



**KESİRLİ TÜREVLERİN VE
İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra ŞEN KESMEZ

Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ TÜREVLERİN VE
İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI

Büşra ŞEN KESMEZ

Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Büşra ŞEN KESMEZ tarafından hazırlanan “ KESİRLİ TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI ” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 09/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniv., Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09/08/2024

.....

Büşra ŞEN KESMEZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI

Büşra ŞEN KESMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. UMUT MUTLU ÖZKAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş niteliğinde olup Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevini içeren Hilfer kesirli türev tanımından hareketle, ana hedefimiz bir fonksiyonun başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli türevi yani ψ -Hilfer kesirli türevi olarak adlandırılan bir kesirli diferansiyel operatörünü tanıtmaktadır. İkinci bölümde bir f fonksiyonun başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli integralleri ve türevi ile ilgili ağırlıklı uzaylarını ve bazı yeni kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde ise ana sonuç, yani bir f fonksiyonunun başka bir fonksiyona göre ψ -Hilfer kesirli türevini ve keyfi ψ fonksiyonunun seçimine dayalı olarak kesirli integraller ve kesirli türevlerden oluşan bir sınıf verilmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise ψ -Hilfer kesirli türevi yardımıyla genelleştirilmiş Gronwall eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca ψ -Hilfer orantılı kesirli türev içeren Gronwall eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir.

2024, v + 34 sayfa

Anahtar Kelimeler : ψ -Hilfer Kesirli Türevi, ψ -Hilfer Kesirli İntegrali.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

A WIDE CLASS OF FRACTIONAL DERIVATIVES AND INTEGRALS

Büşra ŞEN KESMEZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. UMUT MUTLU ÖZKAN

This thesis study consists of four chapters.

The first section is introductory and, starting from the definition of Hilfer fractional derivative including Riemann-Liouville and Caputo fractional derivative, our main goal is to introduce a fractional differential operator called the fractional derivative of a function with respect to another function ψ , that is, the ψ -Hilfer fractional derivative. In the second section, we present weighted spaces and some new concepts related to fractional integrals and derivatives of a function f with respect to another function ψ . We also mention some important results in the course of this study. In the third section, we present our main result, the ψ -Hilfer fractional derivative of a function f with respect to another function, and a class of fractional integrals and fractional derivatives based on the choice of arbitrary function ψ . In the last part, the fourth part, we study the continuous dependence of differential equations via the ψ -Hilfer fractional derivative, we present the generalized Gronwall inequality via fractional integration with respect to another function ψ , and other important results.

2024, v + 34 pages

Keywords : ψ -Hilfer Fractional Derivative, ψ -Hilfer Fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesinde, çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN 'a, araştırma ve yazım süresince yardımlarını ve desteğini hiç esirgemeyen bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan canım annem Ayşegül ŞEN, babam Erol ŞEN, abim Altan ŞEN ve hayat yoldaşım Fatih KESMEZ'e teşekkür ederim.

Büşra ŞEN KESMEZ
Afyonkarahisar 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	IV
SİMGELER DİZİNİ	V
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	3
3 KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI	9
4 GRONWALL EŞİTSİZLİĞİ	24
5 KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$ ' de bir aralık
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$D_{a+}^{\alpha} f(x)$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi
$I_{a+}^{\alpha} f(x)$	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$D_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)$	ψ -Riemann-Liouville Kesirli Türevi
$\mathbb{I}_{a+}^{\alpha} f(x)$	ψ -Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}^C D_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)$	ψ -Caputo Kesirli Türevi
${}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x)$	ψ -Hilfer Kesirli Türevi

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, hem teoride hemde uygulamalarında sağlam büyüyen bir çalışma olduğu için son bir kaç on yılda bir çok araştırmacıların dikkatini çekmiştir (Kilbas vd. 2006, Samko vd. 1993). Kesirli analizin büyümesinin önemi yalnızca uygulamalı matematik değil, aynı zamanda fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve diğer alanlarda da dikkate alınmıştır (Rosa vd. 2015, Kosta vd. 2017). 1965'te kesirli analizin başlangıcından beri kesirli integral ve kesirli türevin sayısız tanımı vardır ve zamanla yeni kesirli türev ve integraller ortaya çıkarmaktadır. Bu kesirli türev ve intagreller farklı bir çekirdeğe sahiptir bu da tanımların sayısını artırmaktadır. Kesirli türev ve integrallerin tanımıyla Rieamann-Liouville anlamında kesirli türevden yararlanılarak bir f fonksiyonunun başka bir fonksiyona göre kesirli türevi

$$D_{y^+}^{\alpha;\psi} f(u) = \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k I_{y^+}^{k-\alpha;\psi} f(u),$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kilbas vd. 2006).

Burada $k - 1 < \alpha < k$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $k = [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $k = \alpha$ 'dır.

Bununla birlikte, böyle bir tanım, yalnızca integral operatörüne etki eden diferansiyel operatörünü içeren olası kesirli türevleri kapsar. Aynı şekilde, son zamanlarda, Almeida (Sousa vd. 2017), Caputo anlamında kesirli türev fikrini kullanarak, başka bir ψ fonksiyonuna göre ψ -Caputo türevi olarak adlandırılan, bir kesirli türevler sınıfını genelleştiren, yeni bir kesirli türevini

$${}^C\mathbb{D}_{y^+}^{\alpha;\psi} f(u) = I_{y^+}^{k-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $k - 1 < \alpha < k$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $k = [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $k = \alpha$ 'dır. Böylece ψ -Riemann-Liouville kesirli türev ve ψ -Caputo'nun kesirli türev tanımları çok genel olsa da, bu operatörleri birleştiren ve çok sayıda tanımın üstesinden gelebilecek bir kesirli türev operatörü tanımlanmıştır. Belirli durumlar olarak klasik Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevini içeren Hilfer (Almeida vd. 2017) kesirli türev tanımından hareketle, ana hedefimiz bir fonksiyonun başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli türevi yani ψ -Hilfer kesirli türevi olarak adlandırılan bir kesirli diferansiyel

operatörünü tanıtmaktır. Bu kesirli türev ile, Bölüm 3'te, geniş bir kesirli türev ve integral sınıfı verilmiştir. Riemann-Liouville ve Riesz kesirli integrallerini genelleştiren bir kesirli integralin karşılık gelerek tartışıldığını belirtmek önemlidir. Özellikler sunulur ve tartışılır, bazıları da kanıtlanmıştır. Bu, yukarıda belirtilen iki kesirli operatörün özelliklerini birleştirmeyi ve elde etmeyi mümkün kılar. Bölüm 2'de, aralarında ağırlıklı uzayların da bulunduğu bazı fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Bu bölümde, bir f fonksiyonunun başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli integralinin tanımını ve ψ -Riemann-Liouville ve ψ -Caputo kesirli türevlerinin tanımları sunulmuştur. Bu tanımlardan, tezin geliştirilmesi için bazı önemli sonuçlar ortaya konmuştur. Bölüm 3'te ana sonucumuz olan ψ -Hilfer kesirli türevinin tanımı verilmiştir. Kesirli operatörün bazı özellikleri ve ψ -Riemann-Liouville ve ψ -Caputo operatörleri ile kesirli integral operatörü arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca kesirli ψ -Hilfer operatöründen ve kesirli ψ -Hilfer integral operatöründen türetilen kesirli integraller ve türevler sınıfı incelenmiştir. Son bölümde ise genelleştirilmiş Gronwall eşitsizliğine ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bir f fonksiyonun başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli integralleri ve türevi ile ilgili ağırlıklı uzaylarını ve bazı yeni kavramlar verilmiştir.

$[y, z]$, $(0 < y < z < \infty)$, $\mathbb{R}$ reel ekseninde sonlu bir aralık olsun. $C[y, z]$, $AC^k[y, z]$, $C^k[y, z]$, uzayları sırasıyla $[y, z]$ üzerinde sürekli bir uzay, k -kez mutlak sürekli ve k -kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

$[y, z]$ üzerinde sürekli f fonksiyon uzaylarıdır.

$$\|f\|_{C[y,z]} = \max_{t \in [y,z]} |f(s)|$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas vd. 2006).

Diğer taraftan, k -kez sürekli türevlenebilir fonksiyon uzayı

$$AC^k[y, z] = \{f; [y, z] \rightarrow R; f^{(k-1)} \in AC([y, z])\}$$

şeklinde tanımlanır.

