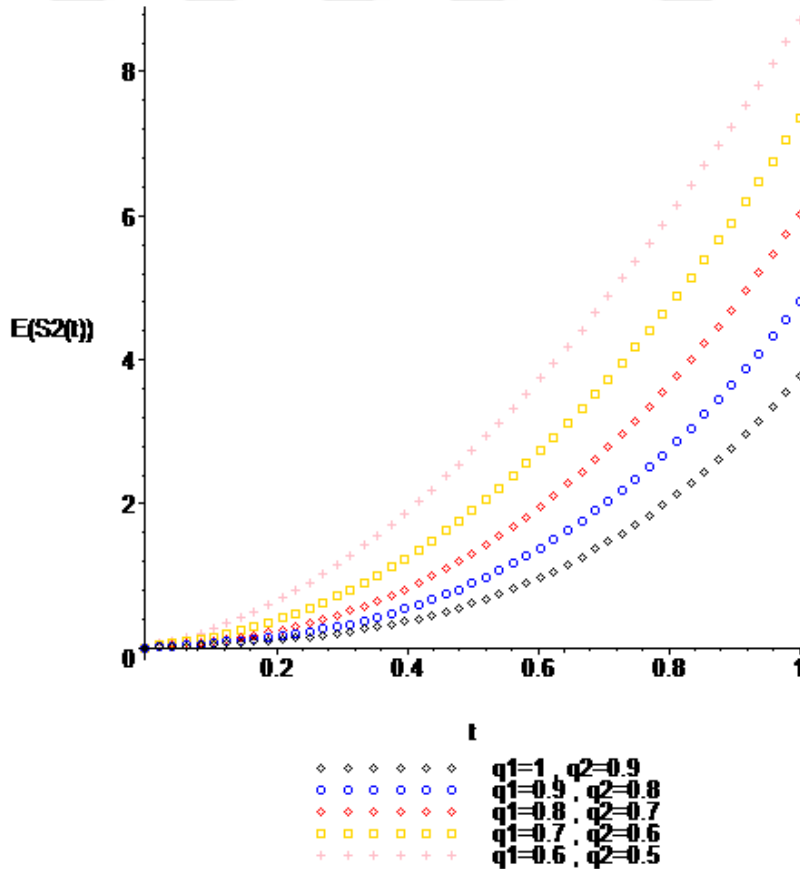
$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{t}{\Gamma(2)} + \frac{10.875\Gamma(2.9)t^{2.9}}{\Gamma(2)\Gamma(1.9)\Gamma(3.9)} - \frac{1.25t^2}{\Gamma(3)} \quad (245)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{t^{0.9}}{\Gamma(1.9)} + \frac{10.875\Gamma(2.7)t^{2.6}}{\Gamma(1.9)\Gamma(1.8)\Gamma(3.6)} - \frac{1.25t^{1.8}}{\Gamma(2.8)} \quad (246)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \frac{t^{0.8}}{\Gamma(1.8)} + \frac{10.875\Gamma(2.5)t^{2.3}}{\Gamma(1.8)\Gamma(1.7)\Gamma(3.3)} - \frac{1.25t^{1.6}}{\Gamma(2.6)} \quad (247)$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \frac{t^{0.7}}{\Gamma(1.7)} + \frac{10.875\Gamma(2.3)t^2}{\Gamma(1.7)\Gamma(1.6)\Gamma(3)} - \frac{1.25t^{1.4}}{\Gamma(2.4)} \quad (258)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \frac{t^{0.6}}{\Gamma(1.6)} + \frac{10.875\Gamma(2.1)t^{1.7}}{\Gamma(1.6)\Gamma(1.5)\Gamma(2.7)} - \frac{1.25t^{1.2}}{\Gamma(2.2)} \quad (249)$$



Şekil 32. S_2 nin farklı kesirli mertebe türevler için beklenen değer davranışları

b) S denklemi için varyans denklemleri ve grafiği

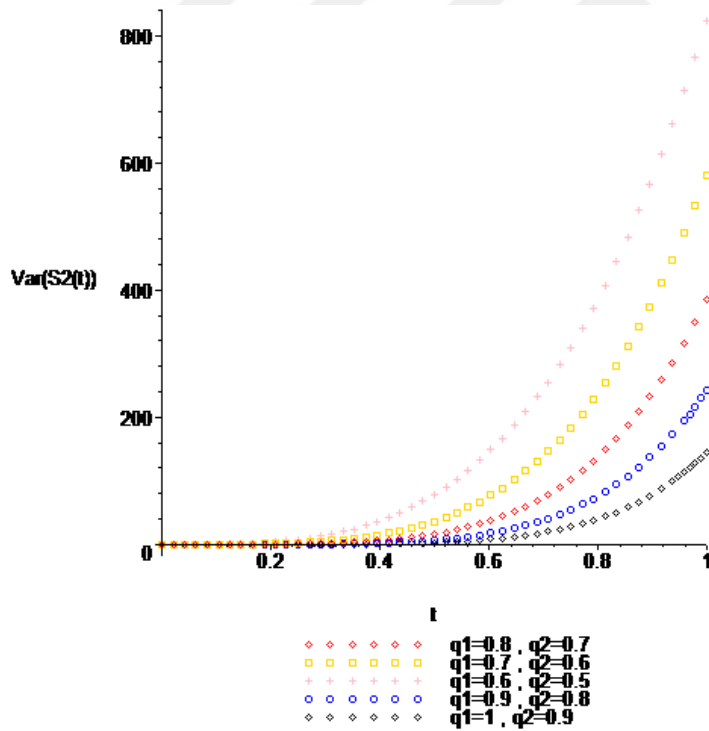
$$S_6 = \frac{1}{4} \frac{t^2}{\Gamma(2)^2} + \frac{1125.206632\Gamma(2.9)^2 t^{5.8}}{\Gamma(2)^2\Gamma(1.9)^2\Gamma(3.9)^2} + \frac{0.875t^4}{\Gamma(3)^2} \quad (250)$$

$$S_7 = \frac{1}{4} \frac{t^{1.8}}{\Gamma(1.9)^2} + \frac{1125.206632\Gamma(2.7)^2 t^{5.2}}{\Gamma(1.9)^2\Gamma(1.8)^2\Gamma(3.6)^2} + \frac{0.875t^{3.6}}{\Gamma(2.8)^2} \quad (251)$$

$$S_8 = \frac{1}{4} \frac{t^{1.6}}{\Gamma(1.8)^2} + \frac{1125.206632\Gamma(2.5)^2 t^{4.6}}{\Gamma(1.8)^2\Gamma(1.7)^2\Gamma(3.3)^2} + \frac{0.875t^{3.2}}{\Gamma(2.6)^2} \quad (252)$$

$$S_9 = \frac{1}{4} \frac{t^{1.4}}{\Gamma(1.7)^2} + \frac{1125.206632\Gamma(2.3)^2 t^4}{\Gamma(1.7)^2\Gamma(1.6)^2\Gamma(3.0)^2} + \frac{0.875t^{2.8}}{\Gamma(2.4)^2} \quad (253)$$

$$S_{10} = \frac{1}{4} \frac{t^{1.2}}{\Gamma(1.6)^2} + \frac{1125.206632\Gamma(2.1)^2 t^{3.4}}{\Gamma(1.6)^2\Gamma(1.5)^2\Gamma(2.7)^2} + \frac{0.875t^{2.4}}{\Gamma(2.2)^2} \quad (254)$$



Şekil 33. S_2 nin farklı kesirli mertebe türevler için varyans davranışları

2) a) I denklemi için beklenen değer denklemleri ve grafiği

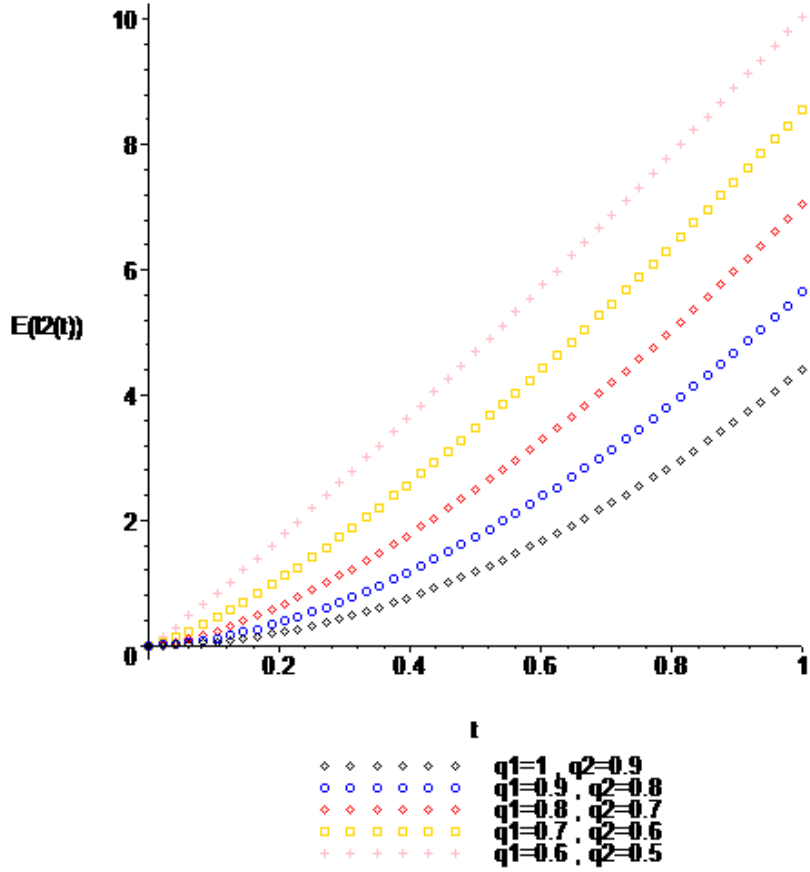
$$I_1 = \frac{10.875\Gamma(2.9)t^{1.9}}{\Gamma(2)\Gamma(1.9)\Gamma(3.8)} \quad (255)$$

