

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



KESİRLİ TÜREVLİ EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Meltem ÖĞRENMİŞ

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

ŞUBAT 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

KESİRLİ TÜREVLİ EĞRİLERİN DİFERENSIYEL GEOMETRİSİ

Tez Yazarı
Meltem ÖĞRENMİŞ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

ŞUBAT 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı:	Kesirli Türevli Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi
Yazarı:	Meltem ÖĞRENMİŞ
İlk Teslim Tarihi:	05.01.2022
Savunma Tarihi:	04.02.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Vedat ASİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Ünal İÇ Fırat Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Hülya GÜN BOZOK Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM Gümüşhane Üniversitesi, Kelkit Aydın Doğan MYO	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Kesirli Türevli Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi ” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

04.02.2022

Meltem ÖĞRENMİŞ



ÖNSÖZ

Bu çalışmada Diferensiyel Geometri alanında önemli bir yere sahip olan eğriler teorisinin farklı bir bakış açısı ile incelenmesi amaçlanmıştır. Eğriler teorisi birçok araştırmada diferensiyel ve integral hesap metotları kullanılarak ele alınmıştır. Ancak son zamanlarda Kesirli Analiz kavramı birçok bilim alanında ilgi çekici olmaya başlamıştır. Diferensiyel Geometri ve Kesirli Türevi birlikte düşünmek eğriler teorisine farklı bir bakış açısı sağlamıştır. Özellikle Caputo kesirli türevi eğrilerin geometrisini oluşturmak için araştırmacılara bazı fırsatlar vermektedir. Çalışmamızda, yeni ve ilgi çekici sonuçlar elde edilebilecek bu alanda bazı özel eğriler ele alınmıştır.

Eğitimimin başından itibaren bu doktora tezinin oluşturulması sürecinde desteklerini gördüğüm, ilk olarak danışman hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ olmak üzere, Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN' na ve Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü tüm akademik personeline teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca vermiş oldukları destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunmak isterim.

Meltem ÖĞRENMİŞ
ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Öklid Uzayında Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Kesirli Türevle İlgili Temel Kavramlar	4
3. DÜZLEM EĞRİLERİNİN KESİRLİ DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ	8
3.1. Kesirli Yay Uzunluğu ve Bir Düzlem Eğrisi için Frenet Çatısı.....	8
3.2. Bir Düzlem Eğrisi İçin Kesirli Frenet-Serret Formülleri	9
3.3. İki-boyutlu Bir Eğrinin Kesirli Eğriliği	10
3.4. Bazı İki-boyutlu Eğriler İçin Kesirli Mertebeden Eğrilik	11
4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KESİRLİ TÜREVLİ EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ	14
4.1. Düzlem Eğrileri	14
4.2. Uzay Eğrileri	15
4.3. Kesirli Mertebeden Uzay Eğrilerinin Eğrilikleri	16
4.4. Düzlem ve Uzay Eğrilerinin Temel Teoremleri	18
5. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA EĞRİLERİN KESİRLİ DEĞİŞMEZLERİ	26
5.1. Eğrilerin Kesirli Değişmezleri	26
5.2. Kesirli Eğriliklerin Geometrik Yorumu.....	28
6. MATERYAL VE METOT	33
7. BULGULAR VE TARTIŞMA	34
8. SONUÇLAR.....	35
ÖNERİLER	37
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Kesirli Türevli Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi

Meltem ÖĞRENİMİŞ

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2022, Sayfa: ix + 40

Eğriler teorisi diferensiyel geometri alanında uzunca bir süredir ilgi çekici bir çalışma alanı olmuştur, ancak son zamanlarda bu teoride kesirli türev tekniklerini kullanmak birçok araştırmaya yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu doktora tezinin amacı ise diferensiyel geometride eğrilerin temel özelliklerini Caputo kesirli türevi yardımıyla incelemektir.

Bu doktora tezi kapsamında ilk olarak Öklid uzayında düzlem eğrilerinin yay uzunluğu, Frenet-Serret çatısı ve Frenet –Serret formülleri incelenmiş ve bu düzlem eğrisinin kesirli eğrilikleri detaylıca verilmiştir. Daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayında kesirli mertebeden uzay eğrilerinin temel teoremleri ve Frenet-Serret formülleri ele alınmıştır. Bu bölümde verilen sonuçlar klasik anlamda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Son bölümde ise yüksek boyutlu Öklid uzaylarında eğrilerin kesirli değişmezleri elde edilip, bazı özel eğrilerin eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Tez çalışması boyunca kullanılan metotla ilgili öneri, elde edilen sonuçların literatüre sunduğu katkı ve problemler son kısımda verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Parametrik eğri, Caputo kesirli türev, Frenet-Serret vektörleri, Frenet-Serret formülleri

ABSTRACT

Differential Geometry of Curves with Fractional Derivative

Meltem ÖĞRENİMİŞ

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

February 2022, Pages: ix + 40

The theory of curves has been an interesting field of study in differential geometry for a long time, but recently using fractional derivative techniques in this theory has brought a new perspective to many studies. The aim of this doctoral thesis is to examine the basic properties of curves in differential geometry with the help of the Caputo fractional derivative.

Within the scope of this doctoral thesis, firstly, the arc length of plane curves in Euclidean space, Frenet-Serret framework and Frenet-Serret formulas were examined and the fractional curvatures of this plane curve were given in detail. Then, the fundamental theorems of fractional space curves in 3-dimensional Euclidean space and the Frenet-Serret formulas are discussed. The results given in this section are compared with the results obtained in the classical sense.

In the last chapter, fractional invariants of curves in high-dimensional Euclidean spaces are obtained and the relations between the curvatures of some special curves are given.

The suggestions regarding the method used throughout the thesis, the contribution of the obtained results to the literature and the problems are given in the last part.

Keywords: Parametric curve, Caputo fractional derivative, Frenet-Serret vectors, Frenet-Serret formulas

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Bir çember için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler	12
Şekil 3.2. Bir parabol için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler	12
Şekil 3.3. Sinüs eğrisi için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler	13
Şekil 4.1. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\kappa_\alpha = 1$ eğriliğine sahip düzlem eğrileri.....	22
Şekil 4.2. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\kappa_\alpha = \tau_\alpha = 1$ eğrilik ve burulmasına sahip uzay eğrileri	23
Şekil 4.3. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 0.99, 1\}$ için $\kappa_\alpha(s) = \frac{3\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$, $\tau_\alpha(s) = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$ eğrilik ve burulmasının grafikleri	24
Şekil 4.4. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\tau_\alpha(s) = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$ eşitliğine sahip uzay eğrileri	25

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^2$	: İki Boyutlu Uzay
$\mathbb{R}^3$	: İki Boyutlu Uzay
$\mathbb{R}^n$	: n -Boyutlu Uzay
α	: Kesirli Mertebe
$\Gamma(\alpha)$	: Gamma Fonksiyonu
I	: Kesirli İntegral
D	: Riemann-Liouville Kesirli Türevi
cD	: Caputo Kesirli Türevi
e_1	: İki-boyutlu Uzayda Teğet vektör
$e_1^{(\alpha)}$	: İki-boyutlu Uzayda Kesirli teğet vektör
e_2	: İki-boyutlu Uzayda Normal vektör
$e_2^{(\alpha)}$	: İki-boyutlu Uzayda Kesirli normal vektör
$\ \quad \ $	: Norm
$\times$	: $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpım
$c(s)$	: Düzgün eğri
κ	: İki-boyutlu Uzayda Eğrinin eğriliği
τ	: İki-boyutlu Uzayda Eğrinin burulma
$\dot{x}$	: $\frac{dx}{dt}$
t	: Üç-boyutlu Uzayda teğet vektör
n	: Üç -boyutlu Uzayda normal vektör
b	: Üç -boyutlu Uzayda binormal vektör
κ_α	: İki-boyutlu Uzayda kesirli eğrilik
τ_α	: İki-boyutlu Uzayda kesirli burulması
∇	: $\mathbb{R}^n$ deki Levi-Civita konneksiyonu
$\kappa_i^{(\alpha)}$	: n -boyutlu Uzayda kesirli eğrilik
κ_1^*	: İnvölüt eğrinin eğriliği
κ_2^*	: İnvölüt eğrinin burulması
$\kappa_1^{(\alpha)*}$	: İnvölüt eğrinin kesirli eğriliği
$\kappa_2^{(\alpha)*}$	: İnvölüt eğrinin kesirli burulması

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi diferensiyel geometri alanında uzunca bir süredir ilgi çekici bir çalışma alanı olmuştur, ancak son zamanlarda bu teoride kesirli türev tekniklerini kullanmak birçok araştırmaya yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Kesirli türev kavramı ilk olarak 17. yüzyılda ortaya atılmış ve artan bir çalışma sayısı ile günümüzde birçok alanda birçok araştırmacı için ilham kaynağı olmuştur. Bu nedenle kesirli analiz son zamanlarda diferensiyel geometride de önemli çalışma alanlarında biri olmayı başarmıştır. Klasik anlamda diferensiyel ve integral tam sayılı mertebeden hesap edilirken, kesirli analizde diferensiyel ve integralin mertebeleri tamsayı değil de kesirlidir. Yani kesirli analiz adi diferensiyel ve integralin kesirli mertebeye genellemesidir. Kesirli merteben türevin tam sayılı mertebeden türevden farkı bir fonksiyonun integrasyonu ile verilir. Bu konuda çok sayıda çalışma yapılmış olup, bu alanda detaylı bilgiye [1-4] de ulaşılabilir. Lokal olmayan bir fonksiyon temsilinin kesirli türevi geçmiş tarihte veya uzay menzilli bir etkileşimle ilişkili olduğunu da söyleyebiliriz. Ayrıca kesirli analizin viskoelastik [5-11], analitik mekanik [12-14] ve dinamik sistemlere [15-19] birçok uygulaması vardır. Kesirli analiz son çalışmalarda diferensiyel geometri bakış açısıyla da çalışılmaya başlanmış olup kesirli operatörlerin birçok çeşidi mevcuttur, ancak eğriler ve yüzeylerin geometrisinin daha çok Caputo kesirli türevi ile verilen Leibnitz kesirli türevine dayalı olarak çalışılması önerilir [20]. Son çalışmalarda Caputo kesirli türevi henüz eğrilerin diferensiyel geometrisini formüle etmek için direkt olarak kullanılmamaktadır. Ancak yine de Caputo kesirli türevini kullanmak, sabit fonksiyonun kesirli türevi sıfır olduğundan dolayı bir geometrik teoriyi formüle etmek için diğer kesirli türev operatörlerinden daha uygundur [21-25]. Caputo kesirli türevinin avantajlarına dayalı olarak, Lagrange mekaniğin bir nicelemesi [22,24] de ve yerçekimi teorisinde ise [21,23,26] de tartışılmıştır.

Genel olarak, kesirli diferensiyel geometri çalışılırken Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi kavramlarına ihtiyaç duyulur. Ancak kesirli analiz kapsamında bu kavramlar sonsuz serilerle elde edilir ve başlangıç anında ve uzun bir periyoddan sonra etki durumlarında kullanılır [3,4].

Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi, düzgün $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için,

$$(D_x^\alpha f g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{d^i f}{dx^i} (D_x^{\alpha-i} g)(x) - \frac{f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

ve

$$(D_x^\alpha f)(g(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{x^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \frac{d^i f(g(x))}{dx^i} + \frac{f(g(x))-f(g(0))}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \quad (1.1)$$

ile verilir [27].

Tam sayılı mertebeden türevin bu farklı formu bir eğrinin eğriliği ve birim teğet vektör gibi geometrik kavramları türetmek için bir zorluk ortaya çıkarır. Dolayısıyla türevin geometrik teorisini inşa etmek için sonsuz serilerin belirli bir sadeleştirilmesi kullanılır. Bu sadeleştirme ile sonsuz serilerden kesirli türevin özelliklerini koruyan çoğu temel terim çıkarılır.

Dolayısıyla $t = g(x)$ olmak üzere

$$(D_x^\alpha f)(g(x)) = \frac{\alpha x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{df}{dt} \frac{dg}{dx} \quad (1.2)$$

eşitliği elde edilir.

Bu sadeleştirme formülü (1.1) eşitliğindeki sonsuz serinin sadece $i = 1$ terimi alınarak elde edilmiştir. Bu formül aslında kesirli türevin etkisini kısmen vermektedir ve adi türev yardımı ile ifade edilmiştir.

Bu sadeleştirmeden sonra basitleştirilmiş Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi kullanılarak direkt Caputo türevine dayalı kesirli geometrik teoremin inşası beklenebilir. Yani Caputo türevini kullanmak eğrileri ve yüzeylerin diferensiyel geometrisini çalışırken özellikle bir sabit fonksiyon üzerinde etkisiz olmasından dolayı araştırmacılara bir avantaj sağlayacaktır.

Bir diğer önemli husus ise eğri ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi çalışılırken kullanılan Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyon türevi kavramının yanında Leibnitz kuralı göz önüne alındığında (1.2) ile verilen zincir kuralıdır.

Çalışmanın giriş kısmında; eğri ve yüzeylerin geometrik özelliklerini belirleyen temel kavramlar verildikten sonra ardından da kesirli türev ile ilgili literatüre geçmiş bazı önemli temel kavramlara yer verildi.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde bir düzlem eğrisi ve bu eğrinin kesirli teğet vektörü göz önüne alındı ve kısaca kesirli analiz teorisinden bahsedildi. Ardından Caputo kesirli türevi kullanılarak kesirli mertebeden eğrilerin geometrisi verildi. Yay uzunluğunun kesirli bir genelleştirmesi ile bir düzlem eğrisinin Frenet-Serret formülleri ve eğriliğinin nasıl hesaplanacağı açıklandı. Bölüm sonunda ise bir eğrinin kesirli geometrisinin bazı örneklerle uygulanmasına yer verildi ve kesirli türevin eğrinin eğriliği üzerine etkisi tartışıldı. Bu etkinin zamana göre değişimini veren grafikler sunuldu.

Daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisi kesirli türev ele alınarak incelendi. Bu kısımda 3- boyulu Öklid uzayındaki bir eğrinin Frenet-Serret formülleri ve eğriliğinin nasıl hesaplanacağı ve bu eğrinin kesirli mertebeden eğrilik ve burulmasının nasıl hesaplanacağı açıklandı. Ardından düzlem ve uzay eğrilerinin temel teoremi, kesirli mertebeden türev kullanılarak verildi ve tam sayılı mertebeden türevle karşılaştırıldı. Bölüm sonunda ise yine bazı örneklerle yer verildi.

Çalışmanın son bölümünde ise yüksek boyutlu Öklid uzaylarında eğrilerin kesirli değişmezleri elde edilmiş ve bu değişmezler geometrik olarak yorumlandı. Ayrıca bazı özel eğrilerin eğrilikleri ile ilgili elde edilen teoremler verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $A \neq \emptyset$ ve K bir cisim olmak üzere, V , K üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$A_1) P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A_2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır}$$

şartlarını sağlayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A cümlesine V vektör uzayı ile birleşen afin uzay adı verilir [28].

Tanım 2.1.2. A bir reel afin uzay ve V de A afin uzayı ile birleşen bir vektör uzayı iken

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlansın. Bu iç çarpım kullanılarak artık afin uzayda uzaklık, açı, vs. metrik kavramlar verilebilir. Bu iç çarpım yardımı ile verilen afin uzay ise Öklid uzayı adını alır [28].

$n = 2$ olması halinde Öklid düzlemi, $n = 3$ özel halinde ise 3-boyutlu Öklid uzayı elde edilmiş olur.

Tanım 2.1.3. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına ise iki $x, y \in E^n$ noktası arasındaki uzaklık denir [28].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^n$, n – boyutlu ve $\mathbb{R}^m$ de m – boyutlu vektör uzayı olsunlar. $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$f: U \rightarrow V,$$

$$p \mapsto f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p))$$

şeklinde verilen vektör değerli f fonksiyonu için $f_1, f_2, \dots, f_m$ reel değerli fonksiyonları her mertebeden sürekli kısmi türevli ise o zaman f fonksiyonu düzgün fonksiyon adını alır [28].

Tanım 2.1.5. $I = (a, b)$ olmak üzere $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık alt aralık iken

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$t \mapsto r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

şeklinde düzgün bir fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $r(I) \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesine düzgün bir eğri (parametrik bir eğri) adı verilir. Ayrıca I aralığı parametre aralığı ve $t \in I$ reel sayısı da eğrinin parametresi olarak adlandırılır [28].

Tanım 2.1.6. $r(s)$, $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri olarak alınsın. Eğer eğrinin parametre aralığındaki her bir s değeri için $r'(s) \neq 0$ ise bu eğriye düzenli (regüler) eğri denir. Verilen parametre aralığındaki her bir s değeri için $\|r'(s)\| = 1$, ise bu durumda $r(s)$ eğrisi birim hızlı eğri olarak adlandırılır ve bu durumda s parametresi verilen eğri için yay parametresi adını alır [28].

Tanım 2.1.7. Verilen iki $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $q : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için $q = r \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) > 0$ olacak şekilde $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ düzgün fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda q eğrisine r nin bir yönü koruyan yeniden parametrizasyonu denir. $q = r \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) < 0$ olacak şekilde bir $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ düzgün fonksiyonu mevcut ise q eğrisine r eğrisinin bir yön değiştiren yeniden parametrizasyonu denir. Bu durumda h fonksiyonu ise, sırasıyla, pozitif veya negatif parametre değişim fonksiyonu adını alır [28].

Tanım 2.1.8. $r(s)$, $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri ve bu eğrinin parametre aralığı da I olsun. $a, b \in I$ olmak üzere, eğrinin $r(a)$ ve $r(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|r'(t)\| dt, t \in I$$

reel sayısına a dan b ye eğrinin yay uzunluğu denir [28].

$\mathbb{R}^n$ de verilen her bir düzenli eğri kendine ait yay parametresi ile ifade edilebilirdir [28].

Tanım 2.1.9. $r(t)$, $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri olarak verilsin. Bu durumda $r(t)$ nin lineer bağımsız türev vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulanarak bulunan baz vektörlerine Frenet-Serret vektörleri adı verilir. Eğer bu vektörler $\{V_1, \dots, V_r\}, r \leq n$ şeklinde ise

$$k_i = \langle V'_i, V_{i+1} \rangle, 1 \leq i < r$$

eşitliğinden elde edilen k_i fonksiyonun $r(t)$ eğrisinin i –yinci Frenet eğriliği denir [28].

Tanım 2.1.10. $r(s)$, $\mathbb{R}^n$ de yay-uzunluğu ile verilen bir parametrik eğri olsun, bu eğrinin Frenet-Serret formülleri ise

$$V'_1(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V'_i(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 < i < r$$

$$V'_r(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

şeklindedir [28].

2.2. Kesirli Türevle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. Euler integrali yardımı ile $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ şeklinde tanımlanan $\Gamma(n)$ fonksiyonuna Gamma fonksiyonu adı verilir [29].

n nin bazı değerleri için Gamma fonksiyonunun değerlerini ve özelliklerini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.2.1 deki integralde $n = 1$ alınırsa $\Gamma(1) = 1$ bulunur. Eğer aynı integralde n yerine $n + 1$ yazılırsa

$$\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $n = 1, 2 \dots$ için değerler verilirse;

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3!$$

...

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

eşitlikleri bulunur. Burada tüm n değerleri pozitif tamsayı olarak alınmıştır. Ayrıca $n > -1$ için herhangi bir reel sayı olabileceğinden $\Gamma(n + 1)$ tanımlı olur ve yakınsaktır. Faktöriyel değerleri -1 den büyük olan tüm değerler için tanımlayabileceğimizden bu Gamma fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denilir.

Üstelik yukarda verilen $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ eşitliğinden

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n + 1)}{n}$$

olarak bulunur ve $\Gamma(n)$, n 'nin tamsayı olmayan tüm negatif değerleri için tanımlı hale gelir.

Tanım 2.2.2. $\nu \in \mathbb{C}, \text{Re}(\nu) > 0$ ve $x > c$ olmak üzere, f fonksiyonunun ν mertebesinden Riemann kesirli integrali

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x - t)^{\nu-1} f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır [30].

Tanım 2.2.3. $\nu \in \mathbb{C}, \text{Re}(\nu) > 0$ ve $x > c$ olmak üzere, f fonksiyonunun ν mertebesinden Liouville kesirli integrali

$$-_{\infty} D_x^{-\nu} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x - t)^{\nu-1} f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır [30].

Tanım 2.2.4. $\nu \in \mathbb{C}, \text{Re}(\nu) > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun ν mertebesinden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_0 D_x^{-\nu} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - t)^{\nu-1} f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır [30].

Tanım 2.2.5. $\mu > 0$ ve m sayısı, μ sayısından büyük en küçük tam sayı olsun. Bu durumda, $\nu = m - \mu > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun μ mertebesinden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$D^{\mu} f(t) = D^m [D^{-\nu} f(t)]$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır [30].

Tanım 2.2.6. $\mu > 0$ ve m sayısı, μ sayısından büyük en küçük tam sayı olsun. Bu durumda, $\nu = m - \mu > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun μ mertebesinden Caputo kesirli türevi,

$$C^\mu f(t) = D^{-\nu}[(D)^m f(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} \frac{d^m f(t)}{dt^m} dt$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır [31].

Riemann-Liouville ve Caputo' nun kesirli türev tanımları yaygın olarak kesirli bir operatör kullanılarak verilmiştir. Bu tanımlar bir $f(t)$ fonksiyonu için $\alpha \in \mathbb{R}$ iken aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integraline bağlıdır ve

$$(I_{0+}^\alpha f)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2.1)$$

şekilde verilir, burada $\Gamma(\alpha)$, α parametresine bağlı Gamma fonksiyonudur [1-4].

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevi ise

$$(D_{0+}^\alpha f)(t) \equiv \frac{d}{dt} (I_{0+}^{1-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [1-4].

Kesirli türevle ilgili Riemann-Liouville'in tanımı, integrasyon bir aralık üzerinde tanımlı olduğu için lokal olmayan bir operatördür. Bir t noktasında bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevi $f(t)$ nin lokal olmayan bütün değerleri ile belirlenir.

Diğer taraftan, bir $f(t)$ düzgün fonksiyonunun $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Caputo kesirli türevi

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t) \equiv (I_{0+}^{1-\alpha} \frac{df}{dt})(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.3)$$

şeklinde de tanımlanır [1,2,4,32].

Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville kesirli türevi arasında

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t) = (D_{0+}^\alpha f)(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \quad (2.4)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [1,2,18].

Caputo kesirli türevi için Leibnitz çarpım kuralı

$$({}^C D_{0+}^\alpha f g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{d^k f}{dt^k} (D_{0+}^{\alpha-k} g)(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) g(0) \quad (2.5)$$

olarak verilir [27].

(2.5) bağıntısı kullanılarak $f(t(s))$ bileşke fonksiyonunun kesirli türevi ise

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t(s)) = \frac{f(t(s)) - f(t(0))}{c} s^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{s^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{d^k f(t(s))}{ds^k} \quad (2.6)$$

dir [27].

Leibnitz çarpım kuralı ve bileşke fonksiyonun kesirli türevi sonsuz seriler yardımıyla verilir. Bu nedenle bir eğrinin eğriliğini vermek kolay değildir.

Fiziksel uygulamalar açısından (2.3) ile verilen Caputo tanımını temelde iki avantajı vardır [4,18]. Bunlardan biri, Caputo türevlerine sahip kesirli diferensiyel denklemler için başlangıç şartları tam sayılı mertebeden diferensiyel denklemlerdeki ile aynı şekilde alınabilir. Diğerisi ise

yukarıda bahsedildiği gibi bir sabitin Caputo kesirli türevinin sıfır olmasıdır. Sabit bir fonksiyon için Caputo kesirli türevinin bu ikinci özelliği diferensiyel geometrinin bir teorisini vermek için faydalı olacaktır [21-24,33]. Bu nedenle çalışma boyunca Caputo kesirli türev tanımı kullanılacaktır. Kesirli analizin tanım ve hesaplamaları ile ilgili daha detaylı bilgiler [1-4] de verilmiştir.

Kolaylık olması açısından bu çalışmada $0 < \alpha < 1$ kabul edilerek α -mertebeden Caputo kesirli türevi için

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} \quad (2.7)$$

gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 2.2.1. $f(x) = x^2$ olsun. Bu fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi $\alpha = \frac{1}{2}$ için hesaplanırsa, (2.2) eşitliğinden basit bir hesaplama ile $\frac{8x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}$ sonucu elde edilir [34, 35].

Örnek 2.2.2. $f(x) = x$ olsun. Bu fonksiyonun Caputo kesirli türevi $\alpha = \frac{1}{2}$ için hesaplanırsa, (2.3) eşitliğinden basit bir hesaplama ile $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ sonucu elde edilir [34, 35].

3. DÜZLEM EĞRİLERİNİN KESİRLİ DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Bu bölümde [36] da çalışılan Caputo kesirli türevine bağlı olarak eğrilerin geometrisi kısaca ele alınmıştır. Kesirli mertebeden Frenet çatısı göz önüne alınarak bir eğrinin eğriliği ve Frenet formülleri verilmiş ve ardından eğrinin yay uzunluklu olması veya keyfi parametreye sahip olması durumunda kesirli mertebeden eğrilikleri incelenerek bazı örneklere yer verilmiştir.

3.1. Kesirli Yay Uzunluğu ve Bir Düzlem Eğrisi için Frenet Çatısı

t keyfi bir parametre olmak üzere $I \subseteq \mathbb{R}$ alt cümlesinden 2-boyutlu $\mathbb{R}^2$ uzayına tanımlı $c(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde düzgün bir c eğrisini göz önüne alalım. $t = 0$ noktasından başlayan bir c eğrisinin $\tilde{s}$ uzunluğunun tanımı

$$\tilde{s} = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (3.1)$$

ile verilir, burada $t \in I$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ dir. Yukarıda verilen (3.1) eşitliği $e_1(\tilde{s}) = (\frac{dx}{d\tilde{s}}, \frac{dy}{d\tilde{s}})$ teğet vektörü için iyi bilinen bir eğrinin yay uzunluğu formülüdür.

Şimdi bir eğrinin eğriliği üzerinde kesirli türevin etkilerini bulmaya çalışalım. Eğrilik temelde bir eğrinin teğet vektörünün değişimi ile verildiğinden kesirli teğet vektörü

$$e_1^{(\alpha)}(\tilde{s}) = \left(\frac{d^\alpha x(\tilde{s})}{d\tilde{s}^\alpha}, \frac{d^\alpha y(\tilde{s})}{d\tilde{s}^\alpha} \right) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. (2.6) eşitliğinde sonsuz seriler yardımı ile verilen bileşke fonksiyonun kesirli türevinden dolayı (3.2) denkleminde $\|e_1^{(\alpha)}(\tilde{s})\| \neq 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu ise (3.1) denklemi ile verilen yay uzunluğunun eğrilerin kesirli geometrisine uygulanamayacağı anlamına gelir. Kesirli mertebeden bir birim teğet vektör tanımlamak için bileşke fonksiyonun kesirli türevinin tek terime sadeleştirilmesi gerekir. Bu nedenle, doğrudan (2.6) eşitliğini kullanmak yerine bileşke fonksiyonun kesirli türevinden sadece bir terimi çıkararak yeni bir ifadeyi göz önüne alalım. Tam sayılı mertebeden türeve sahip eğrilerin geometrisinde teğet vektörün eğrinin birinci mertebeden türevi ile verildiğini biliyoruz. Tam sayılı mertebeden teğet vektörün bir genellemesi olarak kesirli mertebeden teğet vektör birinci mertebeden türevi içeren bir ifade ile ayrıca tanımlanmalıdır. (2.6) ile verilen bileşke fonksiyonun kesirli türevinde, $k = 1$ terimi hem kesirli türevin etkisini hem de birinci mertebeden türevi içerir. Bu terim tam sayılı mertebeden teğet vektöre bağlı olan kesirli mertebeden teğet vektörün şartlarını sağlar. Bu nedenle (2.6) eşitliğinde $k = 1$ terimini toplamdan çıkarıp

$$\frac{d^\alpha c(t(s))}{ds^\alpha} = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (3.3)$$

tek terimlisini elde ederiz. Bu çalışmada, eğriler teorisi basitleştirilmiş bileşke fonksiyonun bu türevine dayalı olarak geliştirilecektir.