$[y, z]$ üzerinde f fonksiyonlarının $C_{\rho, \psi}[y, z]$ ağırlıklı uzayı

$$C_{\gamma, \psi}[y, z] = \{f; [y, z] \rightarrow R; (\psi(s) - \psi(y))^\gamma f(s) \in AC([y, z])\}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

şeklindedir.

Burada norm

$$\|f\|_{C_{\gamma, \psi}[y,z]} = \|(\psi(s) - \psi(y))^\gamma f(s)\|_{C[y,z]} = \max_{s \in [y,z]} |(\psi(s) - \psi(y))^\gamma f(s)|$$

şekilde tanımlanır.

$[y, z]$ üzerinde f fonksiyonu $C_{\delta, \psi}^k[y, z]$ ağırlıklı uzayı

$$C_{\gamma, \psi}^k[y, z] = \{f : [y, z] \rightarrow R; f(s) \in C^{k-1}[y, z]; f^{(k)}(s) \in C_{\gamma, \psi}[y, z]\}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{C_{\gamma, \psi}[y,z]} = \sum_{m=0}^{k-1} \|f^{(m)}\|_{C[y,z]} + \|f^{(k)}\|_{C_{\gamma, \psi}[y,z]}$$

dir. $m = 0$ için, $C_\gamma^0 = C_\gamma[y, z]$ dir.

$C_{\gamma, \psi}^{\alpha, \beta}[y, z]$ ağırlık uzayı $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$ olmak üzere

$$C_{\gamma, \psi}^{\alpha, \beta}[y, z] = \{f \in C_{\gamma, \psi}[y, z]; {}^H \mathbb{D}_{y^+}^{\alpha, \beta; \psi} f \in C_{\gamma, \psi}[y, z]\}.$$

dir.

Tanım 2.0.1 (Kilbas vd. 2006) $[y, z], (-\infty < y < z < \infty)$, $\mathbb{R}$ reel eksenini üzerinde sonlu bir aralık olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralleri;

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u \frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}} ds, \quad u > y \quad (2.1)$$

ve

$$\mathbb{I}_{z-}^{\alpha} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^{u-z} \frac{f(s)}{(s-u)^{1-\alpha}} ds, \quad u > z$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 2.0.2 (Kilbas vd. 2006) $I = (y, z)$ ve $f(u) \in AC^k(y, z)$ ve $n-1 < \alpha < n$, $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\begin{aligned} D_{y+}^{\alpha} f(u) &= \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha} f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \left(\frac{d}{du} \right)^k \int_y^u (u-s)^{k-\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} D_{z-}^{\alpha} f(u) &= (-1)^k \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{z-}^{k-\alpha} f(u) \\ &= \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\alpha)} \left(\frac{d}{du} \right)^k \int_u^z (s-u)^{k-\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 2.0.3 Pozitif gerçel sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu $\alpha \in (k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeden Caputo kesirli türevleri

$${}^C D_{y+}^{\alpha} f(u) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_y^u \frac{f^{(k)}(u) du}{(u-s)^{k-\alpha-1}}$$

ve

$${}^C D_{z-}^{\alpha} f(u) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\alpha)} \int_u^z \frac{f^{(k)}(u) du}{(u-s)^{k-\alpha-1}}$$

şeklindedir.

Tanım 2.0.4 $k - 1 < \alpha < k$, $0 \leq \beta \leq 1$ ve $f \in C^k(y, z)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun α . mertebeden β tipli Hilfer Kesirli türevleri;

$$D_{y+}^{\alpha, \beta} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha} \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha)} f(u)$$

ve

$$D_{z-}^{\alpha, \beta} f(u) = \mathbb{I}_{z-}^{\rho-\alpha} \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{z-}^{(1-\beta)(k-\alpha)} f(u)$$

dir. Burada $I_{y+}^{\alpha}(\cdot)$ ve $D_{y+}^{\alpha}(\cdot)$ sırasıyla denklem (2.1) ve (2.2) Riemann-Liouville kesirli integrali ve türevidir.

Yukarıdaki kesirli integral tanımına ek olarak, Bölüm 3'te bir integral ve kesirli türev sınıfı verilmiştir. Çok sayıda, kesirli operatör tanımı nedeniyle, aşağıdaki tanım, bir ψ fonksiyonunun çekirdeği bilinmediğinde özel bir yaklaşımdır.

Tanım 2.0.5 (y, z) , $(-\infty \leq y \leq z \leq \infty)$ $\mathbb{R}$, reel doğrusunun sonlu ve sonsuz aralığı ve $\alpha > 0$ olsun. Ayrıca $\psi(u)$, (y, z) üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olsun. $\psi'(u)$, (y, z) üzerinde sürekli ve türevelere sahip bir f fonksiyonunun $[y, z]$ üzerindeki başka bir ψ fonksiyonuna göre kesirli integrali

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha; \psi} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{\alpha-1} f(s) ds \quad (2.3)$$

ve

$$\mathbb{I}_{z-}^{\alpha; \psi} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^z \psi'(s) (\psi(s) - \psi(u))^{\alpha-1} f(s) ds$$

dır.

Lemma 2.0.6 $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun.

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha; \psi} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \psi} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{\alpha+\beta; \psi} f(u)$$

ve

$$\mathbb{I}_{z-}^{\alpha; \psi} \mathbb{B}_{z-}^{\beta; \psi} f(u) = \mathbb{I}_{z-}^{\alpha+\beta; \psi} f(u)$$

yarı grup özellikleri sağlanır.

Lemma 2.0.7 $\alpha > 0$ ve $\delta > 0$ olsun.

1. Eğer $f(u) = (\psi(u) - \psi(y))^{\delta-1}$ ise

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha + \delta)} (\psi(u) - \psi(y))^{\alpha+\delta-1}$$

ve

2. Eğer $g(u) = (\psi(z) - \psi(u))^{\delta-1}$ ise

$$\mathbb{I}_{z-}^{\alpha;\psi} g(u) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha + \delta)} (\psi(z) - \psi(u))^{\alpha+\delta-1}$$

dır.

Tanım 2.0.8 $\psi'(u) \neq 0$ ($-\infty \leq y \leq z \leq \infty$), $\alpha > 0$ ve $k = [\alpha] + 1$ olsun. Bu durumda bir f fonksiyonunun ψ 'ye göre α mertebeden Riemann-Liouville türevleri

$$\begin{aligned} D_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) &= \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}^{k-\alpha;\psi} f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{k-\alpha-1} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

ve

$$\begin{aligned} D_{z-}^{\alpha;\psi} f(u) &= \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}^{k-\alpha;\psi} f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \int_u^z \psi'(s) (\psi(s) - \psi(u))^{k-\alpha-1} f(s) ds \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.0.9 $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I} = [y, z]$, ($-\infty \leq y \leq z \leq \infty$) olmak üzere f , $\psi \in C^k([y, z], \mathbb{R})$ olsun öyle ki, ψ artan ve tüm $u \in \mathbb{I}$ için $\psi'(u) \neq 0$ 'dır. Burada $k = [\alpha] + 1$ 'dir. Bu durumda f fonksiyonun α . mertebeden ψ -Caputo kesirli türevi

$${}^C\mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) = I_{y+}^{k-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u) \quad (2.5)$$

ve

$${}^C\mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi} f(u) = I_{z-}^{k-\alpha;\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.0.10 $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun.

1. $f(x) = (\psi(u) - \psi(y))^{\delta-1}$ ise,

$$\mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha - \delta)} (\psi(u) - \psi(y))^{\alpha+\delta-1}$$

ve

2. $g(x) = (\psi(z) - \psi(u))^{\delta-1}$ ise,

$$\mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi} g(u) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha - \delta)} (\psi(z) - \psi(u))^{\alpha+\delta-1}$$

dir.

Teorem 2.0.11 $f \in C^k[y, z]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda

$${}^C \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) = {}^C \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) = \left[f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} (\psi(u) - \psi(y))^m f_{\psi}^{[m]}(y) \right]$$

ve

$${}^C \mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi} f(u) = {}^C \mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi} f(u) = \left[f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} (\psi(z) - \psi(u))^m f_{\psi}^{[m]}(z) \right]$$

dır.

