



**T.C.**

**BATMAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRSEL HESAP YÖNTEMİYLE  
TANIMLANMIŞ HARMONİK  
FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI**

**Yasemin BAĞCI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Ağustos-2017  
BATMAN  
Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Yasemin BAĞCI tarafından hazırlanan “Kesirsel Hesap Yöntemiyle Tanımlanmış Harmonik Fonksiyonların Yeni Bir Alt Sınıfı” adlı tez çalışması 24/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY

.....

#### Danışman

Yrd. Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR

.....

#### Üye

Yrd. Doç. Dr. Meral SÜER

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Bahattin İŞCAN  
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Batman Üniversitesi tarafından BTÜBAP-2016-YüksekLisans-17. nolu proje ile desteklenmiştir.

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yasemin BAĞCI

24.08.2017

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS

#### KESİRSEL HESAP YÖNTEMİYLE TANIMLANMIŞ HARMONİK FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI

Yasemin BAĞCI

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR

2017, 52 Sayfa

Jüri

Yrd. Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR  
Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY  
Yrd. Doç. Dr. Meral SÜER

Bu çalışmada kesirsel hesap yöntemiyle tanımlanmış harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfının incelemesi yapılmıştır. Öncelikle yeni bir alt sınıf tanımlanmış sonrasında ise tanımlanan bu yeni alt sınıf ile ilgili yeterli ve gerekli katsayı sınırlarını içeren ve çalışmamızın ana kısmı olan teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu sınıfın ekstrem noktaları, büyüme ve bükülme teoremleri, kapalılık özelliği gibi bazı önemli karakterizasyon özelliklerine yer verilmiştir. En son kısımda ise daha önce elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılması durumunda daha önce ispatı yapılan teoremlerden hangi sonuçları elde edebileceğimiz incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Harmonik Fonksiyonlar, Katsayı Tahmini, Kesirsel Hesap, Yalınkat.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**NEW CLASSES OF HARMONIC FUNCTIONS DEFINED BY  
FRACTIONAL OPERATOR**

**Yasemin BAĞCI**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
BATMAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Fethiye Müge SAKAR**

**2017, 52 Pages**

**Jury**

**Asst. Prof. Dr. Fethiye Müge SAKAR**

**Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY**

**Asst. Prof. Dr. Meral SÜER**

In the present study, we introduce an investigation of new subclasses of harmonic functions which are defined by fractional operator. Firstly, using by fractional operator, we define new subclasses of harmonic functions. Later, we obtain main theorems of our study which contain sufficient and necessary coefficient bounds for functions related to the classes newly defined. Also, several particular characterization properties of these classes are given. Some of these properties involve extreme points, convex combination, distortion bounds. Finally, for some special cases of parameters several corollaries of the main theorems are presented.

**Keywords:** Coefficient Estimates, Fractional Operator, Harmonic Functions, Univalent.

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yanımda olan ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirmeleri ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilim ışığında şekillendiren, her konuda bana sabırla yardımcı olan, bir abla bir dost samimiyetini her an hissettiğim çok sevgili ve çok değerli tez danışmanım ve hocam Yrd. Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR’a sonsuz teşekkürlerimi saygıyla sunarım.

Elbette sonsuz sabır ve hoşgörü gösterip eğitimime destek olan sevgili babam Mehmet BAĞCI’ya ve çok kıymetli aileme her koşulda yanımda oldukları için teşekkür ve şükranlarımı sunmaktan gurur duyuyorum.

Yasemin BAĞCI  
BATMAN-2017

## İÇİNDEKİLER

|                                                                            |      |
|----------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET .....                                                                 | iv   |
| ABSTRACT.....                                                              | v    |
| ÖNSÖZ .....                                                                | vi   |
| İÇİNDEKİLER.....                                                           | vii  |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                         | viii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR .....                                              | ix   |
| 1. GİRİŞ .....                                                             | 1    |
| 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....                                                | 3    |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....                                                 | 7    |
| 3.1 Ünivalent Fonksiyonlar.....                                            | 7    |
| 3.2 Subordinasyon İlkesi .....                                             | 11   |
| 3.3 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları.....                       | 12   |
| 3.4 Harmonik Fonksiyonlar .....                                            | 16   |
| 3.5 Kesirli (Fractional) Diferansiyel Hesap Tekniği .....                  | 22   |
| 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....                                    | 26   |
| 4.1 $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$ Sınıfı .....                           | 26   |
| 4.2 $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları ..... | 27   |
| 4.3 Ekstrem Noktalar .....                                                 | 31   |
| 4.4 Kapalılık Özelliği.....                                                | 33   |
| 4.5. Büyüme ve Bükülme Teoremleri.....                                     | 35   |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                  | 37   |
| KAYNAKLAR .....                                                            | 40   |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                             | 42   |

## ŞEKİL LİSTESİ

|           |                                                                   |    |
|-----------|-------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1 | $\mathbb{U}$ Birim Diskinin Koebe Fonksiyonu Altındaki Resmi..... | 8  |
| Şekil 3.2 | $1+z \prec \frac{1+z}{1-z}$ Subordinasyonun Resmi.....            | 12 |
| Şekil 3.3 | Yıldızıl Küme .....                                               | 13 |
| Şekil 3.4 | $z$ Noktasına Göre Yıldızıl Küme.....                             | 13 |
| Şekil 3.5 | Konveks Küme.....                                                 | 15 |



## SİMGELER VE KISALTMALAR

|                               |                                                                             |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                  | : Doğal Sayılar Kümesi                                                      |
| $\mathbb{N}_0$                | : $\mathbb{N} \cup \{0\}$                                                   |
| $\mathbb{R}$                  | : Gerçek Sayılar Kümesi                                                     |
| $\mathbb{C}$                  | : Karmaşık Sayılar Kümesi                                                   |
| $\mathbb{U}$                  | : $\{z :  z  < 1\}$ , Birim disk                                            |
| $k(z)$                        | : $\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu                                      |
| $f \prec g$                   | : $f$ fonksiyonu $g$ fonksiyonuna subordinatedir                            |
| $S$                           | : Birim diskte analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı |
| $\mathcal{P}$                 | : Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı                            |
| $\mathcal{K}$                 | : Konveks fonksiyonlar sınıfı                                               |
| $S^*$                         | : Yıldızlı fonksiyonlar sınıfı                                              |
| $S^*(\alpha)$                 | : $\alpha$ mertebeli yıldızlı fonksiyonlar sınıfı                           |
| $\mathcal{K}(\alpha)$         | : $\alpha$ mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı                            |
| $\tilde{S}(\alpha)$           | : $\alpha$ -mertebeli güçlü yıldızlı fonksiyonların sınıfını                |
| $\tilde{\mathcal{K}}(\alpha)$ | : $\alpha$ -mertebeli güçlü konveks fonksiyonların sınıfı                   |
| $\mu_f$                       | : $f$ 'nin kompleks dilatasyonu                                             |
| $d_f$                         | : $f$ 'nin kompleks dilatasyonunun modülü                                   |
| $D_f$                         | : $f$ 'nin dilatasyonu                                                      |
| $J_f$                         | : $f$ fonksiyonunun Jakobiye                                                |
| $\Delta$                      | : Laplace operatörü                                                         |
| $k_0(z)$                      | : Harmonik Koebe fonksiyonu                                                 |

$S_H, S_H^0$  : Yön-koruyan harmonik fonksiyonlar sınıfı  
 $S_H^*, S_H^{*0}$  : Yön-koruyan harmonik yıldızlı fonksiyonlar sınıfı  
 $V$  : İkinci dilatasyon fonksiyonları sınıfı



## 1. GİRİŞ

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin ilgi çeken ve sürekli gelişme gösteren konularındandır. Tek değerli kompleks değişkenli analitik fonksiyonların başlangıcı Riemann Dönüşüm Teorisi' ne dayanmaktadır. 1907 yılında Koebe birim diskte analitik ve yalınkat olan tek değerli kompleks değişkene sahip fonksiyonları incelemiştir. Bu konuya Gronwall'ın 1914'deki alan teoremi ve Bieberbach'ın 1916'daki normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların ikinci katsayı tahminleri temel oluşturmuş ve böylelikle konu daha da ilgi çeken bir hale bürünmüştür. Louis De Branges'ın 1984 yılında Bieberbach varsayımını ispatlamasından sonra, matematikçiler tarafından merak edilen, normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların harmonik dönüşümlere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği sorusu olumlu sonuçlar doğurmuştur. Bu gelişmenin ardından 1984 yılında Clunie Terry ve Sheil-Small yaptıkları çalışma ile konunun olumlu sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Araştırmalarını yaptıkları bu çalışmada analitik yalınkat dönüşümler için elde edilen klasik büyüme ve bükülme teoremleri ve katsayı tahminlerinin, harmonik dönüşümlerde de benzer bir yapıya sahip olduğu ortaya konulmuştur. Böylelikle bu çalışmanın sonrasında harmonik fonksiyonlar teorisi gelişme sürecine girmiş ve kompleks analizciler tarafından daha fazla ilgi görmüştür. 1980'li yıllarda Walter Hengartner ve Glenn Schober yaptıkları birçok çalışmayla verilen bölge üzerine resmedilen ve belirlenmiş dilatasyona sahip harmonik dönüşümlerin varlığının ortaya çıkmasına engel olan esrarengiz bir durumu keşfetmişlerdir. Konform dönüşümlerin bir çok özelliği harmonik dönüşümlerle yapılan genelleştirmelerde önemli role sahiptir. Diğer taraftan harmonik dönüşümler için elde edilen sonuçlarının bir kısmı, konform dönüşümler için elde edilen sonuçlara tam olarak benzemez. Bu durum kompleks analizciler için oldukça ilgi çekicidir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi oldukça geniş, kapsamlı ve karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak yerinde olur. “Her basit bağlantılı  $\mathcal{D}$  bölgesini, birim disk üzerine birebir olarak resmeden bir tek  $f$  analitik fonksiyonunun var olduğunu” söyleyen ünlü Riemann Dönüşüm Teoremine göre  $\mathcal{D}$  bölgesi yerine  $\mathbb{U}$  birim diskini alabiliriz. Genel olarak,  $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$  birim diskinde analitik, yalınkat ve normalize edilmiş ya  $f(0) = f'(0) - 1 = 0$  koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}$  ile gösterilir. Her  $f \in \mathcal{S}$  fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor-Maclaurin serisi ile ifade edilebilir.

Bu çalışmanın amacı harmonik yalınkat dönüşümlerin başlangıç noktası olan analitik yalınkat fonksiyonların özelliklerine dikkati çekmek ve harmonik yalınkat dönüşümlerle analitik yalınkat fonksiyonların özellikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Ayrıca, Fractional operatör yardımıyla tanımlanan harmonik fonksiyonların yeni sınıflarını araştırmak ve uygun katsayının bulunması için çalışmalar yaparak ve ana sonuçları bulmaktır.

