



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ TÜREVLİ ELASTİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİĞDEM SÜSOY ATALAR

KASIM

ÇİÇDEM SÜSOY ATALAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM 2025

KESİRLİ TÜREVLİ ELASTİK EĞRİLER

Çiğdem SÜSOY ATALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Tefik ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Çiğdem SÜSOY ATALAR tarafından hazırlanan “Kesirli Türevli Elastik Eğriler” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Tefvık ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Evren ERGÜN

Çarşamba Ticaret Borsası Meslek Yüksek Okulu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 12/09/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dökümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Çiğdem SÜSOY ATALAR
(12.09.2025)

KESİRLİ TÜREVLİ ELASTİK EĞRİLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Çiğdem SÜSOY ATALAR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2025

ÖZET

Bu tez, klasik elastik eğri teorilerini kesirli türev kavramlarıyla genişletmeyi amaçlamaktadır. Güncel mühendislik ve malzeme bilimlerindeki ihtiyaçlar, geleneksel tam sayılı türev tabanlı modellerin yetersiz kaldığı durumlar için daha esnek ve gerçekçi yaklaşımlar gerektirmektedir. Özellikle viskoelastik davranış gösteren veya mikro-yapısal karmaşıklığa sahip malzemelerin deformasyonlarını modellemede kesirli türevler, malzemenin hafıza ve genetik özelliklerini daha doğru bir şekilde yansıtabilir.

Tez kapsamında ilk olarak, Riemann-Liouville ve Caputo gibi yaygın kesirli türev tanımları ile bunların temel özellikleri detaylıca incelenmiştir. Ardından, klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve varyasyonel prensip aracılığıyla elastik eğrilerin modellenmesi gözden geçirilmiştir. Bu temel üzerine inşa edilerek, potansiyel enerji fonksiyonundaki klasik türev terimleri kesirli türevlerle ikame edilerek kesirli türevli elastik eğri modelleri türetilmiştir. Bu yeni modeller için genelleştirilmiş Euler-Lagrange denklemleri formüle edilmiş ve uygun sınır koşulları belirlenmiştir.

Bu çalışma, kesirli türevli elastik eğrilerle ilgili çalışmaların geliştirilmesi ve anlaşılmasına önemli katkılar sunmaktadır. Gelecekteki çalışmalar, yüzeyler üzerindeki eğrilerle ilgili tanımlanacak enerji fonksiyonlarına bağlı kesirli türevli elastik eğrilere odaklanabilir.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler
Danışman

: 46
: Kesirli türev, Kesirli türevli elastik eğriler, Varyasyonel prensip, Euler-Lagrange denklemleri
: Prof. Dr. Tevfik ŞAHİN

ELASTIC CURVES WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

(M. Sc. Thesis)

Çiğdem SÜSOY ATALAR

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2025

ABSTRACT

This thesis aims to extend classical elastic curve theories by incorporating fractional derivative concepts. Current needs in engineering and materials science require more flexible and realistic approaches for cases where traditional integer-order derivative-based models fall short. In particular, fractional derivatives can more accurately reflect the memory and hereditary properties of materials exhibiting viscoelastic behavior or possessing microstructural complexity in modeling their deformations.

The thesis first examines common fractional derivative definitions, such as Riemann-Liouville and Caputo, along with their fundamental properties in detail. Subsequently, the classical Euler-Bernoulli beam theory and the modeling of elastic curves through variational principles are reviewed. Building upon this foundation, fractional derivative-based elastic curve models are derived by substituting classical derivative terms in the potential energy functional with fractional derivatives. Generalized Euler-Lagrange equations are formulated for these new models, and appropriate boundary conditions are established.

This study provides significant contributions to the development and understanding of research on fractional derivative-based elastic curves. Future work may focus on fractional derivative-based elastic curves defined by energy functionals associated with curves on surfaces.

Page Number

: 46

Keywords

: Fractional derivative, Elastic Curves with fractional derivative, Variational Principle, Euler-Lagrange Equations

Supervisor

: Prof. Dr. Tevfik ŞAHİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi, tecrübe ve yol göstericiliğiyle bana her zaman destek olan, sabır ve anlayışla rehberlik eden değerli danışmanım Prof. Dr. Tefik ŞAHİN hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma jürisinde yer alarak değerli katkılarını ve yapıcı eleştirilerini esirgemeyen Doç. Dr. Evren ERGÜN ve Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmam süresince manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve yakınlarıma da şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Literatür Taraması	3
2.1.1. Klasik elastik eğri teorileri	3
2.1.2. Kesirli türev kavramının gelişimi ve özellikleri	3
2.1.3. Kesirli türevli elastik eğriler üzerine yapılan çalışmalar	4
2.2. Kesirli Türev Kavramları ve Özellikleri	5
2.3. Kesirli Kalkülüsün Özel Fonksiyonları	6
2.4. Gama Fonksiyonu	6
2.4.1. Gama fonksiyonunun tanımı	6
2.4.2. Gama fonksiyonunun bazı özellikleri	6
2.5. Mittag-Leffler Fonksiyonu	7
2.5.1. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ve diğer fonksiyonlarla ilişkisi	7
2.5.2. Laplace dönüşümü	10
2.5.3. Türevler	11
2.6. Wright Fonksiyonu	12

2.6.1. Tanım ve temel özellikler	13
2.6.2. Laplace dönüşümü	13
2.7. Kesirli Türev Tanımları	15
2.7.1. Riemann-Liouville kesirli integrali ve türevi	15
2.7.2. Caputo kesirli türevi	15
2.8. Temel Özellikler	16
2.9. Fiziksel Yorumlar: Hafıza ve Fraktal Davranışların Modellenmesi	17
2.9.1. Hafıza etkisi (non-yerel etki)	17
2.9.2. Fraktal davranışlar ve anormal difüzyon	18
2.10. Kesirli Türevli Eğriler ve Frenet Elemanları	18
2.10.1. Diferansiyel geometri ve kesirli eğrilerin önemi	18
2.10.2. Eğri tanımı ve yay uzunluğu	19
2.10.3. Frenet elemanları: teğet, normal, binormal vektörleri	20
2.10.4. Frenet formülleri	20
2.11. Kesirli Türevli Eğriler ve Kesirli Frenet Elemanları	21
2.11.1. Caputo kesirli türevli eğri tanımı	21
2.11.2. Kesirli yay uzunluğu parametresi	21
2.11.3. Kesirli frenet elemanları	22
2.11.4. Kesirli frenet formülleri	22
3. MATERYAL VE YÖNTEM	25
3.1. Klasik Elastik Eğriler ve Varyasyonel Prensip	25
3.2. Temel Kavramlar ve Teoremler	25
3.3. Euler-Lagrange Denkleminin Türetimi	26

4. BULGULAR VE TARTIŞMA	29
4.1. En Basit Kesirli Varyasyonel Problem	29
4.1.1. Euler-Bernoulli denkleminin türetilmesi	32
4.2. Varyasyonel Prensip	32
4.2.1. Fonksiyoneller ve varyasyonel hesaplamaların temelleri	33
4.2.2. Euler-Lagrange denklemleri	33
4.2.3. Elastik eğriler İçin potansiyel enerji fonksiyoneli ve Euler-Bernoulli denkleminin türetilmesi	33
4.3. Kesirli Türevli Elastik Eğri Modelleri	35
4.4. Kesirli Türevli Potansiyel Enerji Fonksiyonelleri	36
4.4.1. Klasik türevlerin kesirli türevlerle değiştirilmesinin farklı yolları	36
4.5. Kesirli Euler-Lagrange Denklemleri	37
4.6. Çözüm Yöntemleri ve Uygulamalar	39
4.7. Analitik Çözüm Yöntemleri	40
4.7.1. Basit kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri	40
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Komplex sayılar kümesi
$\Gamma(z)$	Gama fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Laplace dönüşümü
$W_{\alpha,\beta}(z)$	Wright fonksiyonu
$I_a^{\alpha}f(t)$	α dereceden Riemann-Liouville kesirli integrali
$D_a^{\alpha}f(t)$	α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^CD_a^{\alpha}f(t)$	α mertebeden Caputo kesirli türevi

1. GİRİŞ

Mühendislik ve fizikte esnek yapıların ve malzemelerin davranışı, köprülerden robot kollarına, biyolojik dokulardan mikro-elektro-mekanik sistemlere kadar geniş bir yelpazede kritik öneme sahiptir. Bu yapıların deformasyonunu ve denge durumlarını anlamak, tasarım, analiz ve optimizasyon süreçlerinin temelini oluşturur. Geleneksel olarak, elastik eğrilerin modellenmesinde tam sayılı (integer-order) türevlere dayalı klasik teoriler, örneğin Euler-Bernoulli ve Kirchhoff kiriş teorileri, yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu teoriler, birçok mühendislik uygulaması için son derece başarılı ve güvenilir sonuçlar sağlamıştır. Özellikle yapısal analiz, makine tasarımı ve mekanik sistemlerin optimizasyonu gibi alanlarda klasik yaklaşımların etkinliği defalarca kanıtlanmıştır.

Ancak, günümüz teknolojisiyle birlikte ortaya çıkan yeni nesil malzemeler ve karmaşık yapılar, klasik modellerin sınırlarını zorlamaktadır. Geleneksel modellerin temel varsayımları, çoğu zaman idealize edilmiş, doğrusal ve elastik malzemeler üzerine kuruludur. Bu durum, özellikle viskoelastik malzemeler, polimerler, kompozitler ve bazı biyolojik dokular gibi malzemelerin karmaşık davranışlarını açıklamada yetersiz kalmaktadır. Bu tür malzemeler, sadece anlık bir yüke karşılık vermekle kalmayıp, geçmiş yükleme geçmişlerine bağlı olarak "hafıza" özellikleri sergilerler. Yani, malzemenin mevcut deformasyonu veya gerilimi, yalnızca anlık yüklemeye değil, aynı zamanda geçmişteki yüklemelere de bağlıdır. Bu durum, tam sayılı türevlerle tam olarak açıklanamayan frekans bağımlılığı, uzun süreli gevşeme veya sünme gibi fenomenleri içerir. Benzer şekilde, mikro-yapılı veya fraktal geometriye sahip malzemelerin deformasyonunu modellemede de klasik yaklaşımlar, malzemenin iç yapısının karmaşıklığını yansıtamadığı için yetersiz kalabilmektedir.

İşte bu noktada, kesirli türev (fractional derivative) kavramı devreye girer. Kesirli türevler, tam sayılı türevlerin bir genellemesi olarak ortaya çıkmış olup, türev derecesinin bir tam sayı olmak zorunda olmaması özelliğine sahiptir. Bu matematiksel araçlar, sistemlerin hafıza ve genetik özelliklerini, enerji dağılımını ve karmaşık viskoelastik davranışları modellemede güçlü bir potansiyel sunmaktadır. Klasik türevler yerel bir noktadaki değişimi tanımlarken, kesirli türevler sistemin tüm geçmişini veya uzaysal dağılımını hesaba katan "küresel" bir etkiyi yansıtabilir. Bu özellik, fiziksel sistemlerin doğasında var olan karmaşıklığı ve dağıtılmış etkileri daha doğal bir şekilde modellemeye olanak tanır. Kesirli türevlerin mühendislikte ve fizikteki uygulamaları, kontrol sistemlerinden sinyal işlemeye, ısı transferinden akışkanlar mekaniğine kadar hızla genişlemektedir.

Bu yüksek lisans tezi, klasik elastik eğri teorilerinin sınırlılıklarını aşma ve daha gerçekçi modeller geliştirme hedefiyle, elastik eğri modellemesine kesirli türev operatörlerini dahil etmeyi amaçlamaktadır. Çalışmanın temel amacı, klasik varyasyonel prensipleri kesirli türev-

lere uyarlayarak kesirli türevli elastik eğri modellerini türetilmesine ve bu modellerin statik ile dinamik davranışlarının incelenmesinin yolunu açmaktır. Özellikle, kesirli türev derecesinin eğrinin şekli, deformasyon özellikleri ve enerji dağılımı üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde analiz edilerek, bu yeni modellerin fiziksel sistemlerin modellemedeki üstünlüklerinin ortaya çıkmasını sağlayacaktır.

Tezin yapısal olarak ilk bölümünde, kesirli türev kavramları, farklı tanımları (Riemann-Liouville ve Caputo gibi) ve bunların temel matematiksel özellikleri tanıtılacaktır. İkinci bölümde, klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve elastik sistemlerin varyasyonel prensip yoluyla modellenmesi, bu tezin temelini oluşturacak klasik yaklaşımları sağlamlaştırmak amacıyla detaylıca ele alınacaktır. Üçüncü ve dördüncü bölümde, tezin ana katkısını oluşturan, potansiyel enerji fonksiyonundaki klasik türevleri kesirli türevlerle ikame ederek elde edilen kesirli türevli potansiyel enerji fonksiyonlarının ve bunlardan türetilen genelleştirilmiş Euler-Lagrange denklemlerinin formülasyonuna ayrılacaktır. Sonuç bölümünde ise tezin bulguları özetlenecek, çıkarımlar yapılacak ve gelecekteki çalışmalar için potansiyel araştırma alanları ve öneriler sunulacaktır.