Teorem 2.0.12 u, v iki integrallenebilir fonksiyon ve $g, [y, z]$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki u, v negatif değildir ve g negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur. Eğer

$$u(s) \leq v(s) + g(s) \rho^{1-\alpha} \int_y^s t^{\rho-1} (s^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} u(t) dt$$

ise

$$u(s) \leq v(s) + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-m\alpha} [g(s) \Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} t^{\rho-1} (s^\rho - t^\rho)^{m\alpha-1} v(t) dt$$

dır.

Tanım 2.0.13 $0 < \rho \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) \geq 0$, ve $k = [Re(\alpha)] + 1$ olsun α mertebesindeki f 'nin GPF türevi

$$(\mathbb{D}^{\alpha,\rho} f)(s) = (\mathbb{D}^{\alpha,\rho} I^{k-\alpha,\rho} f)(s) = \frac{\mathbb{D}_s^{k,\rho}}{\rho^{k-\alpha} \Gamma(k-\alpha)} \int_y^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(s-t)} (s-t)^{k-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.6)$$

dir. Burada $\rho = 1$ alınrsa sol Rieamann-Liouville kesirli türevi elde edilir.

Tanım 2.0.14 $0 < \rho \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) \geq 0$ olsun. α mertebesindeki f 'nin GPF integrali

$$(\mathbb{I}^{\alpha, \rho} f)(s) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_y^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(s-t)} (s-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \rho^{-\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (\mathbb{I}^\alpha (e^{\frac{1-\rho}{\rho}t} f(t))) \quad (2.7)$$

şeklindedir.

Lemma 2.0.15 $\alpha > 0$, $\rho > 0$, $u(s)$, $v(s)$ 'nin $[0, T)$ üzerinde yerel olarak integ-rallenebilir negatif olmayan fonksiyonlar olduğunu ve $w(s)$ 'nin $s \in [0, T)$ üzerinde tanımlanmış negatif olmayan, azalmayan ve sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım, öyle ki $w(s) \leq M$, burada M bir sabittir. Eğer

$$u(s) \leq v(s) + \rho^\alpha \Gamma(\alpha) w(s) (\mathbb{I}^{\alpha, \rho} u)(s)$$

ise

$$u(s) \leq v(s) + \int_0^s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(w(s) \Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(m\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(s-t)} (s-t)^{m\alpha-1} v(t) \right\} dt, t \in [0, T] \quad (2.8)$$

dır.

Tanım 2.0.16 $0 < \rho \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) \geq 0$ ve $\psi \in C[y, z]$, $\psi'(s) > 0$ olmak üzere, f fonksiyonunun α mertebesindeki GPF türevi

$$(\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \rho, \psi} f)(a) = \frac{\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \rho, \psi}}{\rho^{k-\alpha} \Gamma(k-\alpha)} \int_{y+}^a e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(a)-\psi(s))} (\psi(a)-\psi(s))^{k-\alpha-1} \psi'(s) f(s) ds \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

3. KESİRLİ TÜREVLER VE İNTEGRALLERİN GENİŞ BİR SINIFI

Hilfer'in tanımından hareketle, bu bölümde Sousa ve Oliveira tarafından 2018 yılında yapılan bu çalışmada bir f fonksiyonunun başka bir fonksiyona göre ψ -Hilfer kesirli türevi verilmiştir. ψ -Hilfer Kesirli türevinden, ψ -kesirli integral ile sınırlı bir operatör olan ψ -Hilfer kesirli türevi arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 3.0.1 $k - 1 < \alpha < k$, $k \in \mathbb{N}$, $-\infty < y < z < \infty$ olmak üzere $I = [y, z]$ bir aralık ve $f, \psi \in C^k([y, z], \mathbb{R})$ iki fonksiyon öyle ki ψ artan ve $u \in \mathbb{I}$ için $\psi'(u) \neq 0$ olsun. f fonksiyonunun α mertebeden ve $0 \leq \beta \leq 1$ tipli ψ -Hilfer sol taraflı ve sağ taraflı kesirli türevleri sırasıyla

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{\beta(k-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k I_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) \quad (3.1)$$

ve

$${}^H\mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{z-}^{\beta(k-\alpha);\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k I_{z-}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımda $\rho = \alpha + \beta(k - \alpha)$ alınırsa ψ -Hilfer kesirli türevleri

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(u) \quad (3.2)$$

ve

$${}^H\mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{z-}^{\rho-\alpha;\psi} (-1)^n \mathbb{D}_{z-}^{\rho;\psi} f(u)$$

biçiminde de yazılabilir.

$\mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi}(\cdot)$, $\mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi}(\cdot)$ sırasıyla (2.3) ve (2.4) denklemlerinde tanımlanmıştır. Gösterimi basitleştirmek ve bazı sonuçların kanıtını yapmak için aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$f_{\psi+}^{[k]} f(u) := \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u)$$

ve

$$f_{\psi-}^{[k]} f(u) := \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u).$$

Diğer taraftan bu gösterimler

$$\mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) := \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u)$$

ve

$$\mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi} f(u) := \left(-\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{z-}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u)$$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca

$$f_{\psi+}^{[k]} f(u) = \lim_{\alpha \rightarrow k-} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(u) \text{ ve } f_{\psi-}^{[k]} f(u) = \lim_{\alpha \rightarrow k-} \mathbb{D}_{z-}^{\rho;\psi} f(u)$$

dır.

Özel olarak, $0 < \alpha < 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ alınırsa $\rho = \alpha + \beta(1 - \alpha)$ olmak üzere

$${}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho - \alpha)} \int_y^u (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha-1} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s) ds,$$

dir. Burada $\mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$, ψ -Riemann-Liouville kesirli türevidir.

Teorem 3.0.2 Kabul edelim ki $f, \psi \in C^{k+1}[y, z]$ olsun. O halde tüm $k-1 < \alpha < k$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ için

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) &= \frac{(\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha}}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}(y) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \int_y^u (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha} \frac{d}{ds} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s) ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) &= (-1)^k \frac{(\psi(z) - \psi(u))^{\rho-\alpha}}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \mathbb{D}_{z-}^{\alpha;\psi}(z) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \int_u^z (\psi(s) - \psi(u))^{\rho-\alpha} (-1)^k \frac{d}{ds} \mathbb{D}_{z-}^{\rho;\psi} f(s) ds \end{aligned}$$

dır.

Kanıt $x'(t) = \psi'(s)(\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha-1}$ ve $v(t) = \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s)$ olmak üzere denklem (3.2)'ye kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) &= \frac{1}{\Gamma(\rho - \alpha)} \int_y^u \psi'(s)(\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha-1} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s) ds, \\ &= \frac{(\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha}}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}(y) + \frac{1}{\Gamma(\rho - \alpha + 1)} \int_y^u (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha} \frac{d}{ds} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer durum benzer şekilde ispatlanır. $\square$

Teorem 3.0.3 $k-1 < \alpha < k$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere ψ -Hilfer kesirli türevleri sınırlı operatörlerdir. Bu durumda

$$\left\| {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f \right\|_{C_{\rho;\psi}} \leq \mathbb{K} \left\| f \right\|_{C_{\rho;\psi}} \quad (3.4)$$

ve

$$\left\| {}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha, \beta; \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}} \leq \mathbb{K} \left\| f \right\|_{C_{\rho; \psi}}$$

yazılır. Burada $K = \frac{(\psi(z) - \psi(y))^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\rho+1)\Gamma(k-\alpha+1)}$ dır.