Tezin kuramsal temeller bölümünde çalışmamızda gerekli olacak bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve metod bölümünde ise ünivalent, analitik ve harmonik fonsiyonlar tanıtılarak normalize edilmiş analitik, ünivalent ve harmonik fonksiyonlar sınıfına ve bazı alt sınıflarına dair önemli özellikler üzerinde durulmuştur. Ayrıca, Kesirsel türev kavramı, kullanım alanları ve temel tanım ve teoremleri üzerinde durulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde tezin yazım aşamasında kullanılan temel ve yardımcı bazı tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

**Tanım 2.1 (Komşuluk)**  $\mathbb{C}$  karmaşık sayılar kümesi olsun.  $z_0 \in \mathbb{C}$  ve  $\varepsilon > 0$  olmak üzere  $B(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$  kümesine  $z_0$  noktasının  $\varepsilon$ -komşuluğu denir.

**Tanım 2.2 (Disk)**  $\mathbb{C}$  karmaşık sayılar kümesi,  $z_0 \in \mathbb{C}$  ve  $r > 0$  olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

kümesine  $z_0$  merkezine sahip  $r$  yarıçaplı **açık disk**,

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

kümesine  $z_0$  merkezine sahip  $r$  yarıçaplı **kapalı disk**,

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümesine de  $z_0$  merkezine sahip  $r$  yarıçaplı **çember** denir.

**Tanım 2.3 (İç Nokta)**  $A \subset \mathbb{C}$  ve  $z_0 \in A$  için  $D(z_0, r) \subset A$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa,  $z_0$  noktasına  $A$  kümesinin bir **iç noktası** denir.  $A$  kümesinin bütün iç noktalarının kümesine ise  $A$  kümesinin **içi** denir.

**Tanım 2.4 (Açık Küme)**  $A$  kümesinin bütün noktaları bir iç nokta ise  $A$  kümesine **açık küme** denir.  $A$  kümesinin tümleyeni açık küme ise  $A$  kümesine **kapalı küme** denir.

**Tanım 2.5 (Yığılma Noktası)**  $A \subset \mathbb{C}$  ve  $A \neq \emptyset$  olsun.  $A$  kümesinin  $z_0$  noktasının her  $\mathcal{D}(z_0, \varepsilon)$  komşuluğunda,  $z_0$  dan farklı bir  $z$  noktası varsa  $z_0$  noktasına  $A$  kümesinin bir yığılma noktasıdır denir.

**Tanım 2.6 (Bağlantılı Küme)**  $A \subset \mathbb{C}$  herhangi bir küme olsun.  $A$  kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu kümeye **bağlantılıdır** denir. Yani,  $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset, A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $U$  ve  $V$  açık kümeleri bulunamıyorsa,  $A$  kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye de **bağlantısızdır** denir.

**Tanım 2.7 (Eğri)**  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli fonksiyonuna  $\mathbb{C}$  düzleminde bir **eğri** şeklinde adlandırılır.

**Tanım 2.8 (Bölge)** Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** denir.

**Tanım 2.9 (Basit Bağlantılı Bölge)**  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  bir bölge olsun. Eğer hem  $\mathcal{D}$  hem de  $\mathbb{C} - \mathcal{D}$  bağlantılı bir küme ise  $\mathcal{D}$  bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

**Tanım 2.10 (Karmaşık Fonksiyon)**  $A, \mathbb{C}$  kümesinin herhangi bir altkümesi olsun. Her  $z \in A$  elemanına belli bir  $f(z) \in \mathbb{C}$  elemanını karşılık getiren kurala karmaşık fonksiyon denir.  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  gösterimi ile belirtilir. Bir  $f$  karmaşık fonksiyonu  $w = f(z)$  şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.11 (Fonksiyonun Limiti)**  $A \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu verilsin.  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $A$  kümesinin bir yığılma noktası olsun ve bir  $w_0$  sayısı verilsin.  $\varepsilon > 0$  ve  $0 < |z - z_0| < \delta$  şartını sağlayan her  $z \in A$  için  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $f$  fonksiyonunun  $z_0$  noktasındaki limiti  $w_0$  dır denir ve  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.12 (Süreklilik)**  $A \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  bir fonksiyon ve  $z_0 \in A$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $f(A \cap D(z_0, \delta)) \subset D(f(z_0, \varepsilon))$  olacak şekilde bir  $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $f(z)$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında süreklidir denir.

**Tanım 2.13 (Diferansiyellenebilirlik)**  $A \subset \mathbb{C}$  bir açık küme,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  bir fonksiyon ve  $z_0 \in A$  kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer  $z_0 \in A$  noktasında  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  limiti mevcut ise,  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında **diferansiyellenebirebilir** veya **türevlenebirebilir** denir. Bu limit  $f'(z)$  veya  $\frac{df}{dz}(z_0)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.14 (Analitik Fonksiyon)**  $A \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  bir fonksiyon ve  $z_0 \in A$  nın bir iç noktası olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu,  $z_0$  noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında **analitiktir** denir.

$z = x + iy$  olmak üzere  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  karmaşık değerli fonksiyonu analitik ise  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$  ve  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$  olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

**Teorem 2.15 (Maksimum Modül Teoremi)**  $f$  fonksiyonu  $\mathcal{D}$  bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon bu bölgede sabit olmadıkça,  $|f(z)|$  modülü maksimum değeri bu bölgenin sınırında alır (Duren, 1983).

**Teorem 2.16 (Schwarz Yardımcı Teoremi)**  $f$  fonksiyonu  $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$  birim diskinde analitik ve  $f(0) = 0$  olsun. Eğer  $\mathbb{U}$  birim diskinde  $|f(z)| \leq 1$  ise  $|f'(0)| \leq 1$  ve  $|f(z)| \leq |z|$  eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu sadece  $\theta \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(z) = e^{i\theta} z$  fonksiyonu ile sağlanır.

**Tanım 2.17 (Argüman)** Karmaşık düzlemde  $z \in \mathbb{C}$  karmaşık sayısıyla belirtilen vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı  $\theta$  açısına  $z$  nin **argümenti** denir ve  $\theta = \arg(z)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.18 (Konform Dönüşüm)** Karmaşık düzlemin bir  $\mathcal{D}$  bölgesinde  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli dönüşümü verilsin. Eğer  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasından geçen ve aralarında  $\alpha$  açısı bulunan herhangi iki düzgün  $\gamma_1, \gamma_2$  eğrilerinin  $f(\gamma_1)$  ve  $f(\gamma_2)$  resim eğrileri de  $w_0 = f(z_0)$  noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından  $\alpha$  açısı yapıyorsa,  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında bir **konform dönüşümdür** denir. Eğer  $f$  fonksiyonu her  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasında konform ise  $f$  fonksiyonu  $\mathcal{D}$  bölgesinde konformdur denir.

Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki bağıntının daha iyi anlaşılabilmesi için herhangi bir karmaşık fonksiyon yerine genelde konform dönüşüm göz önüne alınır. Süreklilik ve konform dönüşümler arasındaki bağıntıyı aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

**Teorem 2.19** Karmaşık düzlemin bir  $\mathcal{D}$  bölgesinde  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  dönüşümü verilsin.  $f$ , bir  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasında sürekli ve  $f'(z_0) \neq 0$  ise  $f$ ,  $z_0$  noktasında bir konform dönüşümdür.

**Tanım 2.20 (Dizi)**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(n) = z_n$  olan fonksiyona  $\mathbb{C}$  de bir karmaşık dizi denir.

**Tanım 2.21 (Seri)**  $(z_n)$ , bir karmaşık dizi olmak üzere  $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$

ifadesine **karmaşık seri** denir ve  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  ile gösterilir. Bu serinin  $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$  olarak

tanımlanan  $(s_n)$  dizisine **kısmi toplamlar dizisi** adı verilir.

**Tanım 2.22 (Kuvvet Serisi)**  $z_0, a_n \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  biçimindeki serilere **kuvvet serileri** adı verilir.

**Teorem 2.23 (Taylor Teoremi)**  $f(z)$  fonksiyonu bir  $z_0$  noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımı vardır. Yukarıda belirtilen kuvvet serisine  $f(z)$  fonksiyonunun  $z_0$  noktası komşuluğundaki **Taylor serisi** adı verilir. Taylor serisinde  $z_0 = 0$  alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

elde edilir. Bu seriye **Maclaurin serisi** denir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda tezin meydana gelmesinde kullanılacak temel ve yardımcı bazı tanımlar ve teoremler sunulmaktadır.

#### 3.1 Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde ünivalent fonksiyonları tanımlayarak önemli hususlar üzerinde duracağız.

**Tanım 3.1.1 (Ünivalent Fonksiyon)**  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  bir bölge olmak üzere,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu bu bölgede, bir noktada aynı değeri iki kere alamıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $\mathcal{D}$  bölgesinde **ünivalent fonksiyon** denir. Yani  $\mathcal{D}$  bölgesindeki  $z_1 \neq z_2$  özelliğindeki tüm nokta ikilileri için  $f(z_1) \neq f(z_2)$  dir. Diğer bir deyişle  $\mathcal{D}$  bölgesinde bire-bir ve konform tasvire ünivalent fonksiyon denir.

**Tanım 3.1.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon)** Bir  $\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı herhangi bir  $f$  fonksiyonu, herhangi bir  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise  $f$  fonksiyonuna  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasında **yerel ünivalent fonksiyon** denir.

**Teorem 3.1.3**  $f$ ,  $\mathcal{D}$  bölgesinde analitik olsun. Bu halde  $z_0 \in \mathcal{D}$  noktasında  $f'(z_0) \neq 0$  olması için gerek ve yeter şart  $f$  fonksiyonunun  $z_0 \in \mathcal{A}$  noktasında yerel ünivalent olmasıdır.

$\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı  $f$  fonksiyonu  $z_0 \in \mathcal{D}$  için yerel ünivalent ise  $f'(z_0)$  türevi  $z_0$  noktasında  $f$  fonksiyonunun yerel olarak geometrik tutumunu belirler.  $|f'(z)|$  ve  $\arg f'(z)$  sırasıyla bize uzunlukları için yerel büyüme çarpanı ve yerel dönme çarpanını verir.