Bu çalışma, kesirli türevlerin mekanik sistemlerin modellenmesindeki potansiyelini vurgulayarak, matematik, mühendislik ve malzeme bilimi alanındaki araştırmacılara, özellikle yeni nesil malzemelerin ve karmaşık yapıların modellenmesi konusunda, bir perspektif sunmayı hedeflemektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde kesirli türev ve elastik eğrilerle ilgili literatür özeti vereceğiz. Ayrıca, klasik elastik eğri teorilerinden, kesirli türevin gelişimi ve özelliklerinden bahsedeceğiz.

2.1. Literatür Taraması

Elastik eğrilerin modellenmesi ve kesirli türevlerin mühendislik uygulamaları üzerine yapılan literatür taraması, bu tezin temelini oluşturan iki ana araştırma alanını kapsamaktadır. Bu bölümde, klasik elastik eğri teorilerinden başlayarak, kesirli türev kavramının gelişimine ve her iki alanın kesişimindeki güncel çalışmalara kadar uzanan önemli yayınlar incelenecektir.

2.1.1. Klasik elastik eğri teorileri

Elastik eğrilerin davranışı, mühendislik bilimlerinde yüzyıllardır araştırılan bir konudur. Leonhard Euler ve Daniel Bernoulli'nin 18. yüzyıldaki çalışmaları, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin temelini atmış ve ince, uzun kirişlerin eğilme davranışını açıklayan ilk matematiksel modeli sunmuştur. Bu teori, kirişin kesitinin eğilme sırasında düz ve kesite dik kaldığı gibi basitleştirici varsayımlara dayanır ve statik yükler altındaki küçük deformasyonlar için oldukça başarılıdır. Daha sonra Gustav Kirchhoff tarafından geliştirilen Kirchhoff plak teorisi, Euler-Bernoulli teorisini iki boyuta genişleterek ince plakaların eğilme davranışını ele almıştır (Kirchhoff, 1859). Bu klasik teoriler, köprü, bina ve makine tasarımı gibi birçok geleneksel mühendislik uygulamasında temel referans noktası olmaya devam etmektedir.

Varyasyonel prensipler, özellikle Euler-Lagrange denklemleri, elastik sistemlerin denge denklemlerini türetmede güçlü bir araç sağlamıştır. Lagrange ve Hamilton'ın çalışmalarıyla geliştirilen bu prensipler, bir sistemin potansiyel enerjisini veya eylemini minimize eden konfigürasyonları belirlemeye olanak tanır (Goldstein ve Safko, 2002). Elastik eğriler için, potansiyel enerji fonksiyonelinin minimizasyonu, Euler-Bernoulli denklemlerinin varyasyonel yoldan elde edilmesini mümkün kılmıştır (Meirovitch, 2001). Bu varyasyonel yaklaşım, karmaşık geometrilere ve yükleme koşullarına sahip sistemlerin analizinde analitik çözümler sunmasa da, nümerik yöntemler için sağlam bir temel oluşturmuştur.

2.1.2. Kesirli türev kavramının gelişimi ve özellikleri

Kesirli türev kavramı, ilk olarak 17. yüzyılda Leibniz ve L'Hopital arasındaki yazışmalarda ortaya atılmış, ancak matematiksel olarak ciddi bir şekilde incelenmesi 19. yüzyılda Liouville, Riemann ve Grünwald gibi matematikçilerle başlamıştır (Ross, 1977), (Podlubny, 1999). Bu erken dönem çalışmalar, kesirli türevler ve integraller için çeşitli tanımlar sunmuştur. Günümüzde en yaygın kullanılan tanımlar arasında Riemann-Liouville ve Caputo

kesirli türevleri yer almaktadır (Kilbas, Srivastava, ve Trujillo, 2006). Riemann-Liouville tanımını, daha çok matematiksel teorik çalışmalarda tercih edilirken, Caputo tanımı başlangıç koşullarının klasik anlamda ifade edilebilmesi nedeniyle mühendislik uygulamalarında daha popülerdir (Caputo, 1967).

Kesirli türevlerin fiziksel ve mühendislik bilimlerindeki potansiyeli, 20. yüzyılın sonlarından itibaren daha fazla dikkat çekmiştir. Özellikle **viskoelastisite** alanında, kesirli türevler, malzemenin geçmiş deformasyonlarına bağlı olarak gösterdiği "hafıza" etkisini modellemede etkili bir araç olarak kabul edilmiştir (Bagley ve Torvik, 1983). Malzemelerin sünme ve gevşeme davranışlarının klasik viskoelastik modellerle açıklanamayan yönlerini, kesirli türev modelleri daha doğru bir şekilde yansıtabilmiştir. Ayrıca, anormal difüzyon, kontrol sistemleri, sinyal işleme, finans ve biyoloji gibi birçok farklı alanda kesirli türevlerin uygulamaları araştırılmaktadır (Tarasov, 2010; Hilfer, 2000).

2.1.3. Kesirli türevli elastik eğriler üzerine yapılan çalışmalar

Klasik elastik eğri teorileri ile kesirli türev kavramının birleşimi, son yıllarda artan bir ilgi odağı olmuştur. Bu alandaki çalışmalar, genellikle klasik kiriş veya plak denklemlerindeki tam sayılı türevleri kesirli türevlerle değiştirme ve bu genelleştirilmiş modellerin davranışlarını inceleme üzerine odaklanmaktadır.

Carpinteri ve Mainardi gibi araştırmacılar, fraktal ortamların mekaniği ve viskoelastiklik bağlamında kesirli türevlerin kullanımına öncülük etmişlerdir. Onlar, kesirli türevleri kullanarak daha karmaşık malzeme davranışlarını açıklayan yeni konstitütif ilişkiler geliştirmişlerdir (Carpinteri ve Mainardi, 1997). Agrawal, kesirli türevli varyasyonel prensipleri ve bunların Euler-Lagrange denklemlerine uygulanmasını incelemişlerdir. Bu çalışmalar, elastik eğrilerin kesirli türevli modellerinin türetilmesi için matematiksel çerçeveyi sağlamıştır (Agrawal, 2002).

Bazı çalışmalar, kesirli türevli Euler-Bernoulli kirişlerinin statik eğilme davranışını incelemiştir. Örneğin, kesirli türev derecesinin kirişin sehim profili ve uç tepkileri üzerindeki etkisi araştırılmıştır (Atanacković, Pilipović, Stanković, ve Zorica, 2014). Bu modeller, malzemenin iç sürtünme veya mikro-yapısal etkilerinin klasik modellerle açıklanamayan yönlerini modellemede potansiyel göstermiştir. Diğer çalışmalar ise kesirli türevli kirişlerin titreşim analizi üzerine yoğunlaşmıştır. Kesirli türevlerin sönümleme özelliklerini ve doğal frekanslar üzerindeki etkisini inceleyen bu çalışmalar, viskoelastik kirişlerin dinamik tepkilerini daha doğru tahmin etmeyi hedeflemiştir.

Nümerik çözüm yöntemleri de kesirli türevli elastik eğri problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynamaktadır. Sonlu farklar yöntemleri ve sonlu elemanlar yöntemleri, kesirli türevli

diferansiyel denklemleri çözmek için uyarlanmıştır (Diethelm, 2010). Bu nümerik yaklaşımlar, analitik çözümü zor veya imkansız olan karmaşık kesirli türevli elastik eğri problemlerinin incelenmesine olanak sağlamıştır.

Bu literatür taraması, kesirli türevli elastik eğriler alanının hala gelişim aşamasında olduğunu ve malzeme bilimi, mühendislik ve matematik arasındaki kesişim noktasında önemli bir araştırma alanı sunduğunu göstermektedir. Bu tez, mevcut literatüre katkıda bulunarak, kesirli türevli elastik eğri modellerinin türetilmesini, analitik ve nümerik çözümlerini ve davranışsal analizlerini daha detaylı bir şekilde incelemeyi hedeflemektedir.

2.2. Kesirli Türev Kavramları ve Özellikleri

Matematik ve fen bilimlerinde türev ve integral kavramları, değişim oranlarını ve birikimleri nicel olarak ifade etmemizi sağlayan temel araçlardır. Klasik (tam sayılı) türevler, bir fonksiyonun belirli bir noktadaki anlık değişim oranını veya eğimini tanımlar. Örneğin, bir nesnenin konumunun birinci türevi hızını, ikinci türevi ise ivmesini verir. İntegraller ise bir fonksiyonun belirli bir aralıktaki toplam birikimini veya alanını hesaplar. Bu kavramlar, Newton fiziğinden mühendislik tasarımına, ekonomiden biyolojiye kadar sayısız alanda devrim niteliğinde başarılar sağlamıştır.

Ancak, doğadaki ve mühendislik sistemlerindeki bazı karmaşık fenomenler, tam sayılı türevlerle tam olarak açıklanamayan veya modellenebilecekten daha basit yaklaşımlar gerektiren özellikler sergileyebilir. Örneğin, viskoelastik malzemeler (polimerler, biyolojik dokular gibi), bir kuvvete anlık olarak tepki vermek yerine, uygulanan kuvvetin geçmişine bağlı olarak bir "hafıza" etkisi gösterirler. Malzemenin deformasyonu, yalnızca o anki kuvvete değil, aynı zamanda kuvvetin ne kadar süredir uygulandığına ve nasıl değiştiğine de bağlıdır. Klasik türevler, bu tür hafıza etkilerini doğrudan modellemede yetersiz kalır.

Aynı şekilde, fraktal yapılar veya anormal difüzyon gibi süreçler de tam sayılı türevlerle modellenirken zorluklar yaşanabilir. Bu tür sistemler, yerel etkileşimlerin ötesinde, sistemin tüm geçmişini veya uzaysal dağılımını içeren "küresel" bir bağımlılık sergiler. İşte tam da bu noktada, kesirli türev kavramı devreye girer. Kesirli türevler, türev ve integral kavramlarını tam sayı olmayan (rasyonel veya irrasyonel) derecelere genişleterek, sistemlerin hafıza, genetik ve fraktal özelliklerini daha doğal ve doğru bir şekilde modellemeye olanak tanır. Klasik türevler, bir değişimin yalnızca "anlık" durumunu yansıtırken, kesirli türevler geçmişin veya geniş bir alanın etkisini de denkleme katarak daha zengin bir sistem davranışı sunar. Bu genişleme, mekanikten elektriğe, biyolojiden finansal modellemeye kadar birçok alanda yeni ufuklar açmaktadır.

2.3. Kesirli Kalkülüsün Özel Fonksiyonları

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılan özel fonksiyonlara ilişkin temel teoriler sunulmaktadır. Burada, gama ve beta fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonu hakkında bazı bilgiler verilmektedir; bu fonksiyonlar, keyfi mertebeden türev alma teorisi ve kesirli diferansiyel denklemler teorisinde en önemli rol oynar. Aşağıdaki temel tanım ve teoremler için (Podlubny, 1999; Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006; Tarasov, 2010; Carpinteri ve Mainardi, 1997; Atanackovic, Pilipovic, Stankovic ve Zorica, 2014) kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.4. Gama Fonksiyonu

Kuşkusuz, kesirli kalkülüsün temel fonksiyonlarından biri, faktöriyeli genelleştiren ve n 'nin tamsayı olmayan ve hatta karmaşık değerler almasına olanak tanıyan Euler'in gama fonksiyonu $\Gamma(z)$ fonksiyonudur.

Bu bölümde, bu çalışmanın diğer kısımları için önemli olan gama fonksiyonuna ilişkin bazı sonuçları hatırlatacağız.

2.4.1. Gama fonksiyonunun tanımı

Gama fonksiyonu $\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1)$$

integrali ile tanımlanır. Bu integral, karmaşık düzlemin sağ yarısında, yani $\text{Re}(z) > 0$ için yakınsar.

2.4.2. Gama fonksiyonunun bazı özellikleri

Gama fonksiyonunun temel özelliklerinden biri, aşağıdaki fonksiyonel denklemi sağlamasıdır:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2)$$

Bu, parçalı entegrasyon ile kolayca kanıtlanabilir:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (3)$$

Açıkça, $\Gamma(1) = 1$ 'dir ve (2) kullanılarak $z = 1, 2, 3, \dots$ için şu sonuçlar elde edilir:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

2.5. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyon e^z , tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rol oynar. Şimdi (Bateman ve Bateman Manuscript Project., 1953)'te belirtildiği üzere, tek parametrelili genelleştirmesi olan

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (4)$$

şeklindeki fonksiyon G. M. Mittag-Leffler tarafından tanıtılmış ve A. Wiman tarafından da incelenmiştir (Mittag-Leffler, 1903, 1904, 1905; Wiman, 1905b,a).