(3.3) eşitliği dikkate alınarak, $\tilde{s} \rightarrow s$ dönüşümü

$$s = \left[\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} \tilde{s} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.4)$$

ile verilir, burada α kesirli türevin mertebesidir ve $0 < \alpha \leq 1$ dir. Bu s parametresi için

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (3.5)$$

yazabiliriz. $0 < \alpha \leq 1$ ve $s > 0$ olduğundan $\frac{ds}{dt}$ pozitiftir. Bu nedenle t parametresi $t = t(s)$ şeklinde s parametresine bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda c eğrisi s parametresi ile ifade edilir ve $c(s) = (x(s), y(s))$ ile gösterilir.

Bu $c(s) = (x(s), y(s))$ eğrisi için, s parametresini ve Caputo türevini kullanarak, teğet vektörü

$$e_1^{(\alpha)}(s) = \frac{d^\alpha c(s)}{ds^\alpha} = \left(\frac{d^\alpha x(s)}{ds^\alpha}, \frac{d^\alpha y(s)}{ds^\alpha} \right) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. (3.3) eşitliği kullanılırsa teğet vektörün normu

$$\|e_1^{(\alpha)}(s)\| = \sqrt{\left(\frac{d^\alpha x}{ds^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^\alpha y}{ds^\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{dt}{ds} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1 \quad (3.7)$$

olur. Ayrıca (3.3) eşitliği kullanılarak eğrinin $e_1^{(\alpha)}(s)$ vektörüne ortogonal bir birim vektör

$$e_2^{(\alpha)}(s) = \left(-\frac{d^\alpha y}{ds^\alpha}, \frac{d^\alpha x}{ds^\alpha} \right) \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1. (3.3) şartını sağlayan (3.4) deki s parametresi ile verilen bir c eğrisi için $e_1^{(\alpha)}(s)$ ve $e_2^{(\alpha)}(s)$, sırasıyla, bu c eğrisinin birim teğet ve birim normal vektörüdür ve s parametresi yay uzunluğudur [36].

3.2. Bir Düzlem Eğrisi İçin Kesirli Frenet-Serret Formülleri

Bu bölümde $(e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s))$ kesirli Frenet çatısına sahip eğrilerin geometrisini detaylıca vereceğiz.

Bir düzgün $c(s) = (x(s), y(s))$ eğrisi (3.4) ile verilen yay uzunluğu ile ifade edilsin. Şimdi, kesirli Frenet çatısına bağlı olarak, bir eğrinin eğriliği ve Frenet-Serret formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanacaktır.

Teorem 3.1. den c eğrisinin $e_1^{(\alpha)}(s)$ teğet vektörü

$$e_1^{(\alpha)} \cdot e_1^{(\alpha)} = 1$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$e_1^{(\alpha)}(s) \frac{d e_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu ise $\frac{d e_1^{(\alpha)}(s)}{ds}$ nin $e_2^{(\alpha)}$ normal vektörü ile ifade edilebileceği anlamına gelir. dolayısıyla

$$\frac{d e_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = \kappa^{(\alpha)}(s) e_2^{(\alpha)}(s) \quad (3.10)$$

yazılabilir, burada $\kappa^{(\alpha)}(s)$, c eğrisinin kesirli mertebeden eğriliğidir. $e_1^{(\alpha)}$ vektörünün yanı sıra normal vektörün normu için de

$$\|e_2^{(\alpha)}(s)\| = 1$$

olur ve buradan $e_2^{(\alpha)} \cdot e_2^{(\alpha)} = 1$ yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre türevi alınır,

$$e_2^{(\alpha)}(s) \frac{d e_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu ifadeden $\frac{d e_2^{(\alpha)}}{ds}$ belirli bir $\lambda^{(\alpha)}$ yay uzunluğu fonksiyonu kullanılarak

$$\frac{d e_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = \lambda^{(\alpha)}(s) e_1^{(\alpha)}(s) \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $e_1^{(\alpha)} \cdot e_2^{(\alpha)} = 0$ ortogonal bağıntısının da s ye göre türevi alınır

$$e_1^{(\alpha)}(s) \frac{d e_2^{(\alpha)}(s)}{ds} + \frac{d e_1^{(\alpha)}(s)}{ds} e_2^{(\alpha)}(s) = 0 \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir. (3.10) ve (3.12) eşitlikleri (3.13) de göz önüne alınırsa $\lambda^{(\alpha)} = -\kappa^{(\alpha)}$ bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2. $(e_1^{(\alpha)}(s), e_2^{(\alpha)}(s))$ kesirli Frenet çatısına uygun Frenet-Serret formülleri

$$\frac{d e_1^{(\alpha)}(s)}{ds} = \kappa^{(\alpha)}(s) e_2^{(\alpha)}(s) \quad (3.14)$$

$$\frac{d e_2^{(\alpha)}(s)}{ds} = -\kappa^{(\alpha)}(s) e_1^{(\alpha)}(s) \quad (3.15)$$

şeklinde verilir [36].

3.3. İki-boyutlu Bir Eğrinin Kesirli Eğriliği

Bir $c(s) = (x(s), y(s))$ eğrisi ve (3.6) ile verilen teğet vektörü göz önüne alınırsa (3.14) Frenet-Serret formülü kullanılarak,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha c(s)}{ds^\alpha} \right) = \kappa^{(\alpha)}(s) e_2^{(\alpha)}(s) \quad (3.16)$$

yazılabilir. (3.16) eşitliğinin her iki tarafına $e_2^{(\alpha)}$ normal vektörü uygulanırsa kesirli mertebeden eğrilik

$$\kappa^{(\alpha)}(s) = e_2^{(\alpha)}(s) \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha c(s)}{ds^\alpha} \right) \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.8) normal vektörü ve (3.17) göz önüne alınırsa $\kappa^{(\alpha)}(s)$ eğriliği kesirli türev kullanılarak

$$\kappa^{(\alpha)}(s) = \frac{d^\alpha x}{ds^\alpha} \frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha y}{ds^\alpha} \right) - \frac{d^\alpha y}{ds^\alpha} \frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha x}{ds^\alpha} \right) \quad (3.18)$$

olarak hesaplanır. Eğer eğri s yay uzunluğu ile değil de keyfi bir t parametresi ile verilmiş ise o zaman kesirli mertebeden eğriliği keyfi bir t parametresine uygun olarak hesaplamalıyız.

$t = t(s)$ bileşke fonksiyonu için (3.3) ifadesinden

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha x}{ds^\alpha} \right) = \frac{\alpha s^{-\alpha} \dot{x}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((1-\alpha) \frac{dt}{ds} + s \frac{d^2 t}{ds^2} \right) + \frac{\alpha s^{1-\alpha} \ddot{x}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha y}{ds^\alpha} \right) = \frac{\alpha s^{-\alpha} \dot{y}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((1-\alpha) \frac{dt}{ds} + s \frac{d^2 t}{ds^2} \right) + \frac{\alpha s^{1-\alpha} \ddot{y}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad (3.20)$$

yazılabilir, burada $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ ve $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ dir. (3.19) ve (3.20) ifadeleri (3.18) de yerine yazılırsa kesirli mertebeden $\kappa^{(\alpha)}(t)$ eğriliği

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = \left\{ \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right\}^2 (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Burada (3.5) ifadesi göz önüne alınırsa (3.21) eşitliği

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa(t) \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir Burada $\kappa(t)$ adi eğriliğinin

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.23)$$

olduğu bilinmektedir [36].

Böylece (3.4) ile verilen yay uzunluğu tanımı kullanılarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3. Keyfi t parametresi için $c(t) = (x(t), y(t))$ düzlem eğrisinin kesirli mertebeden eğriliği

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = \left\{ \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left[\alpha \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right]^{1-\frac{1}{\alpha}} \kappa(t) \quad (3.24)$$

şeklinde [36].

(3.22) ifadesindeki $\frac{1}{s^{1-\alpha}}$ kısmı, (3.6) kesirli teğet vektör ile verilen kesirli türevin etkilerini karakterize eder. Kesirli türevin etkisi başlangıç anında güçlüdür, ancak daha uzun bir zaman periyodunda daha az etkili olur. Etkinin bu özelliği kesirli mertebeden eğriliğin değişimine tesir eder.

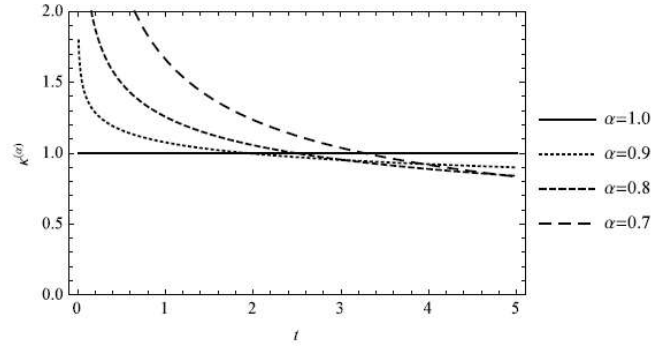
3.4. Bazı İki-boyutlu Eğriler İçin Kesirli Mertebeden Eğrilik

Bu bölümde (3.24) kesirli mertebeden eğrilik formülünün [36] da verilen bazı eğrilere uygulanmasını ve tam sayılı mertebeden eğrilik ile arasındaki farkları araştıracağız.

Örnek 3.4.1. $c(t) = (cost, sint)$ parametrik denklemi ile verilen birim çember için, adi eğrilik $\kappa(t) = 1$ şeklinde sabittir. Bu eğrinin (3.24) ile verilen kesirli mertebeden eğriliği

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = \alpha^{1-\frac{2}{\alpha}} \{\Gamma(2-\alpha)\}^{\frac{1}{\alpha}} t^{1-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.25)$$

şeklindedir [36].



Şekil 3.1. Bir çember için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler [36]

Şekil 3.1. bazı α lar için t ye uygun eğriliğin değişimini göstermektedir. Kesirli mertebeden eğriliğin değerinin $t \rightarrow \infty$ iken yani uzun bir periyod için sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Eğriliğin bu azalma eğilimi kesirli türevin etkisinin uzun bir periyod için zayıfladığını yansıtır.

Örnek 3.4.2. Parametrik ifadesi

$$x = t, y = \frac{t^2}{2} \quad (3.26)$$

olan bir parabol için, adi eğrilik

$$\kappa(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.27)$$

şeklindedir. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılırsa

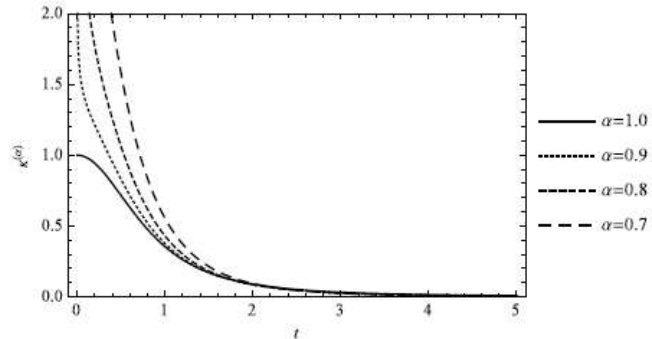
$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} (t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})) \quad (3.28)$$

olduğu görülür.

(3.28) ifadesi kullanılarak parabol için kesirli mertebeden eğrilik

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = \frac{\alpha^{1-\frac{2}{\alpha}} \Gamma(2-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{2} (t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})) \right]^{1-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.29)$$

şeklinde hesaplanır [36].



Şekil 3.2. Bir parabol için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler [36]

Şekil 3.2. bazı α kesirleri için eğriliğin değişimini göstermektedir. Çember de olduğu gibi parabol için de, kesirli türevin etkisinin uzun bir periyod için azalmasından dolayı kesirli mertebeden eğriliğin değerinin sıfıra, yani tam sayılı mertebeden eğriliğin değerine yaklaştığı söylenebilir.

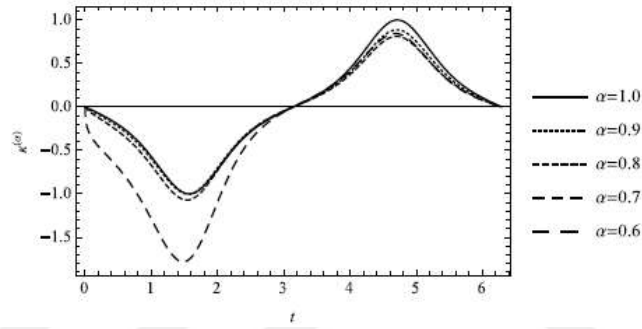
Örnek 3.4.3. $c(t) = (t, \sin t)$ parametrik denklemi ile verilen sinüs eğrisi için tam sayılı mertebeden eğrilik

$$\kappa(t) = \frac{\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.30)$$

şeklindedir. Kesirli mertebeden eğrilik ise

$$\kappa^{(\alpha)}(t) = -\alpha^{1-\frac{2}{\alpha}} \{\Gamma(2-\alpha)\}^{\frac{1}{\alpha}} \left[\int_0^t \sqrt{1+\cos^2 t} dt \right]^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.31)$$

olarak hesaplanır [36].



