

**KLASİK KREDİBİLİTE MODELLERİNDE KREDİBİLİTE
FAKTÖRÜNÜN İNCELENMESİ**

ABDURRAHMAN ERDAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞUSTOS 2013
ANKARA**

Abdurrahman ERDAL tarafından hazırlanan “KLASİK KREDİBİLİTE MODELLERİNDE KREDİBİLİTE FAKTÖRÜNÜN İNCELENMESİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Uğur ÖZCAN

.....

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, (T. F.) G. Ü.

Tez Savunma Tarihi: 01/08/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Abdurrahman ERDAL

KLASİK KREDİBİLİTE MODELLERİNDE KREDİBİLİTE FAKTÖRÜNÜN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Abdurrahman ERDAL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2013

ÖZET

Kredibilite, ağırlıklı tahmin değerinin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma işlemi, Z kredibilite faktörü ile yapılmaktadır. Z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler, kredibilite modelleri olarak isimlendirilir. Kredibilite modelleri sınırlı dalgalanmalı kredibilite ve klasik kredibilite modelleri olmak üzere iki ana başlık altında incelenebilir. Bu yüzden Z kredibilite faktörünün belirlenmesi önemlidir. Bazı durumlarda Z kredibilite faktörünün değeri 0 almak zorunda kalınabilir. Bu klasik kredibilitenin iyi çalışmadığı durumlardır. Bunun nasıl yapıldığını göstermek amacıyla, öncelikle klasik kredibilite modellerinde prim hesaplamasının Türkiye Sigorta Birliğinden aldığımız 2010, 2011 ve 2012 verileri kullanılarak Bühlmann-Straub modeli yardımıyla hasar tutarı modellemesi yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında ise, Z kredibilite faktörünü incelemek amacıyla, Matlab programında Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak, kredibilite faktörünün aralık tahmini incelenerek sonuçlar yorumlanmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Bayesci İstatistik, Kredibilite Modelleri, Bühlmann Modeli, Bühlmann-Straub Modeli, Kredibilite Faktörü.
Sayfa Adedi : 67
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

STUDYING CREDIBILITY FACTOR IN CLASSIC CREDIBILITY MODELS
(M. Sc. Thesis)

Abdurrahman ERDAL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
August 2013

ABSTRACT

Credibility is a method used to measure the weighted estimation value. The process of weighting is done with the Z credibility factor. There are some methods to specify Z value. These methods are named as Credibility models. Credibility models are examined in two main groups as the model of restricted fluctuation credibility and classic credibility. Because of this reason (so), it is important to set Z credibility factor. In some situation, the value of Z credibility factor must have been taken as 0. These are the cases that the classic credibility does not work. To show how to do this, firstly, the evaluation of Premium in classic credibility models using the 2010, 2011, 2012 data gathered from Turkish Insurance Association by the help of Bühlmann-Straub model claim results modeling was carried out. However, in the study of simulation, for the purpose of investigation of the Z Credibility Factor, the results are interpreted with the interval estimation investigation by the help of Monte Carlo Simulation method in Matlab Programming.

Science Code : 205.1.066

**Key Words : Bayesian Statistics, Credibility Models, Bühlmann Models,
Bühlmann-Straub Models, Credibility Factor.**

Page Number : 67

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Meral EBEGİL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL' e ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Tez İzleme Komitemde yer alan Sayın Hocalarım Prof. Dr. Hülya BAYRAK ve Doç. Dr. Uğur ÖZCAN' a ve ayrıca desteklerinden dolayı diğer hocalarıma, aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiv
1. GİRİŞ	1
2. İSTATİSTİKSEL KAVRAMLAR	4
2.1. Koşullu Dağılımlar	4
2.2. Koşullu Beklenen Değer	5
2.3. Parametrik Olmayan Sapmasız (Yansız) Tahmin Ediciler	7
3. KREDİBİLİTE KAVRAMI.....	9
4. KREDİBİLİTE MODELİ.....	12
4.1. Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite Yaklaşımı	12
4.1.1. Tam kredibilite yaklaşım	14
4.1.2. Kısmi kredibilite yaklaşım	17
4.2. Klasik Kredibilite Modelleri	19
4.2.1. Bayesci yaklaşım.....	19
4.2.2. Bühlmann kredibilite yaklaşımı	22
4.2.3. Bühlmann-Straub kredibilite modeli	30

Sayfa

5. VERİ ANALİZİ.....	35
5.1. Trafik Sigortası Verileri Kullanılarak Bühlmann-Straub Modeli İle Toplam Hasar Tutarının Hesaplanması	35
5.2. Kredibilite Faktörünün İncelenmesi İçin Monte Carlo Simülasyon Çalışması.....	41
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	63
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	67

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. 10 tane sigortalının bulunduğu portföyün 10 yıllık verileri.....	9
Çizelge 4.1. 20 tane risk grubunun 10 yıllık ortalama hasar tutarları.....	28
Çizelge 4.1. (Devamı) 20 tane risk grubunun 10 yıllık ortalama hasar tutarları.....	29
Çizelge 4.2. Risk grupları için kredibilite prim değerleri.....	30
Çizelge 5.1. Araç türüne göre hasar tutarları.....	36
Çizelge 5.2. Araç türüne göre toplam hasar sayıları.....	37
Çizelge 5.3. Araç türüne göre toplam sigortalı sayıları.....	37
Çizelge 5.4. Araç türüne göre primler.....	37
Çizelge 5.5. Araç türüne göre sigortalı başına ortalama hasar tutarları.....	38
Çizelge 5.6. Araç türüne göre 2013 yılına ait hasar tutarları.....	40
Çizelge 5.7. $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ parametre değerleri için simülasyon verileri.....	44
Çizelge 5.8. $\theta_i \sim N(50,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	59
Çizelge 5.9. $\theta_i \sim N(100,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	59
Çizelge 5.10. $\theta_i \sim N(200,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	59
Çizelge 5.11. $\theta_i \sim N(50,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	60
Çizelge 5.12. $\theta_i \sim N(100,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	60
Çizelge 5.13. $\theta_i \sim N(200,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	60

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.14. $\theta_i \sim N(50,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	61
Çizelge 5.15. $\theta_i \sim N(100,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	61
Çizelge 5.16. $\theta_i \sim N(200,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı.....	61

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	45
Şekil 5.2. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	46
Şekil 5.3. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	46
Şekil 5.4. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	47
Şekil 5.5. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	47
Şekil 5.6. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	48
Şekil 5.7. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	48
Şekil 5.8. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	49
Şekil 5.9. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	49
Şekil 5.10. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	50
Şekil 5.11. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	50
Şekil 5.12. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	51
Şekil 5.13. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	51

Şekil	Sayfa
Şekil 5.14. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	52
Şekil 5.15. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	52
Şekil 5.16. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	53
Şekil 5.17. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	53
Şekil 5.18. Matlab programında $\theta_i \sim N(100,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	54
Şekil 5.19. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	54
Şekil 5.20. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	55
Şekil 5.21. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,81)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	55
Şekil 5.22. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	56
Şekil 5.23. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	56
Şekil 5.24. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,400)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	57
Şekil 5.25. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	57
Şekil 5.26. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	58
Şekil 5.27. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,1600)$ ve $X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları.....	58

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
Z	Kredibilite faktörü
μ	Hipotetik ortalamaların beklenen değeri
v	Süreç varyansının beklenen değeri
α	Hipotetik ortalamaların varyansı

1. GİRİŞ

Kredibilite kuramı, geçmiş hasar bilgileri bilinen benzer risk birimlerinden oluşan bir grupta, herhangi bir birimin gelecek dönemdeki beklenen hasarların kestiriminde kullanılan yöntemleri inceler [Frees ve ark., 2001].

İstatistiksel olarak, kredibilite teorisi sonuca sezgisel olmayan bir biçimde ulaşmayı hedefleyen bir yöntemdir. Önsel bilginin varlığında, örnek ortalaması veya başka sapmasız tahmin ediciler kullanılabilir. Ancak kredibilite teorisi, bu deneyime sadece kısmi ağırlık verir ve geri kalan ağırlığı diğer (güncel) bilgilerden oluşan tahmin ediciye verir. Kredibilite teorisi, sigortacının bu sorununa nicel olarak çözüm getirmesini sağlayan yöntemleri içerir [Klugman ve ark., 2004].

Kredibilite teorisi, 1890'ların sonlarına doğru işverenlerin mesuliyet sigortalarının fiyatlandırma çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. [Mowbray, 1914].

Kredibilite konusunda ilk tanım Mowbray (1914) tarafından yapılmıştır. Mowbray çalışmasında, poliçelerin fiyatlandırılması amacıyla bir riske ilişkin geçmişe ait bilgi ve tecrübelerin miktarını “*kredibilite*” olarak tanımlamıştır. Bu nedenle, kredibilite, hasar aktüerya biliminde (casualty actuarial science) en önemli yöntemlerden birisidir [Mowbray, 1914].

Whitney, gelecek dönemdeki hasarın, bireyin hasar bilgisi ile risk sınıfına ilişkin hasar bilgisinin ağırlıklandırılmış biçiminde elde edileceğini göstermiştir. [Whitney, 1918].

Bailey 1945 ve 1950 yıllarında yayınladığı makaleleriyle klasik kredibilite ile en küçük kareler yaklaşımının temelini oluşturmuştur. Modern kredibilite teorisinin kurucusu sayılan Bailey'in çalışmaları kredibilite teorisine Bayesci (Bayesian) metodoloji ile yol göstermiştir [Bailey, 1945; Bailey, 1950].

Bühlmann 1967’de, dağılımdan bağımsız, Bayes yönteminin en iyi doğrusal yaklaşımı şeklinde ifade edilebilecek, bir kredibilite formülü elde ederek Bühlmann kredibilite modelini oluşturmuştur [Bühlmann, 1967]. Bu çalışmanın ardından Bühlmann ve Straub (1970), riske maruz kalan birim sayılarının bireylere göre farklılık göstermesi durumunu dikkate alıp Bühlmann modelinin genelleştirilmiş hali olan Bühlmann-Straub kredibilite modelini sunmuşlardır. Bühlmann-Straub kredibilite modelinde, varyans homojenliği varsayımı bozularak, modele varyans heterojenliği özelliği eklenmiştir [Bühlmann ve Straub, 1970].

Daha sonraki yıllarda, iyi bilinen bazı istatistiksel modeller, kredibilite teorisine uygulanmıştır. Bu çalışmalara örnek olarak varyans bileşenleri modelleri verilebilir [Dannenburg, 1995]. Dannenburg ve ark. (1996), kredibilite modellerinin açıklanması zor olan risk parametresi koşulunun oluşturulması durumunda, gruplar veya bireyler arasında birden fazla risk parametresi olması nedeniyle analizin zorlaşacağını, bunun yerine risk değişkenlerinin birbirinden bağımsız varyans bileşenlerine ayrılmasının kolaylık sağlayacağını belirtmiş ve kredibilite kestiricilerinin elde edilmesinde varyans bileşenleri modelini kullanmıştır [Dannenburg ve ark. 1996].

Gau ve ark. (2008), kredibilite faktörünü özellikle de kredibilite faktörünün aralık tahminini incelemişlerdir [Gau ve ark., 2008].

Wen ve Deng (2009), risklerin bağımlı olduğu durumda kredibilite primlerini incelemişlerdir. Risklerin eşit korelasyon yapılarını açıklamak için Bühlmann kredibilite formülünü geliştirmişler ve bu modelde parametre tahminlerini dikkate almışlardır [Wen ve Deng, 2009].

Atanasiu (2009), Bühlmann-Straub kredibilite modelinin bazı uzantılarını sunmuştur. Daha sonra kovaryans yapılarına dayalı olarak oluşan güncellenmiş kredibilite formülünü tanımlamıştır. Yeni ayarlanan bu kredibilite primi, önceki dönem ve geçerli olan dönemdeki hasarlarda net prim fiyatının ağırlıklı ortalaması olarak hesaplanabileceği gösterilmiştir [Atanasiu V., 2009].

Tez' in ikinci bölümünde gerekli olan bazı istatistiksel kavramlar tanımlanmıştır. Üçüncü bölümünde sigortacılıkta kredibilite kelimesinin ne anlama geldiğini anlatabilmek amacıyla kredibilite kavramından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde kredibilite modelleri açıklanmıştır. Son bölümde ise kredibilite modellerinde önemli bir yeri olan kredibilite faktörü incelenmiş ve gerçek bir veri üzerinde Bühlmann-Straub kredibilite modelini kullanarak, hasar tutarı modellemesi yapılmıştır. Ayrıca bu bölümde, MATLAB paket programından yararlanılarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli için, farklı yığın ortalaması ve varyansı kullanarak 1000 tekrara dayalı bir simülasyon çalışması yapılmış ve Z kredibilite faktörünün uygun ve uygun olmadığı durumlar incelenmiştir. Hesaplanan kredibilite faktörlerini incelemek amacıyla bu veriler histogramlarla özetlenmiş ve uygun olmayan sonuçlar belirlenerek gerekli yorumlamalar yapılmıştır. Diğer bir ifadeyle, kredibilite faktörü tahmin değerlerinin, farklı durumlarda nasıl hareket ettikleri belirlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

2. İSTATİSTİKSEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kredibilite teorisine geçiş için gerekli olan bazı istatistiksel kavramlar sunulacaktır.

2.1. Koşullu Dağılımlar

X ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu (o.o.f.) ya da ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.o.y.f.) $f_{X,Y}(x, y)$ ve sırasıyla X ve Y rassal değişkenlerine ait marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ ile gösterilsin. $Y=y$ olarak verilmişken X rassal değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (2.1)$$

şeklindedir. X ve Y rassal değişkenleri bağımsız ise,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

dır. Bu durumda, Eş. (2.1),

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

şeklini alır. Böylece X rassal değişkeninin marjinal ve koşullu dağılımlarının aynı olduğunu gözlemlenebilir.

Eş. (2.1) dikkate alındığında,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \quad (2.2)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Buradan ortak dağılımların, marjinal ve koşullu dağılımların bir fonksiyonu olduğu gösterilir. X rassal değişkeninin marjinal dağılımı, ortak dağılımın y 'ye göre integralinin alınması ile elde edilir. Yani,

$$f_X(x) = \int_{y \in D_Y} f_{X,Y}(x,y) dy$$

dır. Buradan Eş. (2.2)' deki bilgiyi kullanarak,

$$f_X(x) = \int_{y \in D_Y} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy \quad (2.3)$$

elde edilir.

2.2. Koşullu Beklenen Değer

Önceki bölümde olduğu gibi, X ve Y , $Y=y$ verilmişken X rassal değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X|Y}(x|y)$ olan iki sürekli rassal değişken olsun. Bu durumda koşullu beklenen değer,

$$E(X|Y = y) = \int_{x \in D_X} x f_{X|Y}(x|y) dx \quad (2.4)$$

dır. Eğer rassal değişkenler kesikli ise, bu durumda koşullu beklenen değer,

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in D_X} x f_{X|Y}(x|y)$$

şeklinde ifade edilir. $E(X|Y)$ ' de bir rassal değişkendir. Çünkü $E(X|Y)$, X rassal değişkeninin bir fonksiyonudur. $E(X|Y)$ ' nin beklenen değeri,

$$E[E(X|Y)] = E(X). \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Eş.(2.3) ve Eş.(2.4)' den

$$\begin{aligned}
E[E(X|Y)] &= \int_{y \in D_y} E(X|Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_{y \in D_y} \int_{x \in D_x} x f_{X|Y}(x|y) dx f_Y(y) dy \\
&= \int_{x \in D_x} x \int_{y \in D_y} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy dx \\
&= \int_{x \in D_x} x f_X(x) dx \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Kesikli durum için ispat benzer şekilde yapılır.

$$\begin{aligned}
E[E(X|Y)] &= \sum_{y \in D_y} E(X|Y) f_Y(y) \\
&= \sum_{y \in D_y} \sum_{x \in D_x} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \\
&= \sum_{x \in D_x} x \sum_{y \in D_y} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \\
&= \sum_{x \in D_x} x f_X(x) \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir [Klugman ve ark., 1998].

2.2. Parametrik Olmayan Sapmasız (Yansız) Tahmin Ediciler

$\hat{\theta}$, θ parametresinin sapmasız bir tahmin edicisi ise $E(\hat{\theta}) = \theta$ 'dır. Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kredibilite formüllerinin geliştirilmesinde bize ışık tutacak olan yaygın olarak kullanılan iki tahmin edicinin sapmasız (yansız) olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.2.1. Eğer $X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal örneği, ortak ortalama $\mu = E(X_j)$; $j = 1, 2, \dots, n$ ve ortak varyans $v = Var(X_j)$; $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, bağımsız ve aynı dağılımlı ise; o zaman,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

μ 'nin sapmasız (yansız) bir tahmin edicisidir. Aynı şekilde

$$\hat{v} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \quad (2.6)$$

ise v 'nin sapmasız (yansız) bir tahmin edicisidir.