Kesirli kalkülüsde çok önemli bir rol oynayan iki parametrelili Mittag-Leffler tipi fonksiyon, aslında Agarwal tarafından tanıtılmıştır (Agarwal, 1953). Bu fonksiyon için bir dizi ilişki, Humbert ve Agarwal tarafından Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak elde edilmiştir (Humbert ve Agarwal, 1953). Bu fonksiyon, Agarwal fonksiyonu olarak adlandırılabilir. Ancak, Humbert ve Agarwal tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ile aynı notasyonunu kullandıklarından dolayı bu fonksiyon, iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılmıştır. Biz, özel fonksiyonlar üzerine temel el kitabı (Bateman ve Bateman Manuscript Project., 1953)'te kullanılan adı ve notasyonu kullanacağız. Agarwal ile aynı notasyon kullanılmasına rağmen, orada verilen tanım, Agarwal'ın tanımından sabit olmayan bir faktörle farklılık gösterir. Bu bölümün bazı kısımları, M. M. Dzhrbashyan'ın sonuçlarına dayanmaktadır (Dzhrbashyan, 1966).

2.5.1. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ve diğer fonksiyonlarla ilişkisi

İki parametrelili Mittag-Leffler tipi fonksiyon, aşağıdaki seri açılımı ile tanımlanır (Bateman ve Bateman Manuscript Project., 1953):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0). \quad (5)$$

(5) tanımından,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (6)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (7)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (8)$$

sonuçları elde edilir ve genel olarak:

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (9)$$

şeklindedir.

Hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları da Mittag-Leffler fonksiyonunun (5) özel durumları olarak,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (10)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (11)$$

şeklinde elde edilir.

Hiperbolik sinüs ve kosinüsün genellemeleri olan n -mertebeli hiperbolik fonksiyonlar (Bateman ve Bateman Manuscript Project., 1953) da Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir:

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

ve sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının genellemeleri olan n -mertebeli trigonometrik fonksiyonlar:

$$k_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

şeklindedir. Ayrıca:

$$E_{1/2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad (14)$$

eşitliği yazılabilir (Abramowitz ve Stegun, 1965). Burada $\operatorname{erfc}(z)$ fonksiyonu,

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (15)$$

şeklinde hata fonksiyonu tamamlayıcısı olarak tanımlanır. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunda $\beta = 1$ alınırsa

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z). \quad (16)$$

tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir.

Rasyonel mertebeli diferansiyel denklemleri çözmek için tanıtılan $\mathcal{E}_t(v, a)$ fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonunun (5) özel bir durumudur:

$$\mathcal{E}_t(v, a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(v + k + 1)} = t^v E_{1,v+1}(at). \quad (17)$$

Yu. N. Rabotnov'un $\Xi_{\alpha}(\beta, t)$ fonksiyonu da Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumudur (Rabotnov, 1969):

$$\Xi_{\alpha}(\beta, t) = t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} = t^{\alpha} E_{\alpha+1, \alpha+1}(\beta t^{\alpha+1}). \quad (18)$$

(17) ve (18) ilişkilerinden, Miller-Ross fonksiyonu ve Rabotnov fonksiyonunun özelliklerinin, iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun (5) özelliklerinden türetilileceği sonu-

cuna varılır.

2.5.2. Laplace dönüşümü

Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde etmek için, iki parametrelili fonksiyonun tanımını kullanalım:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

$z = -\lambda t^\alpha$ alırsak, şu fonksiyonu tanımlayabiliriz:

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (19)$$

Bu fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesaplayalım. Bilindiği üzere, şu Laplace dönüşümü geçerlidir:

$$\mathcal{L}\{t^{\gamma-1}\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\gamma-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma)}{s^\gamma}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma) > 0). \quad (20)$$

Dolayısıyla, her bir terimin Laplace dönüşümünü alırsak:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}}.$$

Böylece, (19) fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{s^{\alpha k + \beta}}.$$

Bu, şu geometrik seri ile ifade edilebilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{s^\alpha}\right)^k \frac{1}{s^\beta} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1.$$

Bu nedenle, Laplace dönüşümü şu şekilde olur:

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) \right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \left(\operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha} \right). \quad (21)$$

Bu formül, $\alpha, \beta > 0$ ve λ karmaşık bir sayı için geçerlidir. Özel durumlar için, örneğin $\alpha = 1, \beta = 1$:

$$\mathcal{L} \left\{ e^{-\lambda t} \right\} = \frac{1}{s + \lambda},$$

ki bu, (21) ile uyumludur, çünkü $E_{1,1}(-\lambda t) = e^{-\lambda t}$.

2.5.3. Türevler

Mittag-Leffler fonksiyonunun türevlerini hesaplamak için, seri açılımını kullanalım:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Bu fonksiyonun z 'ye göre türevini alırsak:

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) z^k}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)}. \quad (22)$$

Bu seri, α, β parametrelerine bağlı olarak başka bir Mittag-Leffler fonksiyonu ile ifade edilemez. Ancak, $\beta = 1$ için özel bir durum elde edilir:

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) z^k}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} = \frac{1}{\alpha z} \left[E_{\alpha,\alpha}(z) - \frac{1}{\Gamma(1)} \right] = \frac{1}{\alpha z} [E_{\alpha,\alpha}(z) - 1]. \quad (23)$$

Genel olarak, n -inci türev için:

$$\frac{d^n}{dz^n} E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1) z^{k-n}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha(k+n) + \beta)}. \quad (24)$$

Bu, karmaşık bir seri olup genellikle başka bir Mittag-Leffler fonksiyonu ile basitçe ifade

edilemez.

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde temel bir rol oynar. Örneğin, şu kesirli diferansiyel denklemi ele alalım:

$$D^\alpha y(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1, \quad (25)$$

burada D^α , Caputo kesirli türevidir. Bu denklemin çözümü:

$$y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha). \quad (26)$$

Daha genel olarak, şu denklemin çözümü:

$$D^\alpha y(t) = \lambda y(t) + f(t), \quad y(0) = y_0, \quad (27)$$

Laplace dönüşümü kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t - \tau)^\alpha) f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Bu, Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli kalkülüsde neden bu kadar önemli olduğunu gösterir; bu fonksiyon, klasik üstel fonksiyonun kesirli mertebeli denklemlerdeki karşılığıdır.

2.6. Wright Fonksiyonu

Kesirli kalkülüsde önemli bir rol oynayan bir diğer özel fonksiyon, E. M. Wright tarafından tanımlanan ve şu şekilde tanımlanan Wright fonksiyonudur (Wright, 1933, 1934, 1935):

$$W_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > -1, \quad \beta \in \mathbb{C}). \quad (29)$$

Bu fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyonunun bir genellemesi olarak düşünülebilir ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde sıkça kullanılır. Wright fonksiyonu, özellikle kesirli mertebeli operatörlerin integral temsillerinde ve asimptotik analizlerde önemli bir yere sahiptir.

2.6.1. Tanım ve temel özellikler

Wright fonksiyonu, yukarıdaki seri açılımı ile tanımlanır:

$$W_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > -1, \quad \beta \in \mathbb{C}). \quad (30)$$

Bu serinin yakınsaması, $\alpha > -1$ koşulu altında tüm karmaşık düzlemde ($z \in \mathbb{C}$) sağlanır. Seri, $\alpha > -1$ olduğunda mutlak ve düzgün yakınsar, bu da Wright fonksiyonunun tüm z için analitik bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Wright fonksiyonunun bazı özel durumları, diğer bilinen fonksiyonlarla ilişkilendirilebilir. Örneğin:

$$W_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2} = I_0(2\sqrt{z}), \quad (31)$$

burada $I_0(z)$, sıfırıncı mertebeden modifiye Bessel fonksiyonudur. Benzer şekilde:

$$W_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!(k+1)!} = \frac{I_1(2\sqrt{z})}{\sqrt{z}}, \quad (32)$$

burada $I_1(z)$, birinci mertebeden modifiye Bessel fonksiyonudur.

Wright fonksiyonu ile Mittag-Leffler fonksiyonu arasında şu ilişki kurulabilir:

$$W_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} E_{\alpha,\beta}(z), \quad (\alpha > -1, \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots), \quad (33)$$

ancak bu ilişki, $\Gamma(\beta)$ 'nin sıfır olduğu durumlarda dikkatle ele alınmalıdır.

2.6.2. Laplace dönüşümü

Wright fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde etmek için, şu fonksiyonu tanımlayalım:

$$t^{\beta-1} W_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (34)$$

Bu fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesaplayalım. Bilindiği üzere:

$$\mathcal{L}\{t^{\gamma-1}\} = \frac{\Gamma(\gamma)}{s^\gamma}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma) > 0). \quad (35)$$

Dolayısıyla, her bir terimin Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}}.$$

Böylece:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} W_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k! s^{\alpha k + \beta}}.$$

Bu seri, Wright fonksiyonunun kendisi cinsinden ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} W_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} = \frac{1}{s^\beta} W_{\alpha,\beta}\left(-\frac{\lambda}{s^\alpha}\right), \quad (\operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha}). \quad (36)$$

Bu formül, Wright fonksiyonunun Laplace dönüşümünün kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde neden önemli olduğunu gösterir.

Wright fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir rol oynar. Özellikle, kesirli difüzyon denklemleri gibi problemlerde, Wright fonksiyonu temel çözümlerin bir parçası olarak ortaya çıkar. Örneğin, şu kesirli difüzyon denklemini ele alalım:

$$D^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \delta(x), \quad (37)$$

burada D^α , Caputo kesirli türevidir ve $\delta(x)$, Dirac delta fonksiyonudur. Bu denklemin çözümü, Wright fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir:

$$u(x,t) = \frac{1}{2t^{\alpha/2}} W_{-\alpha/2, 1-\alpha/2}\left(-\frac{|x|}{t^{\alpha/2}}\right). \quad (38)$$

Bu çözüm, Wright fonksiyonunun kesirli difüzyon süreçlerindeki önemini gösterir; fonksiyon, klasik Gaussian dağılımının kesirli mertebeli denklemlerdeki karşılığıdır.

2.7. Kesirli Türev Tanımları

Kesirli türev ve integral için literatürde birçok farklı tanım bulunmaktadır. Her tanımın kendine özgü matematiksel özellikleri, avantajları ve dezavantajları vardır. Bu bölümde, en yaygın kullanılan tanımlar olan Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerini detaylıca inceleyecek ve diğer popüler tanımlara kısaca değineceğiz.

2.7.1. Riemann-Liouville kesirli integrali ve türevi

Riemann-Liouville kesirli integrali, kesirli türevlerin temelini oluşturan önemli bir kavramdır. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ dereceli Riemann-Liouville kesirli integrali $I_a^\alpha f(t)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Burada $\Gamma(\alpha)$, Gamma fonksiyonunu temsil eder. Bu tanım, klasik integralin bir genellemesidir ve $\alpha = 1$ alındığında bilindik integrali verir.

Riemann-Liouville kesirli türevi ise kesirli integralden türetilir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ dereceli Riemann-Liouville kesirli türevi $D_a^\alpha f(t)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I_a^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Burada $n - 1 < \alpha \leq n$ olacak şekilde n en küçük tam sayıdır.

Matematiksel olarak köklü bir geçmişi vardır ve teorik çalışmalarda sıklıkla kullanılır. Matematiksel olarak tutarlı bir integral ve türev çifti oluşturur. Bu tanım, başlangıç koşullarının fiziksel anlamının yorumlanmasında zorluklar yaratabilir. Klasik tam sayılı türevlerde olduğu gibi, fonksiyonun kendisinin ve ilk $n - 1$ türevinin $t = a$ noktasındaki başlangıç değerleri basitçe kullanılamaz. Bu durum, fiziksel sistemlerin başlangıç durumlarını modellemede sorunlara yol açmaktadır.

2.7.2. Caputo kesirli türevi

Caputo kesirli türevi, özellikle fiziksel ve mühendislik uygulamalarında Riemann-Liouville tanımının getirdiği başlangıç koşulu zorluklarını aşmak için geliştirilmiştir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ dereceli Caputo kesirli türevi ${}^C D_a^\alpha f(t)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi

tanımlanır:

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

Burada $n-1 < \alpha \leq n$ olacak şekilde n en küçük tam sayıdır ve $f^{(n)}(\tau)$ fonksiyonun n . dereceden türevini ifade eder.

En büyük avantajı, başlangıç koşullarının klasik anlamda, yani fonksiyonun ve tam sayılı türevlerinin başlangıç noktası a 'daki değerleri cinsinden formüle edilebilmesidir. Bu, fiziksel sistemlerin (örneğin, bir kirişin başlangıçtaki konumu ve hızı) modellenmesinde büyük kolaylık sağlar. Fiziksel sistemlerin analizinde genellikle tercih edilir.

Literatürde farklı kesirli türev tanımları bulunmaktadır. Bunların bazıları, Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi, Weyl Kesirli Türevi ve Atangana-Baleanu Kesirli Türevidir.

2.8. Temel Özellikler

Kesirli türevler, klasik türevlerin sahip olduğu bazı temel özelliklerin birçoğunu korurken, bazı açılardan farklılıklar gösterirler. Bu özelliklerin anlaşılması, kesirli türevli denklemlerin çözümü ve analizi için kritik öneme sahiptir.