Şekil 3.3. Sinüs eğrisi için tam sayılı ve kesirli mertebeden eğrilikler [36]

Şekil 3.3. bazı α kesirleri için eğriliğin değişimini ifade eder ve eğrinin eğriliğinin bazı özelliklerini gösterir.

4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KESİRLİ TÜREVLİ EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Bu bölümde genel olarak [37] de verilen ve kesirli mertebeden türev kullanılarak ele alınan 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisini inceleyeceğiz.

İlk olarak, [38-40] de verilen eğrilerin aşağıda verilen diferensiyel geometrik temel kavramlarından kısaca bahsedeceğiz.

$\mathbb{R}^n$ deki skaler çarpım ve indirgenmiş norm, sırasıyla, $\langle ., . \rangle$ ve $\| . \|$ şeklinde gösterilsin. $\mathbf{y}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde bir regüler eğri alalım, yani her $t \in \tilde{I}$ için $\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt}$ olmak üzere $\|\dot{\mathbf{y}}\| \neq 0$ olsun. Bu bölüm boyunca t parametresine göre türevi “.” ile göstereceğiz. Yukarıda verilen $\mathbf{y}$ eğrisinin

$$u(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} \right\| d\sigma, t_0 \in \tilde{I} \quad (4.1)$$

olacak şekilde $\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ u^{-1}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ birim hız parametrizasyonu mevcuttur ve $\left\| \frac{d\mathbf{x}}{du} \right\| = 1$ dir. Burada u parametresi yay-uzunluğu olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}^n$ in öklidyen hareketi altında değişmez kalır. Eğrilerin bu bölümde verilecek yerel özelliklerini incelemek için gerekli olan formülleri iki kısma ayırarak aşağıdaki şekilde verebiliriz.

4.1. Düzlem Eğrileri

$\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbf{x}$ eğrisinin $u \in I$ noktasındaki κ eğriliği

$$\kappa(u) = \left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{du^2} \right\|$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{x}$ eğrisinin $u \in I$ noktasındaki Frenet-Serret çatısı ise

$$\mathbf{t}(u) = \frac{d\mathbf{x}}{du} \Big|_u, \quad \mathbf{n}(u) = J \left(\frac{d\mathbf{x}}{du} \Big|_u \right)$$

olarak yazılır, burada $J, \mathbb{R}^2$ nin $(v, w) \rightarrow J(v, w) = (-w, v)$ şeklinde verilen bir kompleks yapısıdır.

t keyfi parametresi için κ eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{\langle \ddot{\mathbf{x}}(t), J(\dot{\mathbf{x}}(t)) \rangle}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}$$

formülü ile hesaplanır. Böylece Frenet-Serret formülleri ise

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{du} &= \kappa \mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{du} &= -\kappa \mathbf{t} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Başka bir deyişle, her $u \in I$ için $\frac{d\mathbf{x}}{du}\bigg|_u$ birim vektör olduğundan

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = (\cos\theta(u), \sin\theta(u))$$

olacak şekilde $\theta(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu mevcuttur ve $\mathbf{x}$ eğrisinin dönme açısı olarak adlandırılır.

$k(u) = |u|$ değeri $\mathbf{x}$ eğrisinin u noktasındaki işaretli eğriliğine karşılık gelir. $k(u)$, $\mathbb{R}^2$ nin öklidyen hareketi ile değiştirilemez ve $\kappa = |k|$ dır. $u \in I$ olmak üzere verilen bir $k(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için düzlem eğrilerinin temel teoremi, k ve u , sırasıyla, $\mathbf{x}$ eğrisinin eğriliği ve yay parametresi olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin öklidyen hareketine kadar tek bir $\mathbf{x}$ düzlem eğrisinin varlığını ifade eder [37].

4.2. Uzak Eğrileri

$\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbf{x}$ eğrisinin $u \in I$ noktasındaki κ eğriliği

$$\kappa(u) = \left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{du^2} \right\|$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbf{x}$ eğrisinin $u \in I$ noktasındaki Frenet-Serret çatısı

$$\mathbf{t}(u) = \frac{d\mathbf{x}}{du}\bigg|_u, \mathbf{n}(u) = \frac{1}{\kappa(u)} \frac{d^2\mathbf{x}}{du^2}\bigg|_u, \kappa(u) \neq 0 \text{ ve } \mathbf{b}(u) = \mathbf{t}(u) \times \mathbf{n}(u)$$

olarak yazılır, burada $\times$, $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpımdır. Böylece Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{du} &= \kappa\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{du} &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{du} &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada

$$\tau(u) = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{du}\bigg|_u, \mathbf{b}(u) \right\rangle$$

değeri $\mathbf{x}$ eğrisinin $u \in I$ noktasındaki burulması olarak adlandırılır. κ ve $|\tau|$, $\mathbb{R}^3$ ün öklidyen hareketleri altında değişmez kalır. t keyfi parametresi için κ ve τ eğrilik ve burulması

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}, \tau(t) = \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t) \rangle}{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|^2} \quad (4.2)$$

formülleri ile hesaplanır.

Bir $\mathbf{x}$ eğrisi, κ eğriliği (veya τ burulması) özdeş olarak sıfır ise düz bir doğruya (veya düzlem eğrisine) dönüşür. Ayrıca $\mathbf{x}$ eğrisi her $u \in I$ için $\langle \mathbf{t}(u), \mathbf{u} \rangle$ fonksiyonu sabit olacak şekilde $\mathbf{u}$ sabit birim vektöre sahip ise genel helis eğrisi olarak adlandırılır [37].

Lancret Teoremi [39], “her $u \in I$ için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}$ eğrisinin genel helis olmasıdır” şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca hem κ hem de τ sabit ise bu durumda $\mathbf{x}$ eğrisi dairesel helise dönüşecektir.

$u \in I$ olmak üzere verilen $\kappa(u) > 0$ ve $\tau(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için, uzay eğrilerinin temel teoremi, κ , τ ve u , sırasıyla, $\mathbf{x}$ eğrisinin eğrilik, burulma ve yay parametresi olmak üzere $\mathbb{R}^3$ ün öklidyen hareketine kadar tek bir $\mathbf{x}$ uzay eğrisinin varlığını ifade eder.

4.3. Kesirli Mertebeden Uzay Eğrilerinin Eğrilikleri

$\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, u yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir eğri olsun. Başka bir s parametresini

$$u \rightarrow s = \left[\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} u \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.3)$$

şeklinde göz önüne alalım, burada Γ Euler gamma fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ dir. (4.1) göz önüne alınırsa s , t nin bir fonksiyonu olur. $s = h(t)$ alınırsa (4.3) den

$$h(t) = \left(\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right\| d\sigma \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.4)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikten

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\alpha h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\dot{\mathbf{x}}\| \quad (4.5)$$

elde edilir, burada $\dot{h}$, her t için pozitifdir ve böylece $t = h^{-1}(s)$ ters fonksiyonu mevcuttur.

Kolaylık olması açısından çalışmanın devamında α -mertebeden Caputo kesirli türevi için

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

gösterimi kullanılacaktır. Ayrıca “ $\dot{}$ ” ile s parametresine göre türevi göstereceğiz.

(2.6) ile verilen bileşke fonksiyonun Caputo kesirli türevinin daha sade hali için

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{x} h(t)}{ds^{\alpha}} = \frac{\alpha h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (h^{-1})' \dot{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

tek terimli si alınacaktır [36]. (4.4) ve (4.5) denklemleri (4.6) da göz önüne alınırsa, her s için

$$\left\| \frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right\|_s = 1 \text{ elde edilir, yani (4.3) ve (4.6) den } s, \mathbf{x}' \text{ in yay-uzunluğu parametresi olur. } \mathbf{x} \text{ eğrisi (4.3)}$$

deki gibi parametrelendirilirse birim hızlı bir eğri olur.

α kesirli mertebeden Frenet- Serret formüllerini elde etmek için ilk olarak $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet-Serret üçlüsünün parametre seçilişinden bağımsız olduğunu göstermeliyiz, yani

$$Span \left\{ \frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}}, \left(\frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right)', \left(\frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right)'' \right\} = Span \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{du}, \frac{d^2 \mathbf{x}}{du^2}, \frac{d^3 \mathbf{x}}{du^3} \right\}$$

olmalıdır. Bu ise $\mathbf{t}(s) = \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \Big|_s$ nin $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasında birim teğet vektörü olması demektir.

$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ olduğundan $\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$, $\mathbf{t}$ ye dik olacaktır. $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki asli normal vektörü

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}$$

şeklinde olur.

$\kappa_\alpha(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$ ise $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki α kesirli mertebeden eğriliğidir.

$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ vektörü de $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki binormal vektörü olur.

$\mathbf{x}$ eğrisi için Frenet- Serret formülleri aşağıdaki teoremden elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $\mathbf{x}$, $\mathbb{R}^3$ de (4.3) ve (4.6) şartlarını sağlayan bir parametrik eğri olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa_\alpha \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -\kappa_\alpha \mathbf{t} + \tau_\alpha \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau_\alpha \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

yazılabilir, burada $\tau_\alpha = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki α kesirli mertebeden burulması olarak adlandırılır [37].

İspat: (4.7) eşitliklerinden ilki açıktır. Diğer eşitliklerin ispatı genel durum yani $\alpha = 1$ olması haline benzer şekilde yapılabilir.

(4.7) eşitliğinde $\mathbf{x}$ eğrisinin standart κ eğriliği ve τ burulması için $\kappa_1 = \kappa$ ve $\tau_1 = \tau$ dir.

Burada κ ve τ , $\mathbf{x}$ eğrisinin tam sayılı mertebeden eğrilik ve torsiyonudur.

Teorem 4.2. $\mathbf{x}$, $\mathbb{R}^3$ de keyfi t parametresi ile verilen

$$\phi(t) = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\alpha \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{x}}{du} \right\| du \right)^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

şeklinde bir parametrik eğri olsun. Bu durumda

$$\kappa_\alpha(t) = \phi(t)\kappa(t), \tau_\alpha(t) = \phi(t)\tau(t) \quad (4.8)$$

olur, burada $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$ ve κ, τ , $\mathbf{x}$ eğrisinin, sırasıyla, α kesirli mertebeden ve tam sayılı eğrilik ve burulmasıdır [37].

İspat: (4.6) eşitliğinin s ye göre adi türevi alınır

$$\mathbf{t}' = \left[\frac{\alpha s^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((1-\alpha)(h^{-1})' + s(h^{-1})'' \right) \right] \dot{\mathbf{x}} + \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (h^{-1})'^2 \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.2) eşitliklerinde (4.6) ve (4.9) yerine yazılırsa

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa(s) \quad (4.10)$$

bulunur. (4.3) eşitliğinde (4.10) göz önüne alınır (4.7) eşitliklerinden birincisi elde edilir.

Ardından

$$\tau_\alpha = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \times \mathbf{n} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\kappa_\alpha} \right)' \mathbf{t}' + \left(\frac{1}{\kappa_\alpha} \right) \mathbf{t}'', \mathbf{t} \times \frac{1}{\kappa_\alpha} \mathbf{t}' \right\rangle = \frac{1}{(\kappa_\alpha)^2} \langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \times \mathbf{t}' \rangle \quad (4.11)$$

yazılabilir. (4.9) eşitliğinin s ye göre adi türevi alınır ve bu türev (4.11) da yerine yazılırsa

$$\tau_\alpha = \frac{1}{(\kappa_\alpha)^2} \left(\frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^3 (\mathbf{t}')^6 < \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} >. \quad (4.12)$$

bulunur. (4.12) eşitliğinde (4.10) ve (4.12) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

(4.8) eşitlikleri göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç.4.1. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^3$ de κ, κ_α ve τ, τ_α sıfırdan farklı eğriliklere ve burulmalara sahip bir parametrik eğri olsun. O zaman

$$\frac{\kappa}{\kappa_\alpha} = \frac{\tau}{\tau_\alpha}$$

eşitliği sağlanır [37].

Sonuç.4.2. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^3$ de α kesirli mertebeden κ_α eğriliğine ve τ_α burulmasına sahip bir parametrik eğri olsun. O zaman $\mathbf{x}, \kappa_\alpha = 0$ ise bir düz doğru, $\tau_\alpha = 0$ ise bir düzlem eğrisi ve $\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha}$ sıfırdan farklı bir sabit ise bir genel helistir. Bu ifadelerin tersleri de doğrudur [37].

Sonuç.4.3. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^3$ de sabit α kesirli mertebeden κ_α^0 eğriliğine sahip bir parametrik eğri olsun. O zaman

$$\frac{d\kappa}{ds} + \kappa_\alpha^0 (\alpha - 1) \kappa = 0$$

adi diferensiyel denklemi sağlanır. Benzer şekilde $\mathbf{x}, \alpha$ kesirli mertebeden τ_α^0 burulmasına sahip ise

$$\frac{d\tau}{ds} + \tau_\alpha^0 (\alpha - 1) \tau = 0$$

elde edilir, burada κ ve τ , $\mathbf{x}$ eğrisinin tam sayılı mertebeden eğrilik ve burulmasıdır [37].

İspat: (4.8) eşitlikleri göz önüne alınırsa ispat kolayca yapılır.

4.4. Düzlem ve Uzay Eğrilerinin Temel Teoremleri

İlk olarak $\mathbf{x}$ in bir düzlem eğrisi olma durumunu göz önüne alalım. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^2$ de tamsayı mertebeden κ eğriliğine ve u yay-uzunluğu parametresine sahip bir parametrik eğri olsun. Üç boyutlu durumdakine benzer şekilde (4.3) ile verilen s yay-uzunluğu parametresi ve (4.6) eşitliği geçerli olduğundan

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa(s)$$

bağıntısı $\mathbb{R}^2$ de $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki α kesirli mertebeden eğriliği olarak adlandırılır [36].