Varyans için tahmin edici,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 &= \sum_{j=1}^n (X_j - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{v}{n} \quad (2.8)$$

olur.

Eş. (2.7) dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2\right] &= E\left[\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2\right] - nE[(\bar{X} - \mu)^2] \\ &= \sum_{j=1}^n E[(X_j - \mu)^2] - nVar(\bar{X}) \\ &= \sum_{j=1}^n Var(X_j) - n\frac{v}{n} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n v\right) - v \\ &= (n - 1)v \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Her iki tarafı $(n - 1)$ ' e bölündüğünde, $\hat{v}$ istatistiğinin, v parametresi için sapmasız bir tahmin edicisi olduğu gösterilmiş olur [Klugman ve ark., 1998].

Çizelge 3.1’ de görüldüğü üzere 1. yıl 9 numaralı sigortalı hasar kaydetmiştir. 2. yıl 1, 2 ve 9 numaralı sigortalı hasar kaydetmiştir. Bireysel olarak sigortalılar incelendiğinde 9 numaralı sigortalı ile 7,8 ve 10 numaralı sigortalı için çok açık farklılıklar olduğu görülmektedir.

Bir risk grubunda tüm risklerin homojen olduğu varsayılarak risk grubunun beklenen hasarı hesaplanır ve bu kılavuz prim olarak gruptaki her bireye uygulanır ve aynı primin bu sigortalılara uygulanması adaletsiz bir durum oluşmasına neden olmaktadır. Oysa bu örnekteki gibi risk birimleri arasında farklılıkların olması doğaldır. Bu nedenle bazı poliçe sahipleri, hasar deneyimlerinin varsayılandan daha iyi olmasına rağmen, daha fazla prim ödediklerini düşünerek, prim indirimi talebinde bulunabilir (örnekteki 7, 8 ve 10 numaralı sigortalılar gibi). Benzer şekilde, sigorta portföyünde, risk primi veya net prim hesabında varsayılandan daha kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahipleri (örnekteki 1 ve 9 numaralı sigortalılar gibi) de bulunmaktadır ve adil olunması için, bu poliçe sahiplerinin daha fazla prim ödemeleri istenilebilir.

Her sigortalıyı sadece deneyimleri ile fiyatlandırmak bir yöntem olabilir, bu durumda da mevcut kısıtlı verilerin kredibilitesinin ölçüsünün belirlenmesi gerekmektedir ve aynı risk karakteristiğine sahip binlerce sigortalının deneyimleri yerine 10 yıllık verileri ölçüt almak gerçekçi bir çözüm olmayacaktır.

Sigortacı, poliçe sahibinin hasar deneyimini, fiyatlandırırken poliçe sahibi hakkında ne kadar geçmiş hasar bilgisine sahipse, poliçe sahibinin deneyimi o kadar güvenilir olacaktır. Aynı şekilde sigortacı bir grup sigortasında, geniş grupların hasar deneyimi küçük grupların hasar deneyiminden daha güvenilir olacağını dikkate almalıdır. Ayrıca göz önüne alınması gereken diğer bir durumda, piyasa rekabeti sigortacıyı, tamamen poliçe sahibinin geçmiş hasar bilgisinden yararlanmaya itebileceğidir.

İstatistiksel olarak, kredibilite teorisi sonuca sezgisel olmayan bir biçimde ulaşmayı hedefleyen bir yöntemdir. Önsel bilginin varlığında, örnek ortalaması veya başka sapmasız tahmin ediciler kullanılabilir. Ancak kredibilite teorisi, bu deneyime sadece

kısmi ağırlık verir ve geri kalan ağırlığı diğer (güncel) bilgilerden oluşan tahmin ediciye verir. Kredibilite teorisi, sigortacının bu sorununa nicel olarak çözüm getirmesini sağlayan yöntemleri içerir [Klugman ve ark., 2004]. Buradan,

C : Kredibilite kestiricisi (hasar sayısı, hasar miktarı, risk primi... vb.)

Z : Kredibilite faktörü (Güncel gözlemlere verilen ağırlık)

$\bar{X}$: Güncel gözlemlerin ortalaması

M : Önsel ortalama

olmak üzere,

$$C = Z\bar{X} + (1 - Z)M \quad (3.1)$$

eşitliğinden hesaplanır [Herzog, 1994].

Eş. (3.1)'deki kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış biçimde hesaplanan primlere kredibilite primi denir [Kaas ve ark., 2001].

4. KREDİBİLİTE MODELLERİ

Kredibilite teorisi, ağırlıklı tahmin değerinin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma işlemi Z kredibilite faktörü ile yapılmaktadır. Z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler, kredibilite modelleri olarak isimlendirilir. Kredibilite modelleri,

1. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite (*the limited fluctuation credibility*)
2. Klasik kredibilite (*the greatest accuracy credibility*)

olarak iki ana başlık altında incelenebilir.

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite modelleri,

- a) Tam kredibilite (*full credibility*) yaklaşımı
- b) Kısmi kredibilite (*partial credibility*) yaklaşımı

olmak üzere ikiye ayrılır.

Klasik kredibilite modelleri ise,

- a) Bayesci yaklaşım
- b) Bühlmann kredibilite modeli
- c) Bühlmann-Straub kredibilite modeli

olmak üzere 3 temel başlık altında incelenebilir.

4.1. Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite Yaklaşımı

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımının amacı C 'yi tahmin etmektir. C , Eş. (3.1) de verildiği gibidir. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı geriye dönüp bakıldığında, en az Mowbray (1914) ve Perryman (1932) kadar eskilere dayanan

yaklaşımlardan biridir. Daha güncel işlemler Longley-Cook (1962) ve Hossack, Pollard ve Zehnwirth (1983)' ün makalelerinde bulunur. Bu yaklaşım Kuzey Amerika dışında bazen “Amerikan kredibilitesi” olarak da adlandırılır [Herzog, 1994].

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite, kredibilite kavramını niceliksel hale getirmeye yönelik ilk girişimidir. Konu hakkında çeşitli makaleler, Mowbray (1914) ve daha sonra da Whitney (1918) tarafından yayınlanmıştır [Mowbray, 1914; Whitney, 1918]. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite teorisinde, kredibilite faktörü Z 'yi belirlemek ve tam kredibilite için gerekli beklenen hasar sayısını bulmak için frekans dağılımlı modeller (*frequentist models*) kullanılır [Goulet, 1997].

Bu kuramın başlangıç noktasını oluşturan Mowbray (1914)' in çalışmasındaki temel soru “Güvenilir safi prim değeri için gerekli hasar sayısı ne olmalıdır?” sorusudur. Sorunun cevabı için “Güvenilir safi prim belirli faktörler için rassal bir limit değerinden sonra değişmeyen, olasılığı yüksek bir değerdir” tanımının yeterli olacağı varsayımı ile hareket edilmiştir [Mowbray, 1914].

Bailey (1950) makalesinde istatistiksel yöntemlerin kredibilite teorisinde nasıl kullanılacağına ilişkin bir çok yöntem anlatmıştır. Bu yöntemler arasında Bayes analizi, en küçük kareler yaklaşımı ve regresyon analizi sayılabilir [Bailey, 1950].

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımında ele alınan varsayımlar şunlardır: Bir veri grubunda herhangi bir poliçe sahibi geçmiş k ' ıncı dönem ($k = 1, \dots, n$) verilerine göre X_k hasar miktarına veya hasar sayısına sahip olsun. Başka bir bakış açısı ile X_k , fiyatlandırma için bir risk sınıfın k ' ıncı sigortalısının geçmiş verisi olsun. $E(X_k) = \mu$ olduğunu varsayalım. Diğer bir ifade ile, ortalama, bir risk sınıfında ya da zaman içinde sabit olsun. Aynı k için $Var(X_k) = \sigma^2$ olsun. Poliçe

sahibine ait geçmiş hasarların ortalaması $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ şeklinde verilebilir. Eğer

X_k 'ler bağımsızsa $E(\bar{X}) = \mu$ ve $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ olarak elde edilmektedir.

Sigortacının amacı, prim hesabı yapabilmek ve bunun için μ değerine karar verebilmektir. Sigortacı μ değerine karar verirken,

1. Poliçe sahibinin, yani sigortalının geçmiş hasar bilgisini göz ardı etmek ve portföydeki diğer benzer, fakat özdeş olmayan sigortalıların verilerden M değeri (bu tutara genelde kılavuz (manual) prim denir ve M ile gösterilir) ile ücretlendirme yapabilir (sıfır kredibilite).
2. M değerini dikkate almadan, $\bar{X}$ değeri ile fiyatlandırma yapabilir (tam kredibilite).
3. M ve $\bar{X}$ değerlerini oranlayarak ücretlendirme yapabilir (kısmi kredibilite)

yöntemlerinden birini kullanır.

Sigortacı açısından, eğer kişinin bireysel tecrübesi daha durağansa yani varyansı küçükse, $\bar{X}$ ve M arasında bir seçim yapılacaksa, risk primi olarak $\bar{X}$ 'ı almak daha doğru olabilir. Buna karşılık kişinin bireysel tecrübesi çok istikrarsız ise (değişkenliği fazla ise) yani belirsizlik hali fazla ise $\bar{X}$ sonraki dönemlerin sonuçlarının bir tahmin edicisi olarak daha az kullanılacağından, risk primi olarak M 'ı kullanmak daha doğru olacaktır [Klugman ve ark., 1998].

4.1.1. Tam kredibilite yaklaşımı

Sigortalıların çok sayıdaki tecrübelerine uygun hasar sonuçları genellikle sadece onların bu tecrübelerine dayanan gelecek dönemdeki sigorta primlerini ortaya çıkartır. Bu da tam kredibilite' nin ne anlama geldiğini bize gösterir. O zaman sigortalının tecrübesinin tam kredibiliteyi ($Z=1$) tayin edecek kadar (yeteri kadar) çok olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Bu yaklaşımda, "tecrübe" özel olarak gözlemlerin

gelecek dönemi esnasında hasarların beklenen sayısı yardımıyla ölçülür [Herzog, 1994].

Bir başka deyişle, gelecekteki sigorta priminin, yalnızca sigortalı veya sigortalıların kendi tecrübelerine göre hesaplanması tam kredibilite ($Z=1$) anlamına gelir. Tam kredibilitenin sağlanması için sigortalının hasar tecrübesinin ne kadar büyük olması gerektiğine bu yaklaşım yanıt vermektedir.

Tam kredibilitenin temel varsayımı altında, sigortalının kazanacağı tam kredibilite'nin, sadece gözlenen veriye dayalı olan toplam hasarların tahmin edicisi $\bar{X}$ ile belirlenmesidir [Herzog, 1994].

$\bar{X}$ ' in tutarlılığını ölçmenin bir yolu, eğer $\bar{X}$ ile μ arasındaki farkın yüksek bir olasılıkla μ ' ye bakarak daha küçük olması esas alınmıştır. Açıklık parametresi $r > 0$ ve $0 < p < 1$ olmak üzere iki sayının seçilmesi gerekir. Bu durumda

$$\Pr(|\bar{X} - \mu| < r\mu) \geq p$$

$$\Pr(-r\mu \leq \bar{X} - \mu \leq r\mu) \geq p = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

şeklinde tam kredibilite atanabilir. Eş. (4.1),

$$\Pr\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{r\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq p$$

veya

$$\Pr\left[\frac{-r\mu}{\sqrt{Var(\bar{X})}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{Var(\bar{X})}} < \frac{r\mu}{\sqrt{Var(\bar{X})}}\right] = 1 - \alpha$$

biçiminde ifade edilebilir.

x_p aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$x_p = \text{enk}_x \left\{ \Pr \left(\left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq x \right) \geq p \right\}. \quad (4.2)$$

Eğer $\bar{X}$ sürekli dağılıma sahip ise, Eş. (4.2)' teki " $\geq$ " işareti bir " $=$ " işareti ile yer değiştirebilir ve x_p formülü,

$$\Pr \left(\left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq x_p \right) = p \quad (4.3)$$

şeklini alır.

O zaman tam kredibilite için $r\mu\sqrt{n}/\sigma \geq x_p$ in olduğu yerde ve $\lambda_0 = (x_p/r)^2$ olmak üzere,

$$\frac{\sigma}{\mu} \leq \frac{r}{x_p} \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} \quad (4.4)$$

dır. Eş. (4.4) de, eğer σ/μ değişim katsayısı sezgisel (öngörüsöl) olarak makul bir sonuç olan $\sqrt{n/\lambda_0}$ den daha büyük değilse tam kredibilitenin kullanılacağını ifade eder.

Aynı zamanda Eş. (4.4)' de tam kredibilitenin meydana geldiğini göstermek için,

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \leq \frac{\mu^2}{\lambda_0} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece, tam kredibilite için gereken tecrübe sayısı

$$n \geq \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilebilir. Pek çok durumda, $\bar{X}$ 'in ortalama μ ve varyansı σ^2/n olan normal bir dağılımdan geldiğini yaklaşık olarak değerlendirmek daha uygundur. Örneğin, merkezi limit teoremi tartışmaları eğer n büyük olursa uygulanabilir. Bu durumda $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ değişkeni standart normal dağılıma sahiptir. O zaman Eş. (4.3),

$$\begin{aligned}
 p &= \Pr(|Z| \leq x_p) \\
 &= \Pr(-x_p \leq Z \leq x_p) \\
 &= \Phi(x_p) - \Phi(-x_p) \\
 &= \Phi(x_p) - 1 + \Phi(x_p) \\
 &= 2\Phi(x_p) - 1
 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden $\Phi(x_p) = (1 + p)/2$ dir. x_p , standart normal dağılımın $(1 + p)/2$ yüzdelik dilimidir [Klugman ve ark., 1998].

4.1.2. Kısmi kredibilite yaklaşımı

Tam kredibilitenin yetersiz olduğuna karar verilirse yani, $Z=1$ 'in tam kredibilite ataması yetersiz ise bu durumda, kısmi kredibilite faktörü $Z<1$ ' in uygun değerini belirlemeye ihtiyaç duyulur [Herzog, 1994]. Hem sigortalıya ait geçmiş hasar ortalamasından hem de başka sigortalılara ait bir ortalamadan (M) yararlanmak için kısmi kredibilite faktörü kullanılır. Bunun için uygulanan yöntem, ağırlıklı ortalama yöntemidir. Yani, kredibilite primi, kredibilite faktörünün $Z \in [0,1]$ olarak seçilmesi ile,

$$P_c = Z\bar{X} + (1 - Z)M \quad (4.7)$$

bulunur. Genellikle teorik temellerden ziyade sezgisel temellere dayalı sigorta istatistikleriyle ilgili literatürde,

$$Z = \frac{n}{n + k} \quad (4.8)$$

formülü ile hesaplanır.

Eş. (4.5)'ten kredibilite prim değişimi,

$$\begin{aligned}
 Var(P_c) &= \frac{\mu^2}{\lambda_0} \\
 &= Var[Z\bar{X} + (1 - Z)M] \\
 &= Z^2 Var(\bar{X}) \\
 &= Z^2 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\mu^2}{\lambda_0}
 \end{aligned}$$

şeklinde belirlenebilir.

Böylece, eğer Z kredibilite faktörü 1'den az ise $Z = (\mu/\sigma)\sqrt{n/\lambda_0}$ dür. Sonuç olarak,

$$Z = \min\left\{\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{\lambda_0}}, 1\right\} \quad (4.9)$$

biçiminde belirlenebilir [Klugman ve ark.,1998].

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı kolay çözüm sağlamasına rağmen, teorik olarak dezavantajlar içerir. Bunlar,

- X_j 'lerin dağılımına ilişkin teorik bir model olmadığı için Eş. (4.7)'deki kredibilite priminin, M 'ye göre tercih edilmesi için önemli bir neden bulunmamaktadır.
- Eş. (4.7) ile prim hesaplanırken, r ve p değerlerinin seçimi ile ilgili belirli bir yöntem yoktur.
- Bu yaklaşım M ile μ arasındaki farka tam olarak açıklık getirememektedir

şeklinde özetlenebilir [Klugman ve ark., 2004].

4.2. Klasik Kredibilite Modelleri

Bu bölümde klasik kredibilite modelleri tanıtılacaktır.

4.2.1. Bayesci yaklaşım

Whitney (1918) Z (kredibilite faktörü) değişkenini, risk hasar sapmasının sınıf hasar sapmasına oranı olarak tanımlamıştır.