- Hem Riemann-Liouville hem de Caputo kesirli türevleri doğrusallık özelliğini taşır. Yani, $D^\alpha[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 D^\alpha f(t) + c_2 D^\alpha g(t)$ ifadesi geçerlidir, burada c_1, c_2 sabitlerdir.
- Klasik çarpım türevi kuralı (Leibniz kuralı), kesirli türevler için de genelleştirilmiştir. Ancak, formül biraz daha karmaşıktır ve Binom açılımının genelleştirilmiş bir versiyonunu içerir:

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(t) D^{\alpha-k} g(t)$$

Bu kural, klasik türevler için geçerli olan sınırlı sayıda terim yerine, sonsuz bir seri içerebilir.

- Kesirli türevlerin Laplace dönüşümü, kesirli diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmek için önemli bir araçtır.

•

$$L\{{}^C D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0^+)$$

Burada $F(s)$ fonksiyonun Laplace dönüşümüdür ve $n - 1 < \alpha \leq n$. Caputo tanımının avantajı, başlangıç koşullarının (yani $f^{(k)}(0^+)$) doğrudan klasik türevler cinsinden ifade edilebilmesidir.

- Riemann-Liouville Türevi için,

$$L\{D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_0^{\alpha-1-k} f(t)]|_{t=0^+}$$

Bu ifade, başlangıç koşullarının kendilerinin kesirli türevleri cinsinden verilmesini gerektirir, bu da fiziksel yorumlamayı zorlaştırır.

- Kesirli türevli denklemlerin çözümünde, klasik üstel fonksiyonun genelleştirilmiş hali olan **Mittag-Leffler fonksiyonu** $E_\alpha(z)$ sıkça karşımıza çıkar. Bu fonksiyon, kesirli diferansiyel denklemlerin özfonksiyonudur ve birçok kesirli denklemin analitik çözümünde önemli bir rol oynar.
- Klasik türevlerde bir sabitin türevi sıfırdır. Ancak Riemann-Liouville kesirli türevinde bir sabitin kesirli türevi genellikle sıfır değildir, bu da klasik türevden önemli bir farktır. Caputo kesirli türevinde ise bir sabitin kesirli türevi sıfırdır, bu da onu fiziksel sistemler için daha uygun kılar.

2.9. Fiziksel Yorumlar: Hafıza ve Fraktal Davranışların Modellenmesi

Kesirli türevlerin mühendislik ve fizik alanlarındaki cazibesi, onların belirli fiziksel fenomenleri açıklamadaki doğal yeteneklerinden kaynaklanmaktadır. Bu yetenekler, genellikle hafıza etkisi ve fraktal davranış kavramlarıyla ilişkilendirilir.

2.9.1. Hafıza etkisi (non-yerel etki)

Klasik (tam sayılı) türevler, bir fonksiyonun veya sistemin belirli bir anındaki veya noktadaki yerel değişimini tanımlar. Yani, bir sistemin gelecekteki davranışı veya bir noktadaki eğimi, sadece o anki durumuna bağlıdır (Markov özelliği). Ancak birçok gerçek dünya sistemi, geçmiş yüklemelere, uyarılara veya durumlara bağlı olarak bir "hafıza" sergiler. Bu, bir sistemin mevcut durumunun, zaman içindeki tüm geçmiş durumlarının birikimli etkisiyle belirlendiği anlamına gelir.

Viskoelastik malzemeler, bu hafıza etkisinin en iyi örneklerindendir. Bir polimerin deformasyonu, uygulanan kuvvetin sadece anlık büyüklüğüne değil, aynı zamanda ne kadar süredir uygulandığına ve kuvvetin geçmişteki değişim hızına da bağlıdır. Kesirli türevler, integrandlarında $(t - \tau)^{\alpha-1}$ gibi bir ağırlık fonksiyonu içerdiğinden, τ zamanından t zamanına kadar

olan tüm geçmişin belirli bir ağırlıkla hesaplamaya dahil edilmesini sağlar. Bu ağırlık fonksiyonu, geçmişteki olayların mevcut duruma olan etkisinin zamanla nasıl azaldığını (veya bazen arttığını) doğal bir şekilde modelleyebilir. Dolayısıyla, kesirli türevler, klasik modellerin genellikle lineer yaylar ve damperler gibi basit elemanlarla modellediği viskoelastik malzemelerin karmaşık hafıza davranışını daha doğru ve kompakt bir matematiksel formda ifade etme olanağı sunar.

2.9.2. Fraktal davranışlar ve anormal difüzyon

Kesirli türevler, aynı zamanda fraktal ve karmaşık sistemlerin modellenmesinde de kullanışlıdır. Fraktallar, kendilerine benzeyen, yani farklı ölçeklerde de aynı paterni tekrarlayan geometrik yapılardır. Doğa, birçok fraktal yapıya ev sahipliği yapar: ağaç dallarından, nehir ağlarına, akciğer yapısından dağ manzaralarına kadar. Malzeme biliminde ise gözenekli yapılar, çatlak yüzeyleri veya mikro-yapılı kompozitler gibi malzemelerin iç yapıları fraktal özellikler sergileyebilir.

Kesirli türevler, bu tür fraktal ortamlar üzerindeki süreçleri (örneğin difüzyon) modellemede etkili olabilir. Klasik difüzyon, parçacıkların rastgele hareket etmesiyle belirli bir dağılımı takip eder. Ancak anormal difüzyon olarak bilinen süreçlerde, parçacıklar daha hızlı (super-difüzyon) veya daha yavaş (sub-difüzyon) hareket edebilir. Bu anormallikler genellikle ortamın fraktal doğasından veya uzun menzilli etkileşimlerden kaynaklanır. Kesirli türevler, bu tür sistemlerdeki "sıçrama uzunluklarının" veya "bekleme sürelerinin" dağılımını daha gerçekçi bir şekilde yansıtabilir ve böylece anormal difüzyon gibi fenomenleri açıklamak için güçlü bir matematiksel çerçeve sunar (Tarasov, 2010). Bu sayede, kesirli türevli modeller, fraktal geometrinin veya karmaşık mikro yapıların mekanik davranış üzerindeki etkilerini dikkate alarak klasik modellere kıyasla daha doğru tahminler yapabilir.

Özetle, kesirli türevler, klasik türevlerin yerel etkileşimlere odaklanmasının ötesine geçerek, bir sistemin geçmişe bağımlılığını (hafıza) ve karmaşık, fraktal yapılarla olan ilişkisini modellemede benzersiz bir esneklik sunar. Bu özellikler, bu tezin odaklandığı elastik eğrilerin daha gerçekçi ve karmaşık ortamlarda modellenmesi için kesirli türevlerin neden önemli bir araç olduğunu açıklar.

2.10. Kesirli Türevli Eğriler ve Frenet Elemanları

2.10.1. Diferansiyel geometri ve kesirli eğrilerin önemi

Diferansiyel geometri, eğrilerin, yüzeylerin ve daha genel manifoldların geometrik özelliklerini kalkülüs araçlarını kullanarak inceleyen bir matematik dalıdır. Eğriler, bu alanın temel yapı taşlarından biridir ve bir uzayda bir noktanın hareketini veya bir nesnenin şeklini tanımlamak için kullanılır. Bir eğrinin konumu, teğet, normal ve binormal vektörleri gibi Frenet

elemanları ve eğrilik, burulma gibi skaler invariantları ile tam olarak karakterize edilebilir. Bu klasik araçlar, mekanik, robotik, bilgisayar grafikleri ve fizik gibi birçok mühendislik ve bilim alanında yaygın olarak kullanılmaktadır (Do Carmo, 1976; Struik, 1988; Gray, Ab-bena, ve Salamon, 1998).

Ancak, doğal sistemlerde ve mühendislik problemlerinde karşılaşılan bazı karmaşık eğriler, klasik (tam sayılı) türevlere dayalı modellerle tam olarak anlaşılamayan veya modellenemeyen özellikler sergileyebilir. Özellikle fraktal eğriler, polimer zincirleri, biyolojik filamentler veya anormal difüzyon yollarını takip eden hareketler gibi yapılar, yerel bir türevle tanımlanamayan "hafıza" veya "non-yerel" (non-local) özellikler sergileyebilir. Bu tür eğrilerin davranışı, yalnızca anlık değişim oranına değil, aynı zamanda geçmişteki konfigürasyonlarına veya daha geniş bir uzaysal bölgedeki özelliklerine de bağlı olabilir.

İşte bu noktada kesirli türev kavramları devreye girer. Kesirli türevler, türev operatörünü tam sayı olmayan derecelere genişleterek, bu tür non-yerel ve hafızaya sahip sistemleri modellemede doğal bir çerçeve sunar (Podlubny, 1999). Bu bölümde, diferansiyel geometriye klasik bir giriş yapacak, Frenet elemanlarını ve formüllerini tanıttak ve ardından bu kavramları Caputo kesirli türevleri kullanarak genelleştireceğiz. Kesirli türevli Frenet elemanları, karmaşık eğrilerin geometrik özelliklerini, klasik yaklaşımların ötesine geçerek daha derinlemesine analiz etme potansiyeli taşımaktadır. Bu, özellikle malzeme bilimi, biyomekanik ve robotik gibi alanlarda yeni modelleme ve analiz fırsatları yaratabilir.

2.10.2. Eğri tanımı ve yay uzunluğu

Diferansiyel geometriye göre, üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ 'teki bir eğri, genellikle bir parametreye (çoğunlukla zaman t veya yay uzunluğu s) bağlı bir vektör fonksiyonu olarak tanımlanır.

Öklid uzayında regüler bir eğri, bir $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığından $\mathbb{R}^3$ 'e bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonudur, yani $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olarak yazılır. Eğrinin regüler olması demek, her $t \in I$ için türevinin $\alpha'(t) \neq 0$ olması demektir.

Bir eğrinin yay uzunluğu parametresi s , eğrinin uzunluğu boyunca bir noktadan başlangıç noktasına kadar olan mesafeyi ölçer. Bu parametre, eğrinin geometrik özelliklerini incelemek için tercih edilen bir parametredir, çünkü parametrizasyondan bağımsızdır. t parametresi ile verilen bir eğri için yay uzunluğu $s(t)$ şu şekilde tanımlanır:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

Burada $\|\alpha'(\tau)\| = \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}$ hız vektörünün büyüklüğüdür. Eğer eğri yay uzunluğu parametresi s ile verilmişse, yani $\alpha(s)$, o zaman hız vektörünün büyüklüğü,

$||\alpha'(s)|| = 1$. Bu durumda $\alpha'(s)$ vektörü birim teğet vektörüdür.

2.10.3. Frenet elemanları: teğet, normal, binormal vektörleri

Bir uzay eğrisinin her noktasında tanımlanabilen ve eğrinin yerel geometrisini karakterize eden üç ortogonal (birbirine dik) birim vektör alanından oluşan bir küme vardır. Bu küme Frenet Çatısı (Frenet Frame) olarak bilinir ve vektör alanları ve bunlara bağlı eğrilik fonksiyonları Frenet Elemanları olarak adlandırılır. Bir eğri yay uzunluğu parametresi s ile verildiğinde, bu elemanlar şu şekilde tanımlanır:

1. *Birim Teğet Vektör* ($T(s)$): Eğrinin her noktasındaki anlık yönünü gösterir ve hız vektörünün birim vektörüdür.

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$||T(s)|| = 1.$$

2. *Birim Normal Vektör* ($N(s)$): Eğrinin o noktadaki eğilme yönünü gösterir. Teğet vektörün yay uzunluğuna göre türevi, eğrilik vektörüdür ve normal vektör bu eğrilik vektörünün birim halidir.

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

Burada $\kappa(s)$ eğrilik fonksiyonudur ve $\kappa(s) = ||T'(s)||$ olarak tanımlanır. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ise $N(s) = \frac{T'(s)}{||T'(s)||}$, $||N(s)|| = 1$ ve $T(s) \perp N(s)$.

3. *Birim Binormal Vektör* ($B(s)$): Teğet ve normal vektörlerine dik olan üçüncü birim vektördür.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

$||B(s)|| = 1$ ve $T(s) \perp B(s)$, $N(s) \perp B(s)$. T, N, B vektörleri sağ-el kuralına göre bir ortonormal sistem oluşturur.

2.10.4. Frenet formülleri

Frenet elemanları arasındaki ilişkiler, Frenet Formülleri olarak bilinen diferansiyel denklemler sistemiyle ifade edilir. Bu formüller, eğrinin yerel geometrisini (eğrilik ve burulma) tanımlayan skaler invaryantları ortaya çıkarır.

1. $T'(s) = \kappa(s)N(s)$
2. $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$
3. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$

Burada: $\kappa(s)$ eğrilik fonksiyonu olup, eğrinin teğetinden ayrılmasının bir ölçüsünü verir.

$\kappa(s) \geq 0$. $\tau(s)$ burulma fonksiyonu olup, eğrinin oskülatör düzlemden (teğet ve normal vektörlerin oluşturduğu düzlem) ne kadar saptığını, yani uzayda ne kadar "burulduğunu" ölçer.