Yerel ünivalent bir fonksiyon, açıları ve dönmeyi korur. Bu nedenden dolayı ünivalent bir fonksiyon, konform bir dönüşümle eşdeğer varsayılır. Öte taraftan, bir  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  bölgesinde  $f'(z_0) \neq 0$  olması şartı  $\mathcal{D}$  bölgesinin tümünde ünivalent olması için gerek şart iken yeterli şart olmamaktadır. Bu durumu ise şu örnekle açıklayabiliriz:

$f(z) = z^2$  fonksiyonu  $\mathcal{D} = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$  bölgesinde yerel ünivalent

olmaktadır, fakat ünivalent değildir.

Tek değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisinin en temel neticelerinden biri Riemann dönüşüm teoremidir.

**Tanım 3.1.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi)**  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  basit bağlantılı bölgesini  $\mathbb{U}$  birim diski üzerine birebir ve konform olarak dönüştüren  $z_0 \in \mathcal{D}$  için  $f(z_0)=0$  ve  $f'(z_0)>0$  şeklinde bir tek  $f$  fonksiyonu vardır (Duren, 1983).

Riemann dönüşüm teoremiyle keyfi basit bağlantılı bölgelerde tanımlanan ünivalent fonksiyonları,  $\mathbb{U}$  birim diskindeki ünivalent fonksiyonlara dönüştürür. Bu durumdan dolayı, birim diskteki ünivalent fonksiyonları çalışmamızda kullanacağız.

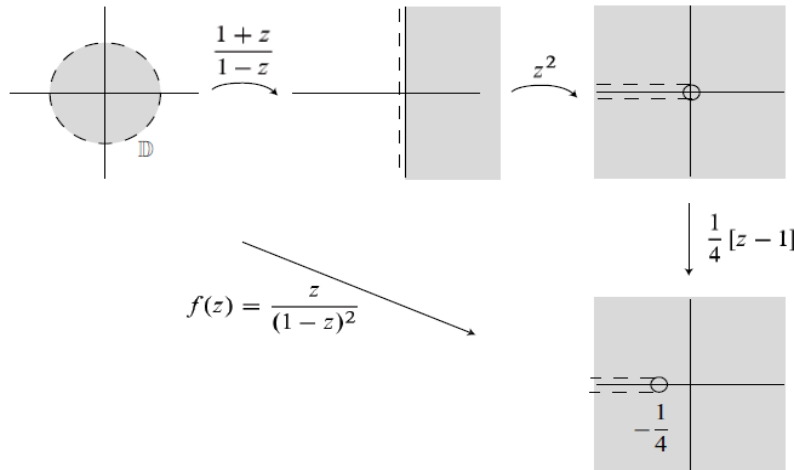
$\mathbb{U}$  birim diskinde analitik ve ünivalent olan  $f(z)$  fonksiyonu  $f(0)=f'(0)-1=0$  koşulları ile normalize hale getirilebilir. Eğer  $f(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik ve ünivalent ise o halde  $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{f'(z_0)}$  fonksiyonu da  $f(z)$  fonksiyonu ile aynı karakteristik nitelikleri sağlar. Böylece yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlamaz.

**Tanım 3.1.5 ( $\mathcal{S}$  sınıfı)**  $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik, ünivalent ve  $f(0)=f'(0)-1=0$  şartlarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfına **normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı** denir. Bu sınıf  $\mathcal{S}$  ile gösterilir.

$\mathcal{S}$  sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\dots, \quad (z \in \mathbb{U}) \text{ biçiminde ifade edilen Koebe}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon  $\mathbb{U}$  birim diskini  $-\frac{1}{4}$  'den  $\infty$  çıkarılmış negatif reel eksen dışındaki bütün karmaşık düzleme konform olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonu, yalınkat fonksiyonlar teorisinde çoğu problem için extremal bir role sahiptir.



**Şekil 3.1**  $\mathbb{U}$  Birim Diskinin Koebe Fonksiyonu Altındaki Resmi

$f(z) = \frac{z}{1-z}$  biçiminde ifade edilen fonksiyona lineer kesirsel dönüşüm denir.

Bu fonksiyon  $\mathbb{U}$  birim diskini  $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$  yarı düzlem üzerine dönüştürür. Bu

fonksiyon normalize edildiğinde  $\mathcal{S}$  sınıfına dahildir. Benzer şekilde,  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$

fonksiyonu,  $\mathbb{U}$  birim diskini  $\operatorname{Re}\{w\} > 0$  yarı düzlemi üzerine 1-1 olarak dönüştüren bir diğer lineer kesirsel dönüşümdür.

Bieberbach, ilk defa  $\mathcal{S}$  sınıfına dahil bir  $f$  fonksiyonunun  $a_n$  katsayıları için bir üst sınır oluşturma uğraşında bulunmuştur. 1946 yılında  $|a_2| \leq 2$  eşitsizliğini ispatlamıştır.

**Teorem 3.1.6 (Bieberbach Teoremi)**  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{S}$  ise  $|a_2| \leq 2$  eşitsizliği doğrudur. Eşitlik durumu, Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması durumunda geçerlidir (Bieberbach, 1916).

Bieberbach,  $\mathcal{S}$  sınıfına ait bir fonksiyonunun  $a_n$  katsayılarının  $|a_n| \leq n$  eşitsizliğini gerçekleştirdiğine dair bir kestirimde bulundu. Bieberbach sanısı olarak bilinen oldukça zor ve karmaşık problem 1985 yılında L. De Branges tarafından ispatlandı.

**Teorem 3.1.7 (Bieberbach Sanısı)**  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{S}$  ise her  $n \geq 2$  için  $|a_n| \leq n$  olur (Bieberbach 1916).

$f \in \mathcal{S}$  ünivalent fonksiyonları için en önemli ve temel olan geometrik netice, 1907 yılında Koebe tarafından verilen ve Koebe dörtte bir teoremi olarak bilinen ünlü teoremdir. Her bir  $f \in \mathcal{S}$  fonksiyonu  $f(0) = 0$  özelliğinde bir açık dönüşüm olduğundan ötürü bu dönüşümlerin resmi, orijin merkezli bazı diskleri kapsar. Koebe,  $\mathcal{S}$  sınıfındaki bütün fonksiyonların resimlerinin  $\rho$  bir mutlak sabit olmak şartıyla ortak bir  $|w| < \rho$  diskini kapsadığını bulmuştur. Koebe fonksiyonu,  $\rho$  mutlak sabitinin  $|\rho| < 1/4$  durumunu gerçekler. Daha sonra Bieberbach  $\rho$  mutlak sabitinin  $1/4$  şeklinde alınabileceğini belirten Koebe kestirimini oluşturmuştur.

**Teorem 3.1.8 (Koebe Dörtte Bir Teoremi)**  $\mathcal{S}$  sınıfındaki tüm fonksiyonların resmi  $\left\{ w : |w| < \frac{1}{4} \right\}$  diskini içine alır (Duren, 1983).

Bieberbach'ın kanıtladığı  $|a_2| \leq 2$  katsayı eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisinde büyüme teoremi ve bükülme teoremi gibi daha ileri uygulama alanlarına sahiptir. Büyüme teoremi ve bükülme teoremi, tüm  $f \in \mathcal{S}$  fonksiyonları üzerinde sırası ile  $|f(z)|$  ve  $|f'(z)|$  için sınırlar meydana getirir.

Bükülme teoremi,  $f \in \mathcal{S}$  dönüşümü altında yay uzunluğunun sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak  $|f'(z)|$  nin geometrik yorumundan veya alanın sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak  $|f'(z)|^2$  jakobiyen işleminin sonucundan oluşmaktadır. Aşağıdaki teorem, bükülme teoremi ve onun sonuçlarına dair önemli bir tahmin verir.

**Teorem 3.1.9** Her bir  $f \in \mathcal{S}$  için

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \quad |z|=r < 1$$

ifadesi gerçekleşir (Goodman 1983).

**Teorem 3.1.10 (Bükülme ( Distorsiyon) Teoremi)** Her bir  $f \in \mathcal{S}$  ve  $|z|=r < 1$  için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ifadesi gerçekleşir ( Goodman,1983).

**Teorem 3.1.11 (Büyüme (Genişleme) Teoremi)** Her bir  $f \in \mathcal{S}$  ve  $|z|=r < 1$  için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

ifadesi gerçekleşir ( Goodman,1983).

**Teorem 3.1.12 (Örtülüş Teoremi)**  $\mathbb{U}$  birim diski,  $D(0,1/4)$  orijin merkezli ve  $1/4$  yarıçaplı diski göstermek şartıyla

$$h(\mathbb{U}) \supset D(0,1/4)$$

ifadesi gerçekleşir(Duren,1983).

**Teorem 3.1.13**  $\mathcal{S}$  sınıfında yer alan her bir  $f$  fonksiyonu için

$$\frac{1-r}{(1+r)} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{(1-r)} \quad |z|=r < 1$$

ifadesi gerçekleşir (Duren,1983).

### 3.2 Subordinasyon İlkesi

Subordinasyon kavramı, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu kavram ilk olarak Lindelöf (1909) tarafından ileri sürülmüştür. Ancak daha sonraki yıllarda, Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından bu kavram tanımlanarak temel özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

**Tanım 3.2.1 (Schwarz Fonksiyonu)**  $\mathbb{U}$  birim diski içinde analitik ve her  $z \in \mathbb{U}$

$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  şeklinde ifade edilen  $w(z)$  fonksiyonu her  $z \in \mathbb{U}$  için  $w(0) = 0$  ve

$|w(z)| < 1$  şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona **schwarz fonksiyonu** denir. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı  $\Omega$  ile gösterilir.

Schwarz fonksiyonları subordinasyon prensibinin temel bileşenleridir. Subordinasyon prensibi aşağıdaki şekilde izah edilebilir:

**Tanım 3.2.2 (Subordinasyon Prensibi)**  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun.  $\mathbb{U}$  birim diskinde eğer  $z \in \mathbb{U}$  için  $f(z) = g(w(z))$  eşitliğinin gerçekleşmesi koşuluyla  $w(z) \in \Omega$  schwarz fonksiyonu varsa  $f$  fonksiyonu  $g$  fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum  $f \prec g$  şeklinde gösterilir.

$f$  subordinasyon fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur. Özellikle,  $g(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$  birim diskinde ünivalent ise  $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$  ve  $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$  olmasıdır (Duren, 1983).