Kanıt $\rho = \alpha + \beta(k - \alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k} &= \left\| \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k I_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha); \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k} \\ &= \max_{t \in [y, z]} \left| (\psi(u) - \psi(s))^\rho \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha; \psi} f(u) \right| \\ &= \max_{u \in [y, z]} \left| (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-\alpha} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \right. \\ &\quad \left. * \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{k-\alpha-1} f(s) ds \right| \\ &\leq \frac{\|f\|_{C_{\rho; \psi}^k}}{\Gamma(k-\rho)} \max_{u \in [y, z]} \left| \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{k-\rho-1} ds \right| \\ &\leq \frac{(\psi(z) - \psi(y))^{k-\alpha} \|f\|_{C_{\rho; \psi}^k}}{\Gamma(k-\rho+1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Denklem (3.5) ve ψ -Hilfer kesirli türev tanımı kullanılarak ve $K = \frac{(\psi(z) - \psi(y))^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\rho+1)\Gamma(k-\alpha+1)}$ için,

$$\begin{aligned} \left\| {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k} &= \left\| \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha; \psi} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k} \\ &= \max_{u \in [y, z]} \left| (\psi(u) - \psi(y))^\rho \mathbb{I}_{y+}^{-\alpha; \psi} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \psi} f(u) \right| \\ &\leq \frac{\|\mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \psi}\|_{C_{\rho; \psi}^k}}{\Gamma(\rho-\alpha)} \max_{u \in [y, z]} \left| \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{k-\rho-1} ds \right| \\ &\leq \frac{(\psi(z) - \psi(y))^{\rho-\alpha}}{\Gamma(\rho-\alpha+1)} \left\| \mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \psi} f \right\|_{C_{\rho; \psi}} \\ &\leq \frac{(\psi(z) - \psi(y))^{k-\alpha}}{\Gamma(\rho-\alpha+1)\Gamma(\rho-\alpha+1)} \left\| f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k} \\ &= K \left\| f \right\|_{C_{\rho; \psi}^k}. \end{aligned}$$

elde edilir. □

Uyarı 3.0.4 $\mu = k(1-\beta) + \beta\alpha$ olmak üzere ψ -Hilfer türevi ve $g(u) = \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{\beta(k-\mu);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k g(u),$$

elde edilir.

Dolayısıyla, ψ -Hilfer ve ψ -Caputo kesirli türevi arasında aşağıdaki şekilde verilen ilişki

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) &= {}^C\mathbb{D}_{y+}^{\mu;\psi} g(u) \\ &= {}^C\mathbb{D}_{y+}^{\mu;\psi} \left[\mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) \right]. \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.0.5 $k-1 < \alpha < k$, $k \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olsun. Eğer $f \in C^k[y, z]$ ise $\rho = \alpha + \beta(m - \alpha)$ olmak üzere

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{D}^{k-\beta(k-\alpha);\psi} \left[\mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\psi(u) - \psi(y))^m \mathbb{D}_{y+,m}^{\rho;\psi} f(y)}{m!} \right]$$

ve

$${}^H\mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = \mathbb{D}^{k-\beta(k-\alpha);\psi} \left[\mathbb{I}_{z-}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\psi(z) - \psi(x))^m \mathbb{D}_{z-,m}^{\rho;\psi} f(z)}{m!} \right]$$

dır.

Kanıt $g(u) = \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u)$ ve $\delta = k - \beta(k - \alpha)$ olsun. uyarı 3.0.4 ve teorem 2.0.11' den

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) &= {}^C\mathbb{D}_{y+}^{\delta;\psi} g(u) \\ &= \mathbb{D}_{y+}^{\delta;\psi} \left[g(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\psi(u) - \psi(y))^m}{m!} g_{\psi}^m(y) \right] \\ &= \mathbb{D}_{y+}^{\delta;\psi} \left[\mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\psi(u) - \psi(y))^m}{m!} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^m \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(m-\alpha);\psi} f(y) \right] \\ &= \mathbb{D}_{y+}^{\delta;\psi} \left[\mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\psi(u) - \psi(y))^m}{m!} \mathbb{D}_{y+,m}^{\delta;\psi} f(u) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.0.6 $k - 1 < \alpha < k$, $0 \leq \beta \leq 1$ ve $f \in C^k[y, z]$ olsun. Bu durumda

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} f(u) = f(u) - \sum_{m=0}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho - m + 1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y)$$

ve

$$\mathbb{I}_{z-}^{\alpha;\psi} \mathbb{D}_{z-}^{\alpha\beta;\psi} f(u) = f(u) - \sum_{m=0}^k \frac{((-1)^m \psi(z) - \psi(u))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho - m + 1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{z-}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(z)$$

dır.

Kanıt Lemma 2.0.5 ve ψ -Hilfer türev tanımından

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \left(\mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(u) \right) \\ &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(u) \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Kısmi integral alarak

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{y+}^{\rho;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(u) &= \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-1} \mathbb{D}_{y+}^{\rho;\psi} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho)} \left(\int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-1} \frac{d}{ds} f_{\psi}^{[k-1]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho-1)} \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-2} \frac{d}{dt} f_{\psi}^{[k-2]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho)} (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-1} f_{\psi}^{[k-1]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho-2)} \int_y^u (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-3} \frac{d}{ds} f_{\psi}^{[k-3]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho)} (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-1} f_{\psi}^{[k-1]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\rho-1)} (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-2} f_{\psi}^{[k-2]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= \frac{1}{\Gamma(\rho-k)} \int_y^u (\psi(u) - \psi(s))^{\rho-k-1} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(s) ds \\ &\quad - \sum_{m=1}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho - m + 1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{I}_{y+}^{(\rho-k);\psi} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) \\
&- \sum_{m=1}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. $A = \rho - k = \alpha + \beta(k - \alpha) - k = \alpha + \beta k - \beta \alpha$ ve $B = (1 - \beta)(k - \alpha) = k - \alpha - \beta k + \beta \alpha$ parametrelerinden $A+B=0$ dir. Lemma 2.0.5 ve Denklem(3.6)'dan yola çıkarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{(\rho-k);\psi} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(u) - \sum_{m=1}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \\
&= f(u) - \sum_{m=1}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.0.7 $\alpha > 0$, $0 \leq \beta \leq 1$ ve $f, g \in C^k[y, z]$ olsun. Bu durumda

$${}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} g(u) \Leftrightarrow f(u) = g(u) + \sum_{m=1}^k c_m (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m} \tag{3.8}$$

ve

$${}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = {}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} g(u) \Leftrightarrow f(u) = g(u) + \sum_{m=1}^k d_m (\psi(z) - \psi(u))^{\rho-m}$$

dir.

Kanıt Varsayalım ki ${}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} f(u) = {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} g(u)$ olsun. Yani ${}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} (f(u) - g(u)) = 0$ olsun.

Sol integral operatörünü bu eşitliğin her iki tarafına uygulanır ve teorem 3.0.6'yı kullanarak

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} (f(u) - g(u)) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$f(u) - g(u) - \sum_{m=1}^k \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)} (f - g)_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} (f - g)(y) = 0$$

dir. O halde

$$f(u) = g(u) + \sum_{m=1}^k c_m (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $c_m = \frac{(f-g)_\psi^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi}(f-g)(y)}{\Gamma(\rho-m+1)}$ dir.

Tersini kanıtlamak için

$$f(u) = g(u) + \sum_{m=1}^k c_m (\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m} \quad (3.9)$$

olsun. denklem (3.9)' un her iki tarafına ${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ uygulayarak türev operatörü uygulanırsa

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi}g(u) + \sum_{m=1}^k c_m {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 3.0.8 $k-1 \leq \rho \leq k$ ve $f, g \in C^\rho[y, z]$ olsun. Bu durumda $k-1 \leq \rho \leq \alpha$ olmak üzere

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(y) = \lim_{u \rightarrow y+} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u) = 0$$

dır.

Kanıt $\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u) \in C^\rho[y, z]$ sınırlıdır. $f \in C^\rho[y, z]$ olduğundan $(\psi(u) - \psi(y))^\rho f(u)$ $[y, z]$ üzerinde süreklidir ve böylece pozitif bir M sabiti ve $u \in [y, z]$ için

$$|\psi(u) - \psi(y)|^\rho |f(u)| < M \Rightarrow |f(u)| < |\psi(u) - \psi(y)|^{-\rho} M \quad (3.10)$$

dir.

Denklem (3.10)'un her iki tarafına $\mathbb{I}_{y+}^{(\alpha;\psi)}(\cdot)$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u) \right| &< \left| \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}(\psi(u) - \psi(y))^{-\rho} \right| M \\ &= M \frac{\Gamma(n - \rho)}{\Gamma(\alpha + n - \rho)} (\psi(u) - \psi(y))^{\alpha-\rho} \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. $\rho < \alpha$ ve $u \rightarrow y + u$ için

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(y) = \lim_{u \rightarrow y+} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u) = 0$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.0.9 $f \in C^1[y, z]$, $\alpha > 0$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} {}^H\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u) = f(u) \text{ ve } \mathbb{D}_{z-}^{\alpha,\beta;\psi} {}^H\mathbb{I}_{z-}^{\alpha;\psi}f(u) = f(u)$$

dır.