M : Sınıfın geçmiş tecrübelerinden elde edilen ortak risk primi

$\bar{X}$: Bireyin risk primi

Z : Kredibilite faktörü

n : P_n primine sahip kişi sayısı

P_n : $\bar{X}$ 'nin yeni dönem olasılığının primi

olarak tanımlanmak üzere,

$$P_n = M + Z(\bar{X} - M) \text{ ve } Z = \frac{P_n}{P_n + k} \quad (4.10)$$

iki denklemin birlikte kullanımını içermektedir [Whitney, 1918].

Bayesci istatistiksel analiz, önsel bilgilerin incelenmesi ile başlar. Bu önsel bilgiler mevcut bilgiler ve varsayımların durumudur. Gözleme dayanan verilerden elde edilen ve olabilirlik fonksiyonu yoluyla olasılıksal olarak niceliksel hale getirilen bilgilerin birleştirilmesi ile sonsal bilgiler elde edilir. Kısaca, önsel bilgiler ile olabilirliğin birleştirilmesi Bayes yaklaşımını oluşturur. İstatistiksel olarak, sonsal olasılık fonksiyonu, önsel ile olabilirliğin çarpımları ile orantılıdır. Yani,

$$\text{Sonsal} \propto \text{Önsel} \times \text{Olabilirlik} \quad (4.11)$$

dir. Diğer bir ifadeyle, Bayesci olasılık teorisinde sonsal olasılık, bir olayın veya önermenin deneysel verilerinin koşullu olasılığıdır. Önsel olasılık deneysel bilgi olmaksızın hesaplanan ya da önceden bilinen verileri (bilgileri) kullanarak oluşturulan olasılıktır. Sonsal olasılık önsel olasılıktan ve olabirlikten hesaplanır. Bu geçmişteki bilgiler ile güncel bilgilerin birleşimini vurgular.

Risk karakteristiklerinin yığın içindeki önsel dağılımı $\pi_{\Theta}(\theta)$ ile temsil edilsin. θ , sigortalı için risk parametresi olmak üzere farklı riske maruz kalma dönemlerine karşılık gelen tecrübeleri de birbirinden bağımsız olsun. Kısaca $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ ler θ altında birbirlerinden bağımsız olsunlar.

Yukarıda bahsedilen varsayımlar altında $X = x$ değeri gözlemlenmişken, herhangi bir sigortalı için X_{n+1} dönemi için bir ücretlendirme yapılacak olsun. Amacımız, aynı sigortalının θ değerinden değişiklik göstermediği varsayımı altında $n + 1$ 'nci dönemde, geçmiş hasar tecrübesinden yararlanarak X_{n+1} 'in tahmini için X_{n+1} 'in, $\Theta = \theta$ verilmişken koşullu dağılımının elde edilmesidir. Diğer bir ifade ile X , kayıp miktarlarının (loss amounts) ya da hasar sıklıklarının (claim frequencies) bir vektörünü göstermek üzere risk parametresi θ olan herhangi bir sigortalının tecrübesi, $\Theta = \theta$ değeri verilmişken, hasarların veya kayıpların koşullu dağılımının $(f_{X|\Theta}(x|\theta))$ elde edilmesidir.

Bu koşullu dağılımı elde ederken, sonsal dağılım $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ gözlenmiş değerlerine dayanır, aynı zamanda da Θ hakkında oluşturulan önsel olasılıkların güncelleştirilmesini sağlar. Ancak θ bilinseydi, $f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılabilirdi. Söz konusu sigortalı için θ bilinmiyor olmasına rağmen $X = x$ değeri bilinmektedir. Bu durumda koşulun θ ' ya değil, x ' e bağlı olarak ele alınması uygun olacaktır. Sonuç olarak, $X = x$ verilmişken X_{n+1} ' in koşullu dağılımının bulunması uygun olur.

Buradan hareketle, koşullu bağımsızlık altında $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \Theta$ 'nın ortak dağılımı,

$$\begin{aligned}
f_{X,\Theta}(x, \theta) &= f_{X|\Theta}(x | \theta) \pi(\theta) \\
&= f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \pi(\theta) \\
&= \left[\prod_{i=1}^n f_{X_i|\Theta}(x_i | \theta) \right] \pi(\theta)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

X rassal değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk dağılımı,

$$f_X(x) = \int f_{X,\Theta}(x, \theta) d\theta = \int \left[\prod_{i=1}^n f_{X_i|\Theta}(x_i | \theta) \right] \pi(\theta) d\theta \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir.

Eş. (4.13)'de, n yerine $n + 1$ yazılmasıyla, $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ rassal değişkenlerine ilişkin ortak olasılık yoğunluk dağılımı elde edilir. Buradan da $X = x$ verilmişken X_{n+1} ' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_{n+1}|X}(x_{n+1} | x) = \frac{1}{f_X(x)} \int \left[\prod_{i=1}^{n+1} f_{X_i|\Theta}(x_i | \theta) \right] \pi(\theta) d\theta \tag{4.14}$$

şeklinde yazılabilir.

X rassal değişkeni verilmişken Θ 'nın sonsal yoğunluğu (Eş. (4.12) ve Eş. (4.13)'den)

$$\pi_{\Theta|X}(\theta | x) = \frac{f_{X,\Theta}(x, \theta)}{f_X(x)} = \frac{\left[\prod_{i=1}^n f_{X_i|\Theta}(x_i | \theta) \right] \pi(\theta)}{f_X(x)} \tag{4.15}$$

biçiminde elde edilir. Buradan,

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x)f_X(x) = \left[\prod_{i=1}^n f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta) \right] \pi(\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (4.14),

$$\begin{aligned} f_{X_{n+1}|X}(x_{n+1}|x) &= \frac{1}{f_X(x)} \int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta) \pi_{\Theta|X}(\theta|x) f_X(x) d\theta \\ &= \int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta) \pi_{\Theta|X}(\theta|x) d\theta \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Dolayısıyla bayesci prim aşağıdaki formülle elde edilir.

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|X = x) &= \int x_{n+1} f_{X_{n+1}|X}(x_{n+1}|x) dx_{n+1} \\ &= \int x_{n+1} \left[\int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta) \pi_{\Theta|X}(\theta|x) d\theta \right] dx_{n+1} \\ &= \int \left[\int x_{n+1} f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta) dx_{n+1} \right] \pi_{\Theta|X}(\theta|x) d\theta \\ E(X_{n+1}|X = x) &= \int \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta|X}(\theta|x) d\theta \\ E(X_{n+1}|X = x) &= \int x_{n+1} f_{X_{n+1}|X}(x_{n+1}|x) dx_{n+1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir [Klugman ve ark., 1998].

4.2.2. Bühlmann kredibilite modeli

Sigortacılıkta en temel sorun, $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı dağılıma sahip bağımsız rassal değişkenler olmak üzere ve bu rassal değişkenlerin gerçekleşmiş değerleri $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ için tüm X_i riskleri ortak dağılım fonksiyonunun

parametrelerini tahmin etmektedir. Aktüerlerin üzerinde durdukları en temel sorun homojenliktir, yani rassal değişkenlerin bağımsızlığı varsayımıdır [Bühlmann,1967]. Bühlmann (1967) “homojenlik kavramı nedir?” sorusuna yanıt aramıştır ve X_{ij} , i . poliçe döneminde j riski için, gerçekleşen hasar olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi, bir sınıfın m dönemlik n tane riski için hasar rassal değişkenleri olsun.

1. Eğer j 'ler sabit ve $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj}$ 'ler aynı dağılımlı ise, sınıf yoğunluk açısından homojendir.
2. Eğer i 'ler sabit ve $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ 'ler aynı dağılımlı ise, sınıf zaman açısından homojendir.

Homojenliğin sağlanması için en az bu iki koşuldan birisinin sağlanması gerekir [Bühlmann,1967].

θ risk parametrelerinden oluşan Θ kümesinin tanımlandığı durumda, her bir θ risk parametresi, X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) rassal değişkenleri ile gözlemlendiği varsayılırsa, i dönem için tek bir riskin hasar frekansları veya hasar toplamaları olarak düşünebilir. Her zaman olduğu gibi Θ koşulu altında her bir sigortalının geçmiş hasar miktarları X_i 'lerin bağımsız ve aynı dağılımlı oldukları varsayılmıştır. Klasik kredibilite yaklaşımının varsayımları altında, i dönemi için koşullu beklenen değer,

$$\mu(\theta) = E(X_i | \Theta = \theta) \quad (4.16)$$

biçimindedir. Süreç varyansı ise,

$$Var(\theta) = Var(X_i | \Theta = \theta) \quad (4.17)$$

biçiminde ifade edilir. Eş. (4.16) ve Eş. (4.17)'den, hipotetik ortalamaların beklenen değeri $\mu = E[\mu(\theta)]$, süreç varyansının beklenen değeri $v = E[v(\theta)]$ ve hipotetik ortalamaların varyansı, $a = Var[\mu(\theta)]$ olarak tanımlansın. Sırasıyla, X_i 'nin ortalaması, varyansı ve kovaryansı,

$$E(X_i) = E[E(X_i|\Theta = \theta)] = E[\mu(\theta)] = \mu \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} Var(X_i) &= E[Var(X_i|\Theta = \theta) + Var[E(X_i|\Theta = \theta)]] \\ &= E[v(\theta)] + Var[\mu(\theta)] \\ &= v + a \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} Kov(X_i, X_s) &= E(X_i X_s) - E(X_i)E(X_s) \\ &= E[E(X_i X_s|\Theta = \theta)] - \mu^2 \\ &= E[E(X_i|\Theta = \theta)E(X_s|\Theta = \theta)] - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= \{E[\mu(\theta)]^2\} - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= Var[\mu(\theta)] \\ &= a \end{aligned} \quad (4.20)$$

biçiminde hesaplanır.

Bühlmann, $\mu_{n+1}(\theta) = E(X_{i+1}|\Theta = \theta)$ ve $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $E[\mu_{n+1}(\theta)|X_1, X_2, \dots, X_n]$ 'nin tahmininde, hata kareler ortalaması en küçük olacak biçimde bir yaklaşım kullanmıştır. Bu yaklaşımda $a_0 + \sum_{i=1}^n a_n X_i$ doğrusal fonksiyonu kullanılarak $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 'lerin tahmin edicileri bulunmaktadır. a değerleri,

$$T = E \left\{ \left[\mu_{n+1}(\theta) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_n X_i \right]^2 \right\} \quad (4.21)$$

Eş. (4.21)'deki fonksiyonunun beklenen değerini en küçük yapacak değerler olarak belirlenir. Bu a değerleri $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ olarak gösterilmek üzere $\mu, \sigma^2 = v + a$ ve

kolerasyon katsayısı $\rho = \frac{a}{\nu + a}$ parametreleri $\tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_n X_i$ 'de yerine konulduğunda Bühlmann kredibilite primi,

$$\tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_n X_i = (1 - Z)\mu + Z\bar{X} \quad (4.22)$$

biçiminde elde edilir.

Eş. (4.22)'de Bühlmann kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{n}{n + \frac{\nu}{a}} \quad (4.23)$$

biçiminde elde edilir. $\frac{\nu}{a}$ yerine k yazıldığında Eş. (4.23)'te

$$k = \frac{\nu}{a} = \frac{E[v(\theta)]}{Var[\mu(\theta)]} = \frac{E[Var(X_i|\Theta = \theta)]}{Var[E(X_i|\Theta = \theta)]} \quad (4.24)$$

sonucuna ulaşılır. Eş. (4.24)'de pay, süreç varyansın beklenen değeri iken payda hipotetik ortalamanın varyansıdır. Bu durumda kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{n}{n + k} \quad (4.25)$$

olmak üzere Bühlmann kredibilite modeli,

$$E(X_{n+1}) = (1 - Z)\mu + Z\bar{X}, \quad Z = \frac{n}{n+k}, \quad 0 \leq Z \leq 1$$

biçiminde özetlenebilir [Klugman ve ark., 2004].

Örnek 4.1:

Hırsızlık olaylarına göre Ankara’da bulunan semtler belirli kriterlere göre kötü, orta ve iyi semt olmak üzere 3 grupta toplansın. Kolaylık olması açısından bunları sırasıyla K, L ve M ile ifade edelim. Her grup içinde, yıllık hasar frekansının $\theta_K= 0,7$; $\theta_L= 0,2$ ve $\theta_M= 0,1$ parametreleriyle bir Poisson rassal değişkeni şeklinde dağıldığını varsayalım. Ayrıca, Θ aşağıdaki gibi belirlenen bir önsel dağılıma sahip olsun.

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \Theta = \theta_K & \text{için} & 0,15 \\ \Theta = \theta_L & \text{için} & 0,45 \\ \Theta = \theta_M & \text{için} & 0,40 \end{cases}$$

Rassal olarak seçilen bir semtte 2009 yılında 12, 2010’da 20, 2011’de 8 hırsızlık olayı görülürken 2012’ de ise hırsızlık olayı görülüyor. Buna göre bu semtte 2013 yılındaki hırsızlık olaylarının beklenen Bühlmann sayısı nedir?

Çözüm:

Bühlmann kredibilite sayısı, $E(X_{2013})=(1 - Z)\mu + ZX$ şeklinde oluşturulmuştur. 2009’ da 12, 2010’ da 20, 2011’ de 8 ve 2012’ de ise 0 hırsızlık olduğu bilinmektedir. Bu bilgiler ışığında $\bar{X} =10$ olarak hesaplanır. Aynı zamanda,

$$\mu = E[E(X_i|\Theta)] = E \begin{cases} \Theta = \theta_K & \text{için} & 0,15 \\ \Theta = \theta_L & \text{için} & 0,45 \\ \Theta = \theta_M & \text{için} & 0,40 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= (0,7)(0,15) + (0,2)(0,45) + (0,1)(0,40) \\ &= 0,235 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Böylece, geriye sadece Z 'yi hesaplamak kalır. Buradan hareketle, dört hırsızlığa maruz kalma yılı (2009, 2010, 2011 ve 2012) olduğundan $n=4$ olarak alınır. Bu değer Z 'de yerine yazılırsa

$$Z = \frac{4}{4 + \frac{\nu}{a}} \text{ elde edilir.}$$

Diğer gerekli işlemler, ν ve a 'nın hesaplanmasıdır.

$$\nu = E[Var(X_i|\Theta)] = E\left\{\begin{array}{ll} \Theta = \theta_K \text{ için} & 0,15 \\ \Theta = \theta_L \text{ için} & 0,45 \\ \Theta = \theta_M \text{ için} & 0,40 \end{array}\right\}$$

Poisson dağılımında, dağılımın parametreleri, ortalama ve varyans eşittir. Bu nedenle $\nu=0,235$ olacaktır. Aynı zamanda,

$$a = Var[E(X_i|\Theta)] = Var\left\{\begin{array}{ll} \Theta = \theta_K \text{ için} & 0,15 \\ \Theta = \theta_L \text{ için} & 0,45 \\ \Theta = \theta_M \text{ için} & 0,40 \end{array}\right\} \text{ veya}$$

$$\begin{aligned} a &= [(0,7)^2(0,15) + (0,2)^2(0,45) + (0,1)^2(0,40)] - [0,235]^2 \\ &= 0,0955 - 0,0552 \\ &= 0,0403 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{4}{4 + \frac{0,235}{0,0403}} = 0,4068$$

biçiminde oluşur. Sonuç olarak Bühlmann kredibilite primi,

$$\begin{aligned}
E(X_{2013}|x) &= (12, 20, 8, 0) = (0, 4068)(10) + (1 - 0, 4068)(0, 235) \\
&= 4,068 + 0,139402 \\
&= 4,207402
\end{aligned}$$

değeri elde edilir. [Ebegil, 2007]

Örnek 4.2:

Bir sigorta şirketinin 20 farklı risk grubu için geçen 10 yılda yıllık hasarları Çizelge 4.1’ de verildiği gibi oluşmuştur. Bühlmann modeline göre her bir risk grubu için kredibilite primlerini hesaplayınız [Schmidli, 2003].