$$I_2 = \frac{10.875\Gamma(2.7)t^{1.7}}{\Gamma(1.9)\Gamma(1.8)\Gamma(3.5)} \quad (256)$$

$$I_3 = \frac{10.875\Gamma(2.5)t^{1.5}}{\Gamma(1.8)\Gamma(1.7)\Gamma(3.2)} \quad (257)$$

$$I_4 = \frac{10.875\Gamma(2.3)t^{1.3}}{\Gamma(1.7)\Gamma(1.6)\Gamma(2.9)} \quad (258)$$

$$I_5 = \frac{10.875\Gamma(2.1)t^{1.1}}{\Gamma(1.6)\Gamma(1.5)\Gamma(2.6)} \quad (259)$$



Şekil 34. I_2 nin farklı kesirli mertebe türevler için beklenen değer davranışları

b) I denklemi için varyans denklemleri ve grafiği

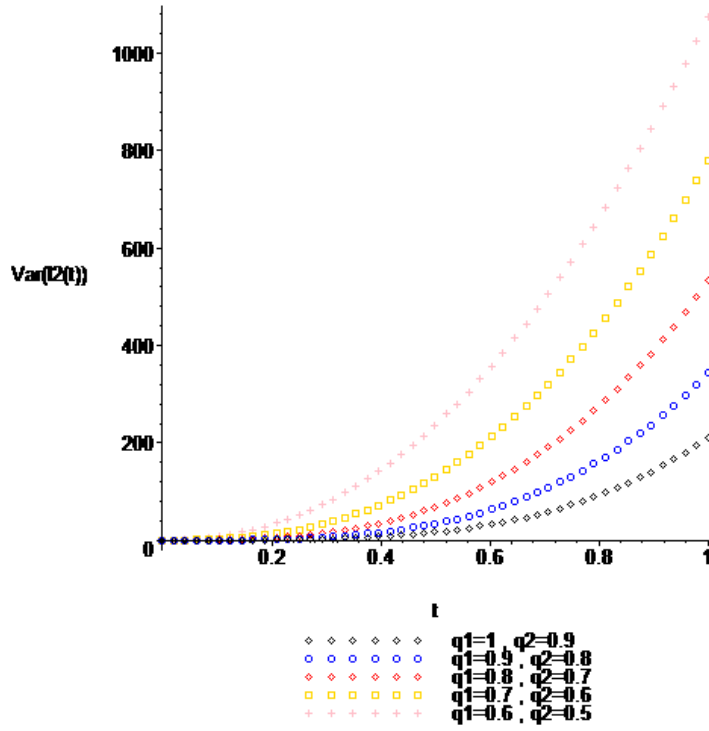
$$I_6 = \frac{1249.237882\Gamma(2.9)^2 t^{3.8}}{\Gamma(2)^2\Gamma(1.9)^2\Gamma(3.8)^2} + \frac{6.31377551}{\Gamma(1.9)^2 t^{1.8}} \quad (260)$$

$$I_7 = \frac{1249.237882\Gamma(2.7)^2 t^{3.4}}{\Gamma(1.9)^2\Gamma(1.8)^2\Gamma(3.5)^2} + \frac{6.31377551}{\Gamma(1.8)^2 t^{1.6}} \quad (261)$$

$$I_8 = \frac{1249.237882\Gamma(2.5)^2 t^3}{\Gamma(1.8)^2\Gamma(1.7)^2\Gamma(3.2)^2} + \frac{6.31377551}{\Gamma(1.7)^2 t^{1.4}} \quad (262)$$

$$I_9 = \frac{1249.237882\Gamma(2.3)^2 t^{2.6}}{\Gamma(1.7)^2\Gamma(1.6)^2\Gamma(2.9)^2} + \frac{6.31377551}{\Gamma(1.6)^2 t^{1.2}} \quad (263)$$

$$I_{10} = \frac{1249.237882\Gamma(2.1)^2 t^{2.2}}{\Gamma(1.6)^2\Gamma(1.5)^2\Gamma(2.6)^2} + \frac{6.31377551 t}{\Gamma(1.5)^2} \quad (264)$$



Şekil 35. I_2 nin farklı kesirli mertbe türevler için varyans davranışları

3) a) A denklemi için beklenen değer denklemleri ve grafiği

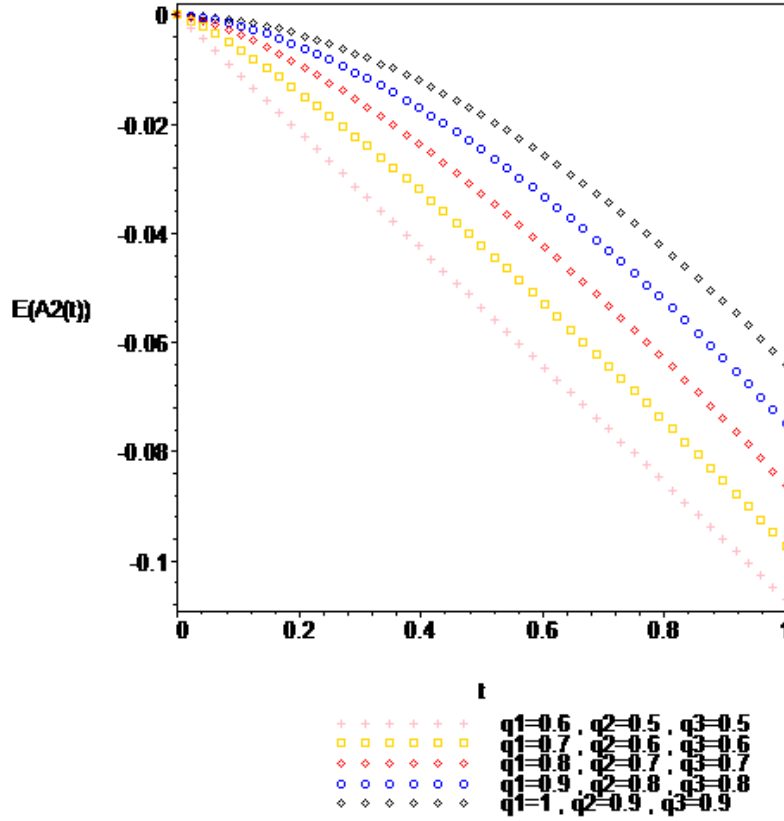
$$A_1 = - \frac{0.107142857 t^{1.8}}{\Gamma(2.8)} \quad (265)$$

$$A_2 = - \frac{0.107142857 t^{1.6}}{\Gamma(2.6)} \quad (266)$$

$$A_3 = -\frac{0.107142857t^{1.4}}{\Gamma(2.4)} \quad (267)$$

$$A_4 = -\frac{0.107142857t^{1.2}}{\Gamma(2.2)} \quad (268)$$

$$A_5 = -\frac{0.107142857t^1}{\Gamma(2.0)} \quad (269)$$



Şekil 36. A_2 nin farklı kesirli mertebe türevler için beklenen değer davranışları

A_2 'nin farklı kesirli mertebeden türevleri hesaplanırken sınırlı sayıda terim kullanılarak elde edilen bu karakteristikler ile asıl değerlerine yaklaşım görevi üstlenmektedirler. Elde edilen bu değerler yaklaşık değerlerdir.