Kanıt

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta);\psi} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) \\
&= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(k-\beta k+\beta\alpha);\psi} f(u) \\
&= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi}.
\end{aligned}$$

Teorem 3.0.6 ve Lemma 3.0.8 dan yola çıkarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\beta;\psi} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho-\alpha;\psi} f(u) \\
&= f(u) - \sum_{m=1}^n \frac{(\psi(u) - \psi(y))^{\rho-m}}{\Gamma(\rho+1-m)} f_{\psi}^{[k-m]} \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(y) \\
&= f(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.0.10 $k-1 < \alpha < k$, $k \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olsun. Eğer $f \in C^{n+k}[y, z]$, $n, k \in \mathbb{N}$ ise tüm $m \in \mathbb{N}$ için $c \in (y, u)$, $d \in (u, z)$ olmak üzere

$$\left(\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \right)^m \left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(u) = \frac{\left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(c) (\psi(u) - \psi(y))^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + 1)}$$

ve

$$\left(\mathbb{I}_{z-}^{\alpha;\psi} \right)^m \left({}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(u) = \frac{\left({}^H \mathbb{D}_{z-}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(d) (\psi(z) - \psi(u))^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + 1)}$$

dir.

Kanıt Lemma 2.0.1'i kullanarak

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \right)^m &= \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \dots \mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} = \mathbb{I}_{y+}^{m\alpha;\psi} \\
\left(\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\psi} \right)^m \left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{m\alpha;\psi} \left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(u) \\
&= \frac{1}{\Gamma(m\alpha)} \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{m\alpha-1} \left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(s) ds \\
&= \frac{\left({}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi} \right)^n f(c)}{\Gamma(m\alpha)} \int_y^u \psi'(s) (\psi(u) - \psi(s))^{m\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left({}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi}\right)^n f(c)(\psi(u) - \psi(s))^{m\alpha}}{m\alpha\Gamma(m\alpha)} \\
&= \frac{\left({}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha\beta;\psi}\right)^n f(c)(\psi(u) - \psi(s))^{m\alpha}}{m\alpha\Gamma(m\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

$c \in (y, u)$, integraller için ortalama değeri teoremi ile garanti altına alınmıştır. $\square$

Kesirli analiz zamanla teorik ve pratik anlamda yeni matematiksel kavramların geliştirilmesinde önemli bir araç haline gelmiştir. İntegral ve diferansiyel anlamda çeşitli kesirli operatörler var. Bununla birlikte, doğal problemler giderek daha karmaşık hale gelmekte ve belirli çekirdeklerle sunulan bazı kesirli operatörler, belirli problemlerle sınırlandırılmaktadır. Böylece başka bir f fonksiyonuna, yani bir ψ fonksiyonuna göre bir genel operatör tanımlanmış, bu genel operatör ψ fonksiyonunun seçimine bağlı olarak mevcut kesirli integral operatörlerinin elde edilmesine olanak sağlanmıştır. Bu bölümde, keyfi ψ fonksiyonunun seçimine dayalı olarak kesirli integraller ve kesirli türevlerden oluşan bir sınıf verilmiştir. Özel durumlar için (Kilbas vd. 2006, Samko vd. 1993, Katugampola vd. 2016, Oliveira vd. 2014, Sousa vd. 2017, Furati vd. 2012, Courant vd. 2011) bakınız:

1. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u$ alınır

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u (u-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^{RL}\mathbb{I}_{y+}^{\alpha} f(u).$$

Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir.

2. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u$ ve $y = -\infty$ alınır

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^u (u-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^L\mathbb{I}_+^{\alpha} f(u).$$

Liouville kesirli integrali elde edilir.

3. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u$ ve $y = 0$ alınır

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^R\mathbb{I}_+^{\alpha} f(u).$$

Riemann kesirli integrali elde edilir.

4. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = \ln u$ alınır

$$\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;\ln u} f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u \frac{1}{s} (\ln u - \ln s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u \left(\ln \frac{u}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \\
&= {}^H \mathbb{I}_{y+}^{\alpha} f(u).
\end{aligned}$$

Hadamard kesirli integrali elde edilir.

5. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u^{\sigma}$, $g(u) = u^{\sigma\eta}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
u^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha; u^{\sigma}} g(u) &= u^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha; u^{\sigma}} (u^{\sigma\eta} f(u)) \\
&= \frac{\sigma u^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u t^{\sigma\eta+\sigma-1} (u^{\sigma} - s^{\sigma})^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= {}^{EK} \mathbb{I}_{y+, \sigma, \eta}^{\alpha} f(u).
\end{aligned}$$

Erdelyi-Kober kesirli integrali elde edilir.

6. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u^{\sigma}$, $g(u) = u^{\sigma\eta} f(u)$, $y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
u^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathbb{I}_{0+}^{\alpha; u^{\sigma}} g(u) &= u^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathbb{I}_{0+}^{\alpha; u^{\sigma}} (u^{\sigma\eta} f(u)) \\
&= \frac{\sigma u^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u t^{\sigma\eta+\sigma-1} (u^{\sigma} - s^{\sigma})^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= {}^E \mathbb{I}_{0+, \sigma, \eta}^{\alpha} f(u)
\end{aligned}$$

Erdelyi kesirli integrali elde edilir.

7. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u^{\sigma}$, $g(u) = u^{\eta} f(u)$, $y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
u^{-(\alpha+\eta)} \mathbb{I}_{0+}^{\alpha; u} g(u) &= u^{-\alpha-\eta} \mathbb{I}_{0+}^{\alpha; u} (u^{\eta} f(u)) \\
&= \frac{u^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u t^{\eta} (u - s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= {}^K \mathbb{I}_{0+, \eta}^{\alpha} f(u)
\end{aligned}$$

Kober kesirli integrali elde edilir.

8. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u^{\rho}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{\alpha}} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha; u^{\rho}} f(u) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_y^u t^{\rho-1} (u^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= {}^{\rho} \mathbb{I}_{y+}^{\alpha} f(u)
\end{aligned}$$

Katugampola kesirli integrali elde edilir.

9. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u$, $g(u) = \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^\rho(\omega(u-s)^\alpha)f(u)$ alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u}g(u) &= \Gamma(\alpha)\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}^\rho(\omega(u-s)^\alpha)f(u) \\ &= \int_y^u (u-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}^\rho(\omega(u-s)^\alpha)f(s)ds \\ &= \varepsilon_{y+,\alpha,\beta}^{\omega,\rho}f(u)\end{aligned}$$

Prabhakar kesirli integrali elde edilir.

10. Denklem (2.3)'te $\psi(u) = u$, $y = -\infty$, $z = \infty$ alınırsa

$$\frac{\mathbb{I}_{y+}^{\alpha;u}f(u) + \mathbb{I}_{z-}^{\alpha;u}f(u)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = \frac{{}_L\mathbb{I}_+^\alpha f(u) + {}_L\mathbb{I}_-^\alpha f(u)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = {}_{RZ}\mathbb{I}^\alpha f(u)$$

Riesz kesirli integrali elde edilir.

Tanımlanan denklem (3.1)'de keyfi bir ψ fonksiyonun seçimine bağlı birçok kesirli diferensiyel elde edilir.

1. Denklem (3.1)'in her iki tarafının $\beta \rightarrow 1$ için limiti alınarak

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;\psi}f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(u)}\frac{d}{du}\right)^k f(u) = {}^C\mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u)$$

ψ -Caputo kesirli türevi elde edilir.

2. Denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ için limiti alınarak

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;\psi}f(u) = \left(\frac{1}{\psi'(u)}\frac{d}{du}\right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\psi}f(u) = \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}f(u)$$

ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilir.

3. $\psi(u) = u$ olsun. Denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 1$ limiti alınarak

$$\begin{aligned}{}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;u}f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;u}\left(\frac{d}{du}\right)^k f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_y^u (u-s)^{k-\alpha-1}\left(\frac{d}{du}\right)^k f(s)ds = {}^C\mathbb{D}_{y+}^\alpha f(u)\end{aligned}$$

Caputo kesirli türevi elde edilir.

4. $\psi(u) = u^\rho$ olsun. Denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak

$$\begin{aligned}\rho^\alpha {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;u^\rho}f(u) &= \rho^\alpha \left(\frac{1}{\rho u^{\rho-1}}\frac{d}{du}\right) \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;u^\rho}f(u) \\ &= \rho^{\alpha-k+1}\left(\frac{1}{u^{\rho-1}}\frac{d}{du}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_y^u t^{\rho-1}(u^\rho-s^\rho)^{k-\alpha-1}f(s)ds\end{aligned}$$

$$= {}^\rho \mathbb{D}_{y+}^\alpha f(u)$$

Katugampola kesirli türevi elde edilir.