Çözüm:

Çizelge 4.1. 20 tane risk grubunun 10 yıllık ortalama hasar tutarları

	<i>j</i>										
<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{X}_i$
1	67	71	50	56	64	69	77	94	56	48	65,2
2	80	82	109	61	89	113	149	91	127	108	100,9
3	125	118	101	135	120	117	101	101	100	122	114,0
4	96	144	152	124	94	132	155	143	94	113	124,7
5	176	161	153	191	139	157	192	151	175	147	164,2
6	89	129	95	88	131	72	91	122	79	56	95,2
7	70	116	102	129	81	69	75	120	95	93	95,0
8	22	33	48	20	56	25	43	53	48	64	41,2
9	121	106	55	103	87	81	130	113	98	97	99,1
10	126	101	158	129	110	112	107	114	117	95	116,9
11	125	106	104	135	83	177	157	95	101	128	101,1
12	116	134	133	167	142	150	134	153	134	109	137,2
13	53	62	89	76	63	66	69	70	57	49	65,4
14	110	136	75	52	49	85	110	89	68	34	80,8
15	125	112	145	114	61	74	168	98	114	97	110,8

Çizelge 4.1. (Devam) 20 tane risk grubunun 10 yıllık ortalama hasar tutarları

16	87	95	85	111	89	101	85	88	90	164	99,5
17	92	46	74	82	68	94	116	109	81	89	85,1
18	44	74	67	93	89	57	83	53	82	38	68,0
19	95	107	147	154	121	125	146	83	117	139	123,4
20	103	105	139	138	145	145	140	148	137	127	132,7

$$\mu = \frac{1}{rn} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n X_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \bar{X}_i$$

$$v = \frac{1}{r(n-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$a = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (\bar{X}_i - \mu)^2 - \frac{v}{n}$$

$r=20$ ve $n=10$ olmak üzere;

$$\mu = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \bar{X}_i = 102,02$$

$$v = \frac{1}{180} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{10} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = 473,196$$

$$a = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{X}_i - \mu)^2 - \frac{v}{10} = 806,6$$

değerleri elde edilir.

Bu değerler yardımıyla kredibilite faktörü;

$$Z = \frac{n}{n + \frac{v}{a}} = 0,944585$$

olarak hesaplanır. Buradan her bir risk grubu için kredibilite primleri Çizelge 4.2’ de özetlenmiştir.

$$E[X_1] = (1 - Z)\mu + Z\bar{X}_1 = (1 - 0,945) \cdot 102,02 + 0,944 \cdot 65,2 = 67,24$$

$$E[X_2] = (1 - Z)\mu + Z\bar{X}_2 = (1 - 0,945) \cdot 102,02 + 0,944 \cdot 100,9 = 100,962$$

.

.

.

$$E[X_{20}] = (1 - Z)\mu + Z\bar{X}_{20} = (1 - 0,945) \cdot 102,02 + 0,944 \cdot 132,7 = 131$$

şeklinde hesaplanır.

Çizelge 4.2. Risk grupları için kredibilite prim değerleri

Risk	1	2	3	4	5
Prim	67,240	100,962	113,336	123,443	160,754
Risk	6	7	8	9	10
Prim	95,578	95,389	44,570	99,262	116,075
Risk	11	12	13	14	15
Prim	120,043	135,251	67,429	81,976	110,313
Risk	16	17	18	19	20
Prim	99,640	86,038	69,885	122,215	131,000

4.2.3. Bühlmann-Straub kredibilite modeli

Bühlmann modeli, bir sigortalının geçmiş hasar sonuçlarının (değerlerinin), her geçmiş dönem için birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı bileşenlerden oluşmuş olmasını gerektirmektedir. Bu varsayımın ortaya çıkardığı zorluklardan biri riske maruz kalma değerindeki değişimlere izin vermemesidir. Bir başka deyişle, Bühlmann modeli, geçmiş poliçe dönemlerinde riske maruz kalan birimlerin farklı sayısına veya farklı büyüklüklerin dağılımlarına izin vermez. Yani, Bühlmann modeli bu tür farklılıkları ele alacak yapıda değildir. Bühlmann modeli için en önemli kısıtlamalardan biri $X_i|\Theta$ ‘in koşullu varyanslarının benzer olduğu şeklindeki

kısıtlamadır. Bu sorunları gidermek için *Bühlmann ve Straub (1970)*'de Bühlmann modelinin genelleştirilmiş şeklini sunmuşlardır [Klugman ve ark., 1998].

Bühlmann modelindeki varsayımlar altında $i = 1, 2, \dots, n + 1$ için, X_i 'nin koşullu ortalama ve varyansı

$$E[X_i | \Theta = \theta] = \mu(\theta) \quad (4.26)$$

$$Var(X_i | \Theta = \theta) = v(\theta)/m_i \quad (4.27)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada m_i , bireylerin i 'inci poliçe döneminde bilinen bir riske maruz kalma değeridir.

Bühlmann modelinde olduğu gibi Bühlmann-Straub modelinde de aynı tanımlar kullanılabilir. Buradan $\mu(\theta)$ hipotetik ortalama ve $v(\theta)$ 'da süreç varyansı olmak üzere,

$$\mu = E[\mu(\theta)] \quad (4.28)$$

$$v = E[v(\theta)] \quad (4.29)$$

ve

$$a = Var[\mu(\theta)] \quad (4.30)$$

şeklindedir. Burada

μ : Hipotetik ortalamalarının beklenen değeri

v : süreç varyansının beklenen değeri

a : hipotetik ortalamalarının varyansını

göstermektedir.

X_i ’ in ortalaması, varyansı ve kovaryansı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E[X_i] = E[E(X_i|\Theta = \theta)] = E[\mu(\theta)] = \mu \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} Var[X_i] &= E[Var(X_i|\Theta = \theta)] + Var[E(X_i|\Theta = \theta)] \\ &= E[v(\theta)/m_i] + Var[\mu(\theta)] \\ &= \frac{v}{m_i} + a \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve

$$\begin{aligned} Kov(X_i, X_s) &= E(X_i X_s) - E(X_i)E(X_s) \quad s \neq i \quad s, i=1,2,3,\dots,n \\ &= E[E(X_i X_s|\Theta = \theta)] - \mu^2 \\ &= E[E(X_i|\Theta = \theta)E(X_s|\Theta = \theta)] - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= \{E[\mu(\theta)]^2\} - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= Var[\mu(\theta)] \\ &= a \end{aligned} \quad (4.33)$$

Bütün poliçe dönemleri için toplam riske maruz kalan birim sayısı $m = \sum_{i=1}^n m_i$ ’ dir.

Bu model için Eş. (4.31)’ i kullanarak ve $E[\mu_{n+1}(\theta)] = \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i E(X_i)$ ’ den

$$\mu = \tilde{a}_0 + \mu \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i = 1 - \frac{\tilde{a}_0}{\mu} \quad (4.34)$$

sonucu elde edilir.

$s, i=1, 2, 3, \dots, n$ için $Kov(X_s, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i Kov(X_s, X_i)$ eşitliği

$$a = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i a + \tilde{a}_s \left(a + \frac{v}{m_s} \right) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i a + \frac{v \tilde{a}_s}{m_s}$$

biçimine dönüşür.

Elde edilen bu son eşitlik $\tilde{a}_s$ 'ye göre çözüldüğünde,

$$\tilde{a}_s = \frac{a}{v} m_s \left(1 - \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \right) = \frac{a}{v} \frac{\tilde{a}_0}{\mu} m_s \quad s, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, Eş. (4.34)'den ve Eş. (4.35)'ten

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i = 1 - \frac{\tilde{a}_0}{\mu} = \frac{a}{v} \frac{\tilde{a}_0}{\mu} \sum_{i=1}^n m_s = \frac{a}{v} \frac{\tilde{a}_0}{\mu} m$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\tilde{a}_0$,

$$\tilde{a}_0 = \frac{\mu}{1 + \frac{m\tilde{a}}{v}} = \frac{v/a}{m + v/a} \mu$$

biçimindedir. $\tilde{a}_i$ 'ler,

$$\tilde{a}_i = \frac{a\tilde{a}_0}{\mu v} m_i = \frac{m_i}{m + v/a}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu hesaplar sonucunda kredibilite primi,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i &= \frac{v/a}{m + v/a} \mu + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m + v/a} X_i \\ &= (1 - Z)\mu + Z\bar{X} \end{aligned} \quad (4.36)$$

şeklini alır. Burada, kredibilite faktörü ve $\bar{X}$ aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$Z = \frac{m}{m+k} \quad \text{ve} \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} X_i$$

Bühlmann-Straub kredibilite faktörü Z , m 'ye bağlıdır. Ayrıca $\bar{X}$, X_i 'lerin ağırlıklı ortalamasıdır. Bu ağırlıklar m_i 'ler ile orantılıdır. Poliçe sahiplerinin oluşturduğu grupla ilgili, X_i 'nin i döneminde poliçe sahiplerinin oluşturduğu grupta m_i adet riske maruz kalmış grup üyesinin ortalama kaybını temsil etmektedir. $m_i X_i$ 'in ise grubun i dönemindeki toplam kaybını ifade ettiği yorumu yapılabilir. $\bar{X}$, n dönemlik bir sürede her bir grup üyesinin genel ortalama kaybını göstermektedir.

Sonuç olarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli,

$$E(X_{n+1}) = (1 - Z)\mu + Z\bar{X}, \quad Z = \frac{m}{m+k}, \quad 0 \leq Z \leq 1$$

biçiminde özetlenebilir [Ebegil, 2007].

5. VERİ ANALİZİ

Bu bölümde öncelikle Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile prim hesabını göstermek için gerçek bir veri seti kullanarak hasar tutarı modellemesi yapılmıştır. Daha sonra ise, klasik kredibilite modellerinde kredibilite faktörünü incelemek amacıyla simülasyon çalışması tasarlanmıştır.

5.1. Trafik Sigortası Verileri Kullanılarak Bühlmann-Straub Modeli İle Toplam Hasar Tutarının Modellenmesi

Trafik sigortası; aracın kullanımı sırasında, bir kimsenin ölümüne, yaralanmasına veya herhangi bir şeyin zarara uğramasına sebep verilmesi halinde, Karayolları Trafik Kanunu'na göre araç sahibinin hukuki sorumluluğunu, zorunlu sigorta limitlerine kadar karşılayan, yasal bir sigorta çeşididir. Karayolları Trafik Kanunu'na göre, trafiğe çıkan her araç bu sigortayı yaptırmak ve her yıl sigorta süresi dolmadan yenilemek zorundadır. Aksi takdirde, aracın trafiğe çıkması engellenir. Trafik Sigortası, Türkiye Cumhuriyeti sınırları içinde geçerlidir [Sağlık Memurları].

Zorunlu trafik sigortasındaki limitler trafik kazasında oluşacak zararın türüne göre değişir. Herhangi bir can kaybı olması durumunda ölenin yakınlarına verilmesi gereken miktar, yaralanma olması durumunda hastane masrafları için ödenecek miktardan farklıdır. Aynı şekilde sadece maddi hasar olması durumunda da ödenecek rakam farklılık gösterir. Böyle durumlarda ödenecek miktar her sene değişmekte ve böylece her sene ödenecek primlerde de değişiklik olmaktadır [Sigortam].

Bu bölümde Bühlmann-Straub Modeli kullanılarak prim tahmininin nasıl yapıldığını göstermek amacıyla, Türkiye Sigorta Birliği'nden aldığımız 2010, 2011 ve 2012 verileri kullanılarak 2013 yılı için hasar tutarı modellemesi yapılacaktır [Türkiye Sigorta Birliği].

Bu verilerde Otomobil, Taksi, Minibüs (Sürücü Dahil 9-15 Koltuk), Otobüs (Sürücü Dahil 16-30 Koltuk), Otobüs (Sürücü Dahil 31 ve Üstü Koltuk), Kamyonet, Kamyon, İş Makinesi, Traktör, Römork, Motosiklet ve Yük Motosikleti, Tanker, Çekici, Özel Amaçlı Taşıt, Dolmuş (Sürücü Dahil 5-8 Koltuk), Minibüs Dolmuş (Sürücü Dahil 9-15 Koltuk), Otobüs Dolmuş (Sürücü Dahil 16-30 Koltuk), Otobüs Dolmuş (Sürücü Dahil 31 ve Üstü Koltuk) ve Diğer Araçlar olmak üzere 19 araç türü tanımlanmıştır. Bu çalışmada Minibüs (Sürücü Dahil 9-15 Koltuk), Otobüs (Sürücü Dahil 16-30 Koltuk), Otobüs (Sürücü Dahil 31 ve Üstü Koltuk) araçlarını Şehirler Arası Otobüs; Römork, Tanker, Özel Amaçlı Taşıt araçlarını Diğer Araçlar; Dolmuş (Sürücü Dahil 5-8 Koltuk), Minibüs Dolmuş (Sürücü Dahil 9-15 Koltuk), Otobüs Dolmuş (Sürücü Dahil 16-30 Koltuk), Otobüs Dolmuş (Sürücü Dahil 31 ve Üstü Koltuk) araçlarını Şehir İçi Dolmuş başlıkları altında toplanmıştır. Sonuç olarak araç türleri,

- | | | |
|--------------|-----------------|-------------------------|
| - Otomobil | -Taksi | - Şehirler Arası Otobüs |
| - Kamyonet | - Kamyon | - İş Makinesi |
| - Motosiklet | - Çekici | - Şehir içi Dolmuş |
| - Traktör | - Diğer Araçlar | |

şeklinde 11 grup olarak özetlenmiştir.

Diğer bir ifade ile, Türkiye Sigorta Birliğinden alınan veriler düzenlenerek 11 kategoride incelenecektir. Bu veriler Çizelge 5.1, Çizelge 5.2, Çizelge 5.3, Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5’ te özetlenmiştir

Çizelge 5.1. Araç türüne göre hasar tutarları

ARACIN TÜRÜ	TAZMİNAT (HASAR TUTARI)			TOPLAM	ORTALAMA
	2010 YILI	2011 YILI	2012 YILI		
OTOMOBİL	864 779 141	940 632 541	1 182 788 817	2 998 200 499	996 066 833
TAKSİ	33 171 358	35 450 074	40 115 506	108 736 938	36 245 646
ŞEHİRLER ARASI OTOBÜS	173 666 432	176 771 457	200 762 095	551 199 984	183 733 328
KAMYONET	387 310 371	456 827 843	550 221 079	1 394 359 292	464 786 430,6
KAMYON	170 999 736	199 361 023	214 293 862	584 654 622	194 884 874
İŞ MAKİNESİ	3 627 612	4 452 053	6 509 317	14 588 983	4 862 994,3
MOTOSİKLET VE YÜK MOTOSİKLETİ	17 685 176	19 720 964	28 921 051	66 327 191	22 109 063,6
ÇEKİCİ	51 783 358	75 890 755	108 559 697	236 233 810	78 744 603,3
ŞEHİR İÇİ DOLMUŞ	5 576 796	17 971 864	29 142 560	52 691 220	17 563 740
TRAKTÖR	10 288 657	12 258 330	15 224 348	37 771 335	12 590 445
DİĞER ARAÇLAR	8 178 764	13 027 624	15 117 320	36 323 708	12 107 902,6
TOPLAM	1 727 067 402	1 952 364 527	2 391 655 651	6 071 087 581	

Çizelge 5.2. Araç türüne göre toplam hasar sayıları

	DOSYA ADET (TOPLAM HASAR SAYISI)				
ARACIN TÜRÜ	2010 YILI	2011 YILI	2012 YILI	TOPLAM	ORTALAMA
OTOMOBİL	561 548	588 260	635 904	1 785 712	595 237,3
TAKSİ	25 217	25 397	23 095	73 709	24 569,6
ŞEHİRLER ARASI OTOBÜS	104 253	96 247	88 424	288 924	96.308
KAMYONET	271 256	305 686	319 608	896 550	298 850
KAMYON	86 646	95 740	92 921	275 307	91 769
İŞ MAKİNESİ	1 962	2 492	3 054	7 508	2 502,6
MOTOSİKLET VE YÜK MOTOSİKLETİ	17 497	17 966	18 714	54 177	18 059
ÇEKİCİ	25 332	35 796	41 710	102 838	34 279,3
ŞEHİR İÇİ DOLMUŞ	4 620	13 577	18 587	36 784	12 261,3
TRAKTÖR	5 481	6 041	6 069	17 591	5 863,6
DİĞER ARAÇLAR	4 336	5 532	6 109	15 977	5 325,6
TOPLAM	1 108 147	1 192 734	1 254 195		

Çizelge 5.3. Araç türüne göre toplam sigortalı sayıları

	POLİÇE SAYISI (TOPLAM SİGORTALI SAYISI)				
ARACIN TÜRÜ	2010 YILI	2011 YILI	2012 YILI	TOPLAM	ORTALAMA
OTOMOBİL	7 069 672	7 715 795	8 381 051	23 166 518	7 722 172,6
TAKSİ	72 286	75 119	72 409	219 814	73 271,3
ŞEHİRLER ARASI OTOBÜS	481 070	498 790	499 784	1 479 644	493 214,6
KAMYONET	2 134 091	2 405 980	2 546 427	7 086 498	2 362 166
KAMYON	402 805	436 112	404 280	1 243 197	414 399
İŞ MAKİNESİ	36 605	43 065	48 490	128 160	42 720
MOTOSİKLET VE YÜK MOTOSİKLETİ	805 323	900 785	983 390	2 689 498	896 499,3
ÇEKİCİ	121 710	157 840	177 640	457 190	152 396,6
ŞEHİR İÇİ DOLMUŞ	14 999	45 098	50 291	110 388	36 796
TRAKTÖR	569 062	614 819	652 711	1 836 592	612 197,3
DİĞER ARAÇLAR	38 010	49 071	46 428	133 509	44 503
TOPLAM	11 745 633	12 942 474	13 862 901	38 551 008	