b) A denklemi için varyans denklemleri ve grafiği

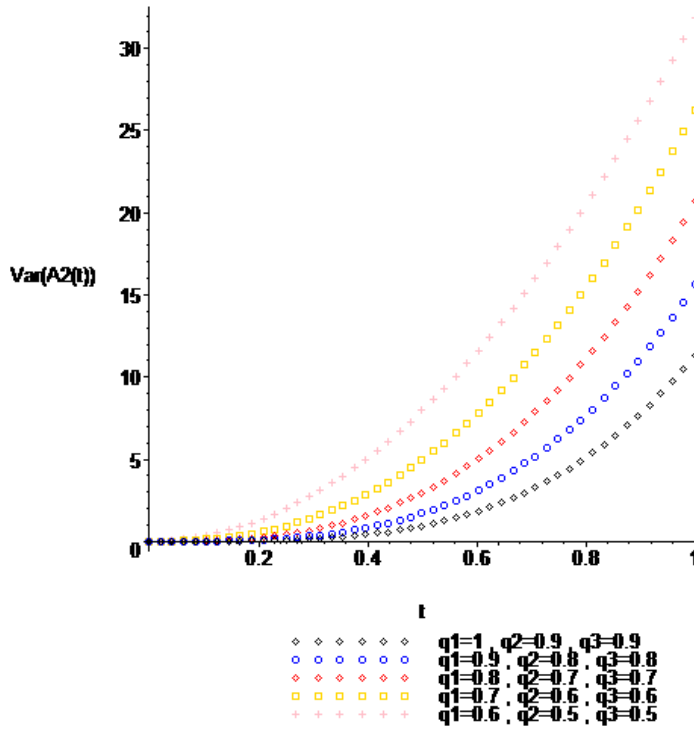
$$A_6 = \frac{31.90178571t^{3.6}}{\Gamma(2.8)^2} \quad (270)$$

$$A_7 = \frac{31.90178571t^{3.2}}{\Gamma(2.6)^2} \quad (271)$$

$$A_8 = \frac{31.90178571t^{2.8}}{\Gamma(2.4)^2} \quad (272)$$

$$A_9 = \frac{31.90178571t^{2.4}}{\Gamma(2.2)^2} \quad (273)$$

$$A_{10} = \frac{31.90178571t^2}{\Gamma(2.0)^2} \quad (274)$$



Şekil 37. A_2 'nin farklı kesirli mertbe türevler için varyans davranışları

2.5. Başlangıç Koşulları Rastgele Olan HIV/AIDS Modelinin Çözüm Davranışı

$\delta = 4$; $\mu = 2$; $d = 1$; $\beta = 1.5$ değerleri için

$$D_*^{q_1} S(t) = 2 - 1.5S(t)I(t) - 2S(t) \quad (275)$$

$$D_*^{q_2} I(t) = 1.5S(t)I(t) - 2I(t) - 4I(t) \quad (276)$$

$$D_*^{q_3} A(t) = 4I(t) - 3A(t) \quad (277)$$

$S(0) = S_0, I(0) = I_0, A(0) = A_0$, başlangıç koşulları farklı olasılık dağılımlarına sahip olsunlar

$$S_{n+1}(t) = S_n(t) (2 + \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (278)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2I_n(\tau) - 4I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (279)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) + \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_n(\tau) - 3A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (280)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, A(0) = A_0, \delta Y_n^2 = 0$$

$$\delta S_{n+1}(t) = 4S_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_n^2(\tau)I_n^2(\tau) - 2S_n^2(\tau)) \right] (d\tau)^{q_1} \quad (281)$$

$$= 4(t) + \lambda_1 4S_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_1} \lambda_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} 4S_n(\tau) (d\tau)^{q_1} \quad (282)$$

$\delta S_n(t)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde,

$$1 + \lambda_1(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0, \frac{d^{q_1} \lambda_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} = 0, \lambda_1(\tau) = -1 \quad (283)$$

$$\begin{aligned} \delta I_{n+1}(t) = & 4I_n(t) \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} 4 \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} \right. \\ & \left. - (1.5S_n^2(\tau)I_n^2(\tau) - 2I_n^2(\tau) - 4I_n^2(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \end{aligned} \quad (284)$$

$$= \delta I_n(t) + \lambda_2 4I_n(\tau)|_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_2} \lambda_2(\tau)}{d\tau^{q_2}} 4I_n(\tau) d\tau^{q_2} \quad (285)$$

$\delta I_n(t)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde,

$$1 + \lambda_2(\tau)|_{\tau=t} = 0, \frac{d^{q_2} \lambda_2(\tau)}{d\tau^{q_2}} = 0, \lambda_2(\tau) = -1 \quad (286)$$

$$\begin{aligned} \delta A_{n+1}(t) = & 4A_n(t) \\ & + \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} 4 \int_0^t \lambda_3(\tau) \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_n^2(\tau) - 3A_n^2(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \end{aligned} \quad (287)$$

$$= 4A_n(t) + \lambda_3 4A_n(\tau)|_{\tau=t} - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \frac{d^{q_3} \lambda_3(\tau)}{d\tau^{q_3}} 4A_n(\tau) d\tau^{q_3} \quad (288)$$

$\delta A_n(t)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde,

$$1 + \lambda_3(\tau)|_{\tau=t} = 0, \frac{d^{q_3} \lambda_3(\tau)}{d\tau^{q_3}} = 0, \lambda_3(\tau) = -1 \quad (289)$$

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) = & S_n(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \end{aligned} \quad (290)$$

$$\begin{aligned} I_{n+1}(t) = & I_n(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2I_n(\tau) - 4I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \end{aligned} \quad (291)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_n(\tau) - 3A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (292)$$

$$S_0(0) = S_0 = N \sim (\mu, \sigma^2), I_0(0) = I_0 = U \sim (a, b), A_0(0) = A_0 = \ddot{U} \sim (\lambda) \quad (293)$$

2.6. Rastgele Kesirli Mertebeden HIV/AIDS Modeli Başlangıç Değerleri Rastgele Seçildiğinde

$$S_{n+1}(t) = S_n - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_n(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2S_n(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (294)$$

$n = 0$ ve $S_0 = S_0$, $I_0 = I_0$, $A_0 = A_0$ olmak üzere;

$$S_1 = S_0 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_0(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_0(\tau)I_0(\tau) - 2S_0(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (295)$$

$$S_1 = S_0 - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \left[\frac{S_0}{\Gamma(1 - q_1)} \frac{t^0 \Gamma(1 - q_1) \Gamma(1 + q_1)}{\Gamma(1)} - \frac{(2 - 1.5S_0I_0 - 2S_0)(\Gamma(1)\Gamma(q_1 + 1)t^{q_1})}{\Gamma(1 + q_1)} \right] \quad (296)$$

$$S_1 = (2 - 1.5S_0I_0 - 2S_0) \frac{t^{q_1}}{\Gamma(1 + q_1)} \quad (297)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2I_n(\tau) - 4I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (298)$$

$$I_1(t) = I_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_0(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (1.5S_0(\tau)I_0(\tau) - 2I_0(\tau) - 4I_0(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (299)$$

$$I_1(t) = I_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2 + 1)} \left[\frac{I_0 t^0 \Gamma(1 - q_2) \Gamma(1 + q_2)}{\Gamma(1 - q_2)} + \frac{(1.5S_0I_0 - 2I_0 - 4I_0) \Gamma(1)\Gamma(1 + q_2)t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \right] \quad (300)$$

$$I_1(t) = \frac{(1.5S_0I_0 - 2I_0 - 4I_0)t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)} \quad (301)$$

$$A_{n+1}(t) = A_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_n(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_n(\tau) - 3A_n(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (302)$$

$$A_1(t) = A_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_0(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_0(\tau) - 3A_0(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (303)$$

$$A_1(t) = A_0(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3 + 1)} \left[\frac{A_0}{\Gamma(1 - q_3)} \frac{\Gamma(1 - q_3)\Gamma(1 + q_3)t^0}{\Gamma(1)} \right. \\ \left. - (4I_0 - 3A_0) \frac{\Gamma(1)\Gamma(1 + q_3)t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \right] \quad (304)$$

$$A_1(t) = \frac{(4I_0 - 3A_0)t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)} \quad (305)$$

$$n = 1, S_1 = (2 - 1.5S_0I_0 - 2S_0) \frac{t^{q_1}}{\Gamma(1 + q_1)}, I_1(t) = \frac{(1.5S_0I_0 - 2I_0 - 4I_0)t^{q_2}}{\Gamma(1 + q_2)}, A_1(t) = \\ \frac{(4I_0 - 3A_0)t^{q_3}}{\Gamma(1 + q_3)}, X = (2 - 1.5S_0I_0 - 2S_0), Y = (1.5S_0I_0 - 2I_0 - 4I_0) \text{ ve } Z = \\ (4I_0 - 3A_0) \text{ olmak üzere;}$$

$$S_2(t) = S_1 \\ - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_1} S_1(\tau)}{d\tau^{q_1}} - (2 - 1.5S_1(\tau)I_1(\tau) - 2S_1(\tau)) \right] d\tau^{q_1} \quad (306)$$

$$S_2(t) = \frac{X t^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 1)} \\ - \frac{1}{\Gamma(q_1 + 1)} \left[\frac{X t^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1 - q_1)} \frac{(\Gamma(1 - q_1)\Gamma(1 + q_1)t^0)}{\Gamma(1)} \right. \\ - \left(\frac{2\Gamma(1)\Gamma(1 + q_1)t^{q_1}}{\Gamma(1 + q_1)} - \frac{1.5XY\Gamma(q_1 + q_2 + 1)\Gamma(q_1 + 1)t^{2q_1 + q_2}}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} \right. \\ \left. \left. - \frac{2X\Gamma(1 + q_1)\Gamma(1 + q_1)t^{2q_1}}{\Gamma(1 + q_1)\Gamma(2q_1 + 1)} \right) \right] \quad (307)$$

$$S_2(t) = \frac{2t^{q_1}}{\Gamma(1+q_1)} - \frac{(1.5XY\Gamma(q_1+q_2+1))t^{2q_1+q_2}}{\Gamma(1+q_1)\Gamma(1+q_2)\Gamma(2q_1+q_2+1)} - \frac{2X\Gamma(1+q_1)t^{2q_1}}{\Gamma(1+q_1)\Gamma(2q_1+1)} \quad (308)$$