5. $\psi(u) = u$ olsun. Denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak,

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;u} f(u) &= \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;u} f(u) \\ &= \left(\frac{d}{du} \right)^k \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_y^u (u-s)^{k-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \mathbb{D}_{y+}^\alpha f(u) \end{aligned}$$

Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilir.

6. $\psi(u) = \ln u$ için denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak,

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;\ln u} f(u) &= \left(u \frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\ln u} f(u) \\ &= \left(u \frac{d}{du} \right)^k \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_y^u \left(\ln \frac{u}{s} \right)^{k-\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \\ &= {}^H \mathbb{D}_{y+}^\alpha f(u) \end{aligned}$$

Hadamard kesirli türevini elde edilir.

7. $\psi(u) = \ln u$ için denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 1$ limiti alınarak,

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;\ln u} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\ln u} \left(u \frac{d}{du} \right)^k f(u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_y^u \left(\ln \frac{u}{s} \right)^{k-\alpha-1} \left(s \frac{d}{ds} \right)^k f(s) \frac{ds}{s} \\ &= {}^{CH} \mathbb{D}_{y+}^\alpha f(u) \end{aligned}$$

Caputo-Hadamard kesirli türevini elde edilir.

8. $\psi(u) = u^\rho$ 'i olsun. Denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 1$ limiti alınarak

$$\begin{aligned} \rho^\alpha {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;u^\rho} f(u) &= \rho^\alpha \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;u^\rho} \left(\frac{1}{\rho u^{\rho-1}} \frac{d}{du} \right) f(u) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-k+1}}{\Gamma(k-\alpha)} \int_y^u s^{\rho-1} (u^\rho - s^\rho)^{k-\alpha-1} \left(\frac{1}{s^{\rho-1}} \frac{d}{ds} \right)^k f(s) ds \\ &= {}^{CK} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,\rho} f(u) \end{aligned}$$

Caputo-Komtuğampola kesirli türevi elde edilir.

9. Denklem (2.4)'te $\psi(u) = \ln u$ alınırsa,

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\rho; \ln u} f(u) &= \left(u \frac{d}{du}\right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\rho; \ln u} f(u) \\ &= \left(u \frac{d}{du}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k-\rho)} \int_y^u \left(\ln \frac{u}{s}\right)^{k-\rho-1} f(s) \frac{d}{ds} \\ &= {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\rho} f(u) \end{aligned}$$

Hadamard kesirli türevi elde edilir. Buradan $\rho = \alpha + \beta(k - \alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; \psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha; \psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du}\right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha); \psi} f(u) \\ &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha; \psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho; \psi} f(u) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\mathbb{D}_{y+}^{\rho; \psi}(\cdot)$ başka bir fonksiyona göre Riemann-Liouville kesirli türevidir. Böylece;

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; \ln u} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\rho} f(u) \\ &= \mathbb{D}_{y+}^{\alpha; \beta} f(u) \end{aligned}$$

Hilfer-Hadamard kesirli türevi elde edilir.

10. Denklem (2.4)'te $\psi(u) = u^\gamma$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{y+}^{\rho; u^\gamma} f(u) &= \left(\frac{1}{\gamma u^{\gamma-1}} \frac{d}{du}\right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\rho; u^\rho} f(u) \\ &= \gamma^{1-k} \left(\frac{1}{u^{\gamma-1}} \frac{d}{du}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k-\rho)} \int_y^u t^{\gamma-1} (u^\gamma - s^\gamma)^{k-\rho-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\gamma^\alpha} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha} f(u) \end{aligned}$$

Katugampola kesirli türevi elde edilir. $\rho = \alpha + \beta(k - \alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; \psi} f(u) &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha; \psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du}\right)^k \mathbb{I}_{y+}^{(1-\beta)(k-\alpha); \psi} f(u) \\ &= \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha; \psi} \mathbb{D}_{y+}^{\rho; \psi} f(u) \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{D}_{y+}^{\rho; \psi}(\cdot)$, başka bir fonksiyona göre Riemann-Liouville kesirli türevidir. Böylece;

$${}^H\mathbb{D}_{y+}^{\alpha, \beta; u^\rho} f(u) = \gamma \mathbb{I}_{y+}^{\rho-\alpha} \mathbb{D}_{y+}^{\rho} f(u)$$

$$= {}^\gamma \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\beta} f(u)$$

Hilfer-Katugampola kesirli türevi elde edilir.

11. $\psi(u) = u$, $a = 0$ ve denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak

$$\begin{aligned} {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;\psi} f(u) &= \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{0+}^{k-\alpha;\psi} f(u) \\ &= {}^R \mathbb{D}_+^\alpha f(u) \end{aligned}$$

Riemann kesirli türevi elde edilir.

12. $\psi(u) = u$, $g(u) = \mathbb{E}_{\gamma,k-\alpha}^{-\rho} [\omega(u-s)^\gamma] f(u)$ ve denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak

$$\begin{aligned} \Gamma(k-\alpha) {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;u} g(u) &= \Gamma(k-\alpha) {}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,0;u} (\mathbb{E}_{\gamma,k-\alpha}^{-\rho} [\omega(u-s)^\gamma] f(u)) \\ &= \Gamma(k-\alpha) \left(\frac{d}{du} \right)^k \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\psi} (\mathbb{E}_{\gamma,k-\alpha}^{-\rho} [\omega(u-s)^\gamma] f(u)) \\ &= \left(\frac{d}{du} \right)^k \int_y^u (u-s)^{k-\alpha-1} \mathbb{E}_{\gamma,k-\alpha}^{-\rho} [\omega(u-s)^\gamma] f(s) ds \\ &= \mathbb{D}_{y+,\rho,\alpha}^{\omega;\gamma} f(u) \end{aligned}$$

Prabhakar kesirli türevi elde edilir.

13. $\psi(u) = u$, $y = -\infty$, $z = \infty$ ve denklem (3.1)'de her iki tarafın $\beta \rightarrow 0$ limiti alınarak

$$\frac{-({}^H \mathbb{D}_{-\infty}^{\alpha,0;u} f(u) + {}^H \mathbb{D}_{\infty}^{\alpha,0;u} f(u))}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = \frac{-({}_L \mathbb{D}_+^\alpha f(u) + {}_L \mathbb{D}_-^\alpha f(u))}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = {}^{RZ} \mathbb{D}^\alpha f(u)$$

Riesz kesirli türevi elde edilir.

14. İlk olarak, denklem (3.1)'in her iki tarafında $\beta \rightarrow 1$ limiti alınarak,

$${}^H \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;\psi} f(u) = \mathbb{I}_{y+}^{k-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} \right)^k f(u) = {}^C \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi}$$

elde edilir. Burada ${}^C \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} f(u)$ başka bir fonksiyona göre Caputo kesirli türevidir.

Diğer taraftan

$\psi(u) = u^\sigma$ ve $g(u) = u^{\sigma(\eta+\alpha)} f(u)$ için

$${}^{EK} \mathbb{D}_{y+,\sigma,\eta}^\alpha f(u) = u^{-\sigma\eta} {}^C \mathbb{D}_{y+}^{\alpha;\psi} (u^{\sigma(\eta+\alpha)} f(u))$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} u^{-\sigma\eta^H} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;\psi} g(u) &= u^{-\sigma\eta^H} \mathbb{D}_{y+}^{\alpha,1;\psi} (u^{\sigma(\eta+\alpha)} f(u)) \\ &=^{EK} \mathbb{D}_{y+,\sigma,\eta}^{\alpha} f(u) \end{aligned}$$

Erdelyi-Kober kesirli türevi elde edilir.



4. GRONWALL EŞİTSİZLİĞİ

Gronwall eşitsizliği, integral ve diferansiyel denklemlerin niteliksel teorisinin incelenmesinde ve ayrıca doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin Cauchy tipi problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynar. Bu bölümde Sousa ve Oliveira tarafından 2019 yılında yayımlanan ψ -Hilfer kesirli türevinin Gronwall eşitsizliği üzerinde bir uygulaması verilmiştir.