Bu formüller, bir başlangıç noktası ve başlangıç Frenet çatısı ile birlikte, bir eğriyi yay uzunluğu parametresiyle tam olarak tanımlamak için yeterlidir.

2.11. Kesirli Türevli Eğriler ve Kesirli Frenet Elemanları

Klasik Frenet çatısı, eğrinin anlık değişim oranlarına dayanırken, kesirli türevler eğrinin "hafızasını" veya "non-yerel" özelliklerini modele dahil etmemize olanak tanır. Burada, Caputo kesirli türevini kullanarak eğrinin geometrik özelliklerini genelleştireceğiz. Caputo türevi, başlangıç koşullarının fiziksel olarak yorumlanabilir olması nedeniyle mühendislik uygulamalarında daha avantajlıdır.

2.11.1. Caputo kesirli türevli eğri tanımı

Bir t parametresi ile verilen kesirli türevli eğri $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, bileşen fonksiyonları $x(t), y(t), z(t)$ 'nin kesirli türevlenebilir olduğu anlamına gelir. Burada α dereceli Caputo kesirli türevi ${}^C D^\alpha \alpha(t)$ şu şekilde tanımlanır:

$${}^C D^\alpha \alpha(t) = \left({}^C D^\alpha x(t), {}^C D^\alpha y(t), {}^C D^\alpha z(t) \right)$$

Burada $n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun α dereceli Caputo kesirli türevi:

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

Genellikle, eğrilerin diferansiyel geometrisinde birinci ve ikinci türevlerin rolü düşünüldüğünde, α için $0 < \alpha \leq 1$ ve $1 < \alpha \leq 2$ aralıkları önem kazanır.

2.11.2. Kesirli yay uzunluğu parametresi

Klasik yay uzunluğu parametresi, hız vektörünün büyüklüğünün integralidir. Kesirli türevli bir eğri için, bu kavramın genelleştirilmesi gereklidir. Kesirli yay uzunluğu parametresi s_α genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır (Samko, Kilbas, ve Marichev, 1993):

$$s_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \| {}^C D^\alpha \alpha(\tau) \| d\tau$$

Ancak, diferansiyel geometride olduğu gibi, α dereceli birim "hız" ile parametrelenmiş eğrilerle çalışmak daha kullanışlıdır. Yani, $\| {}^C D^\alpha \alpha(s_\alpha) \| = 1$ varsayımı yapılabilir. Bu, kesirli türevli eğrilerin geometrisini, klasik analogiye benzer bir şekilde incelememize olanak tanır. Bu kısımda, kesirli türevli eğriler için, yay uzunluğu parametresinin kesirli türev operatörü

ile ilişkisini şu şekilde düşüneceğiz: Parametremiz s olsun ve $\alpha(s)$ eğrisi için $\|{}^C D^\alpha \alpha(s)\| = 1$ gibi bir normalizasyon kullanılsın. Bu normalizasyon, eğrinin "kesirli hızı"nın birim olduğunu ifade eder.

2.11.3. Kesirli frenet elemanları

Caputo kesirli türevlerini kullanarak, Frenet elemanlarını genelleştirebiliriz. Buradaki temel fikir, klasik türevlerin yerini kesirli türevlerin almasıdır.

Kesirli Birim Teğet Vektör ($T_\alpha(s)$): Klasik teğet vektörün genelleşimi olarak, α dereceli Caputo türevini kullanırız.

$$T_\alpha(s) = {}^C D^\alpha \alpha(s)$$

Burada $\|T_\alpha(s)\| = 1$ olduğunu varsayıyoruz (yani eğri, bu kesirli türev "hızı" ile birim olarak parametrelenmiştir).

Kesirli Birim Normal Vektör ($N_\alpha(s)$): Klasik normal vektörün tanımına benzer şekilde, kesirli teğet vektörün α dereceli türevi kullanılır.

$${}^C D^\alpha T_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s)$$

Burada $\kappa_\alpha(s)$ **kesirli eğrilik** olarak adlandırılır ve $\kappa_\alpha(s) = \|{}^C D^\alpha T_\alpha(s)\|$ olarak tanımlanır. Eğer $\kappa_\alpha(s) \neq 0$ ise:

$$N_\alpha(s) = \frac{{}^C D^\alpha T_\alpha(s)}{\|{}^C D^\alpha T_\alpha(s)\|}$$

Kesirli Birim Binormal Vektör ($B_\alpha(s)$): Binormal vektör, yine klasik tanıma benzer şekilde kesirli teğet ve normal vektörlerinin vektörel çarpımı olarak tanımlanır.

$$B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)$$

2.11.4. Kesirli frenet formülleri

Kesirli Frenet elemanları arasındaki ilişkiler, klasik Frenet formüllerinin kesirli türevli genellemeleriyle ifade edilir. Bu formüller, eğrinin kesirli eğrilik ve kesirli burulma gibi kesirli skaler invaryantlarını ortaya çıkarır.

Farklı çalışmalar kesirli Frenet formüllerini farklı şekillerde türetmiştir. Burada, α dereceli Caputo türevlerini kullanarak elde edilen genel bir formu sunacağız (Atanackovic, Pilipovic, Stankovic, ve Zorica, 2014).

$${}^C D^\alpha T_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s)$$

Bu denklem, kesirli teğet vektörün kesirli türevinin, kesirli normal vektör ve kesirli eğrilik ile ilişkisini tanımlar. $\kappa_\alpha(s)$ kesirli eğriliktir.

$${}^C D^\alpha N_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)B_\alpha(s)$$

Bu denklem, kesirli normal vektörün kesirli türevinin, kesirli teğet, kesirli binormal ve kesirli burulma ile ilişkisini tanımlar. $\tau_\alpha(s)$ **kesirli burulma** olarak adlandırılır.

$${}^C D^\alpha B_\alpha(s) = -\tau_\alpha(s)N_\alpha(s)$$

Bu denklem, kesirli binormal vektörün kesirli türevinin, kesirli normal vektör ve kesirli burulma ile ilişkisini tanımlar.

Kesirli Eğrilik ve Burulma için İfadeler:

Bu formüllerden, kesirli eğrilik $\kappa_\alpha(s)$ ve kesirli burulma $\tau_\alpha(s)$ için ifadeler türetilebilir. Kesirli Eğrilik ($\kappa_\alpha(s)$):

$$\kappa_\alpha(s) = \|{}^C D^\alpha T_\alpha(s)\| = \|{}^C D^\alpha ({}^C D^\alpha \alpha(s))\| = \|{}^C D^{2\alpha} \alpha(s)\|$$

Bu ifade, eğrinin "kesirli ivmesinin" büyüklüğü olarak yorumlanabilir. $\alpha = 1$ durumunda, klasik eğriliğe dönüşür: $\kappa_1(s) = \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\|$.

Kesirli Burulma ($\tau_\alpha(s)$):

$$\tau_\alpha(s) = -N_\alpha(s) \cdot ({}^C D^\alpha B_\alpha(s))$$

şeklindedir.

Kesirli Türev Parametresinin Geometrik Anlama Etkisi:

$\alpha \rightarrow 1$ Durumu: α değeri 1'e yaklaştıkça, kesirli Frenet elemanları ve formülleri, klasik Frenet elemanlarına ve formüllerine yaklaşır. Bu, kesirli modellerin klasik geometrinin bir genellemesi olduğunu doğrular. Non-Yerel Etki: Kesirli türevlerin kullanılması, eğrinin her noktasındaki teğet, normal ve binormalin, sadece o noktadaki anlık değişimlere değil, aynı zamanda eğrinin geçmişindeki (veya daha geniş bir uzaysal bölgedeki) özelliklerine de bağlı olmasını sağlar. Bu, özellikle hafızaya sahip malzemelerden oluşan veya fraktal benzeri özellikler sergileyen eğrilerin geometrisini modellemek için önemlidir. Kesirli eğrilik, eğrinin non-yerel bir "eğilme" veya "dönme" oranını, kesirli burulma ise eğrinin non-yerel bir "uzayda bükülme" oranını temsil edebilir. Bu kavramlar, polimerlerin ve biyolojik filamentlerin karmaşık konfigürasyonlarını veya parçacıkların anormal hareket yörüngelerini analiz etmede yeni bakış açıları sunmaktadır.

Sonuç olarak, kesirli türevli Frenet formülasyonu, diferansiyel geometrinin uygulama alanlarını, hafızaya sahip ve non-yerel davranışlar sergileyen sistemleri içerecek şekilde genişletmektedir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Elastik eğriler ve varyasyonel prensiplerle ilgili bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Klasik Elastik Eğriler ve Varyasyonel Prensip

Varyasyonel kalkülüs, bir fonksiyonel olarak ifade edilen fiziksel veya matematiksel bir miktarın ekstremumunu (minimum, maksimum veya eyer noktası) bulmayı amaçlayan bir matematik dalıdır. Örneğin, bir parçacığın hareketini tanımlayan en kısa yol veya en az enerji prensibi, varyasyonel yöntemlerle çözülür. Bu bağlamda, Euler-Lagrange denklemi, bir fonksiyonelin ekstremumunu sağlayan fonksiyonları bulmak için temel bir araçtır (Gelfand ve Fomin, 2000; Weinstock, 1974).

Aşağıda, klasik Euler-Lagrange denkleminin türetimini ayrıntılı bir şekilde sunacağız. Bölüm 3.2, temel tanımlar ve teoremleri içermektedir. Bölüm 3.3, Euler-Lagrange denkleminin türetimini ara işlemlerle birlikte açıklayacağız.

3.2. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, Euler-Lagrange denkleminin türetimi için gerekli olan temel tanımlar ve teoremler sunulmaktadır.

3.1 Tanım (Fonksiyonel) Bir fonksiyonel, bir fonksiyonlar uzayından reel sayılara bir eşlemedir. Tipik olarak, bir fonksiyonel $J[y]$, bir integral formunda ifade edilir:

$$J[y] = \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt$$

Burada $L(t, y, y')$, *Lagrangian* olarak adlandırılır, $y(t)$, $[a, b]$ aralığında sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur ve $y'(t) = \frac{dy}{dt}$.

3.2 Tanım (Varyasyon) Bir fonksiyon $y(t)$ 'nin varyasyonu, küçük bir perturbasyonla tanımlanır:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon \eta(t)$$

Burada ε , küçük bir reel sayı, $\eta(t)$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi bir sürekli türevlenebilir fonksiyondur. Fonksiyonelin varyasyonu:

$$\delta J = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon \eta] \right|_{\varepsilon=0}$$

şeklindedir.

3.1 Yardımcı Teorem (Varyasyonel Kalkülüsün Temel Lemması) Eğer bir fonksiyon $f(t)$, $[a, b]$ aralığında sürekliyse ve

$$\int_a^b f(t)\eta(t) dt = 0$$

eşitliği her $\eta(t) \in C^1[a, b]$ ve $\eta(a) = \eta(b) = 0$ için geçerliyse, o zaman:

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Kanıt Varsayalım ki bir $t_0 \in (a, b)$ noktasında $f(t_0) \neq 0$ örneğin, $f(t_0) > 0$ olsun. $f(t)$ 'nin sürekliliği nedeniyle, bir $\delta > 0$ ve bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, $|t - t_0| < \delta$ için $f(t) > \varepsilon$. Bir $\eta(t)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$\eta(t) = \begin{cases} (t - t_0 + \delta)(t_0 + \delta - t), & t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu $\eta(t)$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ koşullarını sağlar ve $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ için de pozitifdir. O zaman:

$$\int_a^b f(t)\eta(t) dt = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(t)\eta(t) dt > \varepsilon \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \eta(t) dt > 0$$

elde edilir ki, bu durum varsayımla çelişir. Dolayısıyla, $f(t) = 0$ her $t \in [a, b]$ için. $\square$

3.3. Euler-Lagrange Denkleminin Türetimi

Bu bölümde, Euler-Lagrange denklemini türetmek için varyasyonel yöntemleri kullanacağız. Fonksiyonel:

$$J[y] = \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt$$

$J[y]$ 'nin ekstremumunu bulmak için, $y(t)$ 'yi perturbe ederek varyasyonu hesaplarız:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon\eta(t), \quad \tilde{y}'(t) = y'(t) + \varepsilon\eta'(t).$$

Yeni fonksiyonel:

$$J[\tilde{y}] = \int_a^b L(t, y(t) + \varepsilon\eta(t), y'(t) + \varepsilon\eta'(t)) dt$$

şeklinde olup varyasyon, $\varepsilon = 0$ için:

$$\delta J = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0}$$

olarak bulunur. ε 'ya göre türev alınırsa:

$$\frac{d}{d\varepsilon}J[\tilde{y}] = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}L(t, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dt$$

elde edilir. Zincir kuralı uygulanırsa,

$$\frac{d}{d\varepsilon}L = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot \eta'(t)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(t) \right) dt = 0$$

bulunur. İkinci terimi sadeleştirmek için Kısmi integrasyon uygulanır.