Çizelge 5.4. Araç türüne göre primler

		PRİMLER			
ARACIN TÜRÜ	2010 YILI	2011 YILI	2012 YILI	TOPLAM	ORTALAMA
OTOMOBİL	1 136 793 111	1 316 807 485	1 722 034 039	4 175 634 636	1 391 878 212
TAKSİ	45 022 667	49 256 139	71 766 590	166 045 396	55 348 465,33
ŞEHİRLER ARASI OTOBÜS	198 705 574	198 532 467	268 475 453	665 713 494	221 904 498
KAMYONET	544 626 686	631 188 379	798 089 459	1 973 904 524	657 968 174,7
KAMYON	190 688 863	213 127 515	296 897 498	700 713 877	233 571 292,3
İŞ MAKİNESİ	4 946 473	6 549 844	12 511 148	24 007 465	80 024 88,3
MOTOSİKLET VE YÜK MOTOSİKLETİ	29 010 407	38 835 588	59 243 093	127 089 088	42 363 029,3
ÇEKİCİ	54 767 597	82 786 795	168 249 978	305 804 370	101 934 790
ŞEHİR İÇİ DOLMUŞ	7 759 547	24 501 060	59 639 377	91 899 984	30 633 328
TRAKTÖR	18 137 000	24 472 448	29 130 834	71 740 281	23 913 427
DİĞER ARAÇLAR	10 778 850	12 193 945	21 802 527	44 775 322	14 925 107,3
TOPLAM	2 241 236 776	2 598 251 665	3 507 839 995		

Çizelge 5.5. Araç türüne göre sigortalı başına ortalama hasar tutarları

ARACIN TÜRÜ	SİGORTALI BAŞINA ORTALAMA HASAR TUTARI			TOPLAM	ORTALAMA
	2010 YILI	2011 YILI	2012 YILI		
OTOMOBİL	122,322	121,9	141,12	385,342	128,44
TAKSI	458,89	471,91	554,01	1 484,81	494,93
ŞEHİRLER ARASI OTOBÜS	361	354,4	401,69	1 117,09	372,36
KAMYONET	181,48	189,87	216,07	587,42	195,8
KAMYON	424,52	457,13	530,06	1 411,71	470,57
İŞ MAKİNESİ	99,1	103,37	134,24	336,71	112,23
MOTOSİKLET VE YÜK MOTOSİKLETİ	21,96	21,89	29,4	73,25	24,41
ÇEKİCİ	425,46	480,8	611,12	1 517,38	505,79
ŞEHİR İÇİ DOLMUŞ	371,81	398,5	579,47	1 359,78	449,92
TRAKTÖR	18,03	19,93	23,32	61,28	20,42
DİĞER ARAÇLAR	215,17	265,48	325,6	806,25	268,75

Bir sonraki dönem ve her bir araç türü için beklenen hasar tutarlarının veya prim miktarlarının hesap edilmesi gerekli olabilir. Buradan yola çıkarak bu çalışmada Bühlmann-Straub kredibilite modeli kullanılarak hasar tutarı modellemesi yapılacaktır. 2010, 2011 ve 2012 yıllarında kayıtlara geçmiş hasar sayıları Çizelge 5.2’ de, bu hasarlar sonucunda oluşan hasar tutarları Çizelge 5.1’ de ve yıllık toplam hasarların toplam araç sayısına bölünmesiyle her bir araç türü için ortalama yıllık hasar tutarı ise Çizelge 5.5’ te verilmiştir.

Buradaki analizin amacı, bir sonraki trafik sigorta dönemi için, yani 2013 yılı için her bir araç türü başına hasar tutarını tahmin etmektir. Diğer bir deyişle 11 araç türü için toplam hasar tutarları tahmin edilecektir. Bu amaca yönelik olarak ortalama hasar tutarı verileri kullanılacaktır. Uygulanacak olan yöntem ise Bühlmann-Straub kredibilite modelidir. Bühlmann-Straub modelinin parametreleri aşağıdaki gibi tahmin edilebilir.

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^3 m_{ij} X_{ij} = \frac{6071087581}{38551008} = 157,48$$

$$\bar{X} = 157,48$$

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^3 m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^{11} t_i - 1} = \frac{11160094049}{11 \cdot (3-1)} = \frac{11160094049}{11 \cdot 2} = 507277022,22$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum_{i=1}^{11} m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \nu(n-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{11} m_i^2} = \frac{394106521299,44 - 507277022,22 \cdot (11-1)}{38551008 - \frac{1}{38551008} 601551129186234} \\ &= \frac{389033751277,24}{229469976,8} = 16953,59 \end{aligned}$$

Buradan,

$$\hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} = \frac{507277002,22}{16953,59} = 29921,50$$

olarak elde edilir.

$\hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + \hat{k}}$ ($i=1, 2, \dots, 11$) formülü ile, 11 araç türüne ait Z kredibilite faktörü tahminleri;

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= 0,9987, & \hat{Z}_2 &= 0,8801, & \hat{Z}_3 &= 0,9801, & \hat{Z}_4 &= 0,9957, & \hat{Z}_5 &= 0,9764, & \hat{Z}_6 &= 0,8107, \\ \hat{Z}_7 &= 0,9889, & \hat{Z}_8 &= 0,9385, & \hat{Z}_9 &= 0,7867, & \hat{Z}_{10} &= 0,9839, & \hat{Z}_{11} &= 0,8169. \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

11 araç türünün ortalama hasar tutarı $\bar{X}_1=128,44$, $\bar{X}_2=494,93$, $\bar{X}_3=372,36$, $\bar{X}_4=195,8$, $\bar{X}_5=470,57$, $\bar{X}_6=112,23$, $\bar{X}_7=24,41$, $\bar{X}_8=505,79$, $\bar{X}_9=449,92$, $\bar{X}_{10}=20,42$ $\bar{X}_{11}=268,75$ dır.

Son olarak Bühlmann-Straub Kredibilite primi, Eş. (3.1)' de $C_i = \hat{Z}_i \bar{X}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}$ şeklinde verilmiştir. Bir sonraki sigorta dönemi, yani 2013 yılı, sigortalı başına

oluşabilecek ortalama hasar tutarı ile ilgili kredibilite primi, her bir araç türü için Eş. (3.1)' den bulunabilir. Her bir araç türüne ait sonuçlar Çizelge 5.6' da verilmiştir.

Çizelge 5.6. Araç türüne göre 2013 yılına ait hasar tutarları

Araç Türü	2013 Yılı Primi (TL)
Otomobil	$C_1=128,47$
Taksi	$C_2=454,46$
Şehirler Arası Otobüs	$C_3=368,08$
Kamyonet	$C_4=195,63$
Kamyon	$C_5=463,18$
İş Makinesi	$C_6=120,79$
Motosiklet	$C_7=25,88$
Çekici	$C_8=484,36$
Şehir içi Dolmuş	$C_9=387,54$
Traktör	$C_{10}=22,62$
Diğer Araçlar	$C_{11}=248,37$

Çizelge 5.6' ya bakıldığında sırasıyla en büyük hasar tutarı Çekici, Kamyon ve Taksi için belirlenmiştir. Kredibilite yöntemi ile prim değeri belirlenirken sigortalının kendi deneyimine ve tüm sigortalıların genel deneyimine belli bir ağırlık verilmektedir. Bu yüzden Z kredibilite faktörünün belirlenmesi önemlidir. Eğer Z kredibilite faktörü sıfır olarak hesaplınsaydı bu durumda kredibilite primi Eş. (3.1) de görüldüğü gibi sigortalının kendi deneyimine sıfır ağırlık verileceğinden her bir sigortalının prim değeri genel ortalama olan $\mu=157,48$ ' e eşit olacaktır. Yani bütün ağırlık genel deneyime verilecektir. Verileri incelediğimizde her sigortalının yaptığı hasar sayısı ve buna bağlı olarak hasar tutarları farklıdır. Böyle bir durum hem az hasar yapan sigortalıların aleyhine hem de sigorta şirketlerin aleyhine olacaktır.

Örneğin; Araç türü Traktör olan sigortalı prim değeri olarak 22,62 ödemesi gerekirken 157,48 ödeyecektir. Diğer taraftan araç türü Kamyon olan sigortalı prim

değeri olarak 463,18 ödemesi gerekirken 157,48 ödeyecektir. Sigorta şirketi ise 2899,38 prim toplaması gerekirken 1732,28 prim toplayacaktır.

Kredibilite faktörü 1 olarak hesaplınsaydı Eş. (3.1)' den genel deneyim hesaba katılmayacaktır. Prim değeri sadece sigortalıların kendi deneyimleri üzerinden yapılacaktır. Sonuç olarak kredibilite faktörünün doğru olarak belirlenmesi önemlidir.

5.2. Kredibilite Faktörünün İncelenmesi İçin Monte Carlo Simülasyon Çalışması

Daha öncede belirtildiği gibi kredibilite modellerinde geçmiş ve güncel deneyimlere belli bir ağırlık verilir. Bu ağırlıklandırma işi Z kredibilite faktörü ile yapılır. Bunun için Z kredibilite faktörünün belirlenmesi oldukça önemlidir. Buradan hareketle, bu kısımda klasik kredibilite modellerinin iyi çalışmadığı durumları belirlemek amacıyla, simülasyon çalışması yapılmıştır. Diğer bir ifade ile bu kısımda Z kredibilite faktörünü incelemek için farklı parametreler altında sigorta portföyleri tanımlanmıştır. Bu vasıta ile Z kredibilite faktörü incelenmiştir.

Varyans Bileşen Modelleri

Dannenburg ve ark. (1996) varyans bileşen modellerinin kredibilite problemine uygulanabileceğini göstermişlerdir. Varyans bileşen modelinde, her bir hücre (j yılındaki i . poliçe sahibi) m_{ij} sözleşmelerinin sayısını içerir. Burada m_{ij} 'ler i . sözleşme için n_i gözlem döneminin sayılarının üzerinde olacak şekilde gözlemlenir. Daha sonra, portföydeki i . sözleşme için, $i = 1, \dots, r$, yılda $j = 1, \dots, n_i$, hasar tecrübesi,

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, r \text{ ve } j = 1, \dots, n_i \quad (5.1)$$

modeli ile temsil edilir. Bu modelde, $E[\alpha_i] = 0$, $Var[\alpha_i] = a$ olmak üzere α_i ve ε_{ij} bağımsızdır ve bütün i ve j 'ler için $E[\varepsilon_{ij}] = 0$, $Var[\varepsilon_{ij}] = v/m_{ij}$ dir. Kredibilite

faktörünü ve kredibilite primini belirlemek için, μ , ν ve a bilinmeyen parametreleri tahmin edilmelidir. Diğer bir ifadeyle, Kredibilite faktörü Z' yi belirlemek için ν ve a 'yı tahmin etmek gerekir. Doğal olarak, aktüerler ν ve a 'nın yansız tahmin edicilerini kullanır ve bunlar $\hat{\nu}$ ve $\hat{a}$ olarak gösterilir. Hasarların bir örneği mevcut olduğu zaman, $\hat{\nu}$ ve $\hat{a}$ elde edilir [Gau ve ark., 2008].

Eğer μ , ν , ve a parametrelerinin tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, ve $\hat{a}$ parametreleri olarak ifade edilirse, kredibilite primi;

$$\hat{C}_i = \hat{Z}_i \hat{X}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}, \quad i = 1, \dots, r \quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

$$\hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + \hat{k}} \quad (5.3)$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} \quad (5.4)$$

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} X_{ij}}{m_i}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (5.5)$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i \bar{X}_i}{m} \quad (5.6)$$

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)} \quad (5.7)$$

ve

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - (r-1)\hat{v}}{m - \frac{\sum_{i=1}^r m_i^2}{m}} \quad (5.8)$$

$$m = \sum_{i=1}^r m_i \quad (5.9)$$

şeklindedir. Eş.(5.6), Eş.(5.7) ve Eş.(5.8) sırasıyla μ , v , ve a 'nın yansız (sapmasız) tahmin edicileridir [Gau ve ark., 2008; Ebegil ve Gökpinar, 2012].

Ancak, klasik kredibilite modelinde bazı eksik noktalar vardır. Bunlardan en önemlisi $\hat{a}$ değerinin negatif olduğu durumlardır. Bu durumlarda $\hat{a}$ değeri sıfır olarak alınır. Buna bağlı olarak kredibilite prim değeri hesaplanırken, Z kredibilite faktörü de sıfır alınır. Sonuç böyle olduğunda Eş. (5.2)' de verilen kredibilite prim tahmini sadece bütün sigortalıların genel ortalamasına göre belirlenir. İlgili sigortalının kendi deneyimine sıfır ağırlık verilir. Diğer bir ifade ile, sigortalının kendi deneyimi prim tahmini hesaplanırken işlem dışı tutulur. Eğer bu sigortalının hasar deneyimi diğer sigortalılara göre fazla ise prim tahmininin genel ortalama alınarak yapılması bu sigortalının lehine olurken, diğer sigortaların aleyhine olacağından sigortalılar açısından bir adaletsizliğe neden olacaktır. Bu durum kabul edilemez. Buradan yola çıkarak, bu çalışmada sigortalılar açısından adaletsizliğe neden olan durumlar incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için, MATLAB paket programından yararlanılarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli için, farklı yığın ortalaması ve varyansı kullanarak 1000 tekrara dayalı bir simülasyon çalışması yapılmış ve Z kredibilite faktörleri hesaplanmıştır. Hesaplanan kredibilite faktörlerini incelemek amacıyla bu veriler histogramlarla özetlenmiş ve uygun olmayan sonuçlar belirlenerek gerekli yorumlamalar yapılmıştır. Diğer bir ifadeyle, kredibilite faktörü tahmin değerlerinin, farklı durumlarda nasıl hareket ettikleri belirlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Öncelikle aşağıdaki gibi tasarlanan bir portföyde hesaplamaların nasıl yapıldığını görelim. 7 sigortalının bulunduğu 7 yıllık dönemi içeren bir portföyü dikkate alalım. Her bir poliçe sahibinin sadece bir tane hasarı olduğunu varsayalım. Yani Eş. (5.1)'deki modelde $r=7$, $n_i=7$ ve $m_{ij}=1$ olarak alalım. Eş. (5.1) 'den,

1. $\mu=50$
2. Ortalaması 0 ve varyansı 81 olmak üzere α_i normal dağılıma sahip olduğunu, yani $\alpha_i \sim N(0,81)$ olduğunu ve
3. Ortalaması 0 ve varyansı 900 olmak üzere ε_{ij} normal dağılıma sahip olduğunu, yani $\varepsilon_{ij} \sim N(0,900)$ olduğunu varsayalım, kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{7}{7 + \frac{900}{81}} = 0,386$$

olarak hesaplanır. Aynı zamanda yukarıdaki varsayımları kullanarak simülasyon yoluyla üretilen veri Çizelge 5.7' de verilmiştir.