$\mathbf{x}$ eğrisinin Frenet-Serret formülleri ise

$$\mathbf{t}' = \kappa_\alpha \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa_\alpha \mathbf{t}$$

şeklindedir, burada $\mathbf{t}(s) = \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \Big|_s$ ve $\mathbf{n}(s) = \mathbf{J}(\mathbf{t}(s))$, sırasıyla, $\mathbf{x}$ eğrisinin s noktasındaki teğet ve asli normal vektörleridir. Her s için $\mathbf{t}'(s)$ teğet vektörü $\mathbf{t}(s)$ e dik olduğundan $\left(\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha}\right)'$ ve $\mathbf{n}$ lineer bağımsız olur ve

$$\left(\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha}\right)'(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}(s)$$

olacak şekilde $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden işaretli eğriliği olarak adlandırılan bir $k_\alpha(s)$ fonksiyonu mevcuttur. O halde $|k_\alpha(s)| = \kappa_\alpha$ yazılır. s noktasında $\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \Big|_s$ bir birim vektör olduğundan $\theta(s)$ diferensiyellebilir fonksiyonu için

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \Big|_s = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

yazılabilir, burada $\theta'(s) = k_\alpha(s)$ elde edilir [37].

Teorem 4.3. (Düzlem Eğrilerinin Temel Teoremi) k_α bir sıfırı içermeyen I açık aralığında reel değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman k_α , $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden işaretli eğriliği olmak üzere (4.3) ve (4.8) ile parametrelendirilmiş $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ birim hızlı eğrisi mevcuttur. Eğer $\mathbf{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi k_α , α kesirli mertebeden işaretli eğriliğine sahip diğer bir eğri ise, o zaman $\mathbb{R}^2$ nin M öklidsel hareketi için $\mathbf{y}(s) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(s))$ olur [37].

İspat: s yay-uzunluğuna göre türevin ve k_α işaretli eğriliğinin bir öklidsel hareket altında değişmez kaldığı [37] de verilen ispata benzer yol ile kolayca gösterilebilir. Bu aynı zamanda (4.3) ve (4.8) eşitliklerinin bir sonucu olur.

Şimdi $s_0 \in I$ sabiti için

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k_\alpha(t) dt$$

ve

$$\mathbf{x}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \left(\int_{s_0}^s t^{\alpha-1} \cos\theta(t) dt, \int_{s_0}^s t^{\alpha-1} \sin\theta(t) dt \right) \quad (4.13)$$

yazılabilir. (4.6) kullanılarak (4.13) ün türevi alınırsa k_α nın $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden işaretli eğriliği olduğu sonucuna varılır ve ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur. İspatın ikinci kısmı için

$$\mathbf{y}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \left(\int_{s_0}^s t^{\alpha-1} \cos(\theta(t) + \theta_0) dt, \int_{s_0}^s t^{\alpha-1} \sin(\theta(t) + \theta_0) dt \right) + \mathbf{y}_0 \quad (4.14)$$

alalım, burada $\mathbf{y}_0$ ve θ_0 , bir sabit vektör ve skalerdir. (4.14) de sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının toplam formülleri kullanılırsa

$$\mathbf{y}(s) = T_{\mathbf{y}_0} R_{\theta_0}(\mathbf{x}(s))$$

sonucuna varılır, burada R_{θ_0} orijin etrafında θ_0 kadar saat yönünün ters yönünde dönmeyi ve $T_{\mathbf{y}_0}$ da $\mathbf{y}_0$ vektörü ile ötelemeyi göstermektedir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.4. (Uzay Eğrilerinin Temel Teoremi) $\kappa_\alpha > 0$ ve τ_α bir sıfırı içermeyen I açık aralığında reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman κ_α ve τ_α , $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden eğrilik ve burulması olmak üzere (4.3) ve (4.6) ile parametrelendirilmiş $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi mevcuttur. Eğer $\mathbf{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi κ_α ve τ_α , α kesirli mertebeden eğrilik ve burulmasına sahip diğer bir eğri ise, o zaman $\mathbb{R}^3$ ün M öklidsel hareketi için $\mathbf{y}(s) = M(\mathbf{x}(s))$ olur [37].

Teoremin ispatı $\alpha = 1$ genel durumunda kullanılan yöntemlerle benzer şekilde yapılabilir [39].

İspat: İspatı iki kısma ayırarak verelim.

Teklik: s yay-uzunluğuna göre türevin ve κ_α eğriliği ile τ_α burulmasının mutlak değerinin öklidsel hareket altında değişmez kaldığı [41] de verilen ispata benzer yol ile kolayca gösterilebilir. Bu aynı zamanda (4.3) ve (4.8) in bir sonucu olur. $\{\mathbf{t}_x, \mathbf{n}_x, \mathbf{b}_x\}$ ve $\{\mathbf{t}_y, \mathbf{n}_y, \mathbf{b}_y\}$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ nin Frenet üçlüleri ve $s_0 \in I$ bir sabit olsun. $\mathbb{R}^3$ ün bir R dönmesi ve bir ötelemesi uygulanarak

$$\{\mathbf{x}(s_0), \mathbf{t}_x(s_0), \mathbf{n}_x(s_0), \mathbf{b}_x(s_0)\} \text{ ve } \{\mathbf{y}(s_0), \mathbf{t}_y(s_0), \mathbf{n}_y(s_0), \mathbf{b}_y(s_0)\}$$

dörtlülerinin çakıştığını kabul edelim. Bu ise

$$M(\mathbf{x}(s_0)) = \mathbf{y}(s_0) \text{ ve } R(\mathbf{t}_x(s_0)) = \mathbf{t}_y(s_0),$$

$$R(\mathbf{n}_x(s_0)) = \mathbf{n}_y(s_0), R(\mathbf{b}_x(s_0)) = \mathbf{b}_y(s_0)$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^3$ ün bir M öklidsel hareketinin mevcut olduğunu gösterir, R , M nin lineer kısmı olarak adlandırılır.

Her $s_0 \in I$ için

$$\begin{aligned} f(s) = \frac{1}{2} [< R(\mathbf{t}_x(s)) - \mathbf{t}_y(s), R(\mathbf{t}_x(s)) - \mathbf{t}_y(s) > + \\ < R(\mathbf{n}_x(s)) - \mathbf{n}_y(s), R(\mathbf{n}_x(s)) - \mathbf{n}_y(s) > + \\ < R(\mathbf{b}_x(s)) - \mathbf{b}_y(s), R(\mathbf{b}_x(s)) - \mathbf{b}_y(s) >] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ nin, α kesirli mertebeden aynı eğrilik ve burulmaya sahip olduğu kabul edilirse ve (4.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{df}{ds} = 0$$

elde edilir. $f(s_0) = 0$ olduğundan, f bir sıfır fonksiyon olur. Böylece

$$\frac{d^\alpha M(\mathbf{x}(s))}{ds^\alpha} = R(\mathbf{t}_x(s)) = \mathbf{t}_y(s) = \frac{d^\alpha \mathbf{y}(s)}{ds^\alpha} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) ifadesinde (4.6) göz önüne alınırsa

$$M(\mathbf{x}(s))' = \mathbf{y}'(s)$$

yazılabilir. Son ifadede s ye göre integral alınırsa $\mathbf{z}$ bir sabit vektör olmak üzere

$$M(\mathbf{x}(s)) = \mathbf{y}(s) + \mathbf{z}$$

bulunur. Burada $M(\mathbf{x}(s_0)) = \mathbf{y}(s_0)$ olduğundan $\mathbf{z}=0$ elde edilir.

Varlık: Bu kısımda adi diferensiyel denklem sistemleri teorisindeki teknikleri kullanacağız.

$j = 1, 2, 3$, için

$$x_j(s_0) = \lambda_j, t_j(s_0) = \mu_j, n_j(s_0) = \xi_j, b_j(s_0) = \mu_{\rho(j)}\xi_{\rho(j+1)} - \mu_{\rho(j+1)}\xi_{\rho(j)} \quad (4.16)$$

başlangıç şartlarına sahip

$$\begin{aligned} x'_j &= \emptyset t_j \\ t'_j &= \kappa_\alpha n_j \\ n'_j &= -\kappa_\alpha t_j + \tau_\alpha b_j \\ b'_j &= -\tau_\alpha n_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

denklem sistemini göz önüne alalım, burada $\emptyset(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}}$ ve $\rho(j) = j + 1(mod 3)$ dir. Ayrıca $\sum_{j=1}^3 \mu_j^2 = \sum_{j=1}^3 \xi_j^2 = 1$ ve $\sum_{j=1}^3 \mu_j \xi_j = 0$ olarak alınsın. (4.16) şartları altında (4.17) denklem sisteminin bir tek çözümü olduğunu biliyoruz.

(4.17) denklem sisteminde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3), \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{t}' &= \kappa_\alpha \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -\kappa_\alpha \mathbf{t} + \tau_\alpha \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau_\alpha \mathbf{n} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

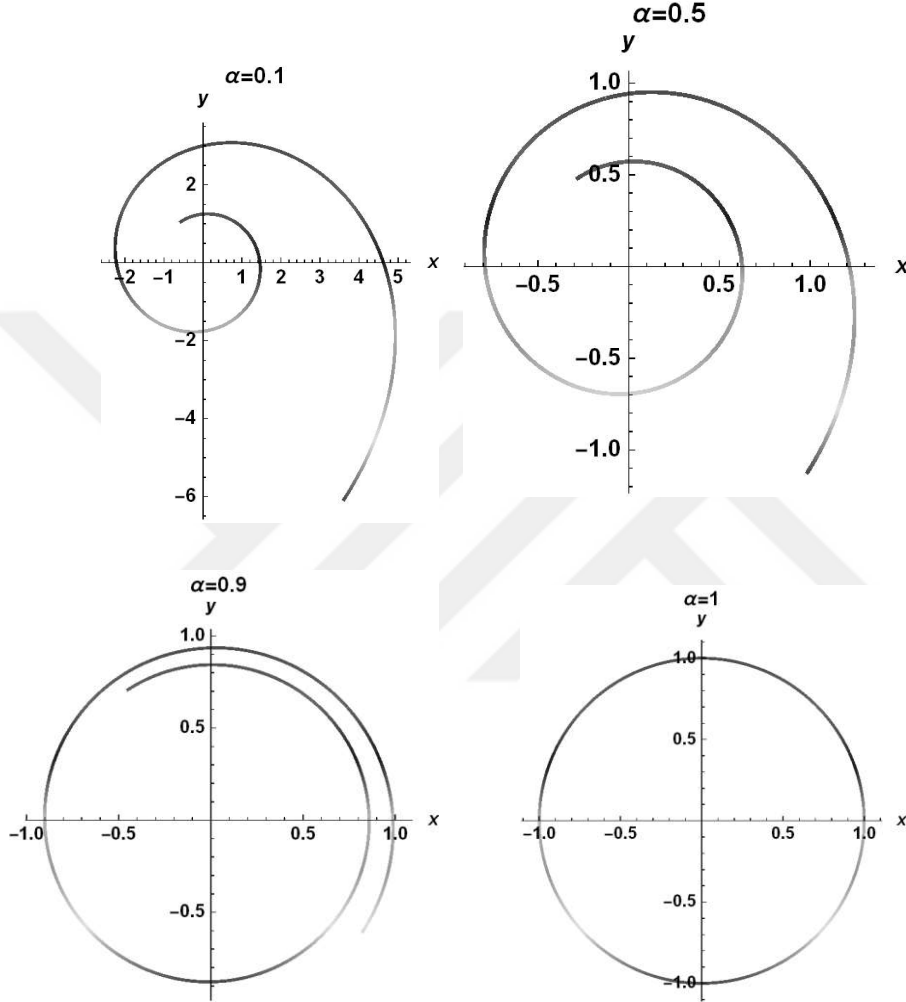
Buradan (4.7) eşitliklerinden $\mathbf{x}$ in α kesirli mertebeden κ_α eğriliğine ve τ_α burulmasına sahip (4.3) ve (4.6) ile parametrelendirilen birim hızlı bir eğri olduğunu ifade edebiliriz.

Şimdi [37] de verilen aşağıdaki örnekleri ele alabiliriz.

Örnek 4.1. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^2$ de (4.3) ve (4.6) ile verilen bir parametrik eğri ve $\kappa_\alpha = 1$ olsun. (4.13) den

$$\mathbf{x}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} \left(\int s^{\alpha-1} \cos s \, ds, \int s^{\alpha-1} \sin s \, ds \right)$$

elde edilir. α nın farklı değerleri için x in grafikleri Şekil 4.1 deki gibi olur. Bu örnek α kesirli mertebeden κ_α eğriliğine sahip x eğrisinin oluşturulması metodunu vermektedir. Şekil 4.1 α nın bazı değerleri için $\kappa_\alpha = 1$ şartını sağlayan x eğrisinin değişimini göstermektedir. α değeri 1 yaklaştıkça x yarıçapı 1 birim olan standart çembere yaklaşır. Bu durum tam sayılı mertebeden sabit eğriliğe sahip her düzlem eğrisi bir standart çemberdir gerçeğini doğrular.