Teorem 4.0.1 u, v integrallenebilir iki fonksiyon $g, [y, z]$ üzerinde sürekli olsun. $\psi \in C^1[y, z]$ artan bir fonksiyon öyle ki $\forall s \in [y, z]$ için $\psi'(s) \neq 0$ olsun. Kabul edelim ki

1. u ve v negatif değildir;
2. g negatif olmayan ve azalmayan olsun

eğer

$$u(s) \leq v(s) + g(s) \int_y^s \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} u(t) dt$$

ise $\forall s \in [y, z]$ için

$$u(s) \leq v(s) + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[g(s)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(s)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} v(t) dt \quad (4.1)$$

dir.

Kanıt $\forall s \in [y, z]$ olmak üzere, Φ yerel integrallenebilen fonksiyonları için.

$$\mathbb{A}\Phi(s) = g(s) \int_y^s \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} \Phi(t) dt \quad (4.2)$$

olsun. Bu durumda

$$u(s) \leq v(s) + \mathbb{A}u(s)$$

dir. $k \in \mathbb{N}$ için

$$u(s) \leq \sum_{n=0}^{k-1} A^n v(s) + A^k u(s)$$

yazılır. Sonraki adım genellikle matematiksel tümevarımdır; eğer Φ negatif olmayan bir fonksiyonsa, o zaman

$$A^k u(s) \leq \int_y^s \frac{[g(s)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(s)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} v(t) dt \quad (4.3)$$

dir. Denklem (4.3), $k = 1$ için doğrudur. Kabul edelim ki $m = k \in N$ için doğru olsun, o zaman tümevarım hipoteziden

$$\begin{aligned} A^{m+1}u(s) &= A(A^m u(s)) \leq A\left(\int_y^s \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} u(t) dt\right) \\ &= g(s) \int_y^s \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} \\ &\quad * \left(\int_y^t \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(x)(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha m-1} u(x) dx\right) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Hipotezden, g azalmayan bir fonksiyon yani $t \leq s$ için $g(t) \leq g(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} A^{m+1}u(s) &\leq \frac{[\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} [g(t)]^{m+1} \int_y^s \int_y^t \psi'(s)((\psi(s) - \psi(t)))^{\alpha-1} \\ &\quad \psi'(x)((\psi(t) - \psi(x)))^{\alpha m-1} u(x) dx dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Dirichlet formülünden denklem (4.5)'den yola çıkarak

$$A^{m+1}u(s) \leq \frac{[\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} [g(t)]^{m+1} \int_y^s \psi'(t) u(t) \int_t^s \psi'(x)(\psi(s) - \psi(x))^{\alpha-1} [\psi(x) - \psi(t)]^{\alpha m-1} dx dt \quad (4.6)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} &\int_t^s \psi'(x)(\psi(s) - \psi(x))^{\alpha-1} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha m-1} ds \\ &= \int_t^s \psi'(x)(\psi(s) - \psi(x))^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\psi(x) - \psi(t)}{\psi(s) - \psi(t)}\right)^{\alpha m-1} (\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} ds \end{aligned}$$

dir.

$u = \frac{\psi(x) - \psi(t)}{\psi(s) - \psi(t)}$ değişken değişimi yapılır. Beta fonksiyonunun tanımı ve gamma fonksiyonu ile olan ilişkisi $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\int_t^s \psi'(x)(\psi(s) - \psi(x))^{\alpha-1} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha m-1} dx \\ &= (\psi(s) - \psi(t))^{m\alpha+\alpha-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{m\alpha-1} du \\ &= (\psi(s) - \psi(t))^{m\alpha+\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha)}{\Gamma(\alpha + m\alpha)} \end{aligned}$$

(4.7)

yazılır. Denklem (4.6) ve (4.7) den

$$A^{m+1}u(s) \leq \int_y^s \frac{(g(s)\Gamma(\alpha))^{m+1}}{\Gamma(\alpha(m+1))} \psi'(t)u(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha(m+1)-1} dt,$$

elde edilir.

Şimdi $k \rightarrow \infty$ için , $A^k u(s) \rightarrow 0$ olduğunu ispatlayalım. g, $[y, z]$ sürekli bir fonksiyon ise Weierstrass teoreminden $M > 0$ sabiti mevcuttur öyle ki tüm $s \in [y, z]$ için $g(s) \leq M$ dir.

$$A^{k+1}u(s) \leq \int_y^s \frac{(M\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(\alpha(K))} \psi'(t)u(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha k-1} dt$$

dir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(\alpha k)}$$

serisi göz önüne alınırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha k)(\alpha k)^k}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} = 1 \quad (4.8)$$

sağlanır. Seriler için oran testinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha k)(\alpha k)^k}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} = 0$$

elde edilir. Böylece seriler yakınsaktır ve

$$u(s) \leq \sum_{m=0}^{\infty} A^m v(s) \leq v(s) + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(g(s)\Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} v(t) dt$$

sonucu elde edilir. $\square$

Sonuç 4.0.2 $\alpha > 0$, $\mathbb{I} = [y, z]$ ve $f, \psi \in C^1([y, z], R)$ iki fonksiyon öyle ki ψ artan ve tüm $s \in \mathbb{I}$ için $\psi'(s) \neq 0$ olsun . Kabul edelim ki $z \neq 0$ ve u ve v , $[y, z]$ üzerinde negatif olmayan yerel integrallenebilir bir fonksiyonları

$$u(s) \leq v(s) + z \int_y^s \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} u(t) dt$$

sağlasın. Bu durumda $\forall s \in [y, z]$ için

$$u(s) \leq v(s) + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[z\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m-1} v(t) dt$$

dır.

Sonuç 4.0.3 Teorem 4.0.1'in hipotezi altında, v , $[y, z]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$u(s) \leq v(s) \mathbb{E}_\alpha(g(s)\Gamma(\alpha)[\psi(s) - \psi(y)]^\alpha)$$

dir. Burada $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{E}_\alpha(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{\Gamma(\alpha m + 1)}$, $Re(\alpha) > 0$ ile tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Kanıt v azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} u(s) &\leq v(s) + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[g(s)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(s)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m - 1} v(t) dt \\ &= v(s) \left[1 + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[g(s)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \psi'(s)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha m - 1} v(t) dt \right] \\ &= v(s) \left[1 + \int_y^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[g(s)\Gamma(\alpha)]^m}{\Gamma(\alpha m)} \frac{(\psi(s) - \psi(y))^{\alpha m}}{m\alpha} \right] \\ &= v(s) \mathbb{E}_\alpha(\Gamma(\alpha)(\psi(s) - \psi(y))^\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Literatürden bildiğimiz kadarıyla ψ -Hilfer GPF yardımıyla Gronwall eşitsizliği ifade edilmemiştir. Bu çalışmanın sonunda aşağıdaki teoremle bu eşitsizliği veriyoruz.

Teorem 4.0.4 $\alpha, \rho > 0$, $u(s)$ ve $v(s)$, $[0, T)$ üzerinde yerel olarak integrallenebilir negatif olmayan fonksiyonlar ve $w(s)$, $[0, T)$ üzerinde negatif olmayan, azalmayan ve sürekli bir fonksiyon, ayrıca $s \in [0, T)$ için $w(s) \leq M$ olsun. Burada M bir sabittir. Eğer

$$u(s) \leq v(s) + \rho^\alpha \Gamma(\alpha) w(s) ({}_0\mathbb{I}^{\alpha, \rho} u)(s), \quad (4.9)$$

ise

$$u(s) \leq v(s) + \int_0^s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{((w(s)\Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(m\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{m\alpha-1} v(t) \right\} dt \quad (4.10)$$

dir.