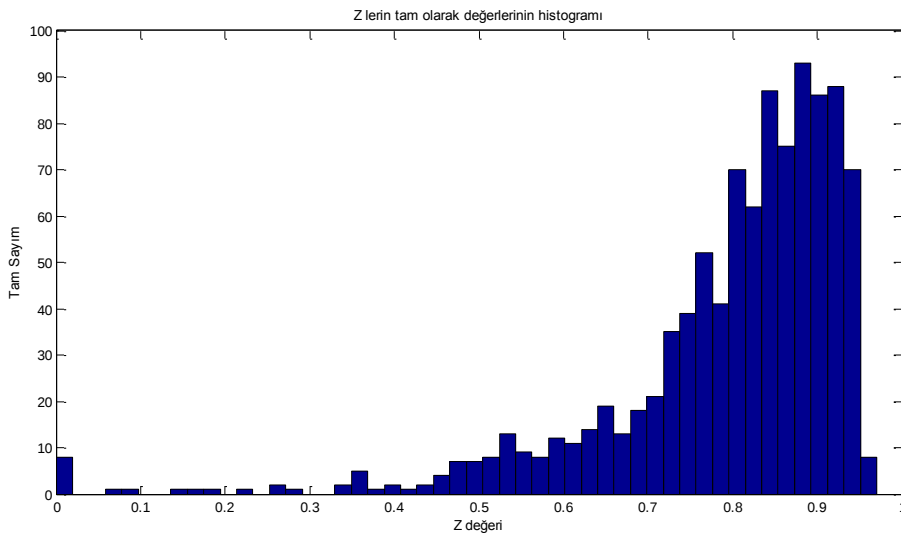
Çizelge 5.7. $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij}|\theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ parametre değerleri için simülasyon verileri

Sigortalılar	Sigorta Dönemleri						
	1	2	3	4	5	6	7
1	103,7	-5,3	82,8	27,7	61,9	74,5	92
2	94,8	33,1	57,4	67,5	50,1	74	57,2
3	-11,2	98,7	24,8	46	59,8	46,4	15,8
4	42	90,1	20	69,3	55	38,7	14,1
5	44,8	3,4	53,2	22,7	44,6	57,5	20,3
6	57,9	-7,7	78,5	120,1	76,2	37,9	60,2
7	97	68,9	64,3	14,4	50,3	23,9	31,3

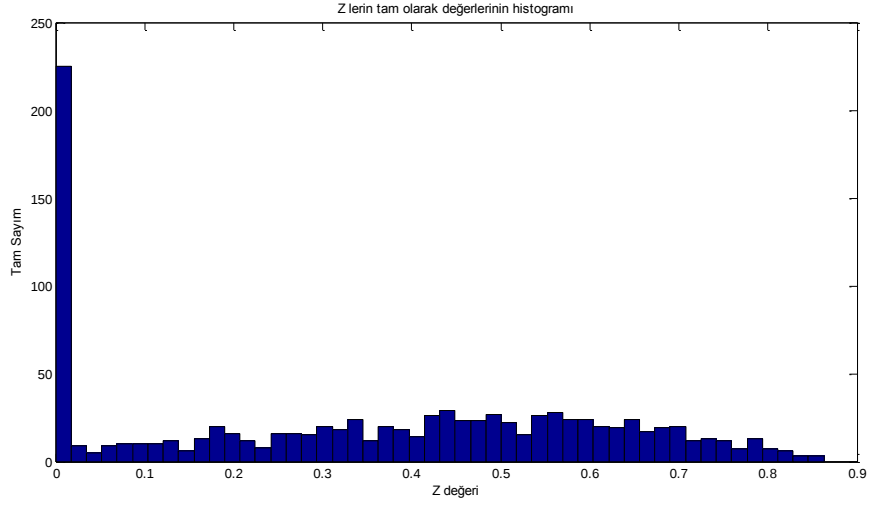
Çizelge 5.7' deki verileri kullanarak, Eş. (5.7) ve Eş. (5.8)' den, $\hat{\mu}=50$, $\hat{v}=944.2$ ve $\hat{a}=-13.5$ olarak hesaplanır. Genelde, aktüerler $\hat{a}$ değeri negatif olduğunda , $\hat{a}$ değerini

“0” olarak kabul ederler. Bu nedenle, kredibilite faktörü de $\hat{Z} = 7/(7 + (944.2/0)) = 0$ olarak hesaplanır. Kredibilite faktörü sıfır olarak hesaplandığında, daha önce de belirtildiği gibi, Eş. (5.2)’ de verilen kredibilite prim tahmini sadece bütün sigortalıların genel ortalamasına göre belirlenir. Bu klasik kredibilite modellerinin iyi çalışmadığı durumdur [Gau ve ark., 2008]. Buradan yola çıkarak, bu çalışmada klasik kredibilite modellerinin iyi çalışmadığı durumları ortaya çıkarabilmek amacıyla, simülasyon çalışması yardımıyla farklı yığın parametreleri için, 7 sigortalının bulunduğu 7 yıllık dönemi içeren 27 tane farklı sigorta portföyü oluşturulmuş ve her bir sigorta portföyü için 1000 tekrar yapılmıştır.

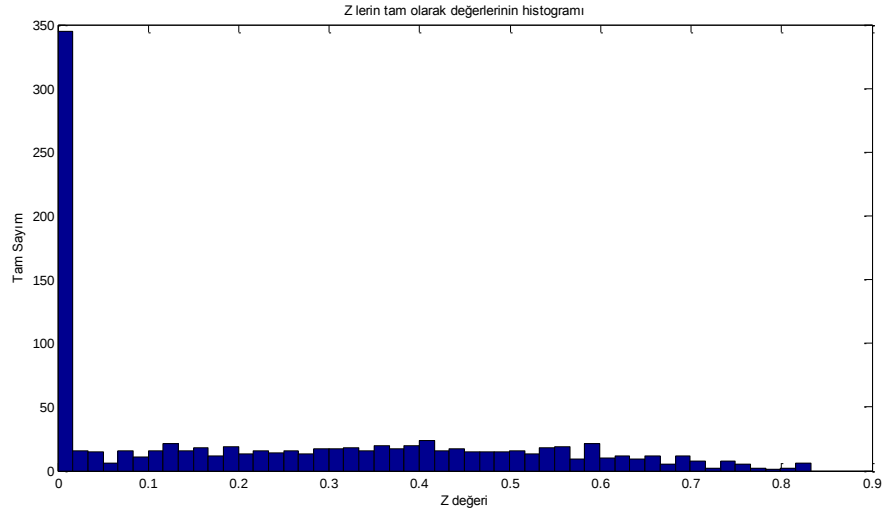
Elde edilen sonuçlar Şekil 5.1-5.27 arasındaki histogramlarda sunulmuştur. $\hat{a}$ ’nın negatif olduğu değerlerin ve buna bağlı olarak $Z=0$ olduğu durumların sayısının daha rahat gösterilmesi için simülasyon sonuçları Çizelge 5.8-5.16’ da özetlenmiştir.



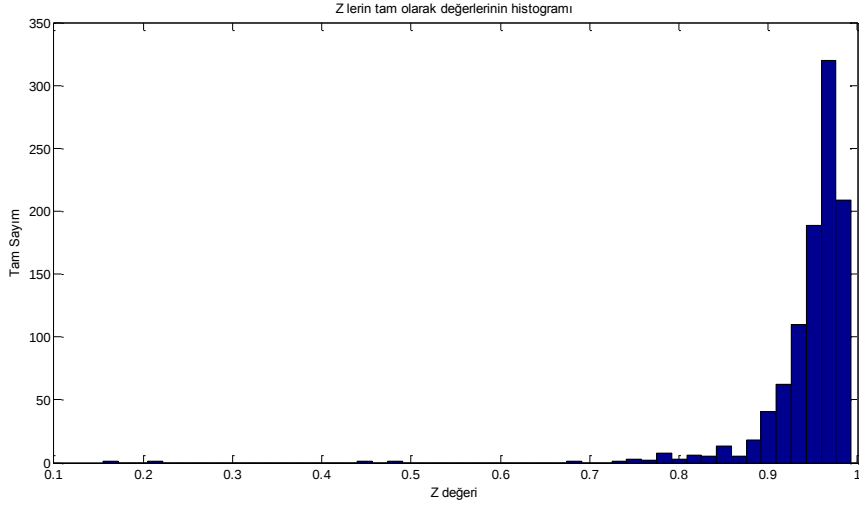
Şekil 5.1. Matlab programında $\theta_i \sim N(50,81)$ ve $X_{ij}|\theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



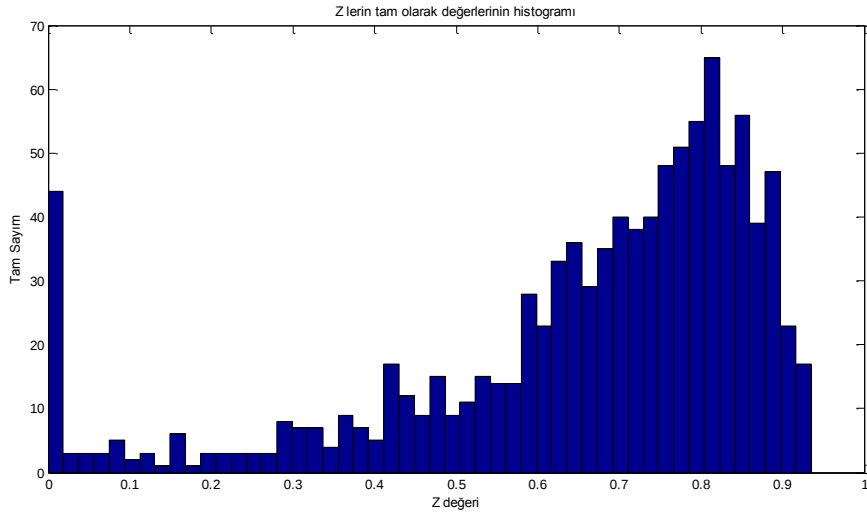
Şekil 5.2. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



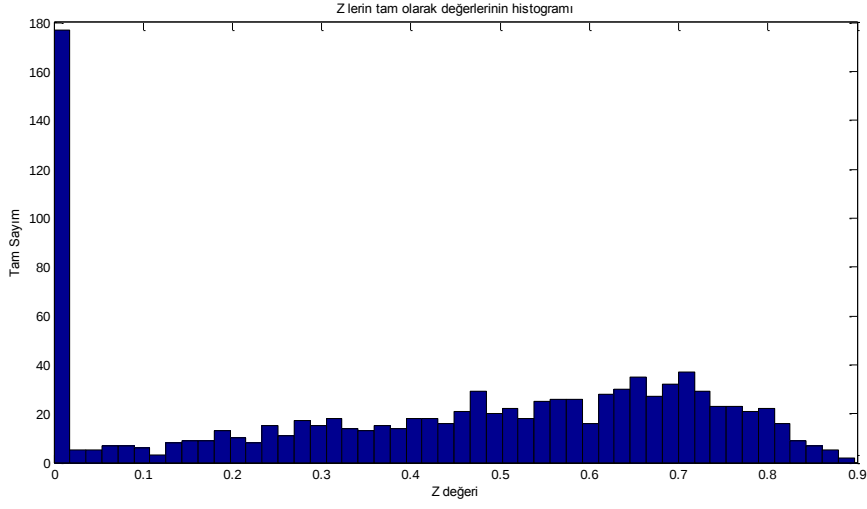
Şekil 5.3. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



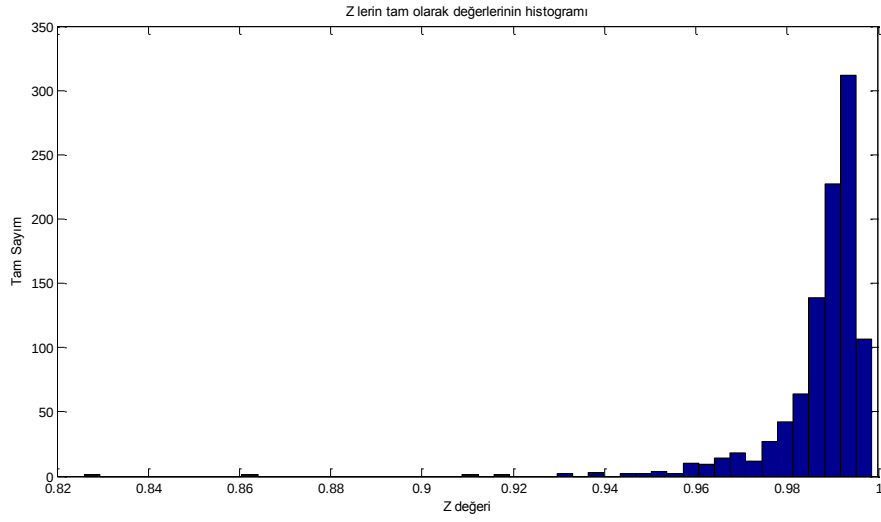
Şekil 5.4. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



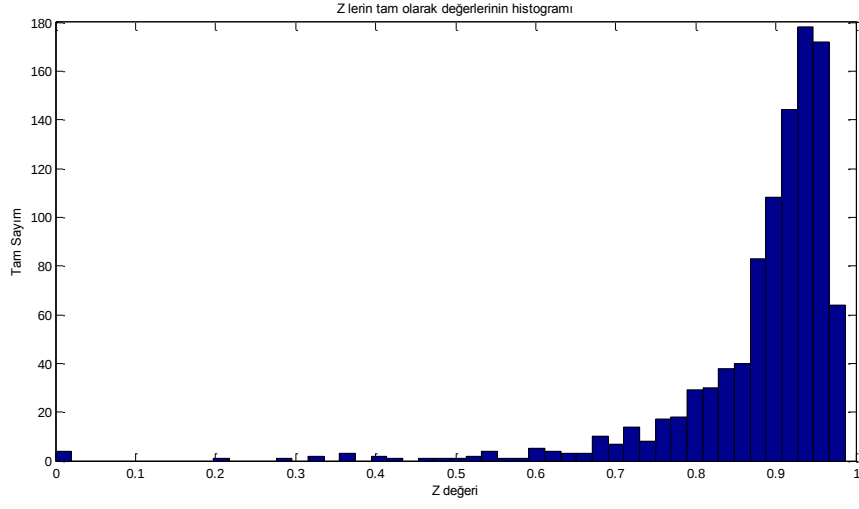
Şekil 5.5. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



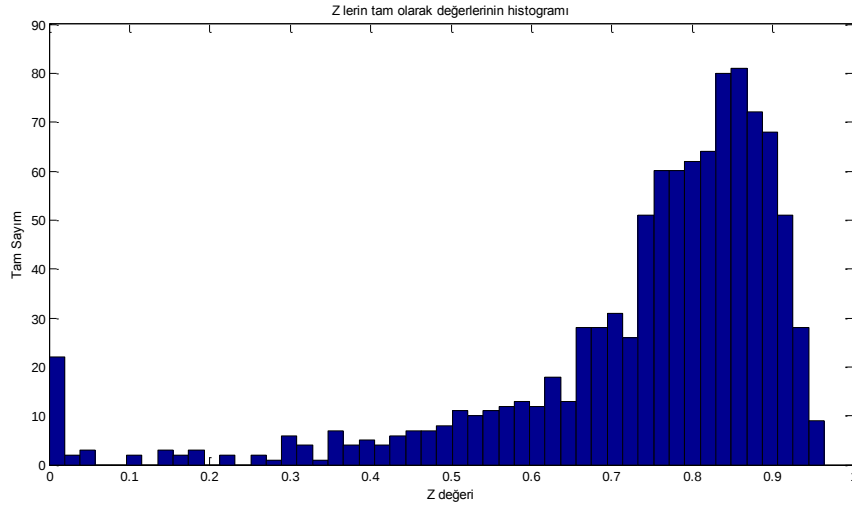
Şekil 5.6. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



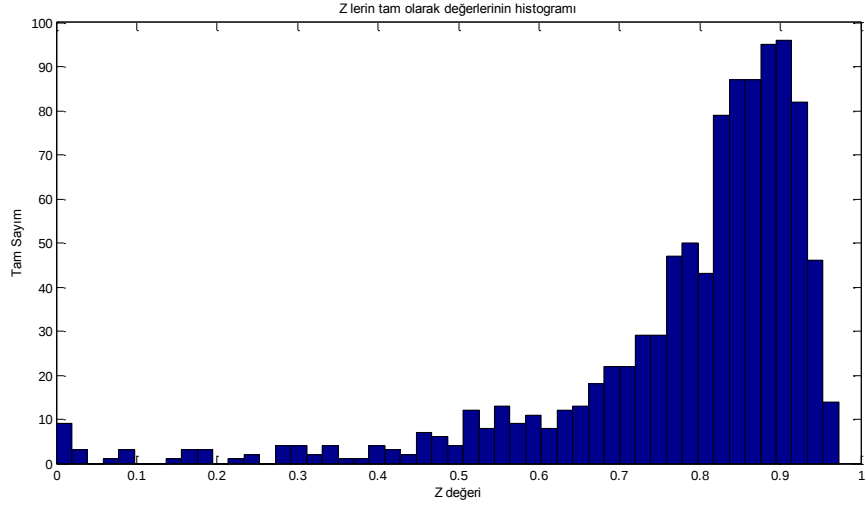
Şekil 5.7. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



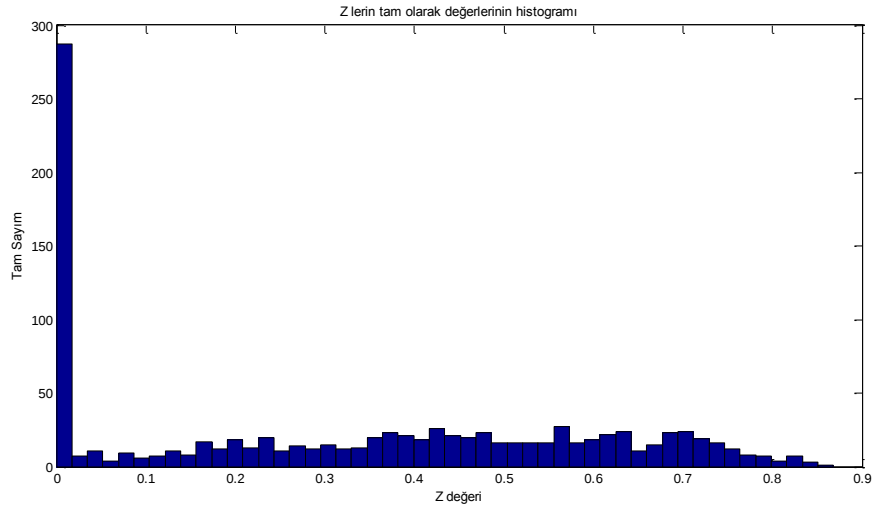
Şekil 5.8. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