Şekil 4.1. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\kappa_\alpha = 1$ eğriliğine sahip düzlem eğrileri [37]

Örnek 4.2. Özdeş olarak $\kappa_\alpha = 1 = \tau_\alpha$ olsun. (4.17) den

$$x'_j = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} t_j,$$

$$t'_j = n_j,$$

$$n'_j = -t_j + b_j$$

$$b'_j = -n_j, j=1,2,3 \quad (4.18)$$

elde edilir. $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ile birlikte

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = (0, 0, 1), \quad (4.19)$$

başlangıç şartlarını göz önüne alalım. (4.6) göz önüne alınarak (4.18), (4.19) sağlanıyor iken çözümlürse

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{2}(-\cos(\sqrt{2}s) + 1, -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}s), \cos(\sqrt{2}s) + 1)$$

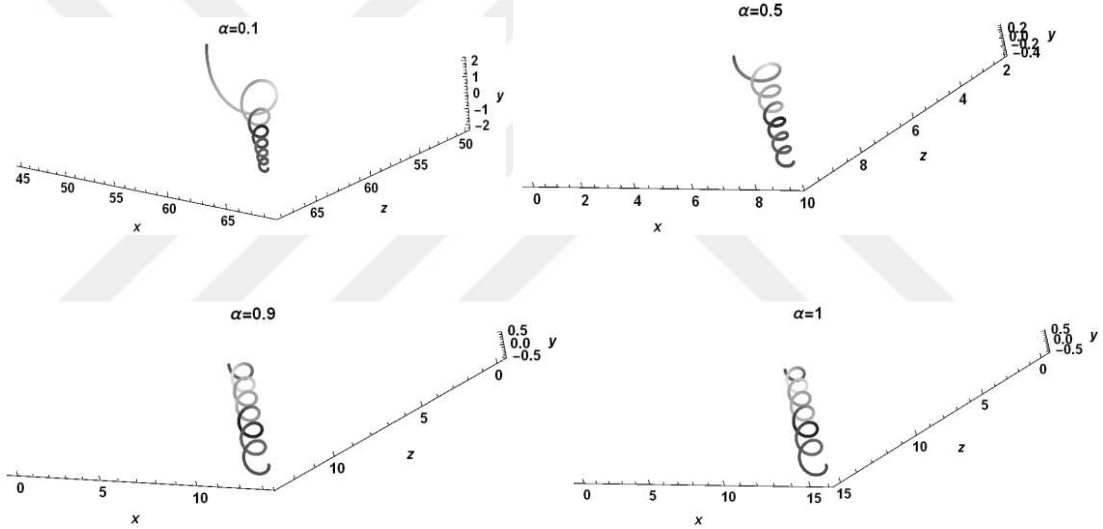
$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\sqrt{2}s), -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}s), -\sin(\sqrt{2}s))$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}s) + 1, \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}s), -\cos(\sqrt{2}s) + 1)$$

ve

$$\mathbf{x}(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2\alpha} \left(\int s^{\alpha-1} [-\cos(\sqrt{2}s) + 1] ds, \int s^{\alpha-1} [-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}s) + 1] ds, \int s^{\alpha-1} [\cos(\sqrt{2}s) + 1] ds \right)$$

elde edilir. Şekil 4.2. de α nın farklı değerleri için $\mathbf{x}$ eğrisinin grafikleri çizilmiştir.



Şekil 4.2. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\kappa_\alpha = \tau_\alpha = 1$ eğrilik ve burulmasına sahip uzay eğrileri [37]

Örnek 4.2 de α kesirli mertebeden κ_α eğriliğine ve τ_α burulmasına sahip bir $\mathbf{x}$ uzay eğrisinin oluşumu verilmektedir. Şekil 4.2 ise α nın değerlerine göre $\kappa_\alpha = \tau_\alpha = 1$ olması durumunda $\mathbf{x}$ eğrisinin değişimini göstermektedir. α değeri 1 e yaklaştığında $\mathbf{x}$ eğrisi bir standart dairesel helise yaklaşır. Bu ise tam sayılı mertebeden sabit eğrilik ve burulmaya sahip uzay eğrilerinin bir standart dairesel helis olması gerçeği ile uyumludur.

Örnek 4.3. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^3$ de tanımlı

$$\mathbf{x}(s) = (3\cos\psi(s), 3\sin\psi(s), 4\psi(s)) \quad (4.20)$$

şeklinde parametrelenmiş bir eğri olsun, burada $\psi(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{5\alpha^2}$ dir. (4.6) eşitliği göz önüne alınırsa (4.20) den s yay-uzunluğu parametresi olur ve

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} = \frac{1}{5}(-3\sin\psi(s), 3\cos\psi(s), 4)$$

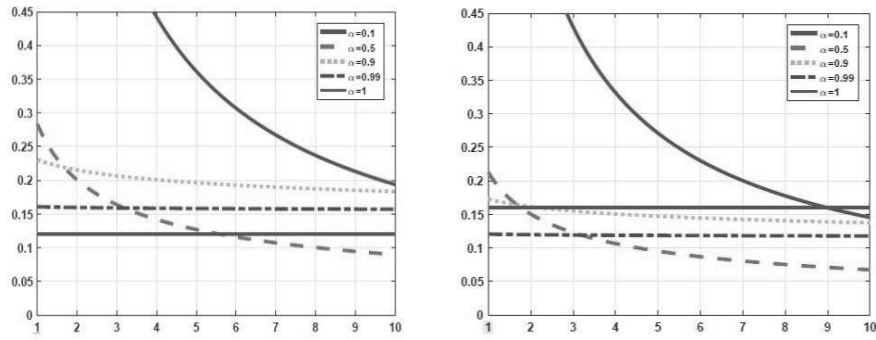
$$\mathbf{n}(s) = (-\cos\psi(s), -\sin\psi(s), 0)$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{5}(4\sin\psi(s), -4\cos\psi(s), 3)$$

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{3\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}, \tau_\alpha(s) = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$$

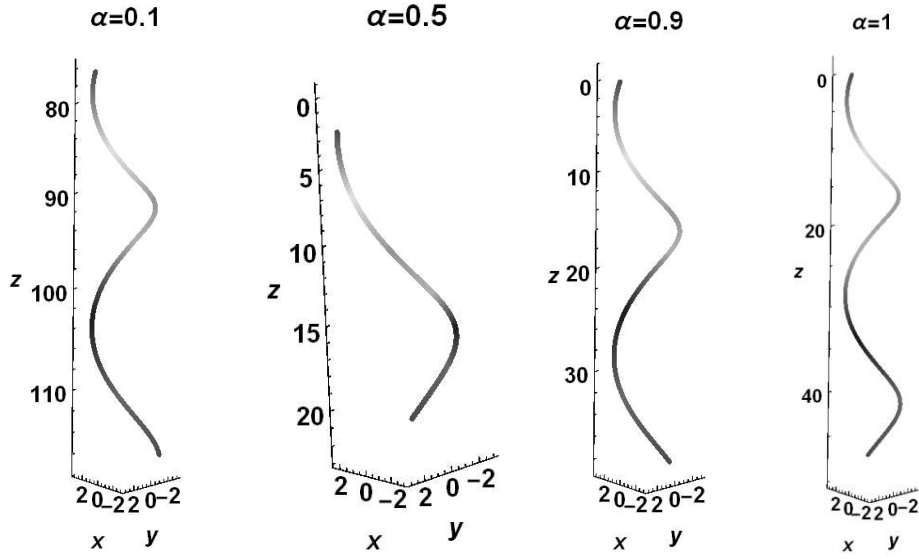
$$\kappa(s) = \frac{3}{25}, \tau(s) = \frac{4}{25}$$

elde ederiz. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de α nın farklı değerleri için kesirli mertebeden κ_α eğriliği ile τ_α burulmasının ve $\mathbf{x}$ eğrisinin grafikleri çizilmiştir.



Şekil 4.3. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 0.99, 1\}$ için $\kappa_\alpha(s) = \frac{3\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$, $\tau_\alpha(s) = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$ eğrilik ve burulmasının grafikleri [37]

Örnek 4.3 te görülebileceği üzere kesirli mertebeden eğrilik ve burulmanın $s^{\alpha-1}$ kısmı (4.6) ile verilen kesirli türevin etkisini göstermektedir. Eğrilik ve burulma, başlangıçta büyük bir değer alır ve uzun bir süre boyunca kesirli türevin etkisi ile kademeli olarak azalarak 0 a yaklaşır. Ayrıca Şekil 4.4, α nın değerine göre, $\tau_\alpha(s) = \frac{4\kappa_\alpha(s)}{3} = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$ iken $\mathbf{x}$ eğrisinin değişimini göstermektedir. α değeri 1 e yaklaştığında $\mathbf{x}$ eğrisi bir standart dairesel helise yaklaşır.



Şekil 4.4. $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ için $\tau_\alpha(s) = \frac{4\Gamma(2-\alpha)s^{\alpha-1}}{25\alpha}$ eşitliğine sahip uzay eğrileri eğrileri [37]

Şekil 4.1, 4.2 ve 4.4, den Örnek 4.1, 4.2 ve 4.3'te verilen eğrilerin α değeri 1 e yaklaştığında standart nesnelere yaklaştığını görebiliriz. Bu ise yaklaşımın iyi bilinen geometrik kabullere uygun olduğunu gösterir. Şekil 4.3, α nın değerine göre α kesirli mertebeden κ_α eğriliğinin ve τ_α burulmasının değişimini göstermektedir. $s \rightarrow \infty$ için κ_α ve τ_α değerleri 0 a yaklaşır. Yani κ_α ve τ_α değerleri uzun bir süre boyunca kesirli türevin etkisi ile kademeli olarak azalır. Diğer bir değişle, yukarıda verilen sonuçlar ve örneklerin kesirli türevin özelliklerinin (4.6) denklemi temelinde düzlem ve uzay eğrilerinin diferensiyel geometrisi ile uyumlu olduğu söylenebilir.

Ayrıca, bu çalışmada yürütülen yaklaşım fiziksel açıdan bir yenilik olan

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (4.21)$$

şeklinde parametrelenen α kesirli mertebeden bir geodezik oluşturmaktadır. (4.3) ve (4.6) dan

$$\nabla_t \mathbf{t} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \right) = 0$$

olduğu görülür ve bu ise $\mathbb{R}^n$ deki alışılmış geodezik denklemini doğrular. Bu son eşitlikte

$\mathbf{t}(s) = \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \Big|_s$ ve ∇ de $\mathbb{R}^n$ deki Levi-Civita konneksiyonudur [40]. (4.21) denklemi geometrik olarak düz bir doğrudan başka bir şey değildir.

5. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA EĞRİLERİN KESİRLİ DEĞİŞMEZLERİ

Bu bölümde yüksek boyutlu Öklid uzaylarında ele alınan eğrilerin kesirli mertebeden türev kullanılarak değişmezleri incelendi ve daha sonra incelenen bu değişmezler geometrik olarak yorumlanmıştır.

5.1. Eğrilerin Kesirli Değişmezleri

$\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, u yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir eğri olsun. $\mathbf{x}$ eğrisi için bir s parametresini

$$u \rightarrow s = \left[\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} u \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.1)$$

şeklinde göz önüne alalım, burada Γ Euler gamma fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ dir.

$$u(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{y}}{d\sigma} \right\| d\sigma, t_0 \in \tilde{I}$$

eşitliği göz önüne alınırsa s, t nin bir fonksiyonu olur. $s = h(t)$ alınırsa (5.1) den

$$h(t) = \left(\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right\| d\sigma \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.2)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikten

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\alpha h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\dot{\mathbf{x}}\| \quad (5.3)$$

elde edilir, burada $\dot{h}$, her t için pozitifdir ve böylece $t = h^{-1}(s)$ ters fonksiyonu mevcuttur.

Bu bölümde α -mertebeden Caputo kesirli türevi için

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

gösterimini ve “ $\dot{}$ ” ile de s parametresine göre türevi göstereceğiz.

(3.3) ile verilen bileşke fonksiyonun Caputo kesirli türevinin daha sade hali için

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{x} h(t)}{ds^{\alpha}} = \frac{\alpha h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (h^{-1})' \dot{\mathbf{x}} \quad (5.4)$$

tek terimli alınacaktır [36]. Yukarıdaki eşitliklerden her s için $\left\| \frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right\|_s = 1$ olduğu görülür, yani s , $\mathbf{x}$ eğrisinin yay-uzunluğu parametresi olur.

$\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, eğrisi için Frenet-Serret çatısı parametre seçilişinden bağımsızdır, yani

$$Span \left\{ \frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}}, \frac{d}{ds} \left(\frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right), \dots, \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left(\frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{ds^{\alpha}} \right) \right\} = Span \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{du}, \frac{d^2 \mathbf{x}}{du^2}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}}{du^n} \right\} \quad (5.5)$$

dir. s yay-uzunluğu parametresini kullanarak α kesirli mertebeden Frenet- Serret formülleri elde edilebilir.

$\mathbf{x}$ eğrisinin Frenet- Serret çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-2}\}$ ve eğrilikleri de $\{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\}$ olsun. O zaman $\mathbf{x}$ eğrisinin Frenet- Serret formülleri

$$\mathbf{t}' = \kappa_1 \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa_1 \mathbf{t} + \kappa_2 \mathbf{b}_1$$

...

$$\mathbf{b}_{n-3}' = -\kappa_{n-2} \mathbf{b}_{n-4} + \kappa_{n-1} \mathbf{b}_{n-2}$$

$$\mathbf{b}_{n-2}' = -\kappa_{n-1} \mathbf{b}_{n-3}$$

şeklindedir, burada “ ’ ” ile de u parametresine göre türevi gösterilmektedir ve

$i = 3, \dots, n-1$ için

$$\kappa_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle, \kappa_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}_1 \rangle, \dots, \kappa_i = \langle \mathbf{b}_{i-2}', \mathbf{b}_{i-1} \rangle,$$

dir. Buradan aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 5.1. Yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin Frenet- Serret çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-2}\}$ ve eğrilikleri de $\{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\}$ olsun. Bu durumda

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n} \rangle$$

şeklinde verilen $\kappa_1^{(\alpha)}$ fonksiyonuna $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden birinci eğriliği adı verilir.

Burada

$$\kappa_1 = \langle \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{du}, \mathbf{n} \rangle = \frac{ds}{du} \langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n} \rangle$$

olduğundan

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1 \quad (5.6)$$

elde edilir.

Tanım 5.2. Yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin Frenet- Serret çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-2}\}$ ve eğrilikleri de $\{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\}$ olsun. Bu durumda

$$\kappa_2^{(\alpha)} = \langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{b}_1 \rangle$$

şeklinde verilen $\kappa_2^{(\alpha)}$ fonksiyonuna $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden ikinci eğriliği adı verilir.

Burada

$$\kappa_2^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_2 \quad (5.7)$$

elde edilir.