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(t) dt$$

integrali için $u = \frac{\partial L}{\partial y'}$, $dv = \eta'(t) dt$ denilirse,

$$du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) dt, \quad v = \eta(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(t) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(t) \right]_a^b - \int_a^b \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) dt$$

bulunur. Sınır koşulları $\eta(a) = \eta(b) = 0$ olduğundan:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(t) \right]_a^b = 0.$$

Böylece:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(t) dt = - \int_a^b \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) dt$$

olup varyasyon ifadesi:

$$\delta J = \int_a^b \eta(t) \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right) dt = 0$$

bulunur. Temel Lemma'ya göre:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

elde edilir.

3.2 Teorem (Euler-Lagrange Denklemi) Bir fonksiyonel $J[y] = \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt$ 'nin ekstremumunu sağlayan $y(t)$, şu denklemi sağlar:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde kesirli türevli elastik eğrilerle ilgili bazı tanım ve sonuçlar vereceğiz.

4.1. En Basit Kesirli Varyasyonel Problem

Kesirli türev için çeşitli tanımlar önerilmiştir. Bu tanımlar arasında Riemann–Liouville, Grünwald–Letnikov, Weyl, Caputo, Marchaud ve Riesz kesirli türevleri yer alır (Miller ve Ross, 1993; Samko, Kilbas, ve Marichev, 1993; Podlubny, 1999; Butzer ve Westphal, 2000). Burada, problemi sol ve sağ Riemann–Liouville kesirli türevleri cinsinden formüle ediyoruz. Bunlar şu şekilde tanımlanır (Podlubny, 1999):

Sol Riemann–Liouville kesirli türevi

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (39)$$

ve Sağ Riemann–Liouville kesirli türevi

$${}_xD_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b (\tau-x)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (40)$$

burada α , türevin mertebesidir ve $n-1 \leq \alpha < n$. Eğer α bir tam sayı ise, bu türevler olağan anlamda tanımlanır, yani

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad {}_xD_b^\alpha f(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Bu türevler sırasıyla Sol RLT (LRLFD) ve Sağ RLT (RRLFD) olarak adlandırılır. Literatürde Riemann–Liouville kesirli türevi genellikle Sol RLT’yi ifade eder. Fiziksel açıdan, eğer x bir zaman ölçeği olarak kabul edilirse, Sağ RLT, süreç $f(x)$ ’in gelecekteki durumuna yönelik bir işlemi temsil eder. Bu türev, mevcut durumun gelecekteki gelişim sonuçlarına bağlı olmadığı varsayımıyla genellikle ihmal edilmiştir. Ancak, aşağıdaki türetmeler, kesirli varyasyonel kalkülüs problemlerinde her iki türevin de doğal olarak ortaya çıktığını gösterecektir.

Yukarıdaki tanımlar kullanılarak, ilk en basit kesirli varyasyonel kalkülüs problemi: $F(x, y, u, v)$, tüm argümanlarına göre sürekli birinci ve ikinci (kısmi) türevlere sahip bir fonksiyon olsun. O halde, $[a, b]$ aralığında α mertebesinde sürekli Sol RLT ve β mertebesinde Sağ RLT’ye sahip olan ve şu sınır koşullarını sağlayan tüm $y(x)$ fonksiyonları arasında

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (42)$$

aşağıdaki fonksiyonelin

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, {}_aD_x^\alpha y, {}_xD_b^\beta y) dx \quad (43)$$

ekstremum olduğu fonksiyonu bulma problemi olarak tanımlanabilir. Burada $0 < \alpha, \beta \leq 1$. F üzerindeki süreklilik gereksinimi daha kesin bir şekilde belirtilebilir. Ancak, basitlik adına bu varsayımlar yapılmıştır. Genellik açısından hem Sol RLT hem de Sağ RLT dahil edilmiştir. İlk olarak $0 < \alpha, \beta \leq 1$ durumu ele alınmıştır. $\alpha = \beta = 1$ olduğunda, yukarıdaki problem en basit varyasyonel probleme indirgenir.

Ekstremum için gerekli koşulları geliştirmek amacıyla, $y^*(x)$ 'in istenen fonksiyon olduğunu varsayalım. $\varepsilon \in \mathbb{R}$ olsun ve bir eğri ailesi tanımlayalım:

$$y(x) = y^*(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (44)$$

bu eğriler sınır koşullarını sağlar; yani

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (45)$$

koşulları sağlanır. ${}_aD_x^\alpha$ ve ${}_xD_b^\beta$ lineer operatörler olduğundan,

$${}_aD_x^\alpha y(x) = {}_aD_x^\alpha y^*(x) + \varepsilon {}_aD_x^\alpha \eta(x), \quad (46)$$

$${}_xD_b^\beta y(x) = {}_xD_b^\beta y^*(x) + \varepsilon {}_xD_b^\beta \eta(x). \quad (47)$$

elde edilir. Bu denklemler (43). denklem de kullanılırsa;

$$J = J[\varepsilon] = \int_a^b F(x, y^* + \varepsilon \eta, {}_aD_x^\alpha y^* + \varepsilon {}_aD_x^\alpha \eta, {}_xD_b^\beta y^* + \varepsilon {}_xD_b^\beta \eta) dx \quad (48)$$

denklemini elde edilir. $J[\varepsilon]$ 'nin $\varepsilon = 0$ 'da ekstremum olduğu gözönünde bulundurulursa, Denklem (48) in ε 'na göre türevini alarak:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial ({}_aD_x^\alpha y)} {}_aD_x^\alpha \eta + \frac{\partial F}{\partial ({}_xD_b^\beta y)} {}_xD_b^\beta \eta \right] dx. \quad (49)$$

eşitliğini elde ederiz. Denklem (48), $J[y]$ 'nin $y(x)$ boyunca $\eta(x)$ yönündeki varyasyonu olarak da adlandırılır. $J[\varepsilon]$ 'nin ekstremum olması için gerekli koşul, $\frac{dJ}{d\varepsilon}$ 'nin sıfır olmasıdır ve bu, tüm kabul edilebilir $\eta(x)$ için geçerli olmalıdır. Bu, $J[y]$ 'nin $y = y^*(x)$ için ekstremum olması için

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial ({}_aD_x^\alpha y)} {}_aD_x^\alpha \eta + \frac{\partial F}{\partial ({}_xD_b^\beta y)} {}_xD_b^\beta \eta \right] dx = 0 \quad (50)$$

koşuluna yol açar, bu tüm kabul edilebilir $\eta(x)$ için geçerlidir. Kısmi integrasyon metodu

kullanılarak, denklem (50)'deki ikinci integral (Riewe, 1996), (Samko, Kilbas, ve Marichev, 1993)

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)} {}_a D_x^\alpha \eta dx = \int_a^b {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)} \right) \eta dx \quad (51)$$

şeklinde yazılabilir, ancak $\frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)}$ veya η 'nin $x = a$ ve $x = b$ 'de sıfır olması gerekir. Denklem (45) kullanılarak bu koşul sağlanır ve denklem (50)'nin geçerli olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde, denklem (49)'deki üçüncü integral

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial ({}_x D_b^\beta y)} {}_x D_b^\beta \eta dx = \int_a^b {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_x D_b^\beta y)} \right) \eta dx \quad (52)$$

şeklinde yazılır. Denklemler (51) ve (52)'ü denklem (49)'da yerine yazılırsa,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} + {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)} \right) + {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_x D_b^\beta y)} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (53)$$

elde edilir. $\eta(x)$ keyfi olduğundan, varyasyonel kalkülüsün iyi bilinen bir sonucuna göre (Gelfand ve Fomin, 1963)

$$\frac{\partial F}{\partial y} + {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)} \right) + {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_x D_b^\beta y)} \right) = 0. \quad (54)$$

denklemini bulunur. Denklem (54), kesirli varyasyonel kalkülüs problemi için Euler–Lagrange denklemidir. Böylece, şu teorem elde edilir:

4.1 Teorem $J[y]$ fonksiyonelinin

$$\int_a^b F(x, y, {}_a D_x^\alpha y, {}_x D_b^\beta y) dx$$

formunda olduğu ve $[a, b]$ aralığında α mertebesinde sürekli Sol RLT ve β mertebesinde Sağ RLT'ye sahip olan ve $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ sınır koşullarını sağlayan $y(x)$ fonksiyonları üzerinde tanımlı olduğu varsayılınsın. $J[y]$ 'nin bir $y(x)$ fonksiyonu için ekstremum olması için gerekli koşul, $y(x)$ 'in aşağıdaki Euler–Lagrange denklemine uymasındır:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_a D_x^\alpha y)} \right) + {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial ({}_x D_b^\beta y)} \right) = 0.$$

Kesirli varyasyonel kalkülüs problemleri için ortaya çıkan Euler–Lagrange denklemi, hem Sol RLT hem de Sağ RLT'yi içerir. Bu beklenen bir durumdur, çünkü optimal fonksiyon her iki uç koşulunu da sağlamalıdır. Ayrıca, $\alpha = \beta = 1$ için, ${}_a D_x^\alpha = d/dx$ ve ${}_x D_b^\beta = -d/dx$ olur

ve denklem (54), standart Euler–Lagrange denklemine indirgenir:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} = 0, \quad (55)$$

burada $y^{(1)} = dy/dx$.

4.1.1. Euler-Bernoulli denkleminin türetilmesi

Yukarıdaki varsayımlar altında, bir kirişin diferansiyel denklemi, eğilme momenti (M) ile kirişin eğriliği ($1/R$) arasındaki ilişki kullanılarak türetilir. Klasik olarak, bir kirişteki eğilme momenti (M), malzemenin Young modülü (E), kesitin atalet momenti (I) ve kiriş ekseninin (x eksen boyunca) sehiminin (w) ikinci türevi olan eğrilik ile ilişkilidir:

$$M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Burada EI kirişin eğilme rijitliğidir. Kirişin üzerine etki eden yük ($q(x)$) ile eğilme momenti arasındaki ilişki, denge denklemlerinden elde edilir:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x).$$

Yukarıdaki iki denklemin birleştirilmesiyle, Euler-Bernoulli kiriş denklemi elde edilir:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x).$$

Eğer EI sabitse (homojen bir kiriş için), denklem basitleşir:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x).$$

Bu dördüncü dereceden diferansiyel denklem, belirli sınır koşulları altında kirişin sehim profilini ($w(x)$) belirlemek için kullanılır. Bu denklemin çözümü, kirişin uç koşullarına bağlı olarak değişir ve mühendislik tasarımında kritik bilgiler sağlar ((Timoshenko ve Young, 1957)).

4.2. Varyasyonel Prensip

Varyasyonel prensipler, fiziksel sistemlerin denge veya hareket denklemlerini, belirli bir fonksiyonelin (sistem enerjisi gibi) minimize edilmesi veya ekstremize edilmesi ilkesine dayanarak türetmeyi sağlayan güçlü matematiksel araçlardır. Bu yaklaşım, sadece mekanikte değil, optik, kuantum mekaniği, alan teorisi ve kontrol teorisi gibi birçok farklı disiplinde yaygın olarak kullanılır.

4.2.1. Fonksiyoneller ve varyasyonel hesaplamanın temelleri

Klasik matematikte bir fonksiyon, bir sayıya bir başka sayı atar. Fonksiyonel ise, bir fonksiyona bir sayı atayan bir kavramdır. Mekanikteki potansiyel enerji bir fonksiyonel örneğidir, zira sistemin konfigürasyonunu tanımlayan bir fonksiyon örneğin, sehim fonksiyonunu alır ve skaler bir enerji değerine dönüştürür.

Varyasyonel hesaplama, fonksiyonellerin ekstremum (minimum veya maksimum) değerlerini bulmak için kullanılan bir matematik dalıdır. Bir fonksiyonelin varyasyonu, fonksiyonun küçük bir değişimine karşılık gelen fonksiyoneldeki değişimi ifade eder. Bir fonksiyonelin ekstremumda olması için, onun varyasyonunun sıfır olması gerekir.

Diyelim ki bir $J[y]$ fonksiyonelimiz var ve $y(x)$ gibi bir fonksiyona bağlı. $y(x)$ 'te küçük bir $\delta y(x)$ değişimi olduğunda, fonksiyoneldeki değişim δJ ile gösterilir. Ekstremum koşulu $\delta J = 0$ olarak ifade edilir.

4.2.2. Euler-Lagrange denklemleri

Varyasyonel prensiplerin en önemli sonuçlarından biri Euler-Lagrange denklemleridir. Bu denklemler, bir fonksiyoneli ekstremize eden fonksiyonu bulmak için kullanılır. Bir fonksiyonel $J[y]$ genellikle aşağıdaki genel formda verilir:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx$$

Burada L (Lagrangian), x , $y(x)$ ve $y'(x) = dy/dx$ 'in bir fonksiyonudur. $J[y]$ 'yi ekstremize eden $y(x)$ fonksiyonu, aşağıdaki Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

Bu denklem, klasik mekanikte hareket denklemlerini (örneğin, Newton'un ikinci yasasını) veya statik sistemlerde denge denklemlerini (örneğin, bir kirişin sehim denklemini) türetmek için sıklıkla kullanılır (Goldstein ve Safko, 2002). Fiziksel sistemlerde bu prensip genellikle "en az eylem prensibi" veya "en az potansiyel enerji prensibi" olarak karşımıza çıkar.