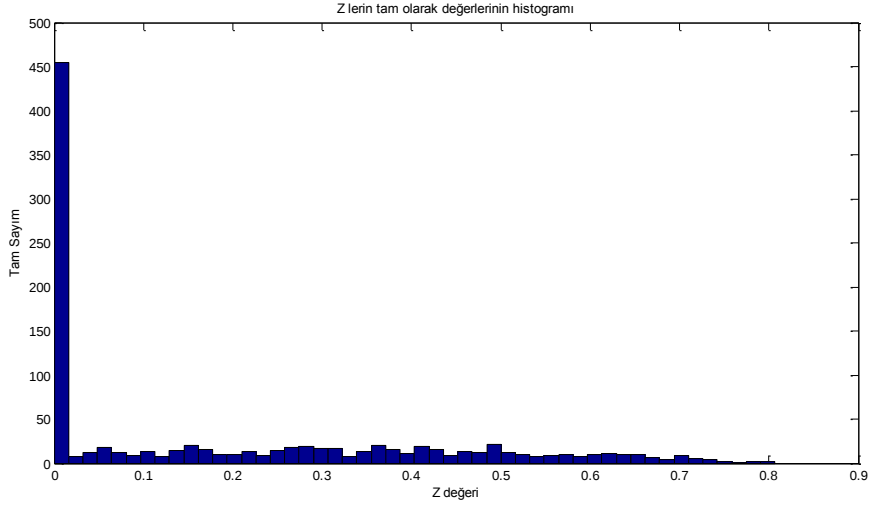
Şekil 5.9. Matlab programında $\theta_i \sim N(50, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



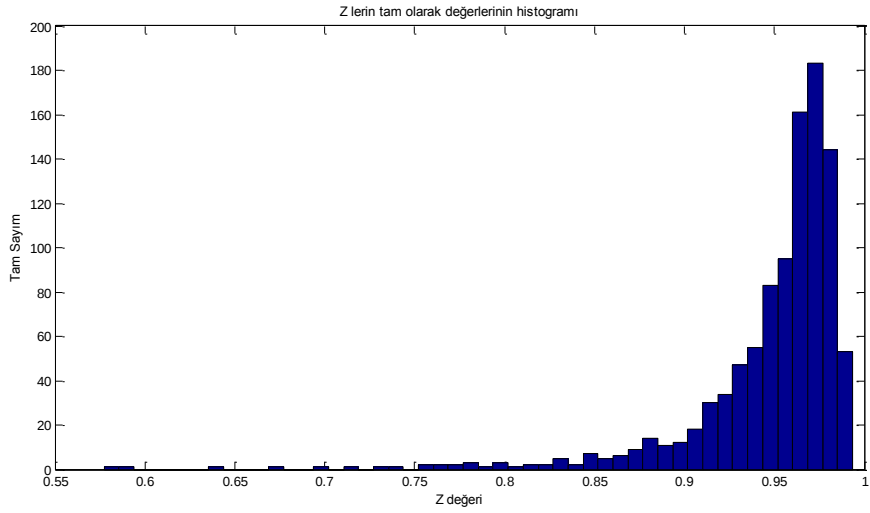
Şekil 5.10. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



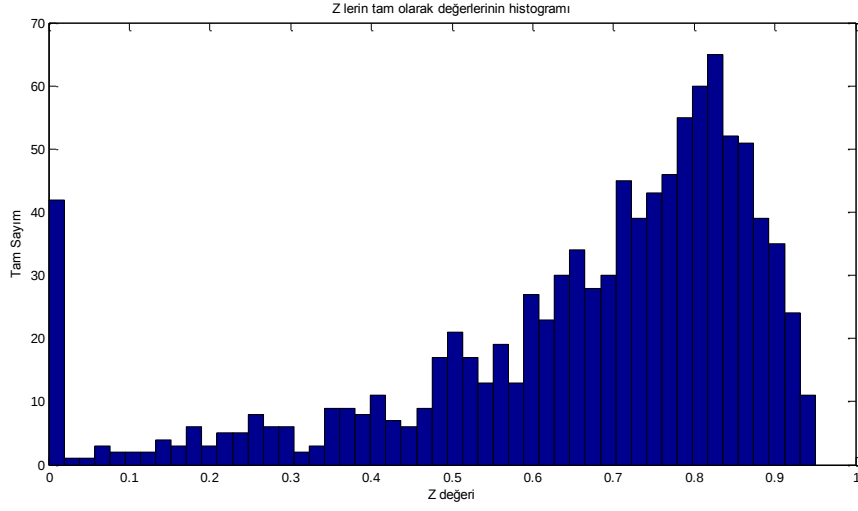
Şekil 5.11. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



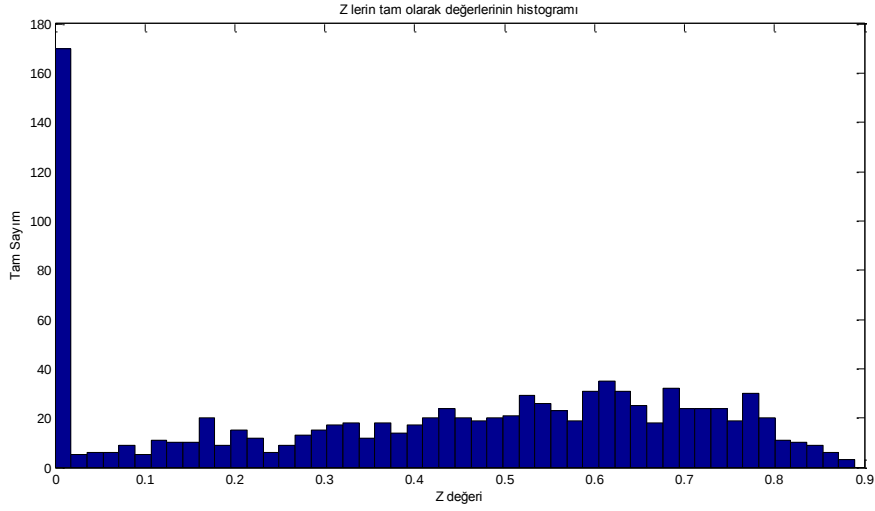
Şekil 5.12. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



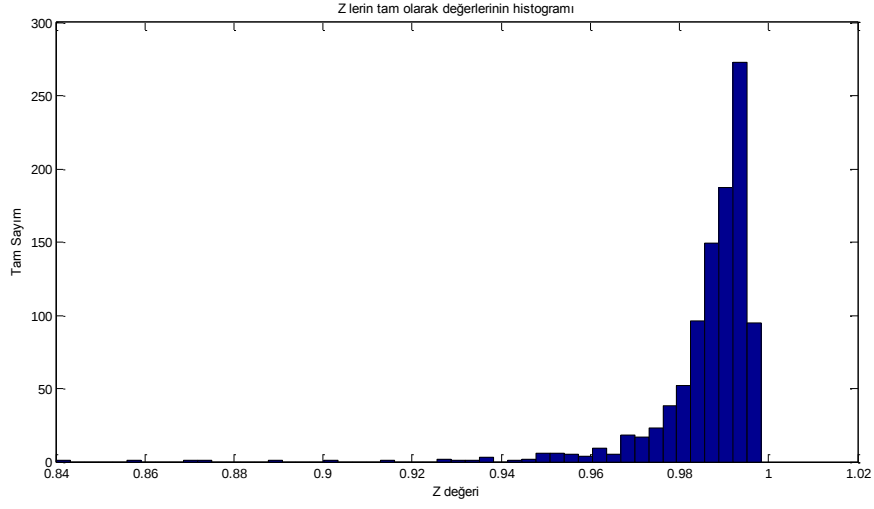
Şekil 5.13. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



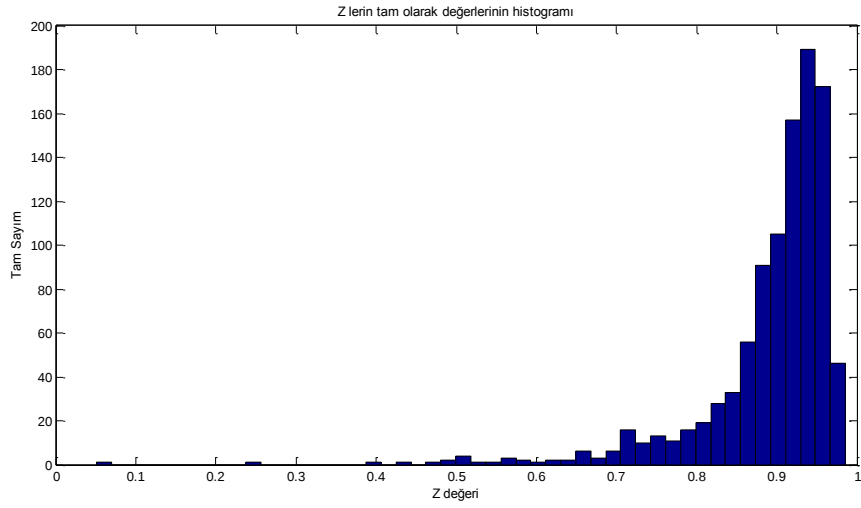
Şekil 5.14. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



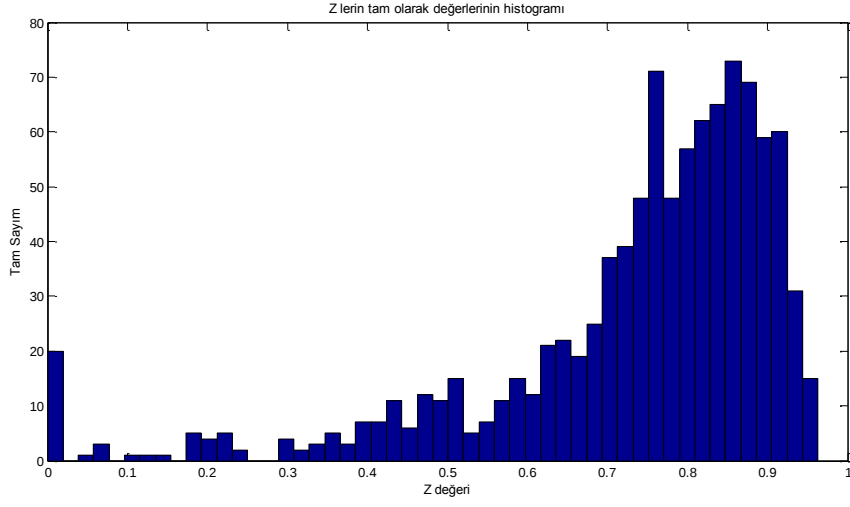
Şekil 5.15. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



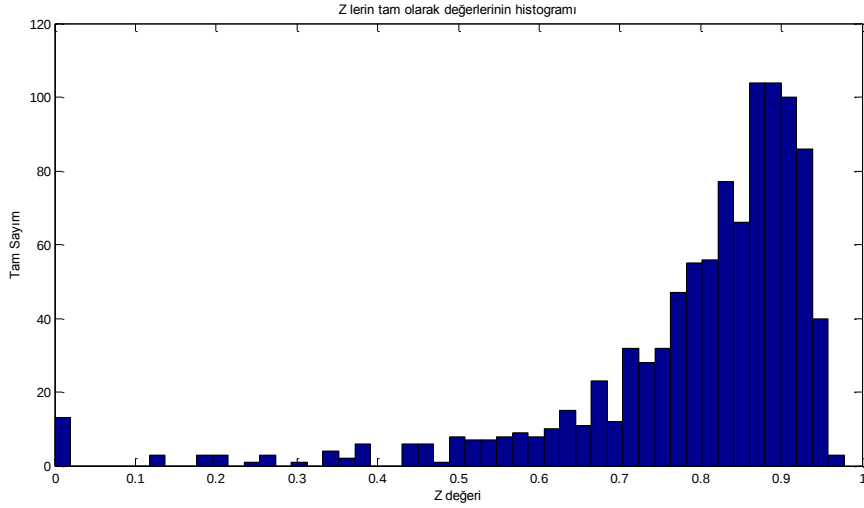
Şekil 5.16. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



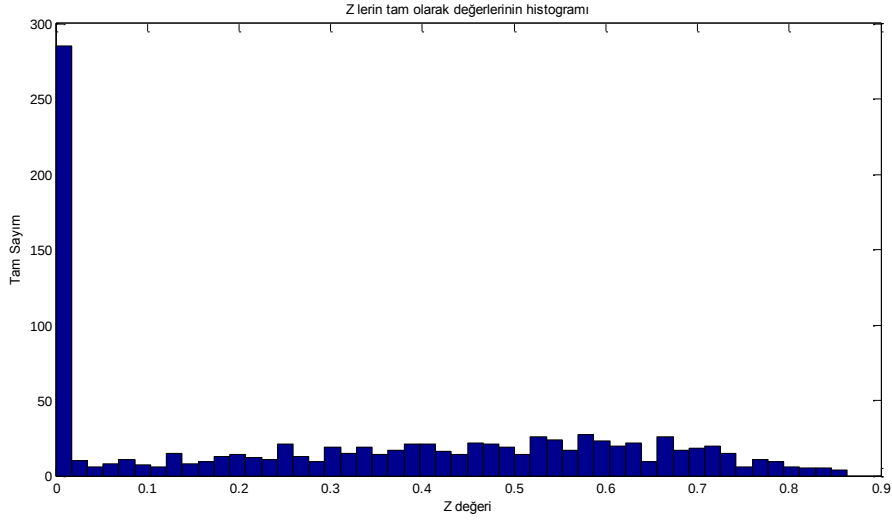
Şekil 5.17. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



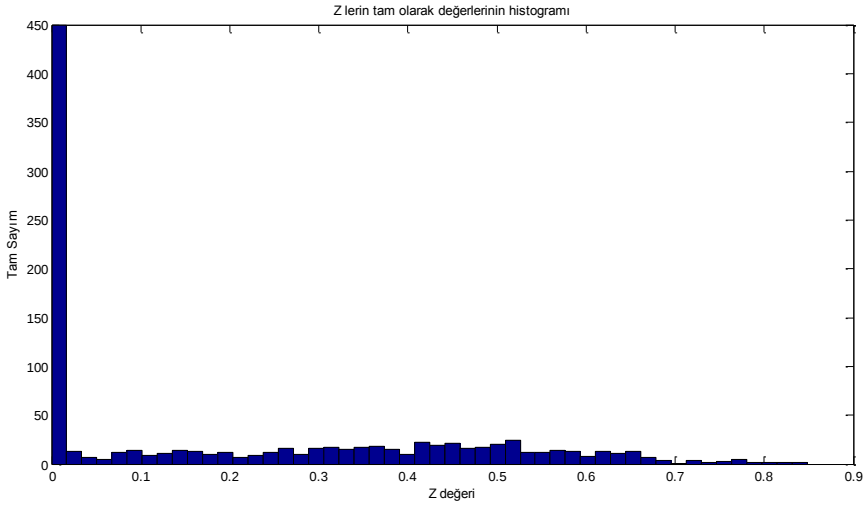
Şekil 5.18. Matlab programında $\theta_i \sim N(100, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



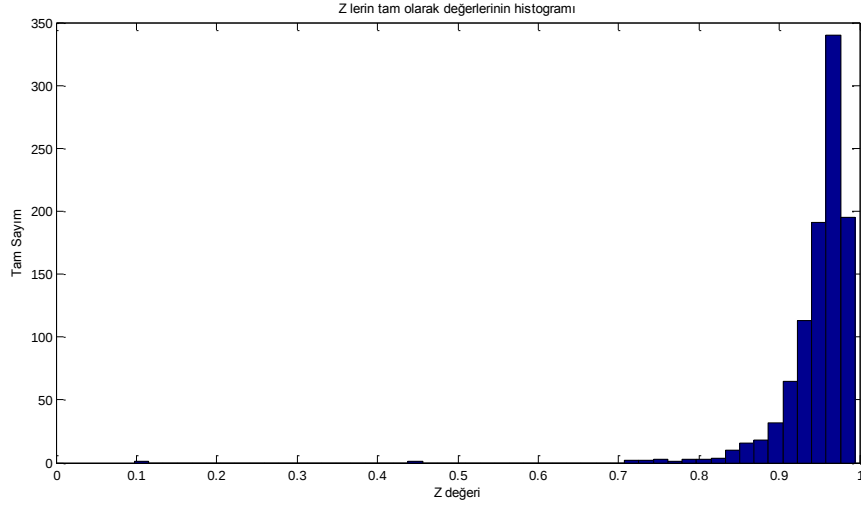
Şekil 5.19. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 81)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