Tanım 5.3. Yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin Frenet- Serret çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-2}\}$ ve eğrilikleri de $\{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\}$ olsun. Bu durumda

$$\kappa_i^{(\alpha)} = \langle \frac{d\mathbf{b}_{i-2}}{ds}, \mathbf{b}_{i-1} \rangle, i = 3, \dots, n-1$$

şeklinde verilen $\kappa_i^{(\alpha)}$ fonksiyonuna $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden i-yinci eğriliği adı verilir.

Burada

$$\kappa_i^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_i, i = 3, \dots, n-1 \quad (5.8)$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz.

Yardımcı Teorem 5.1. α kesirli mertebeden yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için

$$\kappa_j^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa_j, j = 1, \dots, n-1$$

dir.

Bu yardımcı teoremin bir sonucunu aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Sonuç 5.1. $\kappa_i^{(\alpha)} = \lambda$ sabit eğriliğine sahip regüler parametrik bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için

$$\kappa_i = \frac{\lambda \alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.1. $\mathbf{x}, \mathbb{R}^n$ de regüler parametrik bir eğri olsun. O zaman s -yay uzunluğu parametresi ve α kesirli mertebeden $\kappa_i^{(\alpha)}$ eğriliği $\mathbb{R}^n$ in Öklidyen hareketleri altında değişmez kalır.

İspat.

$$s = s(u) = \left[\frac{\alpha^2}{\Gamma(2-\alpha)} u \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

ve

$$\kappa_j^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha s^{1-\alpha}} \kappa_j, j = 1, \dots, n-1$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa ispat aşıkardır, burada u ve κ_j , sırasıyla, $\mathbf{x}$ eğrisi için standart yay-uzunluğu ve eğriliktir.

5.2. Kesirli Eğriliklerin Geometrik Yorumu

Teorem 5.2. $\mathbb{R}^n$ de regüler parametrik bir eğrinin düz bir doğru olması için gerek ve yeter şart bu eğrinin α kesirli mertebeden birinci eğriliğinin özdeş olarak sıfır olmasıdır.

İspat. Yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisini göz önüne alırsak bu $\mathbf{x}$ eğrisinin α kesirli mertebeden birinci eğriliği

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1$$

eşitliğine sahip olur. İspat buradan açıktır.

Bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için, α kesirli mertebeden eğrilikleri göz önüne alınırsa aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz.

Yardımcı Teorem 5.2. α kesirli mertebeden yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için

$$\frac{\kappa_i^{(\alpha)}}{\kappa_{i+1}^{(\alpha)}} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, n-2, n \geq 3$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Tanım 5.1. den ve Tanım 5.2 den

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1$$

ve

$$\kappa_2^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_2$$

yazılabilir. Bu iki eşitlik birbirine oranlanır ise

$$\frac{\kappa_1^{(\alpha)}}{\kappa_2^{(\alpha)}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

elde edilir. Tanım 5.3. den

$$\kappa_i^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_i, i = 3, \dots, n-1$$

olduğu göz önüne alınırsa $i = 3, \dots, n-1$ için

$$\frac{\kappa_i^{(\alpha)}}{\kappa_{i+1}^{(\alpha)}} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}}$$

olduğu sonucuna varılır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2. $\mathbb{R}^n$ de regüler parametrik bir eğrinin sabit eğrilik oranına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa_1^{(\alpha)}}{\kappa_2^{(\alpha)}} = \text{sabit}, \frac{\kappa_2^{(\alpha)}}{\kappa_3^{(\alpha)}} = \text{sabit}, \dots, \frac{\kappa_{n-2}^{(\alpha)}}{\kappa_{n-1}^{(\alpha)}} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

İspat. Bölümün ilk kısmında verilen eğrilik tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Eğer $\mathbf{x}(u)$ ve $\mathbf{x}^*(u^*)$, $I \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}^3$ ye tanımlı involüt eğri çifti ise aralarında

$$d(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(u^*)) = |c - u|, \forall u \in I, c = \text{sabit}$$

bağıntısı mevcuttur [28].

κ_1, κ_2 ve κ_1^*, κ_2^* , sırasıyla, $\mathbf{x}(u)$ ve $\mathbf{x}^*(u^*)$ eğrilerinin standart eğrilikleri olmak üzere

$$\kappa_1^{*2}(u^*) = \frac{\kappa_1^2(u) + \kappa_2^2(u)}{\kappa_1^2(u)(c-u)^2} \quad (5.9)$$

ve

$$\kappa_2^*(u^*) = \frac{\frac{d}{du} \left(\frac{\kappa_2(u)}{\kappa_1(u)} \right) \kappa_1(u)}{(\kappa_1^2(u) + \kappa_2^2(u))(c-u)} \quad (5.10)$$

eşitliği sağlanır, burada " ' " ile u parametresine göre türev gösterilmiştir [28].

Şimdi involüt eğri çiftleri ile ilgili aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 5.3. $\mathbf{x}^*, \mathbb{R}^3$ de parametrik bir $\mathbf{x}$ eğrisinin involütü olsun. O zaman bu eğrilerin α kesirli mertebeden birinci eğrilikleri arasında

$$\left(\kappa_1^{(\alpha)*}\right) = \frac{(\Gamma(2-\alpha))}{\alpha(s^*)^{1-\alpha}} \frac{\sqrt{(\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2}}{(\kappa_1^{(\alpha)}) \left| c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right|}, c \in \mathbb{R}$$

bağıntısı vardır, burada $s, \kappa_1^{(\alpha)} \neq 0, (\kappa_2^{(\alpha)})$ ve $s^*, \kappa_1^{(\alpha)*}$, sırasıyla, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden parametre ve eğrilikleridir.

İspat. s ve s^* , sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden yay-uzunluğu parametreleri olsun. $\kappa_1^{(\alpha)}, \kappa_2^{(\alpha)}$ ve $\kappa_1^{(\alpha)*}, \kappa_2^{(\alpha)*}$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden eğrilikleri olmak üzere (5.6) ve (5.7) göz önüne alınırsa

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1, \kappa_2^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_2$$

ve

$$\kappa_1^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_1^*, \kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_2^*$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu son eşitlikler (5.9) da yerine yazılırsa,

$$\frac{\alpha^2 (s^*)^{2-2\alpha} (\kappa_1^{(\alpha)*})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2} = \frac{\frac{\alpha^2 (s)^{2-2\alpha} (\kappa_1^{(\alpha)})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2} + \frac{\alpha^2 (s)^{2-2\alpha} (\kappa_2^{(\alpha)})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2}}{\frac{\alpha^2 (s)^{2-2\alpha} (\kappa_1^{(\alpha)})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2} \left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right)^2}$$

$$\frac{\alpha^2 (s^*)^{2-2\alpha} (\kappa_1^{(\alpha)*})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2} = \frac{(\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2}{(\kappa_1^{(\alpha)})^2 \left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right)^2}$$

$$\left(\kappa_1^{(\alpha)*}\right)^2 = \frac{(\Gamma(2-\alpha))^2}{\alpha^2 (s^*)^{2-2\alpha}} \frac{(\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2}{(\kappa_1^{(\alpha)})^2 \left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right)^2}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.4. $\mathbf{x}^*, \mathbb{R}^3$ de parametrik bir $\mathbf{x}$ eğrisinin involütü olsun. O zaman bu eğrilerin α kesirli mertebeden ikinci eğrilikleri arasında

$$\left(\kappa_2^{(\alpha)*}\right) = \frac{(\Gamma(2-\alpha))}{\alpha(s^*)^{1-\alpha}} \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa_2^{(\alpha)}}{\kappa_1^{(\alpha)}} \right) (\kappa_1^{(\alpha)})}{\left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right) (\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2}, c \in \mathbb{R}$$

bağıntısı vardır, burada $s, \kappa_1^{(\alpha)} \neq 0, (\kappa_2^{(\alpha)})$ ve $s^*, \kappa_2^{(\alpha)*}$, sırasıyla, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden parametre ve eğrilikleridir.

İspat. s ve s^* , sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden yay-uzunluğu parametreleri olsun. $\kappa_1^{(\alpha)}, \kappa_2^{(\alpha)}$ ve $\kappa_1^{(\alpha)*}, \kappa_2^{(\alpha)*}$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden eğrilikleri olmak üzere (5.6) ve (5.7) göz önüne alınırsa

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1, \quad \kappa_2^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_2$$

ve

$$\kappa_1^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_1^*, \quad \kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_2^*$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu son eşitlikler (5.10) da yerine yazılırsa,

$$\frac{\alpha (s^*)^{1-\alpha} \kappa_2^{(\alpha)*}}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa_2^{(\alpha)}}{\kappa_1^{(\alpha)}} \right) \cdot \frac{ds}{du} \frac{\alpha(s)^{1-\alpha} \kappa_1^{(\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\frac{\alpha^2 (s)^{2-2\alpha} (\kappa_1^{(\alpha)})^2}{(\Gamma(2-\alpha))^2} \left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right)}$$

bulunur, $\frac{ds}{du} = \frac{\alpha(s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ olduğundan bu değer yerine yazılır gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\alpha (s^*)^{1-\alpha} \kappa_2^{(\alpha)*}}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa_2^{(\alpha)}}{\kappa_1^{(\alpha)}} \right) \cdot \kappa_1^{(\alpha)}}{\left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right) ((\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2)}$$

yazılır ve sonuç olarak

$$\kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha (s^*)^{1-\alpha}} \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa_2^{(\alpha)}}{\kappa_1^{(\alpha)}} \right) \cdot \kappa_1^{(\alpha)}}{\left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right) ((\kappa_1^{(\alpha)})^2 + (\kappa_2^{(\alpha)})^2)}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Eğer $I \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}^3$ ye tanımlı $\mathbf{x}(u)$ birim hızlı bir eğri iken $\mathbf{x}^*(u^*)$ eğrisi ile bir Bertrand eğri çifti oluşturuyor ise, κ_1, κ_2 ve κ_1^*, κ_2^* , sırasıyla, $\mathbf{x}(u)$ ve $\mathbf{x}^*(u^*)$ eğrilerinin standart eğrilikleri olmak üzere

$$\kappa_1^* = \frac{c\kappa_1 - \sin^2 \theta}{c(1 - c\kappa_1)} \quad (5.11)$$

ve

$$\kappa_2^* = \frac{1}{c^2 \kappa_2} \sin^2 \theta \quad (5.12)$$

eşitlikleri geçerlidir, burada $c \in \mathbb{R}$ ve θ eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açıdır [42].

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Theorem 5.5. Eğer $\mathbf{x}^*(u^*)$, $\mathbb{R}^3$ de parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}(u)$ eğrisinin bir Bertrand çifti olsun. O zaman bu eğrilerin α kesirli mertebeden eğrilikleri arasında

$$\kappa_1^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha) c \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \kappa_1^{(\alpha)} - \sin^2 \theta}{\alpha (s^*)^{1-\alpha} c (1 - c \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \kappa_1^{(\alpha)})}, c \in R$$

ve

$$\kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{(\Gamma(2-\alpha))^2}{c^2 \alpha^2 (s s^*)^{1-\alpha} \kappa_2^{(\alpha)}} \sin^2 \theta$$

bağıntıları sağlanır, burada $s, \kappa_1^{(\alpha)}, \kappa_2^{(\alpha)}$ ve $s^*, \kappa_1^{(\alpha)*}, \kappa_2^{(\alpha)*}$, sırasıyla, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden parametre ve eğrilikleri, θ ise eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. s ve s^* , sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden yay-uzunluğu parametreleri ve $\kappa_1^{(\alpha)}, \kappa_2^{(\alpha)}$ ve $\kappa_1^{(\alpha)*}, \kappa_2^{(\alpha)*}$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^*$ eğrilerinin α kesirli mertebeden eğrilikleri olsun. Bu durumda

$$\kappa_1^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_1, \kappa_2^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_2$$

ve

$$\kappa_1^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_1^*, \kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} (s^*)^{\alpha-1} \kappa_2^*$$

eşitlikleri (5.11) ve (5.12) de göz önüne alınırsa ispat açıktır.

6. MATERYAL VE METOT

Diferensiyel geometri alanında eğriler teorisi hakkında uzun yıllardır birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar ilk olarak Öklid uzayında ele alınmış ve özellikle 17.yy dan sonra öklidsel olmayan uzaylarda da karşılıkları olup olmadığı araştırılmış ve birçok önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalar yapılırken diferensiyel hesap ve integralin metodları kullanılmış ve eğrilerin geometrik yorumlamaları değişmezleri incelenerek yapılmıştır. Son zamanlarda kesirli analiz kavramı birçok araştırmaya yeni bir ufuk açmaktadır. Tezin giriş kısmında kısa bir özeti verilen kesirli analiz ile ilgili kaynaklar detaylıca incelenmiş ve Öklid uzayında tamsayılı mertebeden türev ile elde edilen karakterizasyonların kesirli türev ile de elde edilebileceği gözlemlenmiştir. Tamsayılı mertebeden türev ile elde edilen bu çalışmalardaki metodlar doktora tezine temel teşkil ederek, Caputo kesirli türevi ele alınmış ve eğrilerin bu türev kullanılarak değişmezleri incelenmiş ve eğrilerin kesirli türev altındaki değişmezleri ile klasik anlamdaki türev ile elde edilmiş değişmezleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca bazı özel eğrilerin kesirli eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulunmuştur.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışması boyunca Caputo kesirli türevi kullanılarak, ilk olarak yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin kesirli eğriliği hesaplanmış ve bu eğrilik ile standart eğriliği arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Ardından regüler parametrik bir eğrinin sabit eğrilik oranına sahip olması için gerek ve yeter şart bulunmuştur.

Daha sonra $\mathbb{R}^3$ de parametrik bir $\mathbf{x}$ eğrisinin involütü ele alınarak bu eğrilerin α kesirli mertebeden birinci ve ikinci eğrilikleri arasında ilişkilerin mevcut olduğu gözlenmiştir. Bu bağıntı kesirli mertebeden türev kullanıldığı için mevcut klasik türevle elde edilen bağıntıdan kısmi farklılıklar göstermektedir. Son olarak $\mathbb{R}^3$ de parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}(u)$ eğrisinin bir Bertrand çifti ele alınmış ve bu eğri çiftlerinin α kesirli mertebeden eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

Bulunan bu bağıntıların klasik türev ile elde edilen sonuçlarla temelde geometrik olarak örtüştüğü ve kesirli türevin etkisi ile bazı farklılıklar ortaya çıkardığı öne sürülebilir.