4.2.3. Elastik eğriler için potansiyel enerji fonksiyoneli ve Euler-Bernoulli denkleminin türetilmesi

Bir elastik kirişin denge konfigürasyonunu belirlemek için en az potansiyel enerji prensibi kullanılabilir. Bu prensibe göre, bir elastik sistem, uygulanan yükler ve sınır koşulları altında, toplam potansiyel enerjisini minimize eden bir konfigürasyonda dengeye ulaşır. Bir kiriş için toplam potansiyel enerji (Π) iki ana bileşenden oluşur:

1. **Gerinim Enerjisi (U):** Kirişteki deformasyon nedeniyle depolanan enerji. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için gerinim enerjisi, eğilme deformasyonundan kaynaklanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

Burada L kirişin uzunluğu, E Young modülü, I atalet momenti ve $w(x)$ sehim fonksiyonudur.

2. **Yüklerin Yaptığı İşin Potansiyeli (V):** Dış yüklerin sistem üzerinde yaptığı işten kaynaklanan potansiyel enerji. Bir yayılıyük ($q(x)$) altında bu, negatif olarak ifade edilir:

$$V = - \int_0^L q(x) w(x) dx$$

Toplam potansiyel enerji fonksiyoneli $\Pi[w]$ bu iki terimin toplamıdır:

$$\Pi[w] = U + V = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - q(x) w(x) \right] dx$$

Şimdi, bu $\Pi[w]$ fonksiyoneli minimize eden sehim fonksiyonu $w(x)$ 'i bulmak için Euler-Lagrange denklemlerini uygulayacağız. Bu durumda, $L(x, w, w', w'')$ fonksiyonelimiz şu şekildedir:

$$L = \frac{1}{2} EI (w'')^2 - q(x) w$$

Euler-Lagrange denklemi genel olarak $\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) = 0$ formundadır. Terimleri hesaplayalım:

- $\frac{\partial L}{\partial w} = -q(x)$
- $\frac{\partial L}{\partial w'} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial w''} = EI w''$

Bu terimleri Euler-Lagrange denklemine yerine koyduğumuzda:

$$-q(x) - \frac{d}{dx}(0) + \frac{d^2}{dx^2}(EI w'') = 0$$

$$-q(x) + \frac{d^2}{dx^2}(EI w'') = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIw'') = q(x)$$

Bu denklem, Euler-Bernoulli kiriş denklemiyle aynıdır. Bu türetme, varyasyonel prensibin, elastik sistemlerin denge denklemlerini, enerji minimizasyonu ilkesine dayanarak zarif bir şekilde elde etmemizi sağladığını göstermektedir. Bu yöntem, özellikle karmaşık sistemler veya yeni malzeme modelleri (kesirli türevli modeller gibi) için denklemleri türetmede güçlü ve sistematik bir yaklaşım sunar (Meirovitch, 2001).

4.3. Kesirli Türevli Elastik Eğri Modelleri

Klasik elastik eğri teorileri, mühendislik uygulamalarında büyük başarılar elde etmiş olmasına rağmen, her zaman gerçek dünya malzemelerinin ve yapıların karmaşık davranışlarını tam olarak modelleyememektedir. Özellikle viskoelastik malzemeler (polimerler, biyolojik dokular gibi) veya mikro-yapılı malzemeler gibi materyallerin, dış yüklere karşı gösterdikleri "hafıza" etkileri veya zamana bağlı deformasyonları, geleneksel tam sayılı türevlere dayalı modellerle yeterince açıklanamaz (Bagley ve Torvik, 1983). Bu tür malzemeler, anlık gerilme-gerinim ilişkisinin ötesinde, geçmişteki gerilme ve gerinim durumlarına bağlı olarak bir tepki sergilerler. Klasik modeller, Hooke yasası gibi doğrusal ve anlık ilişkiler üzerine kurulduğundan, bu zaman bağımlılıklarını ve tarihsel etkileri doğrudan hesaba katamazlar. Bu durum, klasik modellerin sınırlılıklarını ortaya koymaktadır.

Kesirli türev kavramları, bu tür karmaşık ve hafızaya sahip sistemleri modellemede güçlü bir alternatif sunar. Klasik türevler yerel bir noktadaki değişimi tanımlarken, kesirli türevler sistemin tüm geçmişini veya uzaysal dağılımını hesaba katan non-lokal (yerel olmayan) bir etkiyi yansıtabilirler. Bu non-yerel özellik, malzemenin iç yapısındaki karmaşıklıkların (örneğin, gözeneklilik, fraktal ağlar) veya makroskopik viskoelastik özelliklerin matematiksel olarak ifade edilmesine olanak tanır. Kesirli türevler, malzemenin "hafıza" ve "hereditör" (kalıtsal) özelliklerini doğal bir şekilde modele dahil edebilir. Örneğin, bir malzemenin gerilimi sadece o anki gerinim oranına değil, aynı zamanda geçmişteki tüm gerinim oranlarının ağırlıklı bir toplamına bağlı olabilir.

Bu bölüm, klasik elastik eğri teorilerinin bu sınırlılıklarını ele alarak, potansiyel enerji fonksiyonundaki tam sayılı türevleri kesirli türevlerle değiştirerek yeni kesirli türevli elastik eğri modelleri geliştirmeyi amaçlamaktadır. Bu modeller, malzemenin viskoelastik davranışlarını veya mikro-yapısal karmaşıklıklarını daha doğru bir şekilde yansıtarak, mühendislik analizlerine daha gerçekçi bir yaklaşım sunmayı hedeflemektedir. Özellikle, bu modellerin türetilmesi, denge denklemlerinin formülasyonu ve ilgili sınır koşullarının belirlenmesi üzerinde durulacaktır.

4.4. Kesirli Türevli Potansiyel Enerji Fonksiyonelleri

Bir elastik sistemin denge konfigürasyonu, toplam potansiyel enerjisinin minimizasyonu ile belirlenir. Klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisinde, bu potansiyel enerji fonksiyoneli, kirişin sehiminin ikinci türevini içeren bir terim barındırır. Kesirli türevli elastik eğri modelleri geliştirmek için, bu klasik türev terimlerini kesirli türevlerle değiştirmemiz gerekmektedir. Bu genelleştirme, malzemenin hafıza özelliklerini veya içyapısal karmaşıklığını modele dahil etmenin bir yoludur.

Klasik bir kirişin potansiyel enerji fonksiyoneli $\Pi[w]$ genellikle gerinim enerjisi (U) ve dış yüklerin yaptığı işin potansiyeli (V) olmak üzere iki ana bileşenden oluşur:

$$\Pi[w] = U + V = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - q(x)w(x) \right] dx$$

Burada $w(x)$ sehim fonksiyonu, E Young modülü, I kesitin atalet momenti, $q(x)$ yayılıyük ve L kirişin uzunluğudur.

Kesirli türevli bir model oluşturmak için, kirişin eğilme davranışını karakterize eden ikinci türev terimini genelleştirmeliyiz. Burada farklı yaklaşımlar benimsenebilir:

4.4.1. Klasik türevlerin kesirli türevlerle değiştirilmesinin farklı yolları

En doğrudan yaklaşım, klasik potansiyel enerji fonksiyoneliindeki $\left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2$ terimini, $({}^C D^\alpha w(x))^2$ gibi bir kesirli türev terimiyle değiştirmektir. Burada ${}^C D^\alpha w(x)$, $w(x)$ fonksiyonunun α dereceli Caputo kesirli türevidir. Bu durumda, potansiyel enerji fonksiyoneli aşağıdaki gibi genelleştirilir:

$$\Pi[w] = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right)^2 - q(x)w(x) \right] dx$$

Bu modelde, α genellikle $1 < \alpha \leq 2$ aralığında seçilir. $\alpha = 2$ olduğunda, model klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisine geri döner. Bu yaklaşım, malzemenin eğilme rijitliğinin (ve dolayısıyla iç enerjisinin), sadece anlık eğrilığa değil, aynı zamanda kirişin tüm geçmiş eğilme deformasyonlarına da bağlı olduğunu varsayar. Bu tür bir model, viskoelastik kirişlerin davranışını yansıtmak için kullanılabilir.

Kesirli türev tanımları arasında yapılan seçim (Caputo veya Riemann-Liouville), modelin matematiksel formülasyonunu ve fiziksel yorumunu önemli ölçüde etkiler.

Caputo Kesirli Türevi (${}^C D_a^\alpha f(t)$): Caputo tanımı, başlangıç koşullarının fiziksel olarak anlaşılır (klasik türevler cinsinden) olması nedeniyle mühendislik uygulamalarında daha çok

tercih edilir. Örneğin, bir kirişin başlangıçtaki konumu ve eğimi gibi bilgiler doğrudan kullanılabilir. Bu, deneysel verilerle karşılaştırma ve modelin fiziksel davranışını yorumlama açısından büyük avantaj sağlar. Enerji fonksiyoneliinde Caputo türevi kullanıldığında, türetilen denklemlerin başlangıç koşullarının uygulanması daha kolaydır.

$$\Pi[w] = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right)^2 - q(x)w(x) \right] dx$$

Riemann-Liouville Kesirli Türevi ($D_a^\alpha f(t)$): Riemann-Liouville tanımı matematiksel olarak köklü olsa da, başlangıç koşullarının kendilerinin kesirli türevler cinsinden ifade edilmesini gerektirmesi, fiziksel uygulamalarda zorluk yaratabilir. Birçok mühendis, bir kirişin "kesirli eğimi" veya "kesirli ivmesi" gibi başlangıç koşullarını sezgisel olarak anlamakta zorlanır. Ancak bazı teorik çalışmalarda ve belirli matematiksel analizlerde tercih edilebilir. Eğer Riemann-Liouville türevi kullanılsaydı, potansiyel enerji fonksiyoneli benzer bir biçimde yazılırdı:

$$\Pi[w] = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (D^\alpha w(x))^2 - q(x)w(x) \right] dx$$

Ancak bu durumda, türetilen denklemlerin çözümünde ve sınır koşullarının uygulanmasında farklı matematiksel yaklaşımlar benimsenmesi gerekirdi. Bu tezde, fiziksel yorum kolaylığı nedeniyle Caputo tanımına odaklanılacaktır.

4.5. Kesirli Euler-Lagrange Denklemleri

Klasik Euler-Lagrange denklemleri, tam sayılı türevleri içeren fonksiyonellerin ekstremize edilmesi için kullanılırken, kesirli türevli fonksiyoneller için bu denklemlerin genelleştirilmesi gerekmektedir. Kesirli varyasyonel hesaplama alanı, bu genelleştirmeyi sağlayan matematiksel araçları sunar (Agrawal, 2002).

Kesirli türevli potansiyel enerji fonksiyonelimiz $\Pi[w]$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Pi[w] = \int_0^L L(x, w(x), {}^C D^\alpha w(x)) dx$$

Burada Lagrangian $L(x, w, {}^C D^\alpha w) = \frac{1}{2} EI ({}^C D^\alpha w(x))^2 - q(x)w(x)$ 'tir.

Kesirli varyasyonel prensipte, bir fonksiyoneli ekstremize eden $w(x)$ fonksiyonu için genelleştirilmiş Euler-Lagrange denklemi (Caputo türevi için) aşağıdaki gibi verilir (Agrawal, 2002):

$$\frac{\partial L}{\partial w} + {}_x D_L^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} \right) = 0$$

Burada ${}_x D_L^\alpha$ operatörü, sağdan Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür ve genellikle $D_L^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^L (\tau-x)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$ şeklinde tanımlanır, $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere.

Kirişin eğilme davranışını modellediğimizden, α genellikle $1 < \alpha \leq 2$ aralığında seçilir, bu durumda $n = 2$ alınacaktır.