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) - \frac{1}{\Gamma(q_2+1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_2} I_n(\tau)}{d\tau^{q_2}} - (1.5S_n(\tau)I_n(\tau) - 2I_n(\tau) - 4I_n(\tau)) \right] d\tau^{q_2} \quad (309)$$

$$I_2(t) = \frac{Yt^{q_2}}{\Gamma(1+q_2)} - \frac{1}{\Gamma(1+q_2)} \left[\frac{Yt^{q_2}}{\Gamma(1+q_2)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-q_2)} \frac{\Gamma(1-q_2)\Gamma(1+q_2)t^0}{\Gamma(1)} - \left(\frac{1.5XY}{\Gamma(1+q_1)\Gamma(1+q_2)} \frac{\Gamma(q_1+q_2+1)\Gamma(q_2+1)t^{q_1+2q_2}}{\Gamma(q_1+q_2+1)} - \frac{2Y\Gamma(1+q_2)\Gamma(1+q_2)t^{2q_2}}{\Gamma(1+q_2)\Gamma(2q_2+1)} - \frac{4Y}{\Gamma(1+q_2)} \frac{\Gamma(1+q_2)\Gamma(1+q_2)t^{2q_2}}{\Gamma(2q_2+1)} \right) \right] \quad (310)$$

$$I_2(t) = \frac{1.5XY}{\Gamma(1+q_1)} \frac{\Gamma(q_1+q_2+1)t^{q_1+2q_2}}{\Gamma(1+q_2)\Gamma(q_1+2q_2+1)} - \frac{2Yt^{2q_2}}{\Gamma(2q_2+1)} - \frac{4Yt^{2q_2}}{\Gamma(2q_2+1)} \quad (311)$$

$$A_2(t) = A_1(t) - \frac{1}{\Gamma(q_3+1)} \int_0^t \left[\frac{d^{q_3} A_1(\tau)}{d\tau^{q_3}} - (4I_1(\tau) - 3A_1(\tau)) \right] d\tau^{q_3} \quad (312)$$

$$A_2(t) = \frac{Zt^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)} - \frac{1}{\Gamma(q_3+1)} \left[\frac{Zt^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+q_3)} \frac{\Gamma(1-q_3)\Gamma(1+q_3)t^0}{\Gamma(1)} - \left(\frac{4Yt^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1+q_3)t^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)} - \frac{3Zt^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1+q_3)t^{q_3}}{\Gamma(1+q_3)\Gamma(1+q_3)} \right) \right] \quad (313)$$

$$A_2(t) = \frac{4Yt^{2q_3}}{\Gamma(1+q_3)\Gamma(1+q_3)} - \frac{3Zt^{2q_3}}{\Gamma(1+q_3)\Gamma(1+q_3)} \quad (314)$$

2.6.1. Beklenen Değer ve Varyans Hesaplamaları

$$\lambda = \frac{1}{2}; m := 2; \sigma = 1; k = 3; l := 4; a := 2; b := 3; x := 2; y := 4; xy := 8;$$

$$E(S_0) = \lambda; \quad (315)$$

$$E(S_0^2) = 2(\lambda^2); \quad (316)$$

$$E(I_0) = m; \quad (317)$$

$$E(I_0^2) := \sigma^2 + m^2; \quad (318)$$

$$E(I_0^3) = 3((\sigma^2)m) + m^3; \quad (319)$$

$$E(A_0) = \left(\frac{k}{k+l} \right); \quad (320)$$

$$E(A_0^2) := \frac{(k+1)a}{(k+l+1)(k+l)}; \quad (321)$$

$$\text{Var}(S_0) = (\lambda^2); \quad (322)$$

$$\text{Var}(I_0) = (\sigma^2); \quad (323)$$

$$\text{Var}(A_0) := ((kl)/((k+l)^2(k+l+1))) \quad (324)$$

$$\begin{aligned} & ES_2(t) \frac{2 t^{q_1}}{\Gamma(1+q_1)} \\ & - \left(\frac{1.5 \left(\frac{2 - 1.5E(S_0) * E(I_0) - 2E(S_0)}{(1.5 * E(S_0)E(I_0) - 2E(I_0) - 4 * E(I_0)\Gamma(q_1 + q_2 + 1) * t^{2q_1+q_2})} \right)}{\Gamma(1+q_1)\Gamma(1+q_2)\Gamma(2q_1 + q_2 + 1)} \right. \\ & \left. - \frac{2 \left((2 - 1.5E(S_0) * E(I_0) - 2 * E(S_0))\Gamma(1+q_1)t^{2*q_1} \right)}{(\Gamma(1+q_1)\Gamma(2q_1+1))} \right) \end{aligned} \quad (325)$$

$$ES_2(t) = \frac{2t^{q_1}}{\Gamma(1+q_1)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(q_1+q_2+1)t^{2q_1+q_2})}{\Gamma(1+q_1)\Gamma(1+q_2)\Gamma(2q_1+q_2+1)} - \frac{t^{2*q_1}}{\Gamma(2q_1+1)} \quad (326)$$

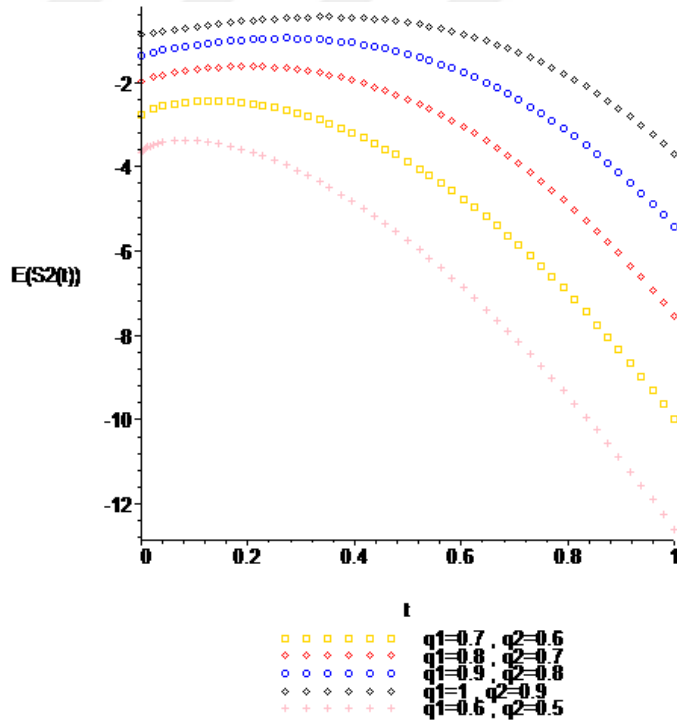
$$M1 = \frac{2t}{\Gamma(2)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(2.9)t^{2.9})}{\Gamma(2)\Gamma(1.9)\Gamma(3.9)} - \frac{t^2}{\Gamma(3)} \quad (327)$$

$$M2 = \frac{2t^{0.9}}{\Gamma(1.9)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(2.7)t^{2.6})}{\Gamma(1.9)\Gamma(1.8)\Gamma(3.6)} - \frac{t^{1.8}}{\Gamma(2.8)} \quad (328)$$

$$M3 = \frac{2t^{0.8}}{\Gamma(1.8)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(2.5)t^{2.3})}{\Gamma(1.8)\Gamma(1.7)\Gamma(3.3)} - \frac{t^{1.6}}{\Gamma(2.6)} \quad (329)$$

$$M4 = \frac{2t^{0.7}}{\Gamma(1.7)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(2.3)t^2)}{\Gamma(1.7)\Gamma(1.6)\Gamma(3.0)} - \frac{t^{1.4}}{\Gamma(2.4)} \quad (330)$$

$$M5 = \frac{2t^{0.6}}{\Gamma(1.6)} - \frac{1.5(3+8\Gamma(2.1)t^{1.7})}{\Gamma(1.6)\Gamma(1.5)\Gamma(2.7)} - \frac{t^{1.2}}{\Gamma(2.2)} \quad (331)$$