Kanıt

$$\mathbb{B}\Phi(s) = w(s) \int_0^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} \Phi(t) dt$$

olsun. Bu durumda $u(s) \leq v(s) + \mathbb{B}u(s)$ dir. Buradan $n \in \mathbb{N}$ için $u(s) \leq \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{B}^m v(s) + \mathbb{B}^n u(s)$ yazılır. Sonraki adım genellikle tümevarımdır. Böylece

$$\mathbb{B}^n u(s) \leq \int_0^s \frac{(w(s)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{n\alpha-1} u(t) dt \quad (4.11)$$

ve $n \rightarrow \infty$ için $\mathbb{B}^n u(s) \rightarrow 0$ 'dır. $t \in [0, T)$ için *Denklem*(4.11)'in $n = 1$ için sağlanır. Kabul edelim ki $n = m$ için ,

$$\mathbb{B}^m u(s) \leq \int_0^s \frac{(w(s)\Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(m\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{m\alpha-1} u(t) dt$$

doğru olsun

Eğer $n = m + 1$ ise

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{m+1} u(s) &= \mathbb{B}(\mathbb{B}^m u(s)) \\ &\leq w(s) \int_0^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} \\ &\quad \left[\int_0^s \frac{(w(s)\Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(m\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(t)-\psi(v))} \psi'(v)(\psi(t) - \psi(v))^{m\alpha-1} u(v) dv \right] dt \\ &= \frac{(w(s)^{m+1} \Gamma^m(\alpha))}{\Gamma(m\alpha)} \int_0^s \left[\int_v^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(t)-\psi(v))} \right. \\ &\quad \left. \psi'(t) \psi'(v)(\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} (\psi(s) - \psi(v))^{m\alpha-1} dt u(v) dv \right] dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

dir.

$\psi(t) = \psi(v) + z(\psi(s) - \psi(v))$ değişken değişirtmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_v^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(v))} (\psi(s) - \psi(t))^{\alpha-1} \psi'(v)(\psi(t) - \psi(v))^{m\alpha-1} dt &= (s - v)^{m\alpha+\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(v))} \\ &\quad \int_0^1 (1 - z)^{\alpha-1} z^{m\alpha-1} dz \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha)}{\Gamma((m+1)\alpha)} \int_v^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(v))} \\ &\quad \psi'(v)(\psi(s) - \psi(v))^{(m+1)\alpha-1} dv \end{aligned}$$

elde edilir.

Buna göre denklem (4.12)'den yola çıkarak

$$\mathbb{B}^{m+1} u(s) \leq \frac{w^{m+1}(s) \Gamma^{m+1}(\alpha)}{\Gamma((m+1)\alpha)} \int_0^s e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(v))} \psi'(v)(\psi(s) - \psi(v))^{(m+1)\alpha-1} u(v) dv \quad (4.13)$$

elde edilir.

Ayrıca $t \in [0, T]$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\mathbb{B}^n u(s) \leq \int_0^s \frac{(M\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\psi(s)-\psi(t))} \psi'(t) (\psi(s) - \psi(t))^{n\alpha-1} u(t) dt \rightarrow 0,$$

dır.

İspatı tamamlamak için $m \rightarrow \infty$ alınırsa

$$u(s) \leq \sum_{m=0}^{n=1} \mathbb{B}^m v(s) + \mathbb{B}^n u(s) \leq v(s) + \sum_{m=1}^{n=1} \mathbb{B}^m v(s) + \mathbb{B}^n u(s) \leq v(s) + \sum_{m=1}^{n=\infty} \mathbb{B}^m v(s)$$

dır. Yarıgrup özelliğinden ve $\mathbb{B}$ 'nin tanımından denklem (4.10)'u elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. □

5. KAYNAKLAR

- Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J, 2006, Kesirli diferansiyel denklemlerin teorisi ve uygulamaları (Cilt 204) elsevier.
- Samko S G, 1993, Fractional integrals and derivatives, Theory and applications.
- Rosa C F A E, Capelas de Oliveira E, 2015, Gevşeme denklemleri: kesirli modeller.
- Costa F S, Grigoletto E C, Vaz Jr J, de Oliveira E C, 2015, Slowing-down of neutrons: a fractional model, Commun Appl. Ind. Math, 6(2), 1-15.
- Atanackovic T M, Pilipovic S, Stankovic B, Zorica D, 2014, Fractional calculus with applications in mechanics: vibrations and diffusion processes, John Wiley, Sons.
- Corlay S, Lebovits J, Véhel J L, 2014, Multifractional stochastic volatility models, Mathematical Finance, 24(2), 364-402.
- Magin R L, Ingo C, Colon-Perez L, Triplett W, Mareci T H, 2013, Characterization of anomalous diffusion in porous biological tissues using fractional order derivatives and entropy Microporous and Mesoporous Materials, 178, 39-43.
- Vanterler da C, Sousa J, Capelas de Oliveira E, Magna L A, 2017, Fractional calculus and the ESR test. arXiv: 170107379v1 [q-bioTO] .
- Magin Richard L, 2010, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. Computers & Mathematics with Applications 59(5), 1586-1593.
- Meral F C, Royston T J, Magin R, 2010, Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study, Communications in nonlinear science and numerical simulation 15(4), 939-945.
- Kosta F S, Soares J C A, Plata A R G, de Oliveira, Edmundo C, 2017, On the fractional Harry Dym equation, commput Appl Math 1-15.

- Leibniz G W, 1849, Letter from Hanover, Germany, September 30, 1695 to GA L hospital, Leibnizen Mathematische Schriften, 2,301-302.
- Sousa, J V D C, Fečkan M, de Oliveira E C, 2021, Faedo-Galerkin approximation of mild solutions of fractional functional differential equations, Nonautonomous Dynamical Systems, 8(1), 1-17.
- Borgato M T, Neuenschwander E, Passeron I, (Eds.), 2018, Mathematical Correspondences and Critical Editions, Birkhäuser.
- Herrmann R, 2011, Fractional calculus: an introduction for physicists.
- Katugampola U N, 2016, New fractional integral unifying six existing fractional integrals. arXiv preprint arXiv:1612.08596.
- Katugampola U N, 2014, Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. arXiv preprint arXiv:1411.5229.
- Oliveira E C D, Machado J A, 2014, A review of definitions for fractional derivatives and integral, Mathematical Problems in Engineering, 1-7.
- Agarwal R P, Wang G, Ahmad B, Zhang L, Hobiny A, Monaque S, 2015, On existence of solutions for nonlinear q-difference equations with nonlocal q-integral boundary conditions, Mathematical Modelling and Analysis, 20(5), 604-618.
- Panchal S K, Khandagale A D, Dole P V, 2016, K-hilfer-prabhakar fractional derivatives and applications. arXiv preprint arXiv:1609.05696.
- Garra R, Gorenflo R, Polito F, Tomovski Ž, 2014, Hilfer–Prabhakar derivatives, some applications, Applied mathematics and computation, 242, 576-589.
- Garrappa R, Maione G, 2017, Fractional Prabhakar derivative and applications in anomalous dielectrics: a numerical approach, In: Theory and applications of non-integer order systems. Springer, p. 429-439.
- Garrappa R, Maione G, 2017, Fractional Prabhakar derivative and applications

- in anomalous dielectrics: a numerical approach. In Theory and Applications of Non-integer Order Systems: 8th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, Zakopane, Poland (pp. 429-439). Springer International Publishing.
- Bulavatsky V M, 2017, Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer–Prabhakar derivative. Cybernetics and Systems Analysis, 53, 204-216.
- Sousa J, de Oliveira E C, 2017, On the Ψ – fractional integral and applications, arXiv preprint arXiv:1710.03712.
- Almeida R, 2017, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 44, 460-481.
- Furati K M, Kassim M D, 2012, Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. Computers Mathematics with applications, 64(6), 1616-1626.
- Srivastava H M, Tomovski Ž, 2009, Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag–Leffler function in the kernel, Applied Mathematics and Computation, 211(1), 198-210.
- Courant R 2011, Differential and Integral Calculus, Volume 2 (Vol. 2), John Wiley , Sons.
- Katugampola U N, 2011, New approach to a generalized fractional integral. Applied mathematics and computation, 218(3), 860-865.
- Vanterler da C, Sousa J, Capelas de Oliveira E A, 2017, Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operator, arXiv:1709.03634 [math.CA] .
- Sousa J, Vanterler da C, Capelas De Oliveira E, 2018, On the ψ -Hilfer fractional derivative, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation

60, 72-91.

Sousa J V D C, Capelas de Oliveira E, 2017, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operator, arXiv preprint arXiv:1709.03634 .

Ashyraliyev M, 2017, On Gronwall's Type Integral Inequalities with Singular Kernels, Filomat 31(4), 1041-1049.

Gong Z, Qian D, Li C, Guo P, 2012, On the Hadamard type fractional differential system, Fractional Dynamics and Control, 159-171.

Ye H, Jianming G, Yongsheng D, 2007, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications 328(2), 1075-1081.

Alzabut J, Abdeljawad T, Jarad F, Sudsutad W, 2019, A Gronwall inequality via the generalized proportional fractional derivative with applications, 1, 1-12.