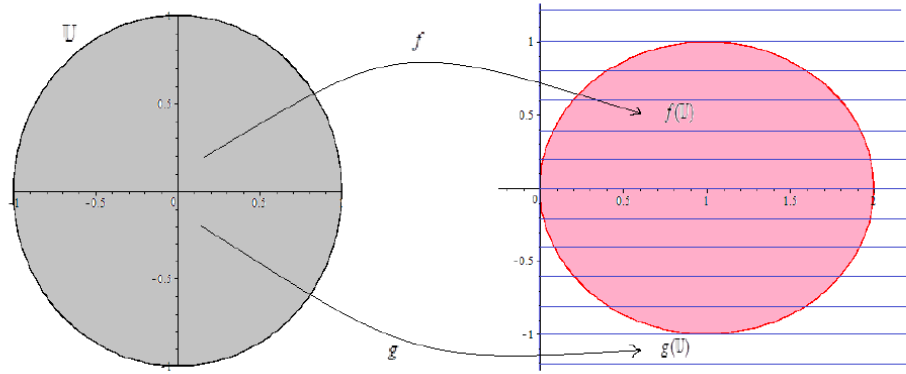
Örneğin,  $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik olan  $f(z) = 1 + z$  ve  $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$  fonksiyonları göz önüne alınırsa,  $f$  fonksiyonu  $g$  fonksiyonuna subordinedir. Bunu görmek için  $\forall z \in \mathbb{U}$  için  $f(z) = g(\varphi(z))$  olacak şekilde  $|\varphi(z)| < 1$  ve  $\varphi(0) = 0$  koşullarını sağlayan bir  $\varphi$  fonksiyonunun varlığı gösterilmelidir.

$$f(z) = g(\varphi(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \Rightarrow \varphi(z) = \frac{z}{z + 2}$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi(0) = 0 \text{ ve } |\varphi(z)| = \left| \frac{z}{z + 2} \right| \leq \frac{1}{|z + 2|} \leq 1$$

yazılır. Bu ise  $f \prec g$  demektir. Ayrıca  $g$  ünivalent olduğundan  $f(0) = g(0)$  ve  $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$  olur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 3.2  $1+z \prec \frac{1+z}{1-z}$

**Lemma 3.2.3 (Schwarz Lemması)**  $w(z) \in \Omega$  olmak üzere her  $z \in \mathbb{U}$  için  $|w(z)| < |z|$  ve  $|w'(0)| \leq 1$  eşitsizlikleri geçerlidir. Eşitlik hali  $|c|=1$  olmak şartıyla  $w(z)=cz$  fonksiyonları için geçerlidir (Ahlfors,1979).

### 3.3 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda ünivalent fonksiyonların önemli bazı alt sınıflarını vereceğiz

#### Tanım 3.3.1 (Pozitif Reel Kısıma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı)

$P(z)=1+p_1z+p_2z^2+\dots+p_nz^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$  formuna sahip,  $\mathbb{U}$ 'da analitik olan ve

$\mathbb{U}$ 'daki bütün  $z$  noktaları için  $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$  koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına **pozitif reel kısıma sahip fonksiyonlar sınıfı** denir ve bu sınıf  $\mathcal{P}$  ile gösterilir.

Bu fonksiyon sınıfı **Caratheodory sınıfı** olarak da bilinir.  $\mathcal{P}(z)$  fonksiyonunun  $\mathcal{P}$

sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart  $\mathcal{P}(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$  ( $w(z) \in \Omega$ ,  $z \in \mathbb{U}$ )

eşitliğinin sağlanmasıdır (Caratheodory, 1913).

$\mathcal{P}(z)$  fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur. Örneğin;

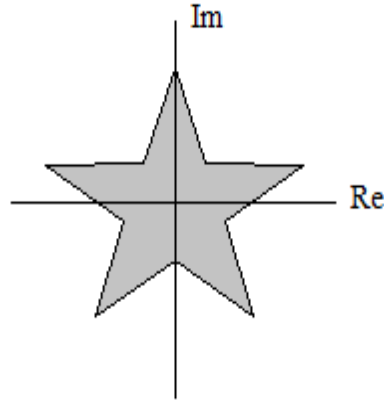
$P(z)=1+z^n$  fonksiyonu herhangi bir  $n \geq 0$  tamsayısı için  $\mathcal{P}$  sınıfına aittir. Ancak  $n \geq 2$  alırsak bu fonksiyon ünivalent olmaz.

**Teorem 3.3.2 (Carathodory Teoremi)**  $f \in \mathcal{P}$  ve  $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$  ( $z \in \mathbb{U}$ ) olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur (Goodman, 1983).

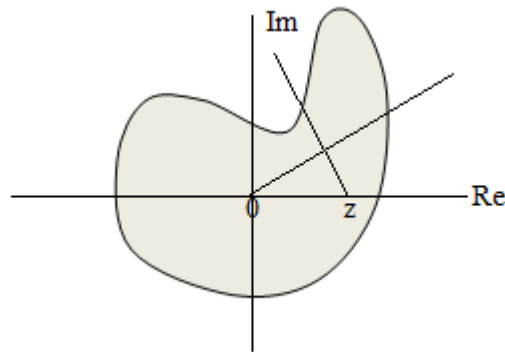
$$|p_n| \leq 2 \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

**Tanım 3.3.3 (Yıldızlı Fonksiyonlar Sınıfı)**  $\mathcal{D}, \mathbb{C}$  üzerinde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere  $\mathcal{D}$  bölgesindeki sabit  $z=0$  noktasını  $\mathcal{D}$  nin herhangi bir noktasına birleştiren doğru parçası tamamen  $\mathcal{D}$  bölgesinde kalıyorsa  $\mathcal{D}$  bölgesine **orijine göre yıldızlı** veya kısaca **yıldızlı bölge** adı verilir.

Birim diski yıldızlı bir bölge üzerine resmeden konform fonsiyonlara **yıldızlı fonksiyon** denir ve yıldızlı fonksiyonların sınıfı  $S^*$  şeklinde ifade edilir. (Duren 1983).



Şekil 3.3 Yıldızlı Küme



Şekil 3.4  $z$  noktasına göre yıldızlı küme

Bu sınıf ilk olarak Alexander (1915) ve Nevanlinna (1921) tarafından tanımlanmıştır. Buradan çıkan açık bir sonuç ise  $S^* \subset S$  olduğudur.

$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  Koebe fonksiyonu yıldızlı bir fonksiyondur. Aşağıda verilen

teorem yıldızlı fonksiyonların analitiklik bakımından tanımını verir.

**Teorem 3.3.4**  $f \in \mathcal{A}$  ve  $f(0) = f'(0) - 1 = 0$  koşulları sağlansın. Bu durumda  $f \in \mathcal{S}^*$  olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$$

eşitsizliğinin sağlamasıdır (Duren, 1983).

Yıldızlı fonksiyonların kümesi kısaca

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}; z \in \mathbb{U} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Robertson (1936) tarafından tanımlanan ve  $\mathcal{S}^*$  sınıfının bir alt sınıfı olan  $\alpha$  mertebeli yıldızlı fonksiyonlar sınıfının analitik tanımını aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha; z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}.$$

**Tanım 3.3.5 (Güçlü Yıldızlı Fonksiyonlar Sınıfı)**  $f \in \mathcal{A}$  olsun.

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

veya bu eşitsizliğe eşdeğer olan

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \alpha \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha, \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

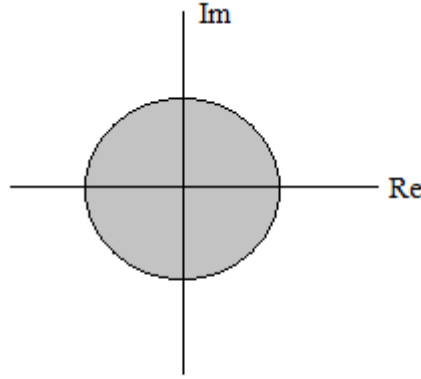
şartını sağlayan  $f$  fonksiyonuna,  $\alpha$  -**mertebeden güçlü yıldızlı fonksiyonu** adı verilir.

Güçlü yıldızlı fonksiyonların sınıfını  $\tilde{\mathcal{S}}(\alpha)$  ile tanımlanmaktadır.  $\alpha=1$  değeri için  $\tilde{\mathcal{S}}(1) = \mathcal{S}^*$  olduğu görülür.  $\tilde{\mathcal{S}}(\alpha)$  sınıfı, Brannan ve Kirwan (1969), ve Stankiewicz (1966) tarafından ileri sürülmüş ve çalışılmıştır.

**Tanım 3.3.6 (Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)**  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemde bir bölge olsun.  $\mathcal{D}$  bölgesinin rastgele iki noktasını birleştiren doğru parçası büsbütün  $\mathcal{D}$  içinde kalıyorsa yani,  $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  olmak şartıyla  $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in \mathcal{D}$  koşulunu

gerçekliorsa  $\mathcal{D}$  bölgesine **konveks bölge** adı verilir.  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu birim diskte ünivalent ve  $f(\mathcal{D})$  konveks bir bölge ise  $f$  fonksiyonuna **konveks fonksiyon** denir.

Konveks ünivalent fonksiyonların normalize edilmiş sınıfı, resmi konveks olan  $f \in \mathcal{S}$  fonksiyonlarından meydana gelir. Konveks fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{K}$  ile ifade edilir.



**Şekil 3.5** Konveks Küme

$f \in \mathcal{A}$  fonksiyonunun  $\mathcal{K}$  sınıfında olması için gerek ve yeter şart  $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad z \in \mathbb{U}$  olmasıdır.

$f(z) = \frac{z}{1-z}$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$  birim diskini yarı düzlem üzerine dönüştüren ve  $\mathcal{K}$  sınıfı üzerinde önemli rol oynayan bir fonksiyondur.

$\mathcal{K}$  nın bir alt sınıfını oluşturan  $\alpha$  mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfının analitiklik bakımından verilen tanımını aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}.$$

Aşağıdaki teoremden yıldızlı ve konveks fonksiyonlarının birbirleriyle olan bağıntıları ortaya konmuştur.

**Teorem 3.3.7 (Alexander Teoremi)**  $f(z) \in \mathcal{A}$  ve  $z \in \mathbb{U}$  olmak üzere  $f(z) \in \mathcal{K}$  olması için gerek yeter şart  $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$  olmasıdır (Alexander, 1915).

Bu teoreme ek olarak ; Strohacker (1933) tarafından “  $f \in \mathcal{K}$  ise  $f \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$  “ olduğu ispatlanmıştır.  $\mathcal{S}$  nin yıldızlı ve konveks fonksiyonları içeren alt sınıfları için

$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$  şeklinde bir durum söz konusudur.

**Tanım 3.3.8 (Güçlü Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)**  $f \in \mathcal{A}$  olsun.

$$\left| \arg \left( 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \alpha \frac{\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

eşitsizliğini gerçekleyen  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  -**mertebeden güçlü konveks fonksiyon** denir. Güçlü konveks fonksiyonların sınıfını  $\tilde{\mathcal{K}}(\alpha)$  ile tanımlarız.  $\alpha=1$  için  $\tilde{\mathcal{K}}(1) = \mathcal{K}$  elde edilir.