Şekil 38. Virüse karşı duyarlı kişilerin beklenen değer grafiği

$E(S_2)$ beklenen değerinin farklı kesirli mertebeden türevleri hesaplanırken sınırlı sayıda terim kullanılarak elde edilen bu karakteristikler ile gerçek değerlerine yaklaşım görevi üstlenmektedirler. Elde edilen bu değerler yaklaşık değerlerdir.

$$\text{Var}S_2(t) = \frac{87.328125\Gamma(q_1 + q_2 + 1)^2 t^{4q_1+2q_2}}{\Gamma(1 + q_1)^2 \Gamma(1 + q_2)^2 \Gamma(2 * q_1 + q_2 + 1)^2} + \frac{6.25t^{4q_1}}{\Gamma(2q_1 + 1)^2} \quad (332)$$

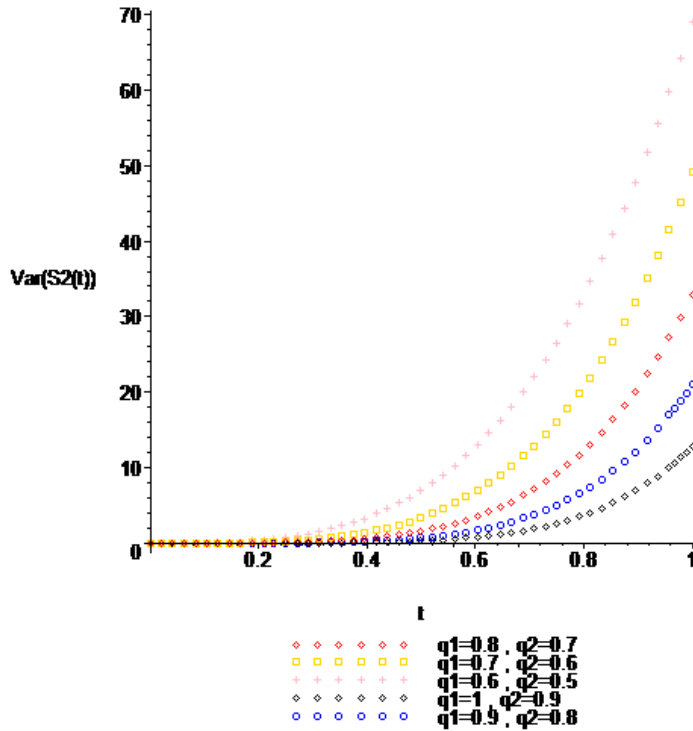
$$M_6 = \frac{87.328125\Gamma(2.9)^2 t^{5.8}}{\Gamma(2)^2 \Gamma(1.9)^2 \Gamma(3.9)^2} + \frac{6.25t^4}{\Gamma(3)^2} \quad (333)$$

$$M_7 = \frac{87.328125\Gamma(2.7)^2 t^{5.2}}{\Gamma(1.9)^2 \Gamma(1.8)^2 \Gamma(3.6)^2} + \frac{6.25t^{3.6}}{\Gamma(2.8)^2} \quad (334)$$

$$M_8 = \frac{87.328125\Gamma(2.5)^2 t^{4.6}}{\Gamma(1.8)^2 \Gamma(1.7)^2 \Gamma(3.3)^2} + \frac{6.25t^{3.2}}{\Gamma(2.6)^2} \quad (335)$$

$$M_9 = \frac{87.328125\Gamma(2.3)^2 t^{4.0}}{\Gamma(1.7)^2 \Gamma(1.6)^2 \Gamma(3.0)^2} + \frac{6.25t^{2.8}}{\Gamma(2.4)^2} \quad (336)$$

$$M_{10} = \frac{87.328125\Gamma(2.1)^2 t^{3.4}}{\Gamma(1.6)^2 \Gamma(1.5)^2 \Gamma(2.7)^2} + \frac{6.25t^{2.4}}{\Gamma(2.2)^2} \quad (337)$$



Şekil 39. Virüse karşı duyarlı kişilerin beklenen varyans değeri grafiği

$$\begin{aligned}
& EI_2(t) \\
&= \frac{1.5 \left(\frac{2 - 1.5E(S_0)}{E(I_0) - 2E(S_0)} \right) \left(\frac{1.5 * E(S_0)}{E(I_0) - 2E(I_0) - 4E(I_0)} \right) \Gamma(q_1 + q_2 + 1) t^{q_1 + 2 * q_2}}{\Gamma(1 + q_1) \Gamma(1 + q_1) \Gamma(q_1 + 2 * q_2 + 1)} \\
&\quad - \frac{2(1.5E(S_0)E(I_0) - 2E(I_0) - 4E(I_0)) t^{2 * q_2}}{\Gamma(2 + 1)} \\
&\quad - \frac{4(1.5E(S_0)E(I_0) - 2E(I_0) - 4 * E(I_0)) * t^{2 * q_2}}{\Gamma(2q_2 + 1)} \tag{338}
\end{aligned}$$

$$EI_2(t) = \frac{7.875 \Gamma(q_1 + q_2 + 1) t^{q_1 + 2q_2}}{\Gamma(1 + q_1) \Gamma(1 + q_2) \Gamma(q_1 + 2q_2 + 1)} + \frac{63 t^{2q_2}}{\Gamma(2q_2 + 1)} \tag{339}$$

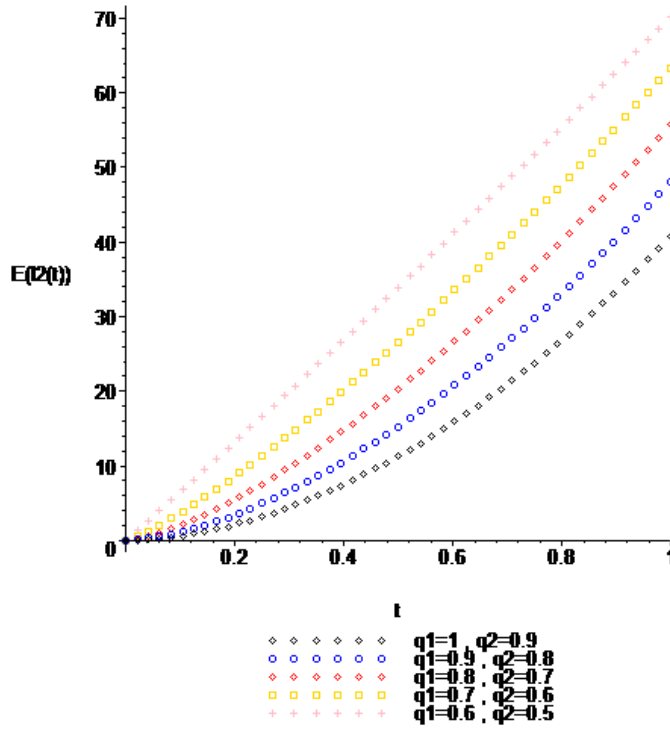
$$K1 = \frac{7.875 \Gamma(2.9) t^{2.8}}{\Gamma(2) \Gamma(1.9) \Gamma(3.8)} + \frac{63 t^{1.8}}{\Gamma(2.8)} \tag{340}$$

$$K2 = 7.875 \Gamma(2.7) t^{2.5} / \Gamma(1.9) \Gamma(1.8) \Gamma(3.5) + 63.0 t^{1.6} \text{GAMMA}(2.6) \tag{341}$$

$$K3 = \frac{7.875 \Gamma(2.5) t^{2.2}}{\Gamma(1.8) \Gamma(1.7) \Gamma(3.2)} + \frac{63 t^{1.4}}{\Gamma(2.4)} \tag{342}$$

$$K4 = \frac{7.875 \Gamma(2.3) t^{1.9}}{\Gamma(1.7) \Gamma(1.6) \Gamma(2.9)} + \frac{63 t^{1.2}}{\Gamma(2.2)} \tag{343}$$

$$K5 = \frac{7.875 \Gamma(2.1) t^{1.6}}{\Gamma(1.6) \Gamma(1.5) \Gamma(2.6)} + \frac{63 t^1}{\Gamma(2.0)} \tag{344}$$



Şekil 40. Enfekte kişilerin beklenen değer grafiği

$$\begin{aligned} & \text{Var}I_2(t) \\ &= \frac{1552.289062\Gamma(q_1 + q_2 + 1)^2 t^{2q_1+4*q_2}}{\Gamma(1 + q_1)^2 \Gamma(1 + q_2)^2 \Gamma(q_1 + 2q_2 + 1)^2} + \frac{146.25t^{4*q_2}}{\Gamma(2 * q_2 + 1)^2} + \frac{(9 + 576t^{4q_2})}{\Gamma(2q_2 + 1)^2} \quad (345) \end{aligned}$$