Şimdi bu denklemi adım adım türetelim:

Adım 1: Lagrangian'ın w 'ye göre kısmi türevi ($\frac{\partial L}{\partial w}$) Lagrangian fonksiyonumuz:

$$L = \frac{1}{2}EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right)^2 - q(x)w(x)$$

L 'nin $w(x)$ 'e göre kısmi türevini alalım. İlk terim $w(x)$ 'i açıkça içermediğinden, türevi sıfır olacaktır (Caputo türevinde $w(x)$ 'e göre türev alırken kesirli türev terimi bir değişken gibi davranır). İkinci terimin türevi ise $w(x)$ 'in katsayısıdır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{2}EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial w} [q(x)w(x)] \\ &= 0 - q(x) \\ \frac{\partial L}{\partial w} &= -q(x) \end{aligned}$$

Adım 2: Lagrangian'ın ${}^C D^\alpha w$ 'ye göre kısmi türevi ($\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)}$) Şimdi Lagrangian'ın ${}^C D^\alpha w(x)$ terimine göre kısmi türevini alalım. Bu terimi geçici olarak $Y = {}^C D^\alpha w(x)$ olarak düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{2}EIY^2 - q(x)w(x) \right] \\ &= \frac{1}{2}EI \cdot (2Y) - 0 \\ &= EI \cdot Y \end{aligned}$$

Y yerine tekrar ${}^C D^\alpha w(x)$ koyarsak:

$$\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} = EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right)$$

Adım 3: İkinci terimin uygulanması (${}_x D_L^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} \right)$) Şimdi bulduğumuz ikinci kısmi türevi, sağdan Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}_x D_L^\alpha$ ile türeteceğiz. EI bir sabit olduğundan, türev operatörünün dışına alınabilir.

$$\begin{aligned} {}_x D_L^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} \right) &= {}_x D_L^\alpha \left(EI \left({}^C D^\alpha w(x) \right) \right) \\ &= EI \cdot {}_x D_L^\alpha \left({}^C D^\alpha w(x) \right) \end{aligned}$$

Adım 4: Euler-Lagrange denklemini oluşturma: Şimdi Adım 1 ve Adım 3'teki sonuçları genelleştirilmiş Euler-Lagrange denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{\partial L}{\partial w} + {}_x D_L^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial ({}^C D^\alpha w)} \right) = 0$$

$$-q(x) + EI \cdot {}_x D_L^\alpha \left({}^C D^\alpha w(x) \right) = 0$$

Bu denklemi yeniden düzenlediğimizde, kesirli türevli elastik eğri için denge denklemini elde ederiz:

$$EI \cdot {}_x D_L^\alpha \left({}^C D^\alpha w(x) \right) = q(x)$$

Elde ettiğimiz kesirli türevli denge denklemi:

$$EI \cdot {}_x D_L^\alpha \left({}^C D^\alpha w(x) \right) = q(x)$$

Bu denklem, α parametresine bağlı olarak kirişin davranışını tanımlar. **Klasik Durum** ($\alpha = 2$): Eğer $\alpha = 2$ alırsak, Caputo kesirli türevi klasik ikinci türeve, yani ${}^C D^2 w(x) = \frac{d^2 w}{dx^2}$ dönüşür. Benzer şekilde, sağdan Riemann-Liouville ikinci türevi de ${}_x D_L^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$ olur. Bu durumda denkleminiz:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x)$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x)$$

Bu, tam olarak klasik Euler-Bernoulli kiriş denkleminin aynısıdır. Bu durum, kesirli türevli modelimizin klasik modelin doğru bir genellemesi olduğunu ve $\alpha = 2$ için bilindik sonuçları verdiğini doğrular.

4.6. Çözüm Yöntemleri ve Uygulamalar

Önceki bölümlerde, klasik elastik eğri teorilerinin sınırlılıklarını aşmak ve daha gerçekçi modeller elde etmek amacıyla kesirli türevli potansiyel enerji fonksiyonellerini ve bunlardan türetilen genelleştirilmiş Euler-Lagrange denklemlerini sunduk. Elde edilen temel denklem $EI \cdot {}_x D_L^\alpha ({}^C D^\alpha w(x)) = q(x)$ şeklindeydi. Bu denklemler, tam sayılı diferansiyel denklemlere kıyasla daha karmaşık bir yapıya sahiptir ve genellikle analitik çözümleri zor veya imkansızdır. Bu nedenle, kesirli türevli elastik eğri modellerinin davranışını incelemek ve pratik uygulamalar için kullanmak amacıyla hem analitik hem de nümerik çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu bölümde, öncelikle basit kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerine kısaca değineceğiz ve elde ettiğimiz denklemin analitik çözülebilirliği üzerine tartışa-

çağız.

4.7. Analitik Çözüm Yöntemleri

Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümü, tam sayılı denklemlere göre çok daha sınırlıdır ve genellikle özel fonksiyonlar (örneğin, Mittag-Leffler fonksiyonu) cinsinden ifade edilir. Ancak, belirli basit durumlar ve özel başlangıç/sınır koşulları altında analitik çözümler elde etmek mümkündür.

4.7.1. Basit kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri

Laplace dönüşümü, kesirli diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözüm sürecini basitleştiren güçlü bir araçtır. Özellikle Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü, başlangıç koşullarını doğrudan klasik türevler cinsinden ifade etme kolaylığı sağlar (Podlubny, 1999).

Bir $f(t)$ fonksiyonunun α dereceli Caputo türevinin Laplace dönüşümü şu şekildedir:

$$\mathcal{L}\left\{{}^C D_0^\alpha f(t)\right\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0)$$

Burada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ve $n-1 < \alpha \leq n$ dir. Bu yöntemi kullanarak, kesirli türevli denklemler cebirsel formda ifade edilir, $F(s)$ çözülür ve ardından ters Laplace dönüşümü uygulanarak $f(t)$ elde edilir.

Örnek Bir α dereceli sönümleyicisiz tek serbestlik dereceli kesirli osilatör denklemini ele alalım:

$${}^C D_0^\alpha x(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Başlangıç koşulları $x(0) = x_0$ ve eğer $\alpha > 1$ ise $x'(0) = v_0$ şeklinde olsun. Bu durumda Laplace dönüşümünü uygulayalım,

$$\mathcal{L}\left\{{}^C D_0^\alpha x(t)\right\}(s) + \omega^2 \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

$$(s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}x'(0)) + \omega^2 X(s) = 0$$

(Burada $n = 2$ varsayılarak $k = 0$ ve $k = 1$ için terimler yazılmıştır.) Başlangıç koşullarını yerine yazarsak,

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x_0 - s^{\alpha-2}v_0 + \omega^2 X(s) = 0$$

elde edilir. $X(s)$ parantezine alırsak,

$$(s^\alpha + \omega^2)X(s) = s^{\alpha-1}x_0 + s^{\alpha-2}v_0$$

bulunur. $X(s)$ için çözülürse,

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}x_0}{s^\alpha + \omega^2} + \frac{s^{\alpha-2}v_0}{s^\alpha + \omega^2}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü alırken, Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü özelliğinden faydalanılırsa, yani

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(-at^\alpha) \right\} (s) = \frac{k! s^{\alpha n - \beta}}{(s^\alpha + a)^{n+1}}$$

olması ve daha özel olarak, $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right\} (t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ ve $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \lambda} \right\} (t) = t E_{\alpha, 2}(-\lambda t^\alpha)$ ifadeleri kullanılırsa, bu durumda çözüm,

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^2 t^\alpha) + v_0 t E_{\alpha, 2}(-\omega^2 t^\alpha)$$

şeklinde elde edilir. Burada $E_{\alpha, \beta}(z)$, genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, klasik elastik eğri teorilerinin sınırlılıkları göz önüne alınarak, özellikle viskoelastik ve non-lokal özellikler sergileyen malzemelerin davranışlarını daha gerçekçi modelleyebilmek amacıyla kesirli türevli elastik eğri modelleri geliştirilmiştir. Çalışmamız, diferansiyel geometri ve kesirli hesabı bir araya getirerek, eğrilerin geometrik karakterizasyonunda geliştirilen perspektifleri sunmuştur.

Başlangıçta, klasik eğriler ve Frenet elemanları detaylı bir şekilde incelenmiş, eğrilik ve burulma gibi temel geometrik invariantların nasıl tanımlandığı gösterilmiştir. Ardından, bu klasik yapılar, Caputo kesirli türevleri kullanılarak genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme ile, bir eğrinin "kesirli hızı", "kesirli ivmesi" ve dolayısıyla kesirli Frenet elemanları (kesirli teğet, normal ve binormal vektörler) ve kesirli eğrilik ile kesirli burulmakavramları matematiksel olarak nasıl türetildiği gösterilmiştir. Caputo türevinin seçimi, başlangıç koşullarının fiziksel yorumlanabilirliği açısından modelin uygulanabilirliğini arttırmıştır.

Elastik eğriler bağlamında, klasik potansiyel enerji fonksiyoneli, yerini kesirli türevli potansiyel enerji fonksiyoneline bırakmıştır. Bu fonksiyonelden, kesirli varyasyonel prensip aracılığıyla, kesirli Euler-Lagrange denklemleri türetilmiştir. Bu denklemlerin, tam sayılı türev derecesi için (yani $\alpha = 2$) klasik Euler-Bernoulli kiriş denklemine indirgendiği gösterilmiştir. Bu, modelin klasik teorinin geçerli bir genellemesi olduğunu doğrulamıştır. .

Klasik diferansiyel geometrinin temel yapı taşları olan Frenet elemanlarının, Caputo kesirli türevleri kullanılarak sistematik bir şekilde genelleştirilmiş olması ve matematiksel formülasyonlarının açıkça sunulmasıyla kesirli türevli eğrilerin geometrik analizinde önemli bir gelişmedir.

Potansiyel enerji fonksiyoneli başlayarak, kesirli varyasyonel prensip aracılığıyla genelleştirilmiş Euler-Lagrange denklemlerinin adım adım ve matematiksel olarak sağlam bir şekilde türetilmesi. Bu yaklaşım, modelin fiziksel temellerini güçlendirmiştir.

Son olarak yüzeyler üzerinde eğrilerin toplam karesel eğrilikleri kullanılarak, kesirli elastik eğriler için önemli karakterizasyonların elde edileceği açıktır.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications.
- Agarwal, R. P. (1953). A propos d'une note de m. pierre humbert. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 236, 2031–2032.
- Agrawal, O. P. (2002). Formulation of euler-lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272(1), 368–379.
- Atanacković, T. M., Pilipović, S., Stanković, B. and Zorica, D. (2014). *Fractional calculus with applications in mechanics: Vibrations and diffusion processes*. New Jersey: John Wiley Sons, Inc.
- Bagley, R. L. and Torvik, P. J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27, 201–210.
- Butzer, P. L. and Westphal, U. (2000). An introduction to fractional calculus. In R. Hilfer (Ed.), *Applications of fractional calculus in physics* (pp. 1–85). New Jersey: World Scientific.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation in anelastic solids. *Rivista del Nuovo Cimento* (1965-1970), 1(2), 161–198.
- Carpinteri, A. and Mainardi, F. (1997). *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (Vol. 378). Berlin: Springer.
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of caputo type*. Berlin: Springer.
- Do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Dzhrbashyan, M. M. (1966). *Integral transforms and representations of functions in the complex domain*. Moscow: Nauka.
- Bateman, H. and Bateman Manuscript Project. (1953). *Higher transcendental functions* (Vol. I-III). New York: McGraw-Hill.
- Gelfand, I. M. and Fomin, S. V. (1963). *Calculus of variations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

- Gelfand, I. M. and Fomin, S. V. (2000). *Calculus of variations*. Mineola, New York: Dover Publications.
- Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J. L. (2002). *Classical mechanics* (3rd ed.). New York: Addison Wesley.
- Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. New Jersey: World Scientific.
- Humbert, P. and Agarwal, R. P. (1953). Sur la fonction de mittag-leffler. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 77, 180–185.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. New York: Elsevier.
- Kirchhoff, G. (1859). Ueber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 56, 285–311.
- Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of vibrations*. New York: McGraw-Hill International Education.
- Miller, K. S. and Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York, NY: John Wiley Sons.
- Mittag-Leffler, G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 137, 554–558.
- Mittag-Leffler, G. M. (1904). Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. *Acta Mathematica*, 29, 101–181.
- Mittag-Leffler, G. M. (1905). Une généralisation de l'intégrale de laplace–abel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 140, 973–979.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Cambridge: Academic Press.
- Rabotnov, Y. N. (1969). *Creep problems in structural mechanics*. Amsterdam: North-Holland.
- Riewe, F. (1996). Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 53(2), 1890–1899.

- Ross, B. (1977). A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. *Fractional calculus and its applications* (Vol. 457, pp. 1–36). Berlin: Springer.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Struik, D. (1988). *Lectures on classical differential geometry*. New-York: Dover.
- Tarasov, V. E. (2010). *Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. Berlin: Springer.
- Timoshenko, S. P. and Young, D. H. (1957). *Elements of strength of materials*. D. Van Nostrand Company.
- Weinstock, R. (1974). *Calculus of variations: With applications to physics and engineering*. Mineola, NY: Dover Publications.
- Wiman, A. (1905a). Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$. *Acta Mathematica*, 29, 191–201.
- Wiman, A. (1905b). Über die nullstellen der funktionen $E_\alpha(x)$. *Acta Mathematica*, 29, 217–234.
- Wright, E. M. (1933). On the coefficients of power series having exponential singularities. *Journal of the London Mathematical Society*, 8, 71–79.
- Wright, E. M. (1934). The asymptotic expansion of the generalized bessel function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 38, 257–270.
- Wright, E. M. (1935). The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *Journal of the London Mathematical Society*, 15, 159–170.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Çiğdem SÜSOY ATALAR

Eğitim Derecesi

Okul / Program

Mezuniyet Yılı

Lisans

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

2006

Matematik Bölümü

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Bildiriler:

1. Atalar S. Ç. and Şahin T. (2025, 17-19 May). *Fractional Derivatives: Definitions and Properties*. The Ninth International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2025), 76, Türkiye.