### 3.4 Harmonik Fonksiyonlar

Harmonik fonksiyonlar teorisi matematiğin, diğer bilim alanlarında uygulaması çok geniş ve kullanışlı olan bir dalıdır. Özellikle mühendislik, tıp, yön-eylem araştırması, fizik ve uygulamalı matematiğin geniş alanında bu tarz fonksiyonlar oldukça sık kullanılır.

Örneğin fizik ve mühendislikte bir harmonik fonksiyon, potansiyel fonksiyonu şeklinde nitelendirilir ve termal kararlı sistemler, ideal akışkanlar, elektromanyetik teori gibi konularda oldukça önemli bir yere haizdir.

**Tanım 3.4.1 (Yön-koruyan ve Yön-Değiştiren Fonsiyon)**  $w = f(z)$  fonksiyonu  $z = x + iy$  ve  $w = u + iv$  olmak şartıyla  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemi üzerinde bir konform foksiyon olsun. Buna göre

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \text{ve} \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler kompleks formda

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

olmak kaydıyla  $dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$  şeklinde gösterilebilir. Yukarıda verilen eşitliklerden yola çıkılarak

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durum ise  $J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$  ifadesine eşit olduğunu gösterir. O halde tanımlanan ifadenin Jakobiyeni pozitif ise  $f$  foksiyonuna

**yön-koruyan**, negatif ise **yön-değiştiren** fonksiyon adını alır.  $f(z)$  fonksiyonu yön koruyan, bir başka ifadeyle  $|f_z| < |f_{\bar{z}}|$  eşitsizliği mevcut ise,

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür.

Yön- koruyan özelliği kullanılarak, bu tip fonksiyonlara ait dilatasyon ve kompleks dilatasyon ifadeleri aşağıdaki gibi yazılmıştır(Ahlfors, 1966):

**Tanım 3.4.2 (Dilatasyon)**  $D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun **dilatasyonu** denir.

**Tanım 3.4.3 (Kompleks Dilatasyon)**  $|\mu_f| = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$  eşitliğine  $f$  fonksiyonunun **kompleks dilatasyonu** denir.

Bu tanımlardan yola çıkarsak  $d_f = |\mu_f| = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1$  ifadesinin geçerli olduğu sonucuna

ulaşılır. Yön-koruyan fonksiyonların dilatasyonları arasında  $D_f = \frac{1+d_f}{1-d_f}$ ,

$d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}$ , ilişkisi söz konusudur.

**Tanım 3.4.4 (Hemen-Hemen Konform)** Bir  $f$  fonksiyonunun  $z$  noktasında konform olması için gerek ve yeter koşul  $D_f = 1$  ve  $d_f = 0$  eşitlik durumlarının sağlanmasıdır.  $f$  fonksiyonu,  $D_f$  sınırlı ise **hemen hemen konform** şeklinde isimlendirilir. Bu durumda  $D_f \leq K$  ise  $f$ , **K-hemen-hemen-konformdur** şeklinde ifade edilir.  $D_f \leq K$  koşulu  $d_f \leq k = (K-1)/(K+1)$  ifadesi ile denktir. Burdan elde edilen açık bir sonuç ise şöyle ifade edilebilir :

1-hemen-hemen-konform fonksiyonlar konform fonksiyondur.

**Tanım 3.4.5 (Harmonik Fonksiyon)**  $\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı, sürekli ikinci kısmi türevi olan reel değerli  $u(x,y)$  fonksiyonu  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  olarak tanımlanmış Laplace diferansiyel denklemini sağlarsa (reel) **harmonik** olarak isimlendirilir.  $\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı, kompleks değerli  $f(z)$  fonksiyonunun gerçek(reel) ve sanal(imajiner) kısmı  $\mathcal{D}$  üzerinde harmonik ise  $f(z)$  fonksiyonu  $\mathcal{D}$  üzerinde **harmoniktir** denir.

Yukarıdaki tanımdan çıkarılacak en önemli netice ise her analitik fonksiyonun harmonik olduğudur. Bu duruma ek olarak kompleks değerli harmonik fonksiyonların analitik olması gerekmemektedir. Örneğin  $w = f(z) = -2xy + i(y^2 - x^2)$  fonksiyonu kompleks düzlemde harmoniktir fakat kompleks düzlemin hiçbir yerinde analitik değildir. Laplace denkleminin lineer karakterizasyonundan ötürü iki harmonik fonksiyonun toplamı ve bir sabit ile çarpımı yine harmonik bir fonsiyona eşittir. Analitik fonksiyonlardan farklı olarak, iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmak zorunda değildir. Hatta  $f$  harmonik ise  $1/f$  ve  $f^{-1}$  fonksiyonları harmonik olmayabilir. Fakat bir harmonik fonksiyonun bir analitik fonksiyonla bileşkesi yine harmoniktir. En basit harmonik fonksiyon  $ax + by$  lineer fonksiyonudur.

**Tanım 3.4.6 (Harmonik Eşlenik)** Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan bir  $(u, v)$  fonksiyon çifti **eşlenik çift** şeklinde isimlendirilir ve  $v$  'ye  $u$  'nun **harmonik eşleniği** denir. Bu ifadeden elde edilen bir netice  $-u$  'nun,  $v$  'nin harmonik eşleniği olduğudur.

**Tanım 3.4.7 (Kanonik Gösterim)**  $f = h + \bar{g}$  gösterilişine  $f$  'in **kanonik gösterimi** denir. Bu ifadede  $h$ ,  $f$  'in **analitik kısmı** ve  $g$ ,  $f$  'nin **eş-analitik kısmı (co-analytic part)** olarak adlandırılır. Ayrıca  $h' = f_z$  ve  $g' = \bar{f}_{\bar{z}}$  fonksiyonları  $f$  'nin tanımlı olduğu bölge üzerinde analitiktir.

**Teorem 3.4.8** Basit bağlantılı  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  bölgesinde tanımlı kompleks değerli  $f = u + iv$  fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter koşul  $h$  ve  $g$  'nin verilen bölgede analitik olması şartıyla  $f = h + \bar{g}$  formunda ifade edilebilmesidir.

**Tanım 3.4.9 (Harmonik Yalınkat Fonksiyon)**  $\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı  $f$  harmonik fonsiyonu bire-bir ise  $f$  fonksiyonu **harmonik yalınkat fonksiyon** şeklinde isimlendirilir. Örnek vermemiz gerekirse  $f(z) = z - 1/\bar{z} + 2\log|z|$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$  birim diskinin dışından  $\mathbb{C}/\{0\}$  üzerine bir harmonik yalınkat fonksiyondur.  $f$  fonksiyonunun analitik kısmı  $h(z) = z + \log z$  ve eş-analitik kısmı ise  $g(z) = \log z - 1/z$  'dir. Buradan hareketle  $\log z$  fonksiyonu seçilen sabit bir dal üzerinde tek-değerli bir fonksiyondur.

Konform olması gerekmeyen harmonik yalınkat fonksiyonlara en basit örnek  $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$  ( $|\alpha| \neq |\beta|$ ) afin fonksiyonudur. Afin fonksiyonu bir çok önemli niteliğe haizdir. Örnek olarak  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemi kendi üzerine resmeden en genel harmonik yalınkat fonksiyon afin fonksiyondur. Bunun dışında da,  $\mathcal{D}$  basit bağlantılı

bir bölge olmak şartıyla,  $f$  afin fonksiyonu  $f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$  eşitliğini sağlayan tek harmonik yalınkat fonksiyondur.

Ayrıca daha önceki tanım ve teoremlerden, analitik  $f$  fonksiyonunun  $z$  noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter koşulun, bu noktada  $f'(z) \neq 0$  ( $\equiv J_f(z) \neq 0$ ) eşitsizliğinin gerçekleşmesi olduğunu biliyoruz. Lewy, 1936 yılında bir harmonik fonksiyonun yerel yalınkat olma şartını aşağıdaki gibi vermiştir.

**Teorem 3.4.10**  $f$  harmonik fonksiyonunun bir  $z_0$  noktasının bir komşuluğunda yerel yalınkat olması için gerek ve yeter koşul,  $z_0$  noktasında  $J_f(z) \neq 0$  ifadesini gerçeklemesidir (Lewy, 1936).

Yukarıdaki teoremden harmonik yalınkat bir fonksiyonun Jakobiyenin yalınkatlık karakterinin ortaya konması açısından büyük önem taşıdığını görüyoruz. Bir harmonik yalınkat fonksiyon ya yön-koruyan yada yön-değiştirendir. Eğer  $f$  yön-koruyan harmonik fonksiyon ise  $f$  yön-değiştiren harmonik fonksiyon olur. Konform fonksiyonlar yönkoruyan fonksiyonlardır.

Bu tez çalışmasında üzerinde durulan harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları, Jakobiyeni pozitif olan yani, yön-koruyan harmonik fonksiyonlardır.

$f = u + iv$  harmonik ise,  $f = h + \bar{g}$  kanonik ifadesi kullanılarak  $f$  'nin Jakobiyeni  $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$  şeklinde ifade edilebilir.  $f$  yön-koruyan ise  $|h'(z)| > |g'(z)|$  olduğu açıktır ve  $\frac{|f_z|}{|f_{\bar{z}}|} = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$  ifadesi gerçekleşir.

Teorem 3.4.10'a göre  $\mathcal{D}$  bölgesinde tanımlı  $f = h + \bar{g}$  kononik gösterime sahip harmonik fonksiyonunun yerel yalınkat ve yön-koruyan olması için gerek ve yeter koşul  $|g'(z)| < |h'(z)|$  ifadesinin gerçekleşmesidir.

**Tanım 3.4.11 (İkinci Dilatasyon)**  $\nu = g'/h'$  fonksiyonu  $f$  'nin ikinci dilatasyonu şeklinde isimlendirilir ve bu fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{V}$  şeklinde ifade edilir. Yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar için  $|\nu| < 1$  durumu gerçekleşir.

Ayrıca  $\mathbb{U}$  birim diski üzerinde harmonik  $f = h + \bar{g}$  fonksiyonu  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ve  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{-n} z^n$  olmak üzere  $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$   $0 \leq r < 1$  şeklinde seri açılıma sahiptir.

Yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinde araştırma yapan bilim adamları bazı normalizasyonlar yapılmışlardır. Bu gaye ile herhangi bir basit bağlantılı  $\mathcal{D}$  bölgesi yerine  $\mathbb{U}$  birim diski alınacaktır.