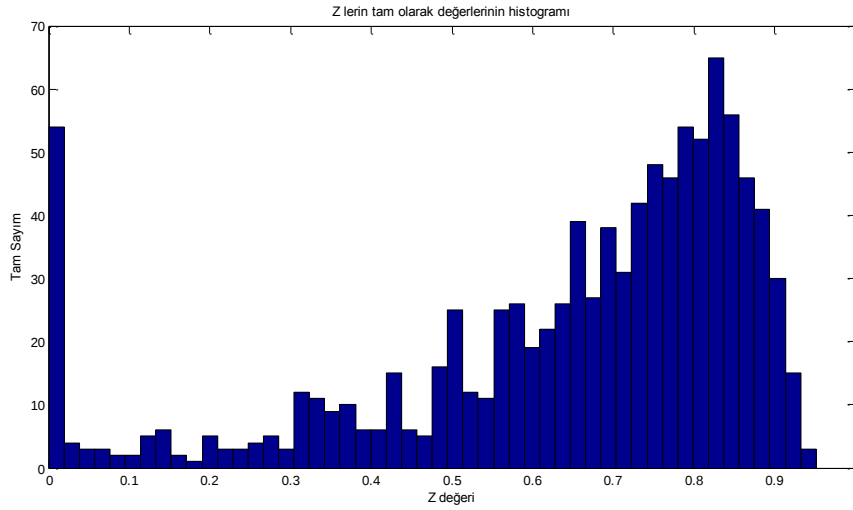
Şekil 5.20. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,81)$ ve $X_{ij}|\theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



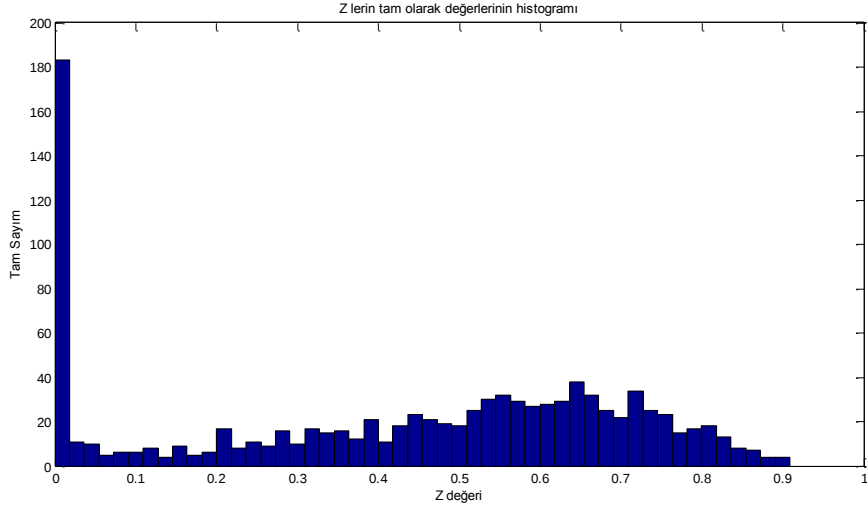
Şekil 5.21. Matlab programında $\theta_i \sim N(200,81)$ ve $X_{ij}|\theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



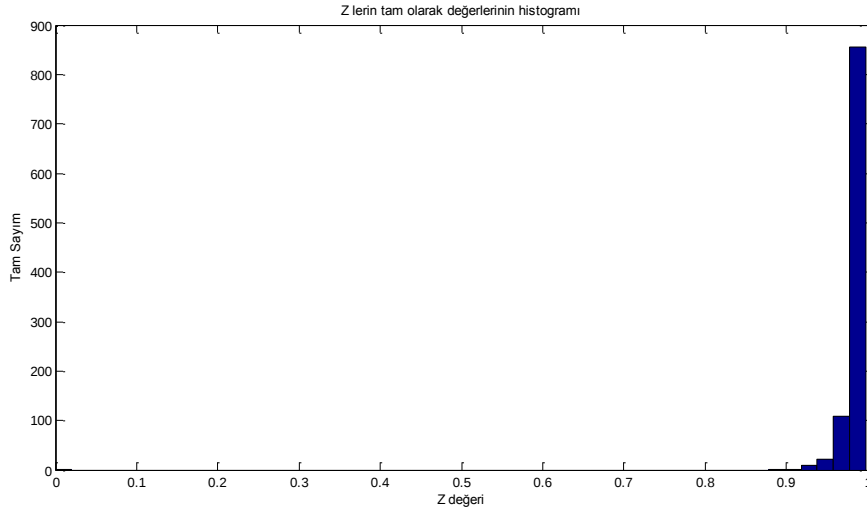
Şekil 5.22. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



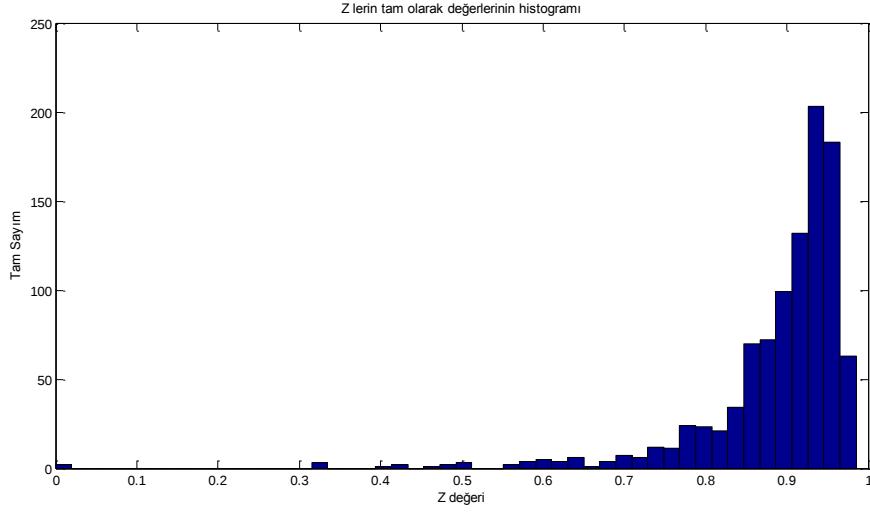
Şekil 5.23. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



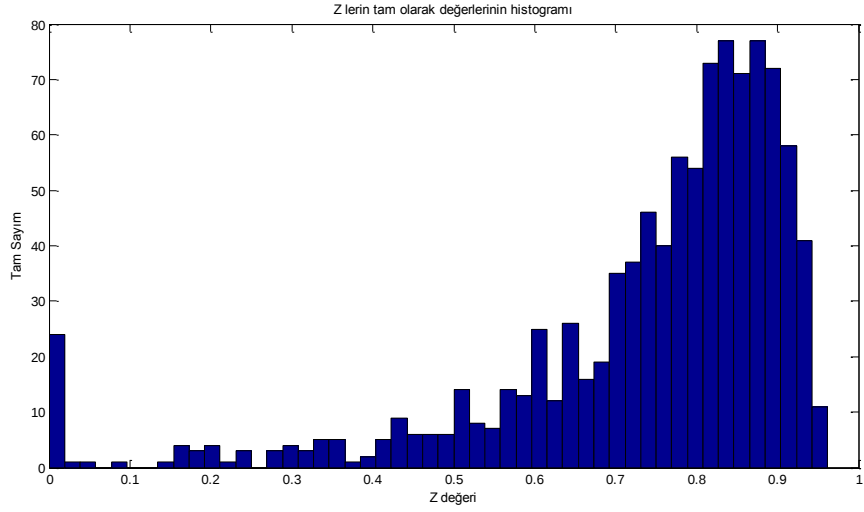
Şekil 5.24. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 400)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



Şekil 5.25. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



Şekil 5.26. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları



Şekil 5.27. Matlab programında $\theta_i \sim N(200, 1600)$ ve $X_{ij} | \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$ portföyü için elde edilen 1000 deneme sonuçları

Çizelge 5.8. $\theta_i \sim N(50,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
1	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	8
2	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	225
3	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	345

Çizelge 5.9. $\theta_i \sim N(100,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
10	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	9
11	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	290
12	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	453

Çizelge 5.10. $\theta_i \sim N(200,81)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
19	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	14
20	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	280
21	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	450

Çizelge 5.11. $\theta_i \sim N(50,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
4	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	0
5	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	44
6	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	177

Çizelge 5.12. $\theta_i \sim N(100,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
13	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	0
14	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	43
15	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	172

Çizelge 5.13. $\theta_i \sim N(200,400)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
22	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	0
23	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	54
24	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	183

Çizelge 5.14. $\theta_i \sim N(50,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
7	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	0
8	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	4
9	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	24

Çizelge 5.15. $\theta_i \sim N(100,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
16	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	0
17	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	19
18	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	13

Çizelge 5.16. $\theta_i \sim N(200,1600)$ iken süreç varyansının farklı değerleri için 1000 denemede $Z=0$ olan sonuç sayısı

Şekil No	Parametre Değerleri	$Z=0$ olan durumların Sayısı
25	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 100)$	2
26	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 900)$	5
27	$X_{ij} \theta_i \sim N(\theta_i, 2500)$	24

Risk parametresi θ_i ' nin varyansı büyük, süreç varyansı ($\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)$) küçük olduğunda genellikle $\hat{a}$ değerlerinin hepsi pozitif çıkmaktadır. Z kredibilite faktörünü sıfır olarak kullanmaya gerek kalmadığından, bu durumlarda klasik kredibilite ile prim tahmininde bulunmak daha adil sonuçlar verecektir. Fakat risk parametresinin

varyansı küçük, süreç varyansı ise büyük iken $Z=0$ olduğu durumların sayısı oldukça artmaktadır. Bu durumda klasik kredibilite modelleri (Bühmann ve Bühlmann-Straub Modelleri) ile prim tahmini yapmak sigortalılar açısından adaletli olmayacaktır.

Çizelge 5.14 ve Çizelge 5.16' ya bakıldığında risk parametresinin varyansı ve süreç varyansı büyük iken $Z=0$ olduğu durum sayısı diğer durumlara göre oldukça azalmaktadır. Bu durumlarda da klasik kredibilite modelleri kullanılabilir hale gelmektedir. Diğer taraftan risk parametresinin beklenen değerinin büyük yada küçük olması sonuçları fazla etkilememektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kredibilite, ağırlıklı tahmin değerinin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma işlemi, Z kredibilite faktörü ile yapılmaktadır. Z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler, kredibilite modelleri olarak isimlendirilir. Bu yüzden Z kredibilite faktörünün belirlenmesi önemlidir.

Bazı durumlarda hipotetik ortalamanın varyansının tahmin değeri negatif sonuçlar verir. Bu durumda prim değeri hesaplanırken, Z kredibilite faktörü sıfır alınır. Sonuç böyle olduğunda Eş. (3.1)' de verilen kredibilite prim tahmini sadece bütün sigortalıların genel ortalamasına göre belirlenir. İlgili sigortalının kendi deneyimine sıfır ağırlık verilir. Diğer bir ifade ile, sigortalının kendi deneyimi prim tahmini hesaplanırken işlem dışı tutulur. Eğer bu sigortalının hasar deneyimi diğer sigortalılara göre fazla ise prim tahmininin genel ortalama alınarak yapılması bu sigortalının lehine olurken, diğer sigortaların aleyhine olacağından sigortalılar açısından bir adaletsizliğe neden olacaktır.

Risk parametresinin varyansı büyük, süreç varyansı küçük olduğunda genellikle Z kredibilite faktörünü sıfır olarak kullanmaya gerek kalmadığından, bu durumlarda klasik kredibilite modelleriyle prim tahmininde bulunmak adil sonuçlar verecektir. Fakat risk parametresinin varyansı küçük, süreç varyansı ise büyükken, $Z=0$ olduğu durumların sayısı oldukça artmaktadır. Bu durumda klasik kredibilite modelleri ile prim tahmini yapmak sigortalılar açısından adaletli olmayacaktır. Hem risk parametresinin varyansı hem de süreç varyansı büyükken $Z=0$ olduğu durum sayısı diğer durumlara göre oldukça azalmaktadır. Bu durumlarda da klasik kredibilite modelleri kullanılabilir hale gelmektedir. Diğer taraftan risk parametresinin beklenen değerinin büyük ya da küçük olması sonuçları fazla etkilememektedir.

KAYNAKLAR

Atanasiu, V., “Some extensions of the Bühlmann-Straub credibility formulae”, *Blutenul Academiei De Stiinte A Republicii Moldova*, 3(61):3-12, (2009).

Bailey, A.L., “A Generalized Theory of Credibility”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 32: 13–20 (1945).

Bailey, A.L., “Credibility Procedures, Laplace’ s Generalization of Bayes Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 37: 7–23 (1950).

Bühlmann, H., “Experience Rating and Credibility”, *ASTIN Bulletin*, 4: 199–207 (1967).

Bühlmann, H. and Straub, E., “Glaubwürdigkeit Für Schadensätze”, *Mitt. Ver. Schweiz. Ver.*, 70(1): 111-133 (1970).

Dannenburg, D., “Crossed Classification Credibility Models”, *In. Trans. 25th Int. Congress of Actuaries*, 4: 1–36 (1995).

Dannenburg, D. R., Kaas R., Goovaerts M. J., “Practical Actuarial Credibility Models”, *University of Amsterdam Institute of Actuarial Science and Econometrics*, The Netherlands, 3-40 (1996).

Ebegil, M., “Kredibilite Teorisinde Parametre Tahmini ve İstatistiksel Bir Yaklaşım”, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, 58-68 (2007).

Ebegil, M., Gökpınar, F., “Pareto Dağılımı Altında Bühlmann-Straub Kredibilite ve Karma Etki Modelinde Prim Tahmini Modellemesi”, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 16-2, 191-203 (2012).

Frees, E.W., Young, V.R., Luo, Y., “A Longitudinal Data Analysis Interpretation of Credibility Models”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3): 229–247 (1999).

Frees, E.W., Young, V.R., Luo, Y., “Case Studies using Panel Data Models”, *North American Actuarial Journal*, 5(4): 24–42 (2001).

Goulet, V., “On Approximations in Limited Fluctuation Credibility Theory”, *Proceeding of the Casualty Actuarial Society*, 84: 533–552 (1997).

Gau, W., Gangopadhyay, A., Han, Z., “Interval Estimation of the Credibility Factor” *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 2(1): 71-84 (2008).

Herzog, T.N., “Introduction to Credibility Theory 3rd ed”, *ACTEX Publications*, Winsted, 11–145 (1994).

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene J., Denuit M., “Modern Actuarial Risk Theory”, *Kluwer Academic Publisher*, Dordrecht, The Netherlands, 203-227 (2001).

Klugman, S.A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E., “Loss Models From Data to Decisions 2nd ed.”, *John Wiley & Sons*, New York, 515–600 (1998).

Klugman, S., Panjer, H., Wilmot, G., Loss Models from Data to Decisions, *John Wiley & Sons*, New York, 371-402 (2004).

Mowbray, A.H., “How Extensive a Payroll is Necessary to Give a Dependable Pure Premium?”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24–30 (1914).

Norberg, R., “The Credibility Approach to Experience Rating”, University of Oslo, *Scand. Actuarial J.*, 181-221 (1979).

Schmidli, H., “Lecture Notes on Risk Theory”, *Institute of Mathematical Science*, University of Copenhagen, (2003).

Wen, L., Deng, W., “The Credibility Models With Equal Correlation Risks”, *J Syst Sci Complex*, 24:532-539 (2011).

Whitney, A., “The Theory of Experience Rating” *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 4: 274-292 (1918).

İnternet: Sağlık Memurları “Zorunlu Trafik Sigortası Nedir?”

<http://www.saglikmemurlari.org/uyeler/nokta.htm> (2013).

İnternet: Sigortam “Zorunlu Trafik Sigortası Nedir?”

<http://www.sigortam.net/trafik-sigortasi/zorunlu-trafik-sigortasi-nedir> (2013).

İnternet: Türkiye Sigorta Birliği “Resmi Trafik İstatistikleri”

<http://www.tsrb.org.tr/sayfa/trafik-istatistikleri> (2013)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ERDAL, Abdurrahman
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.09.1985 Yerköy
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 05067187666
 e-mail : abdurrahmanerdal@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-2012	Bilişim Dershaneleri	Matematik Öğret.
2012-....	Çalışma ve İş Kurumu	İş ve Mesl. Danış.

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Erdal, A. ve Ebegil, M., “Klasik Kredibilite Modellerinde Kredibilite Faktörünün İncelenmesi” 1. Ulusal Sigorta ve Aktüerya Kongresi Bildirim Özet Kitapçığı, Ankara, (2013).