8. SONUÇLAR

Bu tez çalışması boyunca

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$$

şeklinde verilen Caputo kesirli türevi kullanılarak, ilk olarak yay-uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin kesirli eğriliği ile standart eğriliği arasında detayları 5. bölümde verilen

$$\kappa_i(\alpha) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha} s^{\alpha-1} \kappa_i, i = 3, \dots, n-1$$

bağıntısı elde edilmiştir. Ardından bu eğri için eğrilikleri arasında

$$\frac{\kappa_i(\alpha)}{\kappa_{i+1}(\alpha)} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, n-2, n \geq 3$$

eşitliği verilmiş ve regüler parametrik bir eğrinin sabit eğrilik oranına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_2(\alpha)} = \text{sabit}, \frac{\kappa_2(\alpha)}{\kappa_3(\alpha)} = \text{sabit}, \dots, \frac{\kappa_{n-2}(\alpha)}{\kappa_{n-1}(\alpha)} = \text{sabit}$$

olarak elde edilmiştir.

Daha sonra $\mathbf{x}^*, \mathbb{R}^3$ de parametrik bir $\mathbf{x}$ eğrisinin involütü olmak üzere bu eğrilerin α kesirli mertebeden birinci eğrilikleri arasında

$$(\kappa_1(\alpha))^* = \frac{(\Gamma(2-\alpha))}{\alpha(s^*)^{1-\alpha}} \frac{\sqrt{(\kappa_1(\alpha))^2 + (\kappa_2(\alpha))^2}}{(\kappa_1(\alpha)) \left| c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right|}, c \in \mathbb{R}$$

ve

$$(\kappa_2(\alpha))^* = \frac{(\Gamma(2-\alpha))}{\alpha(s^*)^{1-\alpha}} \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa_2(\alpha)}{\kappa_1(\alpha)} \right) (\kappa_1(\alpha))}{\left(c - \frac{\Gamma(2-\alpha)s^\alpha}{\alpha^2} \right) (\kappa_1(\alpha))^2 + (\kappa_2(\alpha))^2}, c \in \mathbb{R}$$

bağıntılarının mevcut olduğu sonucuna varılmıştır. Bu bağıntı kesirli mertebeden türev kullanıldığı için mevcut klasik türevle elde edilen bağıntıdan kısmi farklılıklar göstermektedir.

Son olarak $\mathbb{R}^3$ de parametrelendirilmiş bir $\mathbf{x}(u)$ eğrisinin bir Bertrand çifti ele alınmış ve bu eğri çiftlerinin α kesirli mertebeden eğrilikleri arasında

$$\kappa_1(\alpha)^* = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(s^*)^{1-\alpha}} \frac{c \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \kappa_1(\alpha) - \sin^2 \theta}{c(1-c) \frac{\alpha s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \kappa_1(\alpha)}, c \in \mathbb{R}$$

ve

$$\kappa_2^{(\alpha)*} = \frac{(\Gamma(2 - \alpha))^2}{c^2 \alpha^2 (ss^*)^{1-\alpha} \kappa_2^{(\alpha)}} \sin^2 \theta$$

bağıntıları sağlandığı görülmüştür.

Sonuç olarak bu elde edilen bağıntıların klasik anlamda türev kullanılarak elde edilen sonuçlarla geometrik olarak örtüştüğü gözlemlenmiş ve kesirli türevin etkisi ile bazı farklılıklar ortaya koyduğu elde edilmiştir.



ÖNERİLER

Kesirli analiz teknikleri özellikle de Caputo kesirli türevi kullanılarak eğriler teorisi için daha önce klasik türev ile elde edilen birçok karakterizasyonun farklı sonuçlar vereceği tez çalışması boyunca gözlemlenmiştir. Diferensiyel geometri alanında geniş bir yere sahip olan eğriler teorisi konusunda klasik anlamda türev kullanılarak elde edilen birçok çalışma göz önüne alınarak, bu çalışmalardaki metodlar kesirli türev kullanılarak uygulandığında ilginç sonuçlar elde edilebileceği öngörülmektedir. Ancak bu çalışmalar yapılırken Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevini kavramlarına ihtiyaç duyulacaktır.

Tam sayılı mertebeden türevin bu farklı formu olan Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi kavramları bir eğrinin eğriliği ve birim teğet vektör gibi geometrik kavramları türetmek için bir zorluk ortaya çıkarır. Dolayısıyla türevin geometrik teorisini inşa etmek için bu kuralda mevcut olan sonsuz serilerin belirli bir sadeleştirilmesi kullanılabilir. Bu sadeleştirme ile sonsuz serilerden kesirli türevin özelliklerini koruyan çoğu temel terim çıkarılıp ve $t = g(x)$ olmak üzere

$$(D_x^\alpha f)(g(x)) = \frac{\alpha x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{df}{dt} \frac{dg}{dx}$$

şeklinde elde edilen formu kullanmanın bir avantaj sağlayacağı önerilmektedir. Bu formül aslında kesirli türevin etkisini kısmen vermektedir ve adi türev ile ifade edilmiştir.

Bu sadeleştirmeden sonra basitleştirilmiş Leibnitz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi kullanılarak direkt Caputo türevine dayalı kesirli geometrik teoremin inşası beklenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., Trujillo, J.J. (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. World Scientific, New Jersey
- [2] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam
- [3] Oldham, K.B., Spanier, J. (2006). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, New York
- [4] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego
- [5] Bagley, R.L., Calico, R.A. (1991). Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *J. Guid. Control Dynam.* 14, No 2, 304–311
- [6] Bagley, R.L., Torvik, P.J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. Rheol.* 27, No 3, 201–210
- [7] Bagley, R.L., Torvik, P.J. (1983). Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.* 21, No 5, 741–748
- [8] Bagley, R.L., Torvik, P.J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. Rheol.* 30, No 1, 133–155
- [9] Caputo, M., Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pageoph.* 91, No 1, 134–147
- [10] Koeller, R.C. (1984). Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *J. Appl. Mech.* 51, No 2, 299–307
- [11] Yajima, T., Nagahama, H. (2010). Differential geometry of viscoelastic models with fractional-order derivatives. *J. Phys. A: Math. Theor.* 43, No 38
- [12] Agrawal, Om.P. (2002). Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. *J. Math. Anal. Appl.* 272, Issue 1, 368–379
- [13] Atanacković, T.M., Konjik, S., Oparnica, Lj., Pilipović, S. (2010). Generalized Hamilton's principle with fractional derivatives. *J. Phys. A: Math. Theor.* 43, No 25
- [14] Baleanu, D., Maaraba (Abdeljawad), T., Jarad, F. (2008). Fractional variational principles with delay. *J. Phys. A: Math. Theor.* 41, No 31
- [15] Gjurchinovski, A., Sandev, T., Urumov, V. (2010). Delayed feedback control of fractional-order chaotic systems. *J. Phys. A: Math. Theor.* 43, No 44
- [16] Grigorenko, I., Grigorenko, E. (2003). Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. *Phys. Rev. Lett.* 91, No 3
- [17] Tarasov, V.E. (2005). Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, No 26, 5929–5943
- [18] Tarasov, V.E. (2005). Fractional generalization of gradient systems. *Lett. Math. Phys.* 73, No 1, 49–58
- [19] Yajima, T., Nagahama, H. (2018). Geometric structures of fractional dynamical systems in non-Riemannian space: Applications to mechanical and electromechanical systems. *Ann. Phys. (Berlin)* 530, No 5

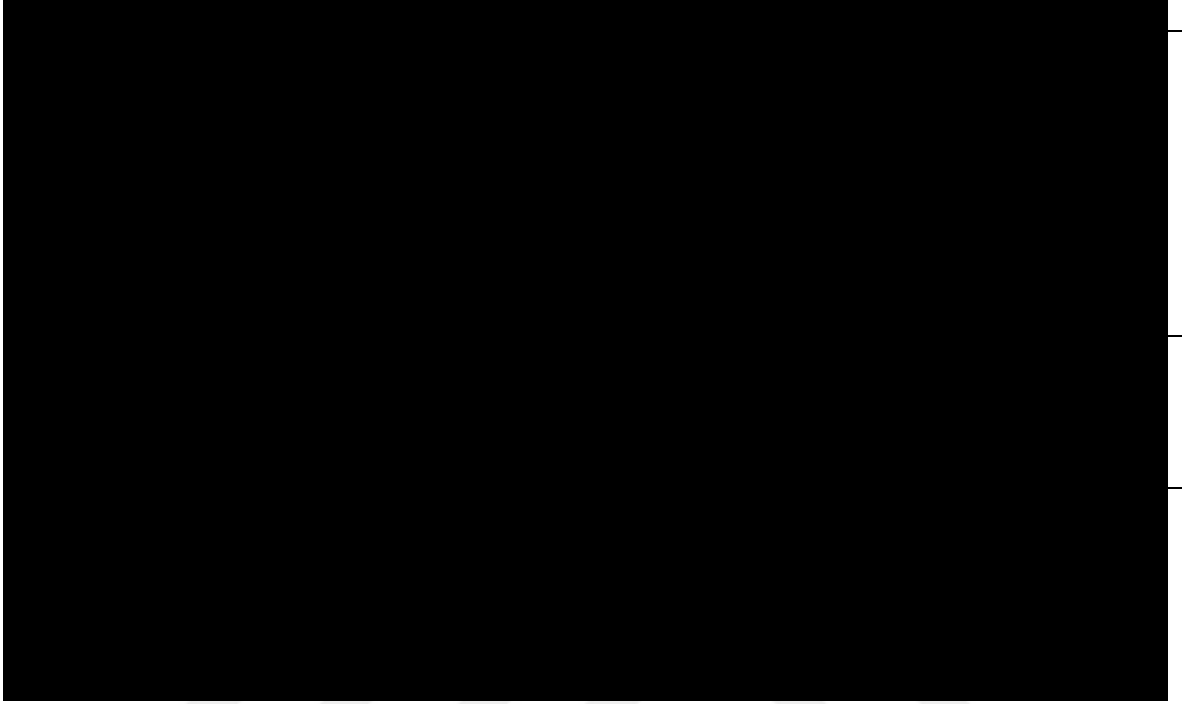
- [20] Lazopoulos, K.A., Lazopoulos, A.K. (2016). Fractional differential geometry of curves & surfaces. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2, No 3, 169–186
- [21] Baleanu, D., Vacaru, S.I. (2011). Constant curvature coefficients and exact solutions in fractional gravity and geometric mechanics. *Cent. Eur. J. Phys.* 9, No 5, 1267–1279
- [22] Baleanu, D., Vacaru, S.I. (2011). Fractional almost Kähler-Lagrange geometry. *Nonlinear Dyn.* 64, No 4, 365–373
- [23] Baleanu, D., Vacaru, S.I. (2011). Fractional curve flows and solitonic hierarchies in gravity and geometric mechanics. *J. Math. Phys.* 52, No 5
- [24] Baleanu, D., Vacaru, S.I. (2011). Fedosov quantization of fractional Lagrange spaces. *Int. J. Theor. Phys.* 50, No 1, 233–243
- [25] Vacaru, S.I. (2012). Fractional nonholonomic Ricci flows. *Chaos Soliton. Fract.* 45, Nos 9-10, 1266–1276
- [26] Vacaru, S.I. (2012). Fractional dynamics from Einstein gravity, general solutions, and black holes. *Int. J. Theor. Phys.* 51, No 5, 1338–1359
- [27] Baleanu, D., Trujillo, J.J. (2010). A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations within Caputo fractional derivatives. *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 15(5), ss. 1111-1115
- [28] Hacısalıhoğlu, H.H. (1998). *Diferensiyel Geometri Cilt:1*, Hacısalıhoğlu Yayıncılık.
- [29] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Vol.198. *Academic Press, Inc.*, San Diego
- [30] Miller K. S., Ross B. (1993). An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley-Interscience Publication*. New York, Toronto, Singapore.
- [31] Li C., Qian D., Chen Y. (2011). On Riemann Liouville and Caputo Derivatives, *Discrete Dynamics in Nature and Society*.
- [32] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 13, No 5, 529–539
- [33] Yajima, T., Yamasaki, K. (2012). Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows. *J. Phys. A: Math. Theor.* 45, No 6.
- [34] Şahantürk, F. (2019). *Kesirli Türevler ve İlgili Nümerik Metotlar*, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi.
- [35] Aydoğdu, A. (2019). *Bazı Kesirli Türevli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi.
- [36] Yajima, T., Shunya, O., Yamasaki, K. (2018). Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret Formulas, *Frac. Calc. & App. Anal.*, Vol 21, Num. 6, 1493-1505
- [37] Aydın, M.E., Bektaş, M., Öğrenmiş, A.O., Yokuş, A. (2021). Differential Geometry of Curves in Euclidean 3-Space with Fractional Order, *Int. Elect. Jor. of Geo.*, Vol 14, No 1, 132-144
- [38] do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [39] Gray, A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Second Ed. CRC Press,
- [40] Pressley, A. (2010). *Elementary Differential Geometry*, Springer Verlag, Berlin

- [41] Lancet, M.A. (1806). Mémoire sur les courbes à double courbure. *Mémoires présentés à l'Institut*, 1, 416-454
- [42] Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayın Dağıtım*



ÖZGEÇMİŞ

Meltem ÖĞRENMİŞ



AKADEMİK FAALİYETLER

Bildiriler:

1. Öğrenmiş, M., Bektaş, M. Fractional Invariants of Curves In Euclidean Spaces of Higher Dimensional, Riemannian Geometry and Applications - RIGA 2021 Bucharest, Romania