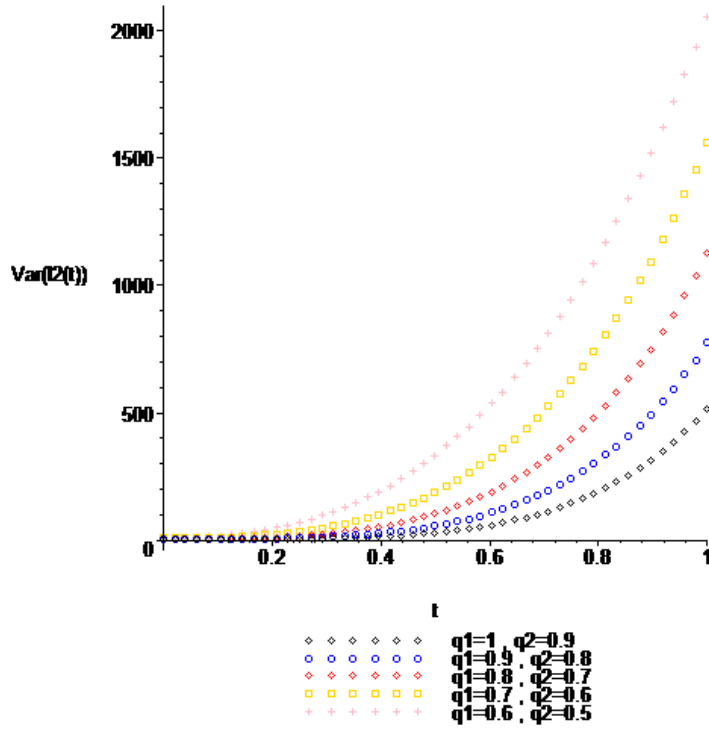
$$K_6 = \frac{1552.289062\Gamma(2.9)^2 t^{5.6}}{\Gamma(2)^2 \Gamma(1.9)^2 \Gamma(3.8)^2} + \frac{146.25t^{3.6}}{\Gamma(2.8)^2} + \frac{9 + 576t^{3.6}}{\Gamma(2.8)^2} \quad (346)$$

$$K_7 = \frac{1552.289062\Gamma(2.7)^2 t^5}{\Gamma(1.9)^2 \Gamma(1.8)^2 \Gamma(3.5)^2} + \frac{146.25t^{3.2}}{\Gamma(2.6)^2} + \frac{9 + 576t^{3.2}}{\Gamma(2.6)^2} \quad (347)$$

$$K_8 = \frac{1552.289062\Gamma(2.5)^2 t^{4.4}}{\Gamma(1.8)^2 \Gamma(1.7)^2 \Gamma(3.2)^2} + \frac{146.25t^{2.8}}{\Gamma(2.4)^2} + \frac{9 + 576t^{2.8}}{\Gamma(2.4)^2} \quad (348)$$

$$K_9 = \frac{1552.289062\Gamma(2.3)^2 t^{3.8}}{\Gamma(1.7)^2 \Gamma(1.6)^2 \Gamma(2.9)^2} + \frac{146.25t^{2.4}}{\Gamma(2.2)^2} + \frac{9 + 576t^{2.4}}{\Gamma(2.2)^2} \quad (359)$$

$$K_{10} = \frac{1552.289062\Gamma(2.1)^2 t^{3.2}}{\Gamma(1.6)^2 \Gamma(1.5)^2 \Gamma(2.6)^2} + \frac{146.25t^2}{\Gamma(2.0)^2} + \frac{9 + 576t^2}{\Gamma(2.0)^2} \quad (350)$$



Şekil 41. Enfekte kişilerin beklenen varyans değeri grafiği

$$EA_2(t) = \frac{4(1.5E(S_0)E(I_0) - 2E(I_0) - 4E(I_0))t^{2q_3}}{\Gamma(1 + q_3)\Gamma(1 + q_3)} - \frac{3(4E(I_0) - 3 * E(A_0))t^{2q_3}}{\Gamma(1 + q_3)\Gamma(1 + q_3)} \quad (351)$$

$$EA_2(t) = -\frac{62.14285714t^{2q_3}}{\Gamma(1 + q_3)^2} \quad (352)$$

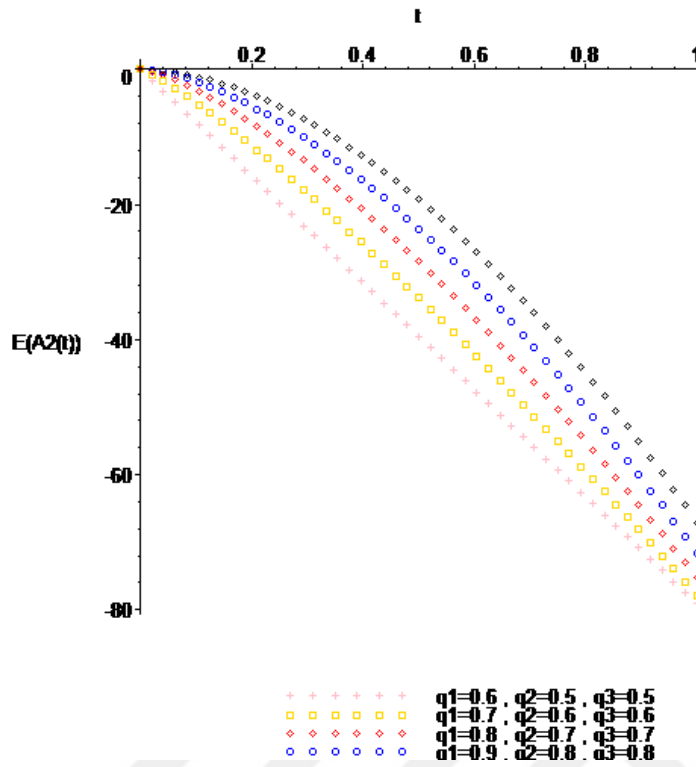
$$L1 = -\frac{62.14285714t^{1.8}}{\Gamma(1.9)^2} \quad (353)$$

$$L2 = -\frac{62.14285714t^{1.6}}{\Gamma(1.8)^2} \quad (354)$$

$$L3 = -\frac{62.14285714t^{1.4}}{\Gamma(1.7)^2} \quad (355)$$

$$L4 = -\frac{62.14285714t^{1.2}}{\Gamma(1.6)^2} \quad (356)$$

$$L5 = -\frac{62.14285714t^1}{\Gamma(1.5)^2} \quad (357)$$



Şekil 42. Hasta kişilerin beklenen değer grafiği

$$VA_2(t) = \frac{731.4795918t^{4*q3}}{\Gamma(1+q3)^4} \quad (358)$$

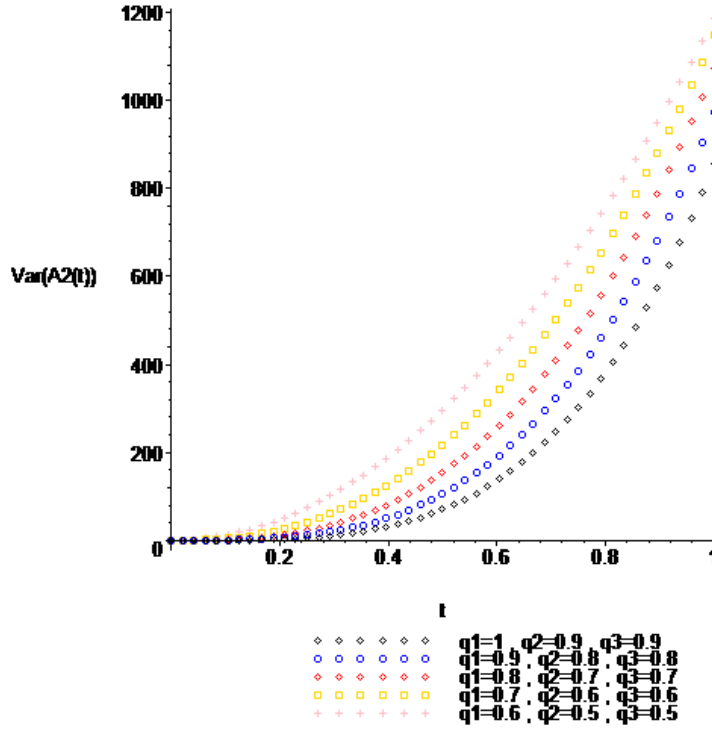
$$L6 = \frac{731.4795918t^{3.6}}{\Gamma(1.9)^4} \quad (359)$$

$$L7 = \frac{731.4795918t^{3.2}}{\Gamma(1.8)^4} \quad (360)$$

$$L8 = \frac{731.4795918t^{2.8}}{\Gamma(1.7)^4} \quad (361)$$

$$L9 = \frac{731.4795918t^{2.4}}{\Gamma(1.6)^4} \quad (362)$$

$$L10 = \frac{731.4795918t^2}{\Gamma(1.5)^4} \quad (362)$$



Şekil 43. Hasta kişilerin beklenen varyans değeri grafiği

2.7.Üç Boyutlu Stokastik HIV/AIDS Modeli

2.7.1.Üç Boyutlu Stokastik Model

Rastgele diferansiyel denklemlerden oluşan rastgele modeller sadece denklemlerle birlikte başlangıç değerlerinin katsayılarının rastgeleliğini modeller. Ancak stokastik diferansiyel denklemleri elde etmek için stokastik etkilerin kullanımı üzerinde düşünülen doğal olaylarda tüm gürültünün modellenmesini sağlar. Bu yüzden biz Wiener süreçlerine göre gürültü koşullarını içeren stokastik diferansiyel denklemleri incelemek için faydalı bilgi sağlar.

$t_0 \leq t \leq T$ üzerinde $X_0 = X_{t_0}$, başlangıç koşulu ile verilen stokastik diferansiyel denklemin çözümü olan $X = X_t$, $t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecini ele alalım. $[t_0, T]$ aralığının $t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$, $(n = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$ şeklindeki ayrışması için Euler-Maruyama yaklaşımı aşağıdaki gibidir.

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{n+1} - W_n). \quad (363)$$

Ardışık yöntemini sağlayan bir $Y = Y_t$, $t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecidir. Milstein yöntemi de analizler için kullanılacaktır. Milstein yaklaşımı,

$$Y_{n+1} = Y_n + a + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'(\Delta W)^2, \quad (364)$$

İterasyonunu sağlayan $t_0 \leq t \leq T$ için $Y = Y_t$ sürecidir. Burada $\Delta = (\tau_{n+1} - \tau_n)$ ' dir. (Kloeden ve Platen, 1992). Bu iki metod $W_i, i = 1,2$ bağımsız Wiener süreçlerinde aşağıdaki stokastik modellerin sayısal incelemesi için kullanılacaktır. HIV/AIDS deterministik modelini stokastik etkiler eklenerek aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem sistemi oluşturulacaktır.

$$dS(t) = (\mu - \beta S(t)I(t) - \mu S(t))dt + Y_1 S(t)dW_1(t) \quad (365)$$

$$dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \delta I(t))dt + Y_2 I(t)dW_2(t) \quad (366)$$

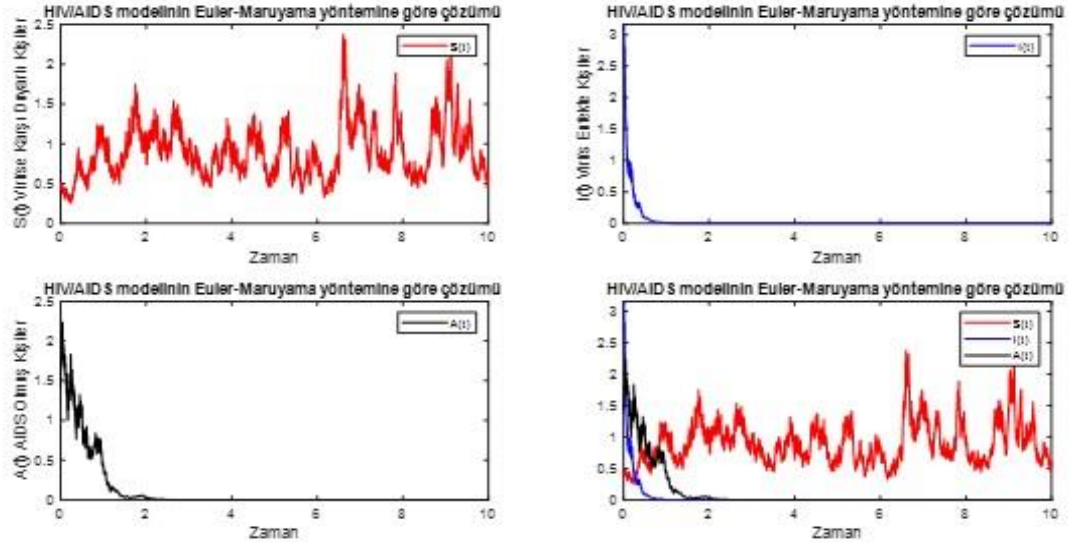
$$dA(t) = (\delta I(t) - \mu A(t) - dA(t))dt + Y_3 A(t)dW_3(t) \quad (367)$$

368-370 modelinde $dW_i(t), i = \overline{1,3}$ ile birbirinden bağımsız Wiener süreçleri ve denkleminde $Y_i, i = \overline{1,3}$ ile stokastik diferansiyel denklemler için birbirinden bağımsız difüzyon katsayıları küçük miktarlar olarak $Y_i = 1, i = \overline{1,3}$ alınacaktır.

2.7.2. Stokastik Sonuçlar

(368 – 370) stokastik denklemlerinin Euler Maruyama ve Milstein yöntemleriyle elde edilen çözümleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

Euler Maruyama Yöntemi: (368 – 370) stokastik denklemlerinin Euler Maruyama Yöntemi ile yaklaşık bir çözümü MATLAB programı yardımıyla elde edilir. Bu yaklaşımın çözümleri aşağıda görüldüğü gibidir.



Şekil 44. HIV/AIDS modelinin Euler-Maruyama yöntemine göre çözümü

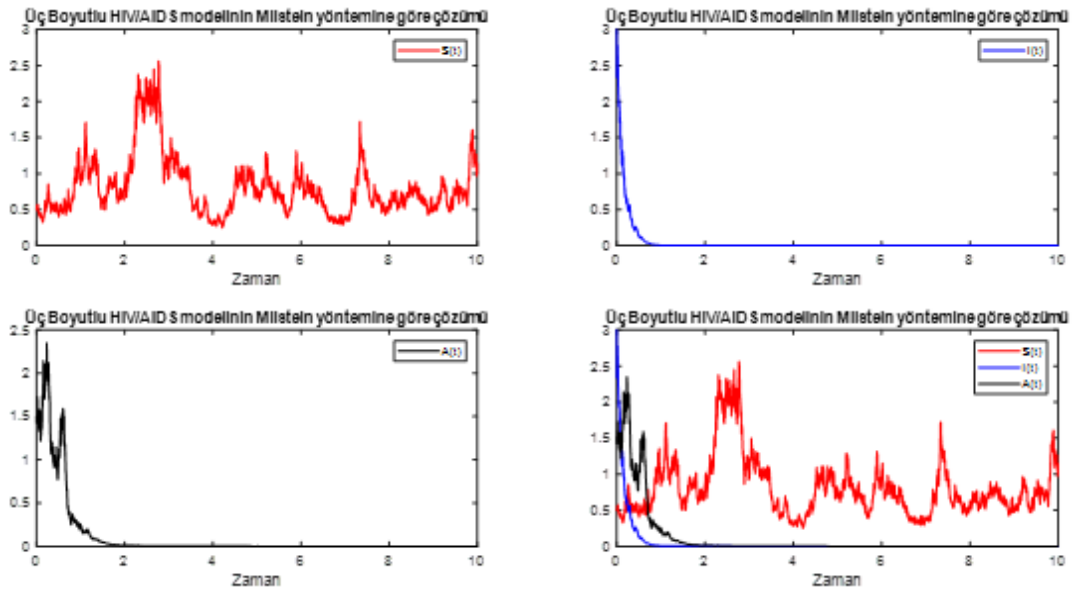
Tablo 5. HIV/AIDS modelinin Euler-Maruyama yöntemine göre aldığı değerler

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
S(t)	2.3771	6.6026	0.252686	0.25188
I(t)	3.15959	1.0000e-3	7.85737e-25	9.9994
A(t)	2.23877	0.0494	5.36179e-15	9.9562

S(t) bileşeni $t=0.2518$ anında 0.252686 minimum değerini alırken, $t=6.6026$ anında 2.3771 maksimum değerini alır.

I(t) bileşeni $t=9.9994$ anında $7.85737e-25$ minimum değerini alırken, $t=1.0000e-3$ anında 3.15959 maksimum değerini alır.

A(t) bileşeni $t=9.9562$ anında $5.36179e-15$ minimum değerini alırken, $t=0.0494$ anında 2.23877 maksimum değerini alır.



Şekil 45. HIV/AIDS modelinin Milstein yöntemine göre çözümü

Tablo 6. HIV/AIDS modelinin Milstein yöntemine göre aldığı değerler

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
S(t)	2.5621	2.7680	0.245942	4.2140
I(t)	3	0	7.8327e-24	9.9360
A(t)	2.34962	0.2320	7.1629e-14	9.98

S(t) bileşeni $t=4.2140$ anında 0.245942 minumum değerini alırken, $t=2.7680$ anında 2.5621 maksimum değerini alır.

I(t) bileşeni $t=9.9360$ anında $7.8327e-24$ minumum değerini alırken, $t=0$ anında 3 maksimum değerini alır.

A(t) bileşeni $t=9.98$ anında $7.1629e-14$ minumum değerini alırken, $t=0.2320$ anında 2.34962 maksimum değerini alır.

3. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, deterministik model ve kesirli mertebeden HIV/AIDS modeli ile rastgele kesirli mertebeden HIV/AIDS modelinin uyumlu olduğu görülmektedir. Modellerden elde edilen sonuçlara göre hastalığın uzun süreli davranışı incelendiğinde hastalığın yayılımının azalarak belli bir dengeye oturduğu gözlenmektedir. Rastgele kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemi ile ilgili literatürde Türkçe kaynağın çok az olduğu görülmektedir. Bu tez çalışması ile bu boşluk küçük bir nebze de olsa doldurulacaktır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacağı öngörülmektedir. Son yıllarda rastgele, kesirli ve stokastik diferansiyel denklemler üzerine çok fazla çalışmalar literatürde yer almaktadır.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada kesirli mertebeden HIV/AIDS modelinde başlangıç koşulları ya da katsayıları sürekli zamanlı olasılık dağılımları olan normal, beta, düzgün ve üstel dağılımlar yardımıyla rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Bu dönüştürülen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer ve varyans hesaplanmıştır. Rastgele kesirli mertebeden HIV/AIDS Modelini çözmek için yaklaşık analitik yöntemlerinden literatürde en sık kullanılan DTM olan ve varyansiyonel iterasyon yöntemlerinden faydalanılmıştır. HIV/AIDS modeli stokastik hale getirilerek Milstein ve Euler Mariyama yöntemleri yardımıyla çözümler elde edilmiştir. Bunun yanısıra elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer ve varyans grafikleri Matlab 2013a ve Maple13 paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada kesirli mertebeden HIV/AIDS modeli rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri araştırılmıştır. Benzer şekilde farklı salgın hastalık (Dang Humması, Hepatit-B, Hanta Virüs, Ebola, Covid -19, Mers, Sars) modelleri kesirli mertebeden rastgele hale getirilerek araştırılabilir. Bunun yanı sıra Volterra ve Fredholm integral denklemleri kesirli mertebeden rastgele hale getirilerek incelenebilir. Ayrıca kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan kısmı diferansiyel denklemler rastgele hale getirilerek olasılık karakteristikleri incelenebilir. Lineer olmayan kesikli mertebeden rastgele diferansiyel denklem sistemleri literatürde mevcut olan Homotopi Analiz, Homotopi Pertürbasyon ve Adomian ayrışım yöntemleri yardımıyla yaklaşık analitik çözümleri bulunabilir.

KAYNAKÇA

- Akgül, Ö., Çalışkan, R. ve Öner, Y. A. (2018). HIV/AIDS: güncel yaklaşımlar. *Tıp Fakültesi Klinikleri*, 1(1), 19-31.
- Anderson, R. M. (1990). Mathematical and statistical studies of the epidemiology of HIV. *AIDS*, 4, 107.
- Bervillier, C. (2012). Status of the differential transformation method. *Applied Mathematics and Computation*, 218(20), 10158-10170.
- Bekiryazıcı, Z. ve Hasımoğlu, S. (2022). Comparison of a random model of Hand-Foot-Mouth Disease model with Gaussian and Laplacian parameters. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 12(1), 200-210.
- Burgard, M., Jasseron, C., Matheron, S., Damond, F., Hamrene, K. ve Blanche, S. (2010). Mother-to-child transmission of HIV-2 infection from 1986 to 2007 in the ARNS French Perinatal Cohort EPF-CO1. *Clin Infect Dis*, 51, 833-843.
- Choi, S. C. ve Wette, R. (1969). Maximum likelihood estimation of the parameters the gamma distribution and their bias. *Technometrics*, 11(4), 683-692.
- Clavel, F., Guétard, D., Brun-Vézinet, F., Chamaret, S., Rey, M. A., Santos-Ferreira, M. O,... Montagnier L. (1986). Isolation of a new human retrovirus from West African patients with AIDS. *Science*, 233(4761), 343-346.
- El-Metwally, H., Sohaly, M. A. ve Elbaz, I. M. (2020). Stochastic global exponential stability of disease-free equilibrium of HIV/AIDS model. *The European Physical Journal Plus*, 135(10), 840.
- Emvudu, Y. ve Bongor, D. (2012). Mathematical analysis of a HIV/AIDS model with treatment. *IEJPAM*, 4.
- Erbaş, O. S. (2020). *Olasılık ve İstatistik*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Ertürk, V. S. ve Momani, S. (2008). Solving systems of fractional differential equations using differential transform method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1, 142-151.
- Feller, W. (1991). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. (5. Baskı), London: John Wiley & Sons Inc.

- Gökdoğan, A., Merdan, M. ve Yildirim, A. (2012). Adaptive multi-step differential transformation method to solving nonlinear differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 55, 761-769.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method, a kind of nonlinear analytical technique, some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34, 699-708.
- He, J. H. (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 114, 115-123.
- İbiş, B. (2011). *Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri*. Yayımlanmamış doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Karaarslan, G. (2019). *Biyokimyasal reaksiyon modelinin rastgele özelliklerinin farklı olasılık dağılımları ile incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Khatib, A. (2016). *Differential transform method for differential equations, master program of science thesis, palestine polytechnic university deanship of graduate studies and scientific research*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Hebron Üniversitesi, Batı Şeria.
- Kolmogorov, A. N. (2018). *Foundations of The Theory of Probability*. Newyork: Chelsea Basım Şirketi.
- Kirschner, D. (1996). Using mathematics to understand HIV immune dynamics. *Notices Of The American Mathematical Society*, 43(2), 191-202.
- Lüleci, G. (2019). *Kesirli mertebeden difüzyon denklemi içi başlangıç sınır değer probleminin çözümü*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. London: John Wiley & Sons.
- Öksüz, Ö. (2012). *Genişletilmiş varyasyonel iterasyon yöntemi ile bazı lineer olmayan problemlerin çözümü*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- Pukhov, G. E. (1982). Differential transforms and circuit theory. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 10, 265-276.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering*. San Diego: Akademik Basım.

- Rashidi, M. M. (2009). The modified differential transform method for solving MHD boundary-layer equations. *Computer Physics Communications*, 180, 2210-2217.
- Rashidi, M. M. ve Erfani, E. (2011). The modified differential transform method for investigating nano boundary- layers over stretching surfaces. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 21, 864-883.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*. Yverdon: Gordon ve Breach.
- Sulukan, E. E., Küçükoğlu, K. ve Gül, H. İ. (2009). AIDS ve tedavisinde kullanılan ilaçlar. *Ankara Eczacılık Fakültesi Dergisi*, 38, 47-48.
- URL-1, <https://hsgm.saglik.gov.tr/tr/bulasici-hastaliklar/HIV-AIDS/HIV-AIDS-liste/HIV-AIDS-istatistik.html>. 14 Aralık 2021.
- URL-2, https://www.who.int/images/default-source/departments/hiv/summary-of-the-global-hiv-epidemic-2020.png?sfvrsn=73ac5b6a_5. 10 Aralık 2021.
- URL-3, <http://bc.i.pl/6ICSA/uploads/laura-villafuerte-altuzar.pdf>. 10 Kasım 2021.
- URL-4, https://cdn.who.int/media/docs/default-source/hq-hiv-hepatitis-and-stis-library/2021_global_summary_web_v32.pdf?sfvrsn=4b8815ad_37. 01 Kasım 2021.
- Vyambwera, M. (2014). *Mathematical modelling of the HIV/AIDS epidemic and the effect of public health education*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Western Cape Üniversitesi, Güney Afrika.
- Zafar, A. U. Z., Rehan, K. ve Mushtaq, M. (2017). HIV/AIDS epidemik fractional-order model. *Journal of Diierence Equations and Applications*, 23, 1298-1315.
- Zhou, J. K. (1986). *Differential transformation and its applications for electrical circuits*. Wuhan: Huazhong Üniversitesi Basımı.
- Zinyemba, P. T., Pavlova, M. ve Groot, W. (2020). Effects of HIV/AIDS on children's educational attainment: a systematic literature review. *Journal of Economic Surveys*, 34, 35-84.
- Worobey, M., Gemmel, M., Teuwen, D. E., Haselkorn, T., Kunstman, K. ve Bunce, M. (2008). Direct evidence of extensive diversity of HIV-1 in Kinshasa by 1960. *Nature*, 455, 661-664.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Gümüşhane’de tamamlamıştır. Lisans eğitimini Karadeniz Teknik Üniversitesi İlköğretim Matematik bölümünde tamamlamıştır. ÖKTEM, Gümüşhane Milli Eğitim Müdürlüğü Ölçme Değerlendirme Merkezi Müdürlüğü görevini yürütmektedir. İyi seviyede İngilizce bilmektedir.

