

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN
SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

HÜSEYİN BERAN KAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUHAMMET KURULAY**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN
SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hüseyin Beran KAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 20.01.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Özgür YILDIRIM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali AKINLAR
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, tez konusunun seçimine ve yürütülmesine tavsiyeleriyle yön veren, yüksek lisansımın ders alma süreci dahil bitişine kadar desteğini esirgemeyen değerli ve saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Muhammet KURULAY'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yaşamımın her aşamasında bana maddi ve manevi her türlü desteği ile yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak, 2015

Hüseyin Beran KAŞ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez.....	4
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Temel Tanımlar	5
2.1.1. Tanım:.....	5
2.1.2. Tanım:.....	5
2.1.3. Tanım:.....	5
2.1.4. Tanım:.....	6
2.1.5. Tanım:.....	6
2.2 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırması	6
2.2.1. Lineerlik	6
2.2.2. Yarı Lineerlik (Kuasi-Lineer)	7
2.2.3. Hemen-Hemen Lineerlik.....	7
2.2.3.1. Parabolik Diferansiyel Denklemler.....	8
2.2.3.2. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler	9
2.2.3.3. Eliptik Diferansiyel Denklemler	10

2.3	İkinci Mertebeden Denklemlerin Önemi	14
2.4	Çözüm Yöntemleri Karşılaştırması	16
2.5	Sonlu Farklar Yöntemi	17
2.5.1.	Açık Sonlu Fark Yöntemi	20
2.5.2.	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi	22
2.5.3.	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	25
2.6	Ağırlıklı Averaj Yaklaşımı	28
2.7	Taylor Seri Yaklaşımları ve Sayısal Hatalar	28
2.8	Düzgün Ağ Sistemi	29
2.9	Sayısal Hatalar	32
2.10	Klasik sonlu fark yöntemlerinin lokal kesme hatası	35
2.10.1.	Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası	35
2.10.2.	Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası	36
2.10.3.	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası	37
BÖLÜM 3		
KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ		39
3.1	Klein-Gordon Denklemi	39
3.2	Açık Fark Şeması	40
3.2.1	Açık Fark Şemasının Kararlılık Analizi	42
3.3	Kapalı Fark Şeması (Crank – Nicholson)	43
BÖLÜM 4		
SONUÇ VE ÖNERİLER		50
KAYNAKLAR		51
EK		
KODLAR		55
ÖZGEÇMİŞ		57

SİMGE LİSTESİ

$O(h)$ Sayısal Hata
 α Alfa

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
SFY	Sonlu Fark Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Parabolik bir denklemin çözüm alanı.....	8
Şekil 2. 2 Hiperbolik bir denklemin çözüm alanı	9
Şekil 2. 3 Eliptik bir denklemin kapalı çözüm alanı	11
Şekil 2. 4 Düğüm Noktalarının Gösterimi	18
Şekil 2. 5 Düzgün ağ sistemi	29
Şekil 2. 6 Fark yaklaşımları	31
Şekil 2. 7 Ağ boyutuna bağlı olarak hatalar	34
Şekil 3. 1 Açık Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$	44
Şekil 3. 2 Kapalı Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$	45
Şekil 3. 3 Açık Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$	47
Şekil 3. 4 Kapalı Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$	48

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2. 1 Analitik ve Sayısal Çözüm Arasındaki Karşılaştırma	16
Çizelge 3. 1 Örnek 3.1 için hata analizi	46
Çizelge 3. 2 Örnek 3.2 için hata analizi	49

**KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN
SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

Hüseyin Beran KAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muhammet KURULAY

Bu çalışmada, Dirichlet sınır şartına sahip olan Klein-Gordon denkleminin Sonlu Farklar metodu ile çözümü Maple programı yardımıyla yapılmıştır. Çözüm yapılırken, açık ve kapalı gibi değişik sonlu fark şemaları ele alınmış ve bu elde edilen yaklaşımlar karşılaştırılmıştır. Bu yaklaşık çözümlerin kararlılık ve yakınsaklık analizleri yapılmıştır.

Sayısal örnekler kullanılarak yaklaşık çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark incelenmiştir. Bu farklar grafikler ile gösterilerek hata analizleri yapılmış ve hata analizleri tablolar halinde gösterilmiştir. Yaklaşık çözüm hesaplanırken bilgisayar programlarının kullanılması sayesinde, çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında değişik oranlar kullanılınca oluşan farklı sonuçlar da karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dirichlet sınır şartı, Klein-Gordon diferansiyel denklemi, sonlu fark metodu, kararlılık analizi, açık şema, kapalı şema

ABSTRACT

FINITE DIFFERENCE METHOD SOLUTION FOR KLEIN- GORDON EQUATION

Hüseyin Beran KAŞ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet KURULAY

In this study, Klein-Gordon Equation, which has Dirichlet Boundary Condition is solved with Finite Difference Method and using Maple program. While we find solution, different finite difference schemes are used such as Implicit and Explicit scheme, besides these schemes are compared. The Analysis of stability, convergence and uniqueness of the approximate solutions are done. The difference of Analytic and Approximate solution are discussed with using numerical examples. These differences are shown with graphs and the Analysis of errors are done. While calculating approximate solution, due to using computer program, we compare the difference of different ratios for separating the domain of solution.

Keywords: Dirichlet boundary conditions, Klein-Gordon equation, finite difference method, stability analysis, explicit method, implicit method

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fiziksel olayların matematiksel ifadesi olan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlemesi bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere bağlı olarak, 20. yüzyılın ilk çeyreğinde başlayıp günümüze kadar devam eden bir süreci oluşturmaktadır. Bilgisayar ortamındaki gelişmelere paralel olarak denklemlerin matris formunda ifade edilmesi sayısal analiz metotlarında büyük gelişmelere sebep olmuştur. Bu gelişmeler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi metotlar günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Ayrıca sonlu fark denklemlerinin çözümünde denklemlerin lineer olması koşulunu gerektirmediğinden dolayı iterasyon metotları tercih sebebi olmuştur. Akışkanlar mekaniği alanındaki örneklerin çözümünde sonlu fark metodu oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır [1]. Ayrıca kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde genellikle sonlu fark metotları kullanılmıştır. [2] de parabolik, hiperbolik ve eