

OCAK 2019

Yüksek Lisans Matematik

FULYA ŞAHANTÜRK

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVLER VE
İLGİLİ NÜMERİK METOTLAR

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FULYA ŞAHANTÜRK
OCAK 2019

Kesirli Türevler ve İlgili Nümerik Metotlar

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Fulya ŞAHANTÜRK

Ocak 2019



© 2019 [FULYA ŞAHANTÜRK]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Kesirli Türevler ve İlgili Nümerik Metotlar

Öğrencinin, Adı Soyadı: Fulya ŞAHANTÜRK

Tez Savunma Tarihi: 25.01.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Bölüm Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

.....

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Fulya ŞAHANTÜRK

ABSTRACT

FRACTIONAL DERIVATIVES AND RELATED NUMERICAL METHODS

ŞAHANTÜRK, Fulya

M.Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Ocak 2019

45 pages

The notions of arbitrary order derivative and integral are extended form non-integer-order derivative and integral. In the recent years, it has been applied extensively in mathematics, physics, biology and engineering branches. Since the derivative determines the rate of change of physical events, fractional-order derivatives close the openings that cannot be calculated by integer-order derivatives. There are many definitions of fractional derivative in literature. Having more than one definition allows to use the most suitable one according to the type of problem and thus to obtain the best solution of the problem. Some of these definitions are Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives.

In this study, the Caputo fractional derivative, which is more advantageous since it contains initial values, have been used. This derivative is applied to some known functions and the results have been given in table form. Then, this derivative, with use of Algorithm 1 and Gauss-Jacobi rule have been examined. A new method has been created with the transformation we applied to Gauss-Jacobi and with the help of Jacobian matrix. This method has been applied to selected functions and very efficient results have been obtained.

Key Words: Fractional Derivative and İntegral, Caputo Fractional Derivative, Gauss-Jacobi Rule, Caputo's Numerical Solutions

ÖZET

KESİRLİ TÜREVLER VE İLGİLİ NÜMERİK METOTLAR

ŞAHANTÜRK, Fulya

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

Ocak 2019

45 sayfa

Keyfi mertebeden türev ve integral kavramları, tamsayı mertebeden türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş şeklidir. Son yıllarda ise matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş kapsamlı uygulanmıştır. Çünkü türev fiziksel olayların değişim hızını belirlediğinden kesirli mertebeden türevler tam sayılı mertebeden türevlerin hesaplayamadığı açıklıkları kapatmaktadır. Literatürde kesirli türevin birçok tanımı mevcuttur. Birden fazla tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının seçilmesini ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Bu tanımların bazıları Grünwald-Letnikov, Riemann- Liouville ve Caputo kesirli türevleridir.

Bu çalışmada, başlangıç değerlerini içerdiğinden dolayı daha avantajlı olan Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. Bu türev bilinen bazı fonksiyonlara uygulanmış ve sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Daha sonra Algoritma 1 ve Gauss-Jacobi kuralı ile birlikte kullanımları incelenmiştir. Gauss-Jacobi' ye uyguladığımız dönüşüm ve Jacobi matrisi yardımı ile yeni bir metot oluşturulmuştur. Oluşturulan bu metot seçilen bazı fonksiyonlara uygulanmış ve çok iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegral, Caputo Kesirli Türevi, Gauss-Jacobi Kuralı, Caputo'nun Nümerik Çözümleri



Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK 'e, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT.....	v
ÖZET	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SEMBOLLER LİSTESİ	xii
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: HESAPLAMADA KULLANILAN YARDIMCI FONKSİYONLAR.....	3
2.1 Gama Fonksiyonu.....	3
2.2 Beta Fonksiyonu	7
2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu.....	9
2.4 Abel İntegral Testi	10
BÖLÜM 3: KESİRLİ İNTEGRAL ve KESİRLİ TÜREVLER.....	11
3.1 Kesirli İntegrallerin Ortaya Çıkışı.....	15
3.2 Kesirli Türev Tanımları.....	18
3.3 Caputo Kesirli Türevi ile İlgili Bazı Teoremler.....	19
3.4 Bilinen Bazı Fonksiyonların Hesabı.....	22
3.4.1 Sabit Fonksiyonların Hesabı.....	22
3.4.2 Kuvvet Fonksiyonların Hesabı.....	23
3.4.3 Üstel Fonksiyonların Hesabı.....	25
3.4.4 Trigonometrik Fonksiyonların Hesabı.....	26
3.5 Örnekler.....	26
BÖLÜM 4: NÜMERİK METOTLAR.....	30
4.1 Algoritma 1.....	34
4.2 Gauss-Jacobi Kuralı ile Hesabı.....	34
4.3 Algoritma 1 ve Gauss-Jacobi Kuralının Caputo ile Karşılaştırması.....	36
BÖLÜM 5: SONUÇ.....	40
KAYNAKLAR.....	41
EKLER.....	43

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1 Gama Fonksiyonunun bazı sayısal eşitlikleri.....	6
Tablo 4.1 Caputo'nun yaklaşık nümerik değerleri.....	34
Tablo 4.2 $f(x) = x$ için değerleri	37
Tablo 4.3 $f(x) = x^2$ için değerleri.....	37
Tablo 4.4 $f(x) = x^3$ için değerleri.....	38
Tablo 4.5 $f(x) = e^x$ için değerleri.....	38

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Gama Fonksiyonun $[-5,5]$ aralığındaki grafiği.....5

Şekil 4.1 $f(x) = x$ 'in $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ için değerlerinin grafiği.....33

Şekil 4.2 $f(x) = x^2$ 'in $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ için değerlerinin grafiği.....33

SEMBOLLER LİSTESİ

$\Gamma(n)$	Gama Fonksiyonu
$\beta(m, n)$	Beta Fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$h_r(z, n)$	n. Mertebeden Hiperbolik Fonksiyonların Genelleştirilmiş Formülü
$t_r(z, n)$	n. Mertebeden Trigonometrik Fonksiyonların Genelleştirilmiş Formülü
${}^GL_a D_x^\alpha$	α . Mertebeden Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi
${}_a D_x^\alpha$	α . Mertebeden Riemann – Liouville Kesirli Türevi
J_a^α	α . Mertebeden Riemann – Liouville Kesirli İntegrali
${}_a D_x^\alpha f(x)$	α . Mertebeden Caputo Kesirli Türevi
I	Özdeşlik Fonksiyonu
$T_{n-1}[f; a]$	f Fonksiyonunun a Noktasında Ürettiği da (n – 1). Dereceden Taylor Polinomu
x_n	Nokta Sayısı
$J_n(x, \lambda, \beta)$	Jacobi Polinomları
x_k	$J_n(x, \lambda, \beta)$ Şeklinde Gösterilen Jacobi Polinomlarının Sıfırları
A_k	Ağırlık Fonksiyonu
${}^{GJ}_a D_x^\alpha f(x)$	Caputo Kesirli Türevinden Elde Edilen Gauss-Jacobi Formülü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Literatürde kesirli mertebeden türevin birçok tanımı mevcuttur. İlk kez 1697’ de Leibnitz ile başlayıp daha sonra 19. yy’da Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Grunwald, Letnikov, Lacroix gibi birçok ünlü matematikçi de bu konuyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Grünwald -Letnikov kesirli mertebeden türev ile Riemann – Liouville kesirli mertebeden türev ve integral tanımları verilmiştir. 20. yüzyılın ortalarında ortaya atılan ve literatürde sıklıkla kullanılan Caputo kesirli mertebeden türev tanımı yapılmıştır.

Son yıllarda kesirli mertebeden türev üzerine çok sayıda çalışma yapılmış bilim ve mühendisliğin birçok dallarında fiziksel şekillendirme de kullanılmıştır. Bunun sebebi ise, fiziksel sistemlerin kesirli mertebeden türev ile daha iyi ifade edilebilir olmasıdır. Çünkü tamsayı mertebeli türevin fiziksel şekillendirme de yetersiz kaldığı yerlerde kesirli mertebeli türevin daha iyi sonuç vermesidir. Bu yüzden kesirli mertebeden türev ve integral tanımları tam sayılı mertebeden olan türev ve integral kavramlarının genişletilmiş halidir. Fiziksel anlamda tam sayılı mertebeden türevlerin ifade edemediği yerlerde kesirli mertebeden türevler hesaplamayı kolaylaştırır. Bu hesaplamalar için 3. bölümde bahsedeceğimiz farklı fonksiyonlar için birçok tanımlar verilmiştir ve bu da problemin çeşidine göre en uygun olanının kullanılması ile problemde en iyi sonucun elde edilmesini sağlar. İlk önce n-katlı integral ve türevlerin sonsuz dizisini ele alalım:

$$\dots, \int_a^t d\mu_2 \int_a^{\mu_2} f(\mu_1) d\mu_1, \quad \int_a^t f(\mu_1) d\mu_1, \quad f(t), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \dots$$

Kesirli mertebeden türevler için kısa isim, kesirli türevlerdir ve ${}_a D_t^\alpha f(t)$ şeklinde gösterilir. Burada a ve t alt sembolleri, kesirli türevlerin integral aralığını belirtmektedir. Buna kesirli türevlerin terminalleri (uç noktaları) denilir,[1].

Kesirli türevlerin sembolündeki terminallerin görünümü esastır. Bu, kesirli türevlerin uygulamalarındaki belirsizlikleri gerçek problemleri önlemeye yardımcı olur. α 'nın negatif değerleri içinde ${}_aD_t^{-\alpha}f(t) = J_a^\alpha f(t)$ şeklinde kesirli integral tanımlanabilir. Bunun gösterim şekli de kesirli türevler ile aynıdır.

Bu tezde, Bölüm 2’de hesaplamada yardımcı olacak bazı özel tanımlı fonksiyonlar özetlenecektir.

Bölüm 3’te integral ve türev arasındaki ilişki, kesirli türevlerin ortaya çıkışı Grünwald-Letnikov kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integrali ve türev tanımları verilip özelliklerine kısaca değindikten sonra asıl konumuz olan Caputo kesirli türevinden bahsedilecek ve bilinen bazı fonksiyonlara uygulanarak örneklerle analitik çözümleri elde edilecektir.

Bölüm 4’te ise Caputo’nun tanımında fonksiyonların nümerik hesabı için α ’ya değerler vererek çözümler elde edilecektir. Ayrıca bu bölümde Algoritma 1 ve Caputo’ya dönüşüm uygulayarak oluşturulan ${}^GJ_{*a}D_x^\alpha$ tanımı Jacobian matrisi yardımıyla Mathematica [11] ile nümerik olarak elde edilecek Matlab [13] ile şekiller oluşturulacaktır. Daha sonra bu değerler tablolarla ifade ederek hata miktarları verilecektir.

BÖLÜM 2

HESAPLAMADA KULLANILAN YARDIMCI FONKSİYONLAR

Bu bölümde klasik türevden yola çıkılarak kesirli mertebeden türevleri hesap etmek için yardımcı fonksiyonlar kullanılmaktadır, ([1,s.6],[7]). Bu fonksiyonlar kesirli türevlerin hesaplanmasında en önemli rolü oynar. Bu yüzden, ilerleyen bölümlerde analitik ve nümerik hesaplamalarda kullanacağımız için kesirli mertebeden türevlerin bazı tanımlarını ve özelliklerini vermeden önce bu yardımcı fonksiyonların tanımlarını vereceğiz.

2.1 Gama Fonksiyonu: Gama fonksiyonu, n 'nin pozitif değerleri için Euler integrali dediğimiz

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Burada $\Gamma(n)$, n 'nin pozitif değerleri için yakınsaktır. n 'nin bazı değerleri için (2.1) denklemin değerlerini ve özelliklerini inceleyelim:

$n=1$ için;

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - e^{-T}) = 1$$

elde edilir.

n yerine $n+1$ yazılırsa ,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (x^n)(e^{-x}) \Big|_0^T - \int_0^T (-e^{-x})(nx^{n-1}) dx \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (-T^n)(e^{-T}) + n \int_0^T (x^{n-1})(e^{-x}) dx \right\} = n\Gamma(n)$$

elde edilir. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n = 1, 2, \dots$ için değerler verilirse ;

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

elde edilir. Burada tüm n değerleri pozitif tamsayı olarak alınmıştır. Ayrıca $n > -1$ için her hangi bir reel sayı olabileceğinden $\Gamma(n+1)$ tanımlı olur, bu yüzden de yakınsaktır. Faktöriyel değerleri -1 den büyük olan tüm değerler için tanımlayabileceğimizden bu Gama fonksiyonuna *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denilir. Üstelik yukarda verilen $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ eşitliğinden $\Gamma(n)$ çekilirse

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

eşitliği elde edilir ve $\Gamma(n)$, n ' nin tamsayı olmayan tüm negatif değerleri için tanımlı hale gelir. Örneğin; $n = -\frac{1}{2}$ alırsak ;

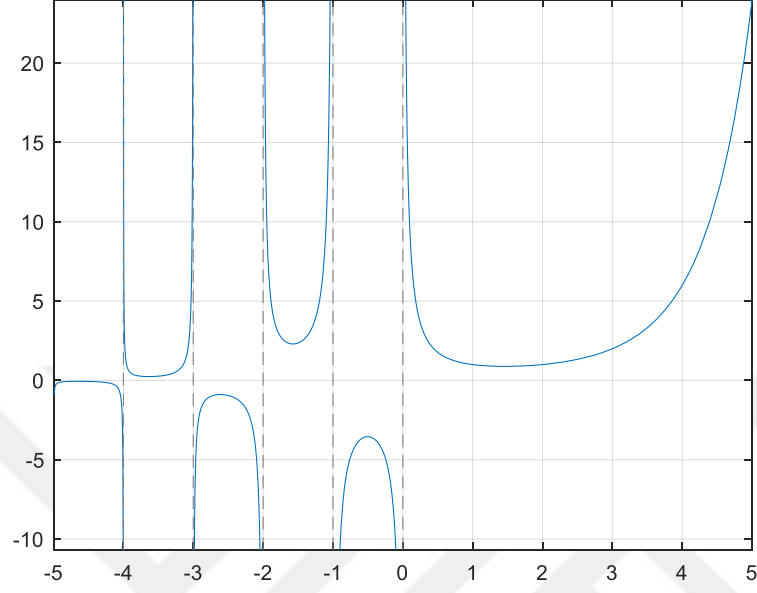
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

$n = -\frac{3}{2}$ alırsak ve $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ ' yi kullanırsak

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

elde edilir. Burada Gama fonksiyonu n 'nin negatif tamsayı değerleri için sonsuza giderken, $n = 0$ için $\Gamma(0)$ tanımsız olur. Bununla ilgili olarak Gama fonksiyonunun $[-5,5]$ aralığındaki grafiği Şekil 2.1 ve bazı sayısal eşitlikleri Tablo 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1 Gama Fonksiyonunun $[-5,5]$ aralığındaki grafiği

Tablo 2.1 Gama Fonksiyonunun bazı sayısal eşitlikleri

$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$	$-\frac{32\sqrt{\pi}}{945}$
$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$	$\frac{16\sqrt{\pi}}{105}$
$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$	$-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$
$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
$\Gamma(4)$	6
$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$	$\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$
$\Gamma(5)$	24

2.2 Beta Fonksiyonu:

Beta fonksiyonu, $m > 0, n > 0$ için

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Bu integrale $x = 1 - y$ dönüşümü uygulanırsa $dx = -dy$ olur ve

$$\begin{aligned}\beta(m, n) &= - \int_1^0 (1-y)^{m-1} (1-(1-y))^{n-1} dy \\ &= \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy = \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{m-1} dy\end{aligned}$$

integrali elde edilir. Ayrıca

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{m-1} dy = \beta(n, m)$$

olduğundan m ile n arasında değişme özelliği vardır. Yani $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ ' dir.

Buna Beta fonksiyonunun *simetri özelliği* denir, [14].

Şimdi Beta ile Gama fonksiyonu arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Beta fonksiyonuna $x = \sin^2 \theta$ dönüşümü uygulanırsa $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ olur.

İntegralde yerine yerleştirilirse sınırlar $\sin^2 \theta = 1$ den $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\sin^2 \theta = 0$ dan

$\theta = 0$ olur. Böylelikle;

$$\begin{aligned}\beta(m, n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta^{m-1} (1 - \sin^2 \theta)^{n-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta^{2m-2} \cos \theta^{2n-2} \sin \theta \cos \theta d\theta\end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta^{2m-1} \cos \theta^{2n-1} d\theta$$

eşitliği elde edilir. Gama fonksiyonunda $x = y^2$ alınırsa;

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{2n-2} e^{-y^2} 2y dy = 2 \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \quad (2.2)$$

bulunur. Aynı şekilde Gama fonksiyonu

$$\Gamma(m) = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin her iki tarafını çarparsak,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

olup, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ dönüşümüyle kutupsal koordinatlara geçerek,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-2} e^{-r^2} (\cos\theta)^{2m-1} (\sin\theta)^{2n-1} r dr d\theta$$

çarpımı elde edilir. İntegrali düzenlersek,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= \underbrace{\left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2m-1} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta \right]}_{\text{Beta Fonksiyonu}} \underbrace{\left[2 \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-2} e^{-r^2} dr \right]}_{\text{Gama Fonksiyonu}} \\ &= \beta(m, n) \cdot \Gamma(m+n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Gama ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

bulunmuş olur.

2.3 Mittag – Leffler Fonksiyonu:

Tanım 2.3.1: $z \in \mathbb{C}$ için

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0$$

ile tanımlanan E_{α} fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α mertebeli Mittag – Leffler fonksiyonu denir. Bu gösterim Mittag – Leffler fonksiyonunun bir parametrelili gösterimidir,[1].

Tanım 2.3.2: $z \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

ile tanımlanan $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α ve β parametreleri ile birlikte *iki parametrelili (genelleştirilmiş) Mittag – Leffler fonksiyonu* denir. Mittag – Leffler fonksiyonunun bazı eşitlikleri aşağıda verilmiştir,[1].

1. $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag – Leffler fonksiyonu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}$$

eşitliğini sağlar.

2. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ için

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

3. $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ için

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

4. $\alpha = 1$ ve $\beta = 3$ için

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

genelleştirilirse,

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right]$$

olarak elde edilir.

5. $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ için

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

6. $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ için

$$E_{1,3}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z)$$

Biz buradaki verdiğimiz (5). ve (6). eşitliklerin n. mertebeden hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonların genelleştirilmiş formülünü Mittag-Leffler fonksiyonu ile ifade edebiliriz. Bu formüller sırasıyla;

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

ve

$$t_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

şeklindedir.

2.4 Abel İntegral Denklemini :

Tanım 2.3.3: $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \varphi(s) (t-s)^{\alpha-1} ds, \quad t > 0$$

şeklinde tanımlanan integral denklemine *Abel İntegral denklemini* denir, [10].

BÖLÜM 3

KESİRLİ İNTEGRAL ve KESİRLİ TÜREVLER

Türev ve integral; teknolojinin ilerlemesinde, fen, matematik, mühendislik gibi uygulamalı bilim dallarının çoğunda basit ve karmaşık sistemlerin çözümlenmesinde kullanılan en önemli kavramlardan biridir. Kesirli integralin ve türevin temeli bu kavramlara dayanmaktadır. Bu yüzden de ilk önce integral ile türev arasındaki ilişkiyi inceleyip daha sonrasında kesirli integral ve türeve geçiş yapalım, [1]. $y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım, $f(t)$ fonksiyonunun türev tanımıyla

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (3.3)$$

...

...

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (3.4)$$

ardışık türevlerinden $f(t)$ 'nin genel türev formülü elde edilir. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!} \quad (3.5)$$

n ve r sabitleri için genel binom gösterimidir. $p \in \mathbb{Z}$ için (3.1)-(3.4) eşitliklerinden

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \quad (3.6)$$

elde edilir ve (3.5) ifadesinde $\binom{p}{p}$ teriminden sonraki bütün terimler sıfır bulunacağından $p \leq n$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p}$$

bulunur. Şimdi p 'nin negatif değerleri için genel binom gösterimi yazma kolaylığından faydalanılarak

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{r!}$$

gösterimi kullanılırsa

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2) \dots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklinde yazabiliriz ve (3.6) eşitliğinde p yerine $-p$ yazıp (3.7) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} f_h^{(-p)}(t) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ &= h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir ve burada p pozitif tamsayıdır.

Eğer n sonlu bir değer alınırsa, $h \rightarrow 0$ için $f_h^{(-p)}(t)$ sıfıra yakınsar. Sıfıra yakınsamaması için $n \rightarrow \infty$ kabul etmemiz gerekir. Bu yüzden, $a \in \mathbb{R}$ için $h = \frac{t-a}{n}$ adım aralığına parçalayıp $f_h^{(-p)}(t)$ limitini hesaplayabiliriz. İlk olarak denklemimizi

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{(-p)} f(t)$$

eşitliği ile yazalım ve p nin tamsayı değerleri için inceleyelim.

$p = 1$ için,

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh)$$

bulunur. $t - nh = a$ ve $f(t)$ fonksiyonunu sürekli varsayalım,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) &= {}_a D_t^{(-1)} f(t) \\ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \sum_{r=0}^n f(t - rh) &= \int_0^{t-a} f(t - z) dz \quad \boxed{t - z = \tau} \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

bulunur. $p = 2$ için

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3. \dots .(2 + r - 1)}{r!} = r + 1$$

ise

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = h \sum_{r=0}^n (r + 1) f(y - rh) , \quad \boxed{t + h = y}$$

dönüşümünden

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} r h f(y - rh)$$

elde edilir ve $h \rightarrow 0$ iken

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{(-2)} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz \quad \boxed{t - z = \tau}$$

dönüşümünden

$$= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau$$

elde edilir. Burada h , sıfıra yakınsadığı için y de t ye yakınsar.

$p = 3$ için

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4. \dots .(3 + r - 1)}{r!} = \frac{1}{1.2} (r + 1)(r + 2)$$

ve

$$f_h^{(-3)}(t) = h \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2)h^2 f(t - rh) , \quad \boxed{t+h=y}$$

denilirse

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (r)(r+1)h^2 f(y - rh)$$

bulunur.

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh)$$

dir. Böylelikle burada h , sıfıra yakınsadığı için y de t ye yakınsar ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} h \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = 0$$

bulunduğundan

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_a D_t^{(-3)} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t - z) dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau$$

elde edilir. Buradan genel gösterim,

$${}_a D_t^{(-p)} f(t) = f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde elde edilir. Şimdi burada bulduğumuz son ifadenin bir p -katlı integral olduğunu göstermek için her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{d}{dt} \left({}_a D_t^{(-p)} f(t) \right) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t - \tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{(-p+1)} f(t)$$

bulunur ve a dan t ye integral alırsak,

$${}_a D_t^{(-p)} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{(-p+1)} f(t) \right) dt$$

$${}_a D_t^{(-p+1)} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{(-p+2)} f(t) \right) dt$$

ardışık integralleri birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{(-p)} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{(-p+2)} f(t) \right) dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{(-p+3)} f(t) \right) dt \\
&= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \dots \int_a^t f(t) dt}_{p\text{-defa}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle türev ve integral işlevi bir gösterim altında birleştirilmiş olup genel gösterimi de

$${}_a D_t^{(-p)} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \quad (3.9)$$

şeklinde. Burada merteye $p = n$ ise n . mertebeden türev, $p = -n$ ise n . mertebeden integral formülü elde edilir. p nin tamsayı olmaması halinde ise daha sonra J_a^α ile gösterdiğimiz Riemann-Liouville kesirli integrali tanımlanacaktır.

3.1 Kesirli İntegrallerin Ortaya Çıkışı :

Biz bu alt başlıkta ardıl integralin tanımından yola çıkarak ilk önce kesirli integralin sonrasında kesirli türevin farklı yaklaşımlarla nasıl oluşturulduğunu ve buna bağlı olarak tanımlarını vereceğiz, [1]. Kesirli integralin oluşumuna yardımcı olan Abel integrali [10] ve n-katlı integralden yola çıkarak

$$\int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \int_a^{\mu_3} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n d\mu_{n-1} \dots d\mu_2 d\mu_1 \quad (3.10)$$

integralini ele alalım. Bu integralin integrasyon sırasını ve sınırlarını yer değiştirirsek

$$\begin{array}{ll}
a < \mu_1 < x & \mu_2 < \mu_1 < x \\
a < \mu_2 < \mu_1 & \mu_3 < \mu_2 < x \\
\dots & \dots \\
a < \mu_{n-1} < \mu_{n-2} & \mu_n < \mu_{n-1} < x \\
a < \mu_n < \mu_{n-1} & a < \mu_n < x
\end{array}$$

n- katlı integrali

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \int_a^{\mu_3} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n \dots d\mu_1 \\
&= \int_a^x \int_{\mu_n}^x \int_{\mu_{n-1}}^x \dots \int_{\mu_2}^x f(\mu_n) d\mu_1 \dots d\mu_n \\
&= \int_a^x f(\mu_n) \left(\int_{\mu_n}^x \dots \int_{\mu_3}^x \left(\int_{\mu_2}^x d\mu_1 \right) d\mu_2 \dots d\mu_{n-1} \right) d\mu_n \quad (3.11)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.11) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_{\mu_2}^x d\mu_1 = (x - \mu_2) \\
& \int_{\mu_3}^x (x - \mu_2) d\mu_2 = \frac{(x - \mu_3)^2}{2!} \\
& \dots \\
& \int_{\mu_n}^x (x - \mu_{n-1}) d\mu_{n-1} = \frac{(x - \mu_n)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \int_a^{\mu_3} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n \dots d\mu_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\mu_n) (x - \mu_n)^{n-1} d\mu_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\mu_n) (x - \mu_n)^{n-1} d\mu_n \quad (3.12)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ dir. Bundan sonra yapacağımız hesaplamalarda bu integral baz alınarak kesirli türev tanımları oluşturulacak ve problem çözümlerinde hangi tanım daha avantajlıysa o kullanılacaktır. Ayrıca eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif tamsayıdır ancak gama fonksiyonu negatif değerler içinde hesaplanabileceğinden aşağıdaki kesirli integral tanımı meydana gelir.

Tanım 3.1.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. $a \leq x \leq b$ için $L_1[a, b]$ de

$$J_a^\alpha f(x) = D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \geq a \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanan J_a^α integraline, α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali denir, [1,5,9]. Ayrıca

- Özdeşlik fonksiyonu: $J_a^0 f(x) = f(x)$ dir. Yani $J_a^0 = I$ dir.
- Lineerlik: $J^\alpha (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda J^\alpha f(x) + J^\alpha g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{C}$
- Eğer $f(x)$, $x \geq 0$ için sürekliyse ;

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J^\alpha f(x) = f(x)$$

$$J^\alpha (J^\beta f(x)) = J^\beta (J^\alpha f(x)) = J^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{C}$$

özellikleri sağlanır.

İspat: İspat için bkz [9].

Teorem 3.1.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $Re(c) > -1$ için $f(x) = (x-a)^c$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J_a^\alpha [(x-a)^c] = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\alpha+1)} (x-a)^{c+\alpha} \quad (3.14)$$

şeklinde, [1,5,9].

İspat:

$$J_a^\alpha [(x-a)^c] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (x-a)^c dx$$

$(t = a + u(x-a), dt = (x-a)du)$ dönüşümünden ve $\left. \begin{matrix} x=a+u(x-a) \\ a=a+u(x-a) \end{matrix} \right\}$ olduğundan dolayı sınırlar 0 ile 1 aralığına gelir ve

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^c (x-a)^c (x-a) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{c+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^c du \\
&= \frac{\beta(\alpha, c+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{c+\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\alpha+1)} (x-a)^{c+\alpha}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $a = 0$ alırsak eşitlik

$$J_0^\alpha (x^c) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\alpha+1)} (x)^{c+\alpha}$$

halini alır,[9].

Teorem 3.1.2: $\alpha \geq 0$ ve $\mu > 0$ için $f(x) = e^{\mu x}$ olsun.

$$J_a^\alpha e^{\mu x} = (x-a)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\mu(x-a)]^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} \quad (3.15)$$

dir, [1,9].

İspat: İspat için bkz [9].

3.2 Kesirli Türev Tanımları

Biz bu tezde Caputo kesirli türev üzerinde diğerlerine göre daha çok çalıştığımız için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türevlerinin tanımını ve birkaç özelliklerini bu alt başlıkta kısaca vereceğiz, [1-3,9].

Tanım 3.2.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n-1 < \alpha < n$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^k(x)$, ($k=1, 2, 3, \dots, n+1$) türevleri ile $[a, x]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde

$${}^{GL}D_a^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(a)(x-a)^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanan ${}^{GL}D_a^\alpha$ türevine α .mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi denir.

Tanım 3.2.2: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olsun. $a \leq x \leq b$ için

$$D_a^\alpha f(x) = D^n J_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanan D_a^α türevine, α . mertebeden Riemann – Liouville kesirli türevi denir. $\alpha = 0$ için özdeşlik fonksiyonu $D_a^\alpha = I$ dir. Yani $D_a^\alpha f(x) = f(x)$ ’dir, [5].

Lemma 3.2.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ öyle ki $n > \alpha$ olsun. Bu durumda,

$$D_a^\alpha = D^n J_a^{n-\alpha}$$

dır, [5,9].

Teorem 3.2.1(Lineerlik): f_1 ve f_2 $[a,b]$ ‘de tanımlanan iki fonksiyon olsun ve $D_a^\alpha f_1$ ile $D_a^\alpha f_2$ hemen hemen her yerde yakınsak olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_a^\alpha f_1 + c_2 D_a^\alpha f_2$$

dir, [5,9].

İspat: İspat için bkz [9].

Tanım 3.2.3: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 \leq \alpha \leq n$ olsun. $a \leq x \leq b$ için

$$D_{*a}^\alpha f(x) = J_a^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) dt \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanan D_{*a}^α türevine , α . mertebeden Caputo kesirli türevi denir.

3.3 Caputo Kesirli Türevi ile İlgili Bazı Teoremler

Kesirli türev ile ilgili şimdiye kadar birçok tanımlar verilmiş ancak tanımları ne kadar farklı olursa olsun mertebesini hep tamsayıya tamamladığından dolayı aslında mertebesi tamsayı olan türev ile aynı sonucu vermektedir. Hatta bazı şartlar altında yukarıda verilen tanımların eşit oldukları gösterilmiştir,[1,2,5,9]. Fakat birbirlerine çok benzemelerine rağmen aralarında fiziksel farklılıkları vardır. Bu fiziksel farklılıklar sayesinde problemin türüne göre en uygun olanının kullanılmasını ve problemin gerçek değerine yakınsayarak en iyi sonucun elde edilmesini sağlar. Ancak baş-

langıç koşullarının olduğu yerlerde Riemann-Liouville kesirli türevin oluşturduğu dezavantajlar vardır. Bu dezavantaj $x = a$ noktasında limit ile tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir. Örneğin; $b_1, b_2, \dots, b_m$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow a} {}_a D_x^{\alpha-1} f(x) = b_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} {}_a D_x^{\alpha-2} f(x) = b_2$$

$$\dots \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow a} {}_a D_x^{\alpha-m} f(x) = m$$

şeklinde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir,[1]. Bu başlangıç koşullarını içeren problemlerin çözümleri elde edilse de sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü bu başlangıç koşullarının fiziksel şekillendirmesi yoktur. Bu dezavantajı ortadan kaldırmak için ilk olarak 1967 yılında İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından Tanım 3.2.3'te verilen kesirli türev tanımı öne sürülmüştür. Bu tanımın avantajı kesir mertebeli diferansiyel denklemler için kullanılan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için kullanılan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Bu yüzden hem analitik hem de nümerik çözümlerde diğer tanımlara nazaran Caputo kesirli türev tanımı daha çok kullanılmaktadır.

Teorem 3.3.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve keyfi bir c sabiti için $D_{*a}^\alpha c = 0$ 'dır.

Yani mertebe ne olursa olsun sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevi sıfırdır.

Eğer $\alpha = 0$ ise $D_{*a}^\alpha = I$ özdeşlik fonksiyonudur, [2,5,9].

Teorem 3.3.2: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$D_{*a}^\alpha (D_{*a}^\beta f(x)) = D_{*a}^\beta (D_{*a}^\alpha f(x)) = D_{*a}^{\alpha+\beta} f(x)$$

dir, [2,5,9].

Teorem 3.3.3 (Lineerlik): $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $D_{*a}^\alpha f_1$ ile $D_{*a}^\alpha f_2$ yakınsak olsun ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$D_{*a}^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_{*a}^\alpha f_1 + c_2 D_{*a}^\alpha f_2$$

dir, [2,5,9].

İspat: İspat için bkz [5,9].

Teorem 3.3.4: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olsun. Bu durumda

$$D_{*a}^\alpha f(x) = J_a^{n-\alpha} D^n f(x) \neq D^n J_a^{n-\alpha} f(x) = D_a^\alpha f(x)$$

dir, [2,9].

Teorem 3.3.5: Eğer f fonksiyonu sürekli ve $\alpha \geq 0$ ise bu durumda,

$$D_{*a}^\alpha J_a^\alpha f = f$$

dir, [2,9].

Lemma 3.3.1: $\alpha \geq 0$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olsun. f fonksiyonu varsayalım öyle ki $D_{*a}^\alpha f$ ve $D_a^\alpha f$ nin her ikisi de var olsun. Ayrıca $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ için $D^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$D_{*a}^\alpha f = D_a^\alpha f$$

dir. Ayrıca $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D^m D^\alpha f(x) = D^{m+\alpha} f(x) = D^\alpha D^m f(x)$$

ve

$$D_*^\alpha D_*^m f(x) = D_*^{\alpha+m} f(x) = D_*^m D_*^\alpha f(x)$$

sağlanır, [2,9].

Teorem 3.3.6: $n - 1 < \alpha < n$ için $\beta, n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu için öyle bir $D_*^\alpha f(x)$ vardır ki

$$D_*^\alpha D_*^\beta f(x) = D_*^{\alpha+\beta} f(x) \neq D_*^\beta D_*^\alpha f(x)$$

sağlanır, [2,9].

Teorem 3.3.7 (Caputo Operatörleri için Leibniz Formülü)

$0 < \alpha < 1$ olsun ve f ile g fonksiyonlarının $(a - h, a + h)$ aralığında analitik olduğunu varsayalım ($h > 0$). Bu durumda

$$D_{*a}^{\alpha}[fg](x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(a)(f(x) - f(a)) + (D_{*a}^{\alpha}g(x))f(x) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (J_a^{k-\alpha}g(x))D_{*a}^k f(x)$$

dir, [2,5].

Teorem 3.3.8: $\alpha \geq 0$ ve $n-1 < \alpha < n$ olsun. Ayrıca $D_a^{\alpha}f$ nin var olduğunu ve f nin a da $n-1$ türeve sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$D_{*a}^{\alpha}f(x) = D_a^{\alpha}(f - T_{n-1}[f; a])(x)$$

dir,[5]. Burada $T_{n-1}[f; a]$, f fonksiyonunun a noktasında ürettiği $(n-1)$. dereceden Taylor polinomunu göstermektedir.

Son olarak vereceğimiz teoremden merkez nokta civarında ($a=0$) integrallenen Riemann-Liouville ve Caputo türevi arasındaki bağıntıdan bahsedeceğiz.

Teorem 3.3.9: $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türevi arasındaki bağıntı

$$D_*^{\alpha} = D^{\alpha}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

şeklindedir, [2,9].

3.4 Bilinen Bazı Fonksiyonların Hesabı

Bu alt bölümde kesirli türevlerin sabit fonksiyon, kuvvet fonksiyonu, üstel fonksiyon ve trigonometrik fonksiyonların kesirli türev ve yardımcı fonksiyonların tanımlarıyla genel formülleri elde edilmiştir, [2,9]. Ayrıca burada elde edilen çözümlerin nümerik değerleri Bölüm 4'te tablolarla verilmiştir.

3.4.1 Sabit Fonksiyonların Hesabı

Teorem 3.4.1.1: $0 < \alpha < 1, f(x) = c$ için f fonksiyonunu Riemann-Liouville kesirli türevi ile hesaplayalım, [2,9]. O halde

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt$$

formülünden $f(x) = c$ 'yi yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} c dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} c dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot t^{-\alpha} \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4.2 Kuvvet Fonksiyonların Hesabı

Teorem 3.4.2.1: $0 \leq \alpha < 1$ ve $Re(c) > -1$ için $f(x) = x^c$ fonksiyonunun α . mer-
tebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_0^\alpha (x^c) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} x^{c-\alpha} \quad (3.19)$$

şeklindedir, [2,9].

İspat: $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan $n = 1$ ve $a = 0$ için integral alındığından Riemann-
Liouville kesirli türevin formülünden

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^c dt$$

elde edilir. Burada $t = x - xu$, $dt = -xdu$ dönüşümü ile $\left. \begin{matrix} x=x-ux \\ 0=x-ux \end{matrix} \right\}$ olduğundan
integral 1 den 0 a kadar alınır. Yani

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \int_1^0 (xu)^{-\alpha} (x-xu)^c (-x) du$$

olur. Buradan sınırları yer değiştirerek x in önündekieksiyi yok edersek;

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) x^{c-\alpha+1} \int_0^1 u^{-\alpha} (1-u)^c du$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (c-\alpha+1) x^{c-\alpha} \beta(-\alpha+1, c+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (c-\alpha+1) x^{c-\alpha} \frac{\Gamma(-\alpha+1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+2)} \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} x^{c-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir, [2,9].

Teorem 3.4.2.2: $n-1 < \alpha < n, c > n-1, c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^c$ fonksiyonunun

α . mertebeden Caputo kesirli türevi

$$\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} x^{c-\alpha} \quad (3.20)$$

şeklindedir, [2,9].

İspat: Yukarıdaki (3.18) denkleminde $a = 0$ için

$$\begin{aligned} D_{*a}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^c dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-n+1)} t^{c-n} (x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

ve $t = \mu x, \quad 0 \leq \mu \leq 1$ dönüşümüyle

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(c-n+1)} \int_0^x (\mu x)^{c-n} ((1-\mu)x)^{n-\alpha-1} x d\mu \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(c-n+1)} x^{c-\alpha} \int_0^1 \mu^{c-n} (1-\mu)^{n-\alpha-1} d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(c-n+1)} x^{c-\alpha} \beta(c-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(c-n+1)} x^{c-\alpha} \frac{\Gamma(c-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(c-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} x^{c-\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunu parçalı fonksiyon halinde gösterirsek;

$$D_{*a}^{\alpha} f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad c \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1-\alpha)} (x-a)^{c-\alpha} & , \quad c \in \mathbb{N} \text{ ve } c \geq n \text{ veya} \\ & c \notin \mathbb{N} \text{ ve } c > n-1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.4.3 Üstel Fonksiyonların Hesabı

Teorem 3.4.3.1: $\alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman üstel fonksiyonların Caputo kesirli türevi $E_{\alpha, \beta}(z)$ iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu iken

$$D_{*}^{\alpha} e^{\mu x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \mu^n x^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(\mu x)$$

şeklindedir, [2,9].

İspat: [9,s.34] ve $e^{\mu x}$ in seri açılımı kullanılarak Riemann-Liouville kesirli türevinden aşağıdaki

$$D^{\alpha} e^{\mu x} = t^{-\alpha} E_{1, 1-\alpha}(\mu t)$$

eşitliği elde edilir, [9]. O halde Caputo kesirli türevini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
D_{*}^{\alpha} e^{\mu x} &= D^{\alpha} e^{\mu x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (e^{\mu x})^k (0) \\
&= t^{-\alpha} E_{1, 1-\alpha}(\mu t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \mu^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^k x^{-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k+\alpha} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)} \\
&= \mu^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\mu x).
\end{aligned}$$

3.4.4 Trigonometrik Fonksiyonların Hesabı

Teorem 3.4.4.1: $\mu \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n$ olsun. O halde

$$D_*^\alpha \sin \mu x = -\frac{1}{2} i (i\mu)^n x^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(i\mu x) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\mu x) \right)$$

dir, [2,9].

İspat: İspat için bkz. [9]

Teorem 3.4.4.2: $\mu \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n$ olsun. O halde

$$D_*^\alpha \cos \mu x = \frac{1}{2} (i\mu)^n x^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(i\mu x) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\mu x) \right)$$

dir, [2,9].

İspat: İspat için bkz. [9]

3.5 Örnekler:

Örnek 3.5.1 $f(x) = x$ fonksiyonunu $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann- Liouville kesirli integrali ile hesaplayalım.

(3.14) eşitliğinden $c = 1, a = 0$ alınırsa

$$J_0^{\frac{1}{2}}(x^1) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 3.5.2: $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevini ile hesaplayalım.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^k(a)(x-a)^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt$$

Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığından $n = 0$ olur.

$$\sum_{k=0}^0 \frac{f^0(a)(x-0)^{(0-\frac{1}{2})}}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{0-\frac{1}{2}} f^{(1)}(t) dt$$

bulunur ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ eşitliği kullanılarak

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{0-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot (t) dt$$

$(x-t) = u^2$, $-dt = 2udu$ dönüşümü yapılırsa sonuç olarak

$$f^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir.

Örnek 3.5.3: $f(x) = c$ sabit fonksiyonunu $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi ile hesaplayalım.

O halde $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ bulunur. Caputo'nun

$$D_{*a}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt$$

formülünde $a=0$ noktasında integralini alırsak;

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} 0 dt$$

$$D_0^{\frac{1}{2}} c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 0 dt = 0$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü gibi Riemann-Liouville kesirli türevine göre sonuç sıfırdan farklı çıkarken Caputo, türevi integralin içinde içerdiğinden dolayı sıfır çıkmaktadır. Bu da aslında Caputo'nun sabitlerin türevini sıfır yaparak başlangıç şartlarını Riemann-Liouville'ye göre iyileştirerek sonucun daha kullanışlı olmasını sağlamaktadır. Ayrıca klasik türeve göre sabit fonksiyonların türevi 0 olduğu için $f(x)$ in kesirli mertebeden türevleri de 0 oldu. Bunu genel bir ifade ile $D_*^\alpha c = 0$ olduğunu Teorem 3.3.1'de vermiştik.

Örnek 3.5.4: $f(x) = x^2$ fonksiyonunu $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ile hesaplayalım. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 0$ bulunur ve a yı keyfi olarak sıfır alırsak

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt$$

formülünden

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dx} \right)^1 \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \quad \boxed{x-t=u^2, -dt=2udu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{-(x-u^2)^2 2udu}{(u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 -2(x-u^2)^2 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 (-2x^2 + 4xu^2 - 2u^4) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-2x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) x^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{15} x^{\frac{3}{2}} = \frac{8x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}$$

elde edilir.

Örnek 3.5.5: $f(x) = x$ fonksiyonunu $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevini Caputo kesirli türevi ile hesaplayalım. O halde $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ olur ve Caputo'nun formülünde $a=0$ için integrali alırsak;

$$\begin{aligned} D_{*0}^{\frac{1}{2}} x &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad \boxed{u^2 = x-t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2u}{u} du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x}}^0 2 du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} 2 du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{x} - 0) \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.18) ve (3.19) eşitliklerinden vardığımız sonuç $n = 1$ yani $n - 1 < \alpha < n$ ve $c \in \mathbb{R}^+$ için $D_a^\alpha(x^c) = D_{*a}^\alpha(x^c)$ dir.

BÖLÜM 4

NÜMERİK METOTLAR

Kesirli türev tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren Caputo olduğundan biz bu alt başlıkta Caputo' ya dair metotlar geliştirip, Gauss-Jacobi kuralına uygulayarak elde edilen değerlerin nümerik çözümlerini karşılaştırıp hata miktarlarını bularak hangisinin daha kullanışlı olduğunu inceledik. Bunun için ilk önce Caputo kesirli türevinin bazı nümerik değerlerinin nasıl hesaplandığını gösterelim. $0 < \alpha < 1$ aralığı için

$$D_{*a}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt$$

formülünden $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ve $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ keyfi değerlerini alalım, [9].

$$\begin{aligned} D_{*0}^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^1 t^2}_{=2t} dt \\ &= 2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t dt, \quad t = x - xu \end{aligned}$$

dönüşümünden

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} x^{2-\frac{1}{2}} (1-u) du \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \underbrace{\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u) du}_{\text{Beta Fonksiyonu}} \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} B\left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \approx 1.5045 x^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
D_{*0}^{\frac{1}{3}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{3}-1} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^1 t^2}_{=2t} dt \\
&= 2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{3}} t dt, \quad t = x - xu
\end{aligned}$$

dönüşümünden

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_1^0 (x-x+xu)^{-\frac{1}{3}} (x-xu)(-xdu) \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 (xu)^{-\frac{1}{3}} x^2 (1-u) du \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 u^{-\frac{1}{3}} x^{2-\frac{1}{3}} (1-u) du \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} x^{\frac{5}{3}} \underbrace{\int_0^1 u^{-\frac{1}{3}} (1-u) du}_{\text{Beta Fonksiyonu}} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} x^{\frac{5}{3}} B\left(-\frac{1}{3}, 2\right) \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} x^{\frac{5}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)} x^{\frac{5}{3}} \approx 1.3293 x^{\frac{5}{3}}
\end{aligned}$$

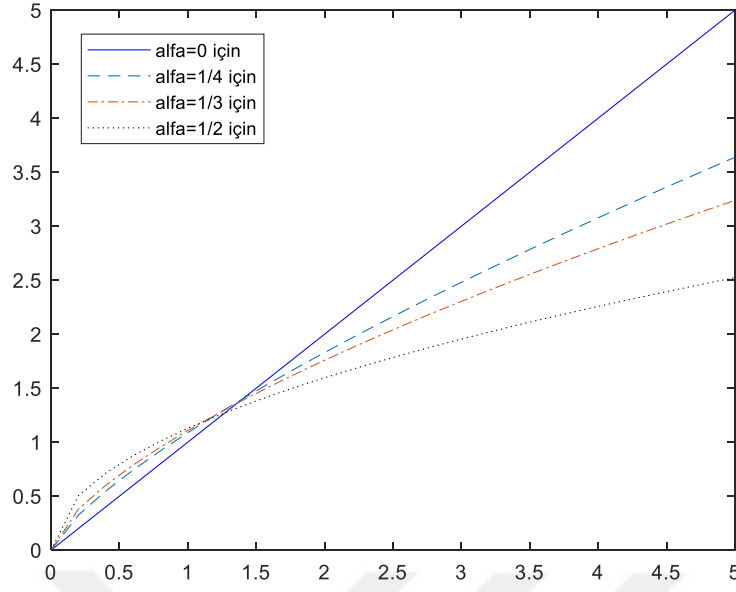
elde edilir.

$$\begin{aligned}
D_{*0}^{\frac{1}{4}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{4}-1} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^1 t^2}_{=2t} dt \\
&= 2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{4}} t dt, \quad t = x - xu
\end{aligned}$$

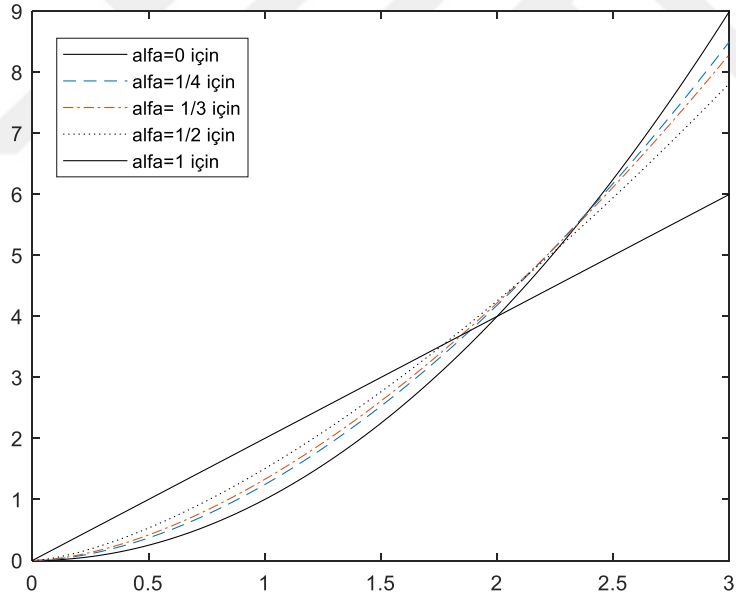
dönüşümünden

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \int_1^0 (x-x+xu)^{-\frac{1}{4}} (x-xu)(-xdu) \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \int_0^1 (xu)^{-\frac{1}{4}} x^2 (1-u) du \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \int_0^1 u^{-\frac{1}{4}} x^{2-\frac{1}{4}} (1-u) du \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} x^{\frac{7}{4}} \underbrace{\int_0^1 u^{-\frac{1}{4}} (1-u) du}_{\text{Beta Fonksiyonu}} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} x^{\frac{7}{4}} B\left(-\frac{1}{4}, 2\right) \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} x^{\frac{7}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} x^{\frac{7}{4}} \approx 1.2435 x^{\frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $f(x) = x, x^2$ için Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve $f(x) = x, x^2, x^3, e^x$ değerleri için oluşturulan Tablo 4.1 aşağıda verilmiştir. Burada $\alpha=0$ olduğu yerler fonksiyonların kendisine eşittir.



Şekil 4.1 $f(x) = x$ 'in $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ için değerlerinin grafiği



Şekil 4.2 $f(x) = x^2$ 'in $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ için değerlerinin grafiği

Tablo 4.1 Caputo'nun yaklaşık nümerik değerleri

$f(x)$	$\alpha = 1/4$	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/2$
c	0	0	0
x	$1.0880x^{3/4}$	$1.1077x^{2/3}$	$1.1284\sqrt{x}$
x^2	$1.2435x^{7/4}$	$1.3292x^{5/3}$	$1.5045x^{3/2}$
x^3	$1.3565x^{11/4}$	$1.4954x^{8/3}$	$1.8054x^{5/2}$
e^x	$2.0114x^{3/4}$	$2.1071x^{2/3}$	$2.2906\sqrt{x}$

4.1 Algoritma 1:

$0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$ ve $[0, X]$ aralığı için $h = \frac{X}{N}$ iken $\{x_n = nh: n = 0, 1, 2, \dots, N\}$

$$D_*^\alpha y_N(h) = \left[h^{-\alpha} / \Gamma(2 - \alpha) \right] \sum_{n=0}^N a_{n,N} \left(y_{N-n} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} [(N-n)^k h^k / k!] y_{0+}^{(k)} \right)$$

$$D_*^\alpha y(X) = D_*^\alpha y_N(h) + O(h^{2-\alpha})$$

integrasyon ağırlığını kullanarak (Çarpım Trapez Kuralından türetilen)

$$a_{n,N} \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ ise} \\ (n+1)^{1-\alpha} - 2n^{1-\alpha} + (n-1)^{1-\alpha}, & 0 < n < N \text{ ise} \\ (1-\alpha)N^{-\alpha} - N^{1-\alpha} + (N-1)^{1-\alpha}, & n = N \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir ve bu algoritmada $y_n, y(x_n)$ i belirtmekte ve $0 \leq x_n \leq X$ integrasyon aralığında $[0, X]$ iken y_N de $y(X)$ i gösterir, [3]. Caputo türevindeki integrali $0 < \alpha < 2$ için trapez yöntemiyle yaklaşık olarak hesap edeceğiz. Aşağıdaki tabloda Algoritma 1 'in Mathematica [11] programında $y_N(h)$ 'ın sabit fonksiyon, kuvvet fonksiyonları ve üstel fonksiyonlar için değerler hesaplanmıştır.

4.2 Gauss –Jacobi Kuralı ile Hesabı :

Bu konuya girmeden önce Gauss-Jacobi kuralından kısaca bahsedelim.

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\lambda (1+x)^\beta f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı integralin uç noktalarındaki tekilliği ortadan kaldırmak için

$$P(x) = (1-x)^\lambda (1+x)^\beta, \lambda, \beta > -1$$

formundaki Jacobi ağırlık fonksiyonu kullanılır. Burada x_k 'lar $J_n(x, \lambda, \beta)$ şeklinde gösterilen Jacobi polinomlarının sıfırlarıdır. Jacobi ağırlık fonksiyonu ile Jacobi polinomu $(n - 1)$. mertebenin altında veya ona eşit olan tüm polinomlarla ortogondur. Jacobi polinomu

$$J_n(x, \lambda, \beta) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1 - x)^{-\lambda} (1 + x)^{\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\lambda+n} (1 + x)^{\beta+n}]$$

ile belirlenebilir.

A_k ağırlık katsayılarını hesaplamak için uygulanan bir çok formül vardır. Sayısal hesaplama için en uygun form

$$A_k = 2^{\lambda+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{n! \cdot \Gamma(\lambda + \beta + n + 1)} \cdot \frac{1}{(1 - x_k^2) [J_n^{(\lambda, \beta)'}(x_k)]^2}$$

dur, [6-8].

Gauss-Jacobi kuralı hesabıyla Caputo kesirli türevine

$$\xi(u) = f\left(\left(\frac{t - t_0}{2}\right)\right)u + \left(\left(\frac{t + t_0}{2}\right)\right)$$

dönüşümü ile aralığımızı $[0, x]$ iken $[-1, 1]$ aralığına getirdik yani

$$t = \frac{x(u + 1)}{2}, dx = \frac{x}{2} du$$

dönüşümü uygulamış olduk ve (4.1) denkleminde $\lambda = 1 - \alpha, \beta = 0$ alarak kuvvetlerden birini sıfırlamış olduk ve Caputo'nun formülüne benzettik. Buradan

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi(x)}{(1 - x)^{1-\alpha}} dx \quad (4.2)$$

formülünde çekirdek integrali ile çakıştı ve Caputo kesirli türevin tanımından

$${}^G J_{D_{*a}}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\alpha} \cdot \int_{-1}^1 (1 - u)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f\left(\frac{x(u + 1)}{2}\right) du \quad (4.3)$$

formülünü elde ederek Gauss-Jacobi kuralına uygulanabilecek duruma getirdik.

4.3 Algoritma 1 ve Gauss- Jacobi Kuralının Caputo ile Karşılaştırması

Bu bölümde $f(x) = x, x^2, x^3, e^x$ ve $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ değerleri için hesaplanıp bunun sonucundaki hata miktarları sırasıyla aşağıdaki Tablo 4.2, Tablo 4.3, Tablo 4.4 ve Tablo 4.5 te tam değerleri ile birlikte verilmiştir. Burada tam değer olarak nümerik değer alınmış olup Working Precision $\rightarrow 32$, Accuracy Goal $\rightarrow 20$ kabul edilerek hesaplanmıştır.

Kullandığımız bu metotları yorumlarsak Algoritma 1 için üstel fonksiyonun hesabında kompleks sayı ve ω salınımlı olduğu zaman metodun çalışma duyarlılığı azalmakta olup istenilen sonuç elde edilememekte ya da hesaplama süresi çok uzun sürmektedir. Ayrıca bu metottaki α değerleri büyüdükçe hesaplama süresi kısalmaktadır.

Gauss-Jacobi kuralı ile hesabımızda ise oldukça iyi sonuçlar elde etmiş ve ayrıca Mathematicanın [11] NIntegrate komutu ile elde edilen sonuçlar da programdan elde edilen sonuçlarla 29 basamağa kadar aynı olmaktadır. Ancak bu $0 < \alpha < 1$ için geçerlidir. Çünkü α uç noktalarda NIntegrate komutu ile yakınsamasında farklılıklar göstermektedir. Örneğin 0 noktasına yakınsayan 0.1, 0.01, 0.001 ve 0.0001 değerleri için 29 basamaktan 32 basamağa kadar uyuşurken 0.9, 0.99, 0.999 ve 0.9999 değerleri için yakınsama 1 noktasında tekillik olduğundan dolayı sonuç kötü elde edilmektedir.

Tablo 4.2 $f(x) = x$ için değerleri

Metot	α	Sonuç	Hata Miktarı
Gauss Jacobi	1/2	1.1283791670955126	2.78×10^{-28}
	1/3	1.1077321674324725	1.134×10^{-28}
	1/4	1.0880652521310172	6.39×10^{-29}
Algoritma 1	1/2	1.1283791670218475	7.4×10^{-11}
	1/3	1.1077321677405594	3.1×10^{-10}
	1/4	1.08806525267458	5.4×10^{-10}

Tablo 4.3 $f(x) = x^2$ için değerleri

Metot	α	Sonuç	Hata Miktarı
Gauss Jacobi	1/2	1.50450555612735	5.595×10^{-28}
	1/3	1.329278600918967	2.286×10^{-28}
	1/4	1.2435031452925913	1.289×10^{-28}
Algoritma 1	1/2	1.50450554122919	1.5×10^{-8}
	1/3	1.3292785996957737	1.2×10^{-9}
	1/4	1.2435031452097602	8.3×10^{-11}

Tablo 4.4 $f(x) = x^3$ için değerleri

Metot	α	Sonuç	Hata Miktarı
Gauss Jacobi	1/2	1.8054066673528202	8.434×10^{-28}
	1/3	1.4954384260338378	3.466×10^{-28}
	1/4	1.356548885773736	2×10^{-28}
Algoritma 1	1/2	1.8054066228820456	4.5×10^{-8}
	1/3	1.4954384215990266	4.4×10^{-9}
	1/4	1.3565488845546672	1.2×10^{-9}

Tablo 4.5 $f(x) = e^x$ için değerleri

Metot	α	Sonuç	Hata Miktarı
Gauss Jacobi	1/2	2.827523209511235	7.605×10^{-28}
	1/3	2.107164427333677	3.104×10^{-28}
	1/4	2.011474270412972	1.746×10^{-28}
Algoritma 1	1/2	2.2906982320520073	2×10^{-8}
	1/3	2.107164425738172	1.6×10^{-9}
	1/4	2.01147427054281	1.3×10^{-10}

Yukardaki tabloları yorumlarsak Tablo 4.2 de $f(x) = x$ ve $\alpha = 1/2$ alınınca Gauss-Jacobi 'nin Algoritma 1'e göre basamak sayılarının daha çok tuttuğu ve daha kısa sürede hesaplandığı görülmüştür. Ayrıca yukarıda hesaplanan fonksiyonların grafikleri olan Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 Matlab [13] ile çizilmiştir.



BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmada kesirli integral ve türevlerini tanıtılıp özelliklerine değinildi. Daha sonra analitik ve nümerik hesaplamaları yapıldı. Mathematica [11] programından faydalanarak $f(x) = x, x^2, x^3, e^x$ fonksiyonlarının $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ değerleri için incelenip asıl değer olarak kabul ettiğimiz Caputo, Gauss-Jacobi ve Algoritma 1 ile 32 basamakta hesaplandı. Oluşturulan Gauss-Jacobi ve Algoritma 1 metodunu Caputo'nun gerçek değerleriyle karşılaştırıp hata miktarları bulundu. Bu hesaplama sonucunda Gauss-Jacobi'nin Algoritma 1'e göre çok yakın değerler verdiği ve daha kısa sürede hesaplandığı görüldü. Son olarak da α 'nın uç noktalardaki değerlerini inceleyerek yakınsamalarının 0 noktasında 32 basamağa kadar uyduğunu fakat 1 noktasında tekillikten dolayı sonucun çok kötü geldiği görüldü. Bunlarında α 'nın farklı değerlerine göre tabloları oluşturulup karşılaştırıldı ve $f(x) = x, x^2$ nin grafiğini Matlab [13] ile çizildi. Kesirli türevlerle ilgili literatürde yapılan diğer tanımların bir kısmı ise aşağıdaki ekler bölümünde verildi.

KAYNAKLAR

- [1] Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. Vol.198. San Diego: Academic Press, Inc.
- [2] Miller, K., Ross, B. 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., Luchko, Yu., (2005). Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods, *Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **194**, 743-773.
- [4] Oldham, K., Spanier, J. 1974. The fractional calculus, New York: Academic Press, Inc. 248p.
- [5] Weilbeer, M. 2005. Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background, US Army Medical Research and Materiel Command
- [6] Gautschi, W. 2004. Orthogonal Polynomials Computation and Approximation. New York: Oxford University Press.
- [7] Haşcelik, A.İ. 2012. Nümerik İntegrasyon, Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü, <http://ibs.gantep.edu.tr/duyuru/files/articles/numerik-integrasyon5686.pdf>.
- [8] Brzezinski, D.W., Ostalczyk, P. (2014). High-accuracy numerical integration methods for fractional order derivatives and integrals computations, *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, **62**, 723-733.
- [9] Ishteva, M.K. 2005. Properties and applications of the Caputo fractional operator, *Master Thesis*, Bulgaristan.
- [10] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional integrals and derivatives theory and applications, Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 976p.
- [11] Wolfram S. 2009. The Mathematica Book. Cambridge: Cambridge Univ. Pr.

[12] Oliveira, E.C., Machado, J.A.T. (2014). A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. *Mathematic problems in engineering*, Vol. 2014, Article ID 238459, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/238459>

[13] Matlab R2018b, <https://www.mathworks.com>

[14] Rainwell, E. D., 1973. Special Functions. New York: Macmillan Company.



EKLER

KESİRLİ TÜREVLERİN DİĞER TANIMLARI [12]

Liouville Türevi:

$$D^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1)$$

Weyl Türevi:

$${}_x D_\infty^\alpha[f(x)] = D_-^\alpha[f(x)] = (-1)^m \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n [{}_x W_\infty^\alpha[f(x)]]. \quad (2)$$

Marchaud Türevi:

$$D_+^\alpha[f(x)] = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau. \quad (3)$$

Hadamard Türevi:

$$D_+^\alpha[f(x)] = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(\tau)}{\left[\ln \frac{x}{\tau}\right]^{1+\alpha}} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (4)$$

Davidson-Essex Türevi:

$$D_0^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} \int_0^x (x-\tau)^{-\alpha} \frac{d^k}{d\tau^k} [f(\tau)] d\tau. \quad (5)$$

Coimbra Türevi:

$$D_0^{\alpha(x)}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \left\{ \int_0^x (x-\tau)^{-\alpha(x)} \frac{d}{d\tau} [f(\tau)] d\tau + f(0)x^{-\alpha(x)} \right\}. \quad (6)$$

Canavati Türevi :

$${}_a D_x^v[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\tau)^\gamma \frac{d^n}{d\tau^n} [f(\tau)] d\tau, \quad n = [v], \gamma = n - v. \quad (7)$$

Jumarie Türevi , $n = 1$:

$$D_x^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} [f(\tau) - f(0)] d\tau. \quad (8)$$

Riesz Türevi:

$$D_x^\alpha[f(x)] = -\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \times \left\{ \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_x^{\infty} (\tau-x)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\}. \quad (9)$$

Cossar Türevi:

$$D_-^\alpha[f(x)] = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \int_x^N (\tau-x)^{-\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Yerel Kesirli Yang Türevi:

$$D_-^\alpha[f(x)]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha[f(x) - f(x_0)]}{(x-x_0)^\alpha}. \quad (11)$$

Değişken Kesirli Mertebeden CaputoTürevi:

$${}_x^*D_x^{\alpha(x)}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_0^x (x-\tau)^{-\alpha(\tau,x)} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Modifiye Edilmiş Riemann – Liouville Kesirli Türevi:

$$D^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\tau)^{-\alpha} [f(\tau) - f(0)] d\tau. \quad (13)$$

Osler Kesirli Türevi:

$${}_aD_z^\alpha[f(z)] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(\alpha, z^+)} \frac{f(\tau)}{(\tau-z)^{1+\alpha}} d\tau. \quad (14)$$

k-Kesirli Hilfer Türevi:

$${}^kD^{\gamma, \nu}[f(x)] = J_k^{v(1-\gamma)} \frac{d}{dx} J_k^{(1-\gamma)(1-\nu)} f(x). \quad (15)$$

KESİRLİ İNTEGRALLERİN DİĞER TANIMLARI [12]

Hadamard İntegrali:

$$J_+^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\tau)}{\left[\ln\left(\frac{\tau}{x}\right)\right]^{1-\alpha}} \frac{d\tau}{\tau}, \quad x > 0, \alpha > 0. \quad (16)$$

Weyl İntegrali:

$${}_xW_\infty^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (\tau - x)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Cossar İntegrali:

$$J_c^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > c. \quad (18)$$

Yerel Kesirli Yang İntegrali:

$${}_aJ_b^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_a^b f(\tau) (d\tau)^\alpha. \quad (19)$$

k-Kesirli Hilfer İntegrali:

$$J_k^\alpha f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\frac{\alpha}{k-1}} f(\tau) d\tau. \quad (20)$$