**Tanım 3.4.12 (Normalize Edilmiş Yön-Koruyan Harmonik Fonksiyonlar)**  $\mathbb{U}$  birim diski üzerinde tanımlı  $h$  ve  $g$  analitik fonksiyonlarına bağlı olacak şekilde  $f = h + \bar{g}$  şeklinde gösterildiğini biliyoruz. Ayrıca  $\mathbb{U}$  birim diski üzerinde harmonik  $f = h + \bar{g}$  fonksiyonu

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{-n} z^n$$

olmak üzere  $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$   $0 \leq r < 1$  şeklinde seri açılıma sahiptir. Burada verilen

seri açılımında  $\bar{a}_{-n}$  katsayısı yerine  $b_n$  yazarsak;  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

ifadesi elde edilir.  $f$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$ 'da yön-koruyan ve harmonik olduğundan Jakobiyeni pozitifdir. Dolayısıyla her  $z \in \mathbb{U}$  için  $|g'(z)| < |h'(z)|$  eşitsizliği gerçekleşir. Bu ifadeden yola çıkarak  $|h'(z)| \neq 0$  olduğu görülür. Dolayısıyla genelliği bozmadan  $h(0) = 0$  ve  $h'(0) = 1$  varsayılabilir.

$a_0 = b_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  normalizasyonunu sağlayan  $\mathbb{U}$  birim diskinde yön koruyan harmonik fonksiyonların sınıfı  $S_H$  ile gösterilir. Yapılan tanımlamaya dayanarak analitik fonksiyonlar sınıfı  $S$  ile  $S_H$  arasında  $S \subset S_H$  kapsama bağıntısı olduğu görülür. Normalizasyondan ötürü  $S_H$  sınıfına ait bir  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  fonksiyonu  $h(z)$  ve  $g(z)$   $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik olmak üzere

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} = h(z) + \overline{g(z)}$  açılımına sahiptir. Yön koruyan

özelliklerinden  $|b_1| < 1$  olmak zorundadır. Bu durumdan hareketle,  $f \in S_H$  ise  $(f - \overline{b_1 f}) / (1 - |b_1|^2) \in S_H$ 'dir. Dolayısıyla,  $S_H^0 = \{f \in S_H : g'(0) = b_1 = 0\}$  sınıfını tanımlayabiliriz.

Lewy'nin 1936 yılında Teorem 3.4.10'nun ispatlamasından yaklaşık kırk sekiz yıl sonra Clunie ve S. Small 1984 yılında, yön-koruyan harmonik fonksiyonların, analitik yalınkat fonksiyonların sahip olduğu temel özellikleri ve eşitsizlikleri

gerçekleyip gerçeklemediğini araştırdıkları makalelerini yayınladılar. Bu makaleler harmonik yalıncat fonksiyonlar teorisinin gelişiminde oldukça önemli bir yere sahiptir.

**Tanım 3.4.13 (Harmonik Koebe Fonksiyonu)** Clunie ve S. Small 1984 yılında yayınladıkları makalede analitik Koebe fonksiyonunun benzerini  $S_H^0$  sınıfı için aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}, \quad G(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere  $k_0 = H + \bar{G} \in S_H^0$  fonksiyonuna **harmonik Koebe fonksiyonu** denir.  $k_0$  fonksiyonu,  $\mathbb{U}$  birim diskini kompleks düzlemde  $(-\infty, -1/6]$  reel aralığının çıkarılması ile elde edilen bölge üzerine resmeder. Bunun dışında  $z=1$  noktası dışında  $\mathbb{U}$  birim disk üzerindeki her bir nokta için  $k_0(z) = -1/6$  sonucu daima bulunur (Clunie ve S. Small, 1984).

**Teorem 3.4.14**  $f \in S_H^0$  olmak üzere  $|f(z)| \geq \frac{1}{4} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$  eşitsizliği bütün  $z \in \mathbb{U}$  için sağlanır. Ayrıca  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/16\} \subset f(\mathbb{U})$  ifadesi bütün  $f \in S_H^0$  için gerçekleşir (Cluni ve S.Small, 1984)

Tüm bunlara ek olarak  $f = h + \bar{g}$  fonksiyonu yön-koruyan ise ikinci dilatasyonu  $\nu = g'/h'$ ,  $|\nu(z)| < 1$  şartını sağlar. Bu durumdan yola çıkarak  $f$  fonksiyonu  $S_H^0$  sınıfından alınmış bir fonksiyon ise  $g'(0) = 0$  olduğundan  $\nu'(0) = 0$  olduğu açıktır. Özetle  $f \in S_H^0$  sınıfına dahil fonksiyonların dilatasyonları **Schwarz fonksiyonudur**. Dolayısıyla Schwarz Lemması'ndan  $|\nu'(0)| \leq 1$  gerçekleşir. Eşitlik hali  $|c| = 1$  olmak şartıyla  $\nu(z) = cz$  fonksiyonu için geçerli olur.

Tıpkı  $S$  sınıfındakine benzer olarak  $S_H$  ve  $S_H^0$  sınıfları için de alt sınıflar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 3.4.15 (Yıldızlı Harmonik Fonksiyon)**  $\mathbb{U}$  birim diski belirtmek üzere  $f \in S_H^*$  ( $f \in S_H^{*0}$ ) yön koruyan harmonik fonksiyonunun görüntü bölgesi  $f(\mathbb{U})$ , orijine göre yıldızlı ise  $f \in S_H^*$  ( $f \in S_H^{*0}$ ) ifadesi yazılabilir.  $S_H^*$  ( $S_H^{*0}$ ) sınıfına ait olan

fonksiyonlara  $\mathbb{U}$  birim diski üzerinde **yıldızlı harmonik fonksiyon** denir ve analitik olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f \in S_H \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) > 0 \quad (z \in re^{i\theta}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

**Teorem 3.4.16**  $f = h + \bar{g}$  fonksiyonu  $h$  ve  $g$  'ye bağlı  $f(z)$  fonksiyonu

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklinde tanımlanmak üzere  $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leq 1$  eşitsizliği sağlanırsa  $f \in S_H^*$  olur (Silverman, 1998).

**Teorem 3.4.17**  $f \in S_H^0$  sınıfına ait herbir yıldızlı fonksiyon

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3} \frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \quad (|z| = r < 1)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu sınır mümkün olan en iyi sınırdır ve eşitlik hali  $f$  'in harmonik Koebe fonksiyonu  $k_0$  olması ile mümkündür.

### 3.5 Kesirli (Fractional) Diferansiyel Hesap Tekniği

Türev ve integral günümüzde kullanılan birçok teknolojinin temelini oluşturmuştur. Bununla birlikte doğal ve yapay düzeneklerin çalışma ilkelerini idrak etmede çok önemli bir araçtır.  $D = d/dx$  türev operatörü temel analiz ile ilgilenenler için oldukça iyi bilinen bir kavramdır. Kesirli diferansiyel, matematiksel analizin bir dalı olarak, kendi adından da anlaşılacağı gibi, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş halidir. Konu, diferansiyel hesap kadar eski olup Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğini keşfetmelerine kadar uzanır (Bayın, 2004). Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü vb. türevlerinin nasıl hesaplandığını biliyoruz fakat 5/2 nci türevini nasıl hesaplayabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyonun iki ya da üç defa integralini alabiliriz fakat 1/2 defa integralini alabilir miyiz? Leibniz 1695'te L'Hospital'a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak bilinir. Leibniz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu haline gelmiştir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grunwald ve

Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır (Loverro, 2004).

O zamandan bu yana hızla artan bir şekilde, kesirli diferansiyel denklemler oldukça fazla bilimsel süreçlere uygulandı ve incelenen bilimsel süreçleri çok daha iyi betimleyen sonuçlar elde edildi. Kesirsel hesap günümüzde sayısal analiz, kontrol teorisi, ısı iletimi, elektrik bilimi, mekanik, kaos ve fraktallar, viscoelasticity, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri gibi pek çok alanda uygulama alanlarına sahiptir.

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını idrak edebilmek için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekir bunlardan en önemlisi Gama fonksiyonudur. Çalışmalarımızın ilerleyen kısımlarında da görüleceği üzere gama fonksiyonu, kesirli diferansiyel ile doğrudan ilişkilidir. Gama fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir.

**Tanım 3.5.1 (Gamma Fonksiyonu)**  $\text{Re}\{z\} > 0$  için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlı fonksiyon Gamma Fonksiyonu olarak adlandırılır.

Gamma Fonksiyonun temel özellikleri aşağıdaki gibidir.

(i)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  ,  $\Gamma(1) = 1$

(ii)  $\Gamma(n) = (n-1)!$  ,  $n \in \mathbb{N}^+$

(iii)  $\Gamma(z) = 0$  olacak şekilde hiçbir  $z$  noktası yoktur.  $z = 0, -1, -2, \dots$  noktaları hariç

her yerde analitiktir ve  $z = -k$  noktasındaki rezidüsü  $\text{Res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$  şeklindedir.

**Tanım 3.5.2 (Riemann-Liouville Kesirsel İntegrali)**  $f(x) \in C([a, b])$  ve  $a < x < b$

ise,  $\lambda \in (-\infty, \infty)$  iken

$$D_a^{-\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}} d\xi$$

integraline  $\lambda$  mertebeli Riemann-Liouville kesirsel integrali adı verilir.

**Tanım 3.5.3 (Riemann-Liouville Kesirsel Türevi)**  $\lambda \in (0, 1)$  için

$$D_a^{\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\lambda}} d\xi$$

İfadesine  $\lambda$  mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi adı verilir .

Bu operatörlere Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri ya da kısaca R-L operatörleri de denmektedir.  $\lambda = 1/2$  özel halinde kesirsel türeve *yarı-türev* denir.

Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri için oldukça faydalı olan kesirsel integralin yarı grup niteliği aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

**Teorem 3.5.4** Herhangi bir  $f(x) \in C([a, b])$  için Riemann-Liouville kesirsel integrali,  $\lambda > 0, n > 0$  iken  $D_a^{-\lambda} D_a^{-n} f(x) = D_a^{-(\lambda+n)} f(x)$  eşitliğini sağlar (Oldham ve Spanier, 1974).

1978 yılında Owa, analitik fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirsel integralini ve kesirsel türevi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

**Tanım 3.5.5** Orijini kapsayan karmaşık  $z$  – düzleminin basit bağlantılı bir bölgesinde analitik olan ve  $z - \xi > 0$  iken  $\log(z - \xi)$  değerinin reel olması gerektiği için  $(z - \xi)^{\lambda-1}$  çok katlılığı kaldırılmış bir  $f(z)$  fonksiyonu için,  $\lambda$  mertebeli kesirsel integral

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z - \xi)^{1-\lambda}} d\xi, \quad (\lambda > 0)$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 3.5.6** Tanım 3.5.5 deki gibi kısıtlanmış ve  $(z - \xi)^{-\lambda}$  katlılığı kaldırılmış bir  $f(z)$  fonksiyonu için,  $\lambda$  mertebeli kesirsel türev

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z - \xi)^{\lambda}} d\xi, \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 3.5.7** Tanım 3.5.6 ile verilen varsayımlar altında, bir  $f(z)$  fonksiyonu için,  $n + \lambda$  mertebeli kesirsel türev

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\lambda} f(z), \quad (0 \leq \lambda < 1, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

şeklinde tanımlıdır.

Yukarıda verilen tanımlardan

$$D_z^{-\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\lambda)} z^{k+\lambda}, \quad (\lambda > 0),$$

$$D_z^{\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\lambda)} z^{k-\lambda}, \quad (0 \leq \lambda < 1),$$

$$D_z^{n+\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n-\lambda)} z^{k-n-\lambda}, \quad (0 \leq \lambda < 1, k > 0, n \in \mathbb{N}_0, k-n \neq -1, -2, \dots)$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan şu genel sonuç çıkarılabilir:

$$D_z^\lambda z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\lambda)} z^{k-\lambda}, \quad (0 \leq \lambda < 1, k > 0, k-\lambda \neq -1, -2, \dots).$$

**Tanım 3.5.8 ( $\lambda$  – Kesirli Operatör)** Yukarıda bahsedilen kesirsel türevin kuralını kullanarak  $\lambda$  – kesirli(fractional) operatörü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \Rightarrow D_z^\lambda f(z) = D_z^\lambda (z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots)$$

olduğunu daha önceki tanımlardan elde etmiştik.

$$D_z^\lambda f(z) = \Gamma(2-\lambda) z^\lambda D_z^\lambda f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} z^n$$

ifadesine  $\lambda$  – **kesirli(fractional) operatör** denir.

$D^\lambda f(z)$  ifadesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$D^\lambda f(z) = D f(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} D^\lambda f(z) = z f'(z),$$

$$D^\lambda (D^\delta f(z)) = D^\delta (D^\lambda f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(2-\delta)(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma(n+1-\lambda)\Gamma(n+1-\delta)} z^n,$$

$$D(D^\delta f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} z^n = z (D^\delta f(z))'$$

$$= \Gamma(2-\lambda) z^\lambda (\lambda D_z^\lambda + z D_z^{\lambda+1} f(z)),$$

$$\lambda = 0 \text{ için, } \frac{D(D^\lambda f(z))}{D^\lambda f(z)} = z \frac{f'(z)}{f(z)},$$

$$\lambda = 1 \text{ için de } \frac{D(D^\lambda f(z))}{D^\lambda f(z)} = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \text{ (Aydoğan, 2013).}$$

#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara değinilecektir. Çalışmamızda öncelikle kesirli (fractional) operatör ile tanımlanan harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki amacımız kesirli (fractional) operatör ile tanımlanmış harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıftaki fonksiyonların genel katsayıları için bir üst sınır belirlemektir. Ayrıca, bu sınıfa ait ekstrem noktaları, büyüme ve bükülme teoremleri, kapalılık özelliği gibi bazı önemli karakterizasyon özellikleri üzerinde durulacaktır. Bu bölümde yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlar “TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics” adlı dergide kabul edilmiş olup basım aşamasındadır.

##### 4.1 $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$ Sınıfı

**Tanım 4.1.1**  $HW$ ,  $\mathbb{U}$  birim diskinde tanımlı normalize edilmiş yön-koruyan harmonik fonksiyonların bir sınıfı olsun.

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, |b_1| < 1 \quad (4.1.1)$$

$\mathbb{U}$  da analitik olan  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  şeklindeki fonksiyonlardır.

**Tanım 4.1.2**  $HW$  sınıfının alt sınıfını  $\overline{HW}$  şeklinde tanımlayalım ve bu alt sınıf

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^n, \quad |b_1| < 1. \quad (4.1.2)$$

olmak üzere  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  şeklindeki fonksiyonlardan oluşur.

**Tanım 4.1.3**  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ , (4.1.1) denklemi ile verilen harmonik ünivalent fonksiyonları ele alalım.  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ve  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$  olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-\beta)(1-t) \frac{D^\lambda f(z)}{z} + (\beta+t) \frac{(D^\lambda f(z))'}{z'} + \beta t \frac{(D^\lambda f(z))''}{z''} - 2\beta t \right\} \geq \alpha \quad (4.1.3)$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı  $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  şeklinde tanımlayacağız. Ayrıca  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha) = HW(\lambda, \beta, t, \alpha) \cap \overline{HW}$  olsun.

$\beta = 0$  aldığımızda,  $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfı aşağıdaki gibi  $HG(\lambda, t, \alpha)$  harmonik fonksiyon sınıfına dönüşür:  $HG(\lambda, t, \alpha) \equiv HW(\lambda, 0, t, \alpha)$

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-t) \frac{D^\lambda f(z)}{z} + t \frac{(D^\lambda f(z))'}{z'} \right\} \geq \alpha. \quad (4.1.4)$$

$\beta = 1$  aldığımızda,  $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfı aşağıdaki gibi  $HA(\lambda, t, \alpha)$  harmonik fonksiyon sınıfına dönüşür:  $HA(\lambda, t, \alpha) \equiv HW(\lambda, 1, t, \alpha)$

$$\operatorname{Re} \left\{ (1+t) \frac{(D^\lambda f(z))'}{z'} + t \frac{(D^\lambda f(z))''}{z''} - 2t \right\} \geq \alpha. \quad (4.1.5)$$

#### 4.2 $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları

Öncelikle  $HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  fonksiyon sınıfı için gerekli katsayı koşullarını vereceğiz. Daha sonra bu koşulların  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfı için de yeterli sonuçlar verdiğini göstereceğiz.

**Teorem 4.2.1**  $h$  ve  $g$  fonksiyonları (4.1.1) denklemiyle verilen fonksiyonlar ve  $f = h + \bar{g}$  için  $f(z) \in HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \leq 1 - \alpha \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.**  $\operatorname{Re} w \geq \alpha$  gerçeğini kullanarak  $|w+1-\alpha| \geq |w-1-\alpha|$  eşitsizliğini ispatlamak istiyoruz.

$$w = (1-\beta)(1-t) \frac{D^\lambda f(z)}{z} + (\beta+t) \frac{(D^\lambda f(z))'}{z'} + \beta t \frac{(D^\lambda f(z))''}{z''} - 2\beta t$$

Yukarıdaki eşitsizliğin ispatı için  $|w+1-\alpha| - |w-1-\alpha| \geq 0$  olduğunu göstermek yeterlidir. O halde;

$$\begin{aligned}
|w+1-\alpha| &= \left| (1-\beta)(1-t) \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \right. \\
&\quad + (\beta+t) \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \\
&\quad + \beta t \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) a_n z^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n (\bar{z})^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) b_n (\bar{z})^{n-1} \right) - 2\beta t + 1 - \alpha \Big| \\
&\geq 2 - \alpha - \sum_{n=2}^{\infty} \left| 1 + (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| |z^{n-1}| \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - (\beta+t)(n+1) + \beta t(1+n^2) \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| |\bar{z}^{n-1}|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|w-1-\alpha| &= \left| (1-\beta)(1-t) \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \right. \\
&\quad + (\beta+t) \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \\
&\quad + \beta t \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) a_n z^{n-1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n(\bar{z})^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) b_n(\bar{z})^{n-1} \Big) - 2\beta t - 1 - \alpha \Big| \\
& \leq \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \left| 1 + (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| |z^{n-1}| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - (\beta+t)(n+1) + \beta t(1+n^2) \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| |z^{n-1}| \\
& |w+1-\alpha| - |w-1-\alpha| \geq 2 \left[ 1 - \alpha - \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \right] \geq 0.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Not 4.2.1** Teorem 4.2.1’deki (4.2.1) nolu katsayı eşitsizliğini kullanarak yazılan

$$\begin{aligned}
f(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n}{\left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right|} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} z^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{w}_n}{\left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right|} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} (\bar{z})^n
\end{aligned}$$

fonksiyonu için, aşağıdaki ifade açıktır.

$$\frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{n=2}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| \right) = 1.$$

**Teorem 4.2.2.**  $f = h + \bar{g} \in \overline{HW}$  ve  $f(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \leq 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.**  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha) \subset HW(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olduğunu Teorem 4.2.1 den biliyoruz. O halde ispatın geri kalanı için  $f(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olduğunu varsayalım.  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ (1-\beta)(1-t) \frac{D^\lambda f(z)}{z} + (\beta+t) \frac{(D^\lambda f(z))'}{z'} + \beta t \frac{(D^\lambda f(z))''}{z''} - 2\beta t \right\} \\ & = \operatorname{Re} \left\{ (1-\beta)(1-t) \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \right. \\ & \quad + (\beta+t) \left( 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n (\bar{z})^{n-1} \right) \\ & \quad + \beta t \left( 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) a_n z^{n-1} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n b_n (\bar{z})^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} n(n-1) b_n (\bar{z})^{n-1} \right) - 2\beta t \left. \right\} \\ & = \operatorname{Re} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (1-\beta)(1-t) + (\beta+t)n + n\beta t + n(n-1)\beta t \right] \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^{n-1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1-\beta)(1-t) - (\beta+t)n + n\beta t + n(n-1)\beta t \right] \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} b_n(\bar{z})^{n-1} \Big\} \\
& \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| r^{n-1} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| r^{n-1} \geq \alpha.
\end{aligned}$$

Burada  $z = r \rightarrow 1$  olduğunda (4.2.2) eşitsizliği sağlanmış olup Teorem 4.2.2'nin ispatı tamamlanır.

### 4.3 Ekstrem Noktalar

Bu kısımda  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfının ekstrem noktaları incelenmiştir.

**Teorem 4.3.1**  $f = h + \bar{g} \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olmak üzere  $f(z)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmak koşuluyla

$$n = 2, 3, \dots \text{ için } X_1 \geq 0, Y_1 \geq 0, X_1 + \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0$$

$$f(z) = X_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} X_n h_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n g_n(z), \quad z \in \mathbb{U} \quad (4.3.1)$$

aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$h_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{\left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} z^n \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4.3.2)$$

$$g_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{\left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} (\bar{z})^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3.3)$$

**İspat.**  $f(z)$ , (4.3.1) denkleminde tanımlandığı haliyle  $h_n(z)$  ve  $g_n(z)$  fonksiyonlarını yerine yazalım. Bu durumda,

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{|(\beta+t)(n-1)+\beta t(1+n^2)+1|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} X_n z^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{|(\beta+t)(n+1)-\beta t(1+n^2)-1|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} Y_n (\bar{z})^n.$$

yazılır. (4.2.2) eşitsizliğden

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1-\alpha}{|(\beta+t)(n-1)+\beta t(1+n^2)+1|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} \right| |X_n|$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1-\alpha}{|(\beta+t)(n+1)-\beta t(1+n^2)-1|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} \right| |Y_n|$$

$$= (1-\alpha) \left( \sum_{n=2}^{\infty} |X_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| \right) = (1-\alpha)(1-X_1) \leq 1-\alpha$$

elde edilir. Böylece  $f(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olur.

Diğer yandan  $f(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olsun

$$X_1 = 1 - \left( \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \right), \quad X_1 > 0.$$

Buradan

$$X_n = \frac{|(\beta+t)(n-1)+\beta t(1+n^2)+1|}{1-\alpha} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n|, \quad (n \geq 2)$$

$$Y_n = \frac{|(\beta+t)(n+1)-\beta t(1+n^2)-1|}{1-\alpha} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n|, \quad (n \geq 1),$$

sonucunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| (\bar{z})^n \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha) X_n}{\left|(\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1\right|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} z^n \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha) Y_n}{\left|(\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1\right|} \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)} (\bar{z})^n \\
 &= \left[ 1 - \left( \sum_{n=2}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \right] z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(z) X_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) Y_n \\
 &= X_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} X_n h_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n g_n(z).
 \end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

#### 4.4 Kapalılık Özelliği

Bu kısımda  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfının kapalılık özelliği incelenmiştir.

**Teorem 4.4.1**  $f_{ni}(i=1, 2, \dots)$ ,  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfına ait ise  $\Phi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i f_{ni}(z)$

fonksiyonu da  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfındadır ve  $f_{ni}(z)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f_{ni}(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{ni} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{ni} (\bar{z})^n \quad (i=1, 2, \dots, 0 \leq \sigma_i < 1, \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i = 1). \quad (4.4.1)$$

**İspat.** (4.2.2) denkleminde  $f_{ni}(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$ , olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_{ni}| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_{ni}| \leq 1-\alpha, \quad (i=1,2,\dots).
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_{ni} \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i b_{ni} \right) (\bar{z})^n.$$

Teorem 4.2.2'ye göre,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_{ni} \right| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i b_{ni} \right| \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left| (\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_{ni}| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1 \right| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_{ni}| \right\} \\
& \leq (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i = 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Böylece  $\Phi(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olur. Sonuç olarak  $\overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  sınıfı kapalıdır.

#### 4.5. Büyüme ve Bükülme Teoremleri

**Teorem 4.5.1**  $f = h + \bar{g} \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$ ,  $\beta \geq 1$ ,  $|z| = r < 1$ , olmak üzere

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} - \frac{-1 + 2(\beta + t - \beta t)}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} |b_1| \right) \frac{2 - \lambda}{2} r^2, \quad (4.5.1)$$

ve

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} - \frac{-1 + 2(\beta + t - \beta t)}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} |b_1| \right) \frac{2 - \lambda}{2} r^2 \quad (4.5.2)$$

şeklindeki sınırlara sahiptir.

**İspat.**  $f(z) \in \overline{HW}(\lambda, \beta, t, \alpha)$  olsun. (4.2.2.) denkleminde aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$f(z) = \left| z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| (\bar{z})^n \right| = \left| z + |b_1| (\bar{z}) - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| z^n - |b_n| (\bar{z})^n) \right|$$

$$\geq (1 - |b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^2$$

$$\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1 - \alpha}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} \cdot \frac{2 - \lambda}{2} \times$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{1 + \beta + t(1 + 5\beta)}{1 - \alpha} \right) \frac{2}{2 - \lambda} (|a_n| + |b_n|) r^2 \right]$$

$$\geq (1 - |b_1|)r - \frac{1 - \alpha}{1 + \beta + t(1 + 5\beta)} \frac{2 - \lambda}{2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{(\beta+t)(n-1) + \beta t(1+n^2) + 1}{1-\alpha} \right) \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{(\beta+t)(n+1) - \beta t(1+n^2) - 1}{1-\alpha} \right) \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \right] r^2 \\
& \geq (1-|b_1|)r - \frac{1-\alpha}{1+\beta+t(1+5\beta)} \cdot \frac{2-\lambda}{2} \times \left( 1 - \frac{-1+2(\beta+t-\beta t)}{1-\alpha} \right) |b_1| r^2 \\
& = r - |b_1| r - \left( \frac{1-\alpha}{1+\beta+t+5\beta t} - \frac{-1+2(\beta+t-\beta t)}{1+\beta+t+5\beta t} |b_1| \right) \frac{2-\lambda}{2} r^2.
\end{aligned}$$

(4.5.2) eşitsizliği benzer ifadeler kullanılarak ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Daha önce elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa ispatı yapılan teoremlerden hangi sonuçların elde edilebileceği incelenmiştir.

Teorem 4.2.2'nin özel parametreler için alacağı sonuçları inceleyelim.

**Sonuç 5.1**  $f = h + \bar{g} \in \overline{HG}(\lambda, t, \alpha) \equiv HG(\lambda, t, \alpha) \cap \overline{HW}$  olsun.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |t(n-1)+1| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |t(n+1)-1| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \leq 1-\alpha .$$

katsayı eşitsizliğinde  $\lambda = 0$  için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |t(n-1)+1| |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |t(n+1)-1| |b_n| \leq 1-\alpha .$$

**Sonuç 5.2**  $f = h + \bar{g} \in \overline{HA}(\lambda, t, \alpha) \equiv HA(\lambda, t, \alpha) \cap \overline{HW}$  olsun.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |n(1+t+nt)| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |n(1+t-nt)| \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} |b_n| \leq 1-\alpha$$

katsayı eşitsizliğinde,  $\lambda = 0$  durumu için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |n(1+t+nt)| |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |n(1+t-nt)| |b_n| \leq 1-\alpha .$$

Şimdi de Teorem 4.5.1 özel sonuçlarını inceleyelim.

**Sonuç 5.3**  $f \in \overline{HG}(\lambda, t, \alpha)$  olmak üzere,

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \left( \frac{1-\alpha}{t+1} - \frac{2t-1}{t+1} |b_1| \right) \frac{2-\lambda}{2} r^2$$

ve

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \left( \frac{1-\alpha}{t+1} - \frac{2t-1}{t+1}|b_1| \right) \frac{2-\lambda}{2} r^2$$

fonksiyoları için  $\lambda = 0$  durumunda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \left( \frac{1-\alpha}{t+1} - \frac{2t-1}{t+1}|b_1| \right) r^2$$

ve

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \left( \frac{1-\alpha}{t+1} - \frac{2t-1}{t+1}|b_1| \right) r^2.$$

**Sonuç 5.4**  $f \in \overline{HA}(\lambda, t, \alpha)$ , olmak üzere,

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \left( \frac{1-\alpha}{2(1+3t)} - \frac{1}{2(1+3t)}|b_1| \right) \frac{2-\lambda}{2} r^2$$

ve

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \left( \frac{1-\alpha}{2(1+3t)} - \frac{1}{2(1+3t)}|b_1| \right) \frac{2-\lambda}{2} r^2$$

fonksiyoları için  $\lambda = 0$  durumunda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \left( \frac{1-\alpha}{2(1+3t)} - \frac{1}{2(1+3t)}|b_1| \right) r^2$$

ve

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \left( \frac{1-\alpha}{2(1+3t)} - \frac{1}{2(1+3t)}|b_1| \right) r^2 .$$



## KAYNAKLAR

- Ahlfors, L.V., 1966, Lectures on Quasiconformal Mappings, *D. Van Nostrand Company, Inc.*, Princeton, New Jersey.
- Alexander J.W., 1915, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann.of Math.*, 17, 12-22
- Aydoğan, M., Kahramaner, Y., Polatoğlu, Y., 2013, Close-to Convex Functions Defined by Fractional Operator ,*Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, no. 56, 2769-2775.
- Bayın, S., 2004, Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, *Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi*, Eylül 2004, ISBN 975-443-397-6.
- Bieberbach, L., 1916, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreiss vermitteln.* S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 940-955.
- Branges, L. De, 1985, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, 154 (1-2), 137-152.
- Brannan D. A. ve Kirwan, W. E., 1969, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.*, Vol. 1, No. 2, pp 431-443.
- Caratheodory, C., 1913, Zur randerzuordnung bei konformer abbildung, *Nachr. Königl. Ges. Wiss Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 509–518.
- Clunie, J., and Sheil-Small, T., 1984, Harmonic univalent functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.*, 9(3) , 3-25.
- Duren P L., 1983. Univalent Functions, *Springer–Verlag*, New York.
- Goodman A.W., 1983, Univalent Functions, *Vols. I and II, Polygonal Publishing House*, Washington, New Jersey.
- Gronwall, T. H., 1914/15, Some remarks on conformal representation, *Ann. Math.*, 16, 72-76.
- Koebe P., 1907, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nach. Ges. Wiss. Gottingen* 191-210.
- Lewy, H., 1936, On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer.Math.Soc.*, 42, 689–692.

- LOVERRO, A., 2004. Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer, *Deprtment of Aerospace and Mechanical Engineering* University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- Nevanlinna, R., 1920-1921, Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, *Översiktav Finska Vetenskaps, Societetens Förhandlingar*, No. 6 63 1-21
- Oldham, K. B. ve Spainer, J., 1974, The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York.
- Owa, S., 1978, On the distortion theorems I, *Kyungpook Math. J.* (18): 53-59.
- Robertson, M. S., 1936, On the theory of univalent functions, *Ann. Math.*, Vol. 37, pp 374-408.
- Silverman, H., 1998, Harmonic univalent functions with negative coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, **220** (1) , 283–289.
- Strohhacker E., 1933. Beitrage Zur Theorie der Schlichten Functionen, *Math. Zeit.*, Vol. 37, pp 356-380.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Yasemin BAĞCI  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : BATMAN  
**Telefon** : 05534870188  
**Faks** : ---  
**e-mail** : yasemin\_bagci72@hotmail.com

### EĞİTİM

| Derece     | Adı, İlçe, İl                    | Bitirme Yılı |
|------------|----------------------------------|--------------|
| Lise       | : Fatih Lisesi, Batman           | 2005         |
| Üniversite | : Dicle Üniversitesi, Diyarbakır | 2011         |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl       | Kurum                         | Görevi   |
|-----------|-------------------------------|----------|
| 2012-2013 | Batman Final Eğitim Kurumları | Öğretmen |
| 2014-     | Batman Zübeyde Hanım M.T.A.L. | Öğretmen |

**UZMANLIK ALANI** : Kompleks Analiz

**YABANCI DİLLER**: İngilizce

### YAYINLAR

“NEW CLASSES OF HARMONIC FUNCTIONS DEFINED BY FRACTIONAL OPERATOR”  
 TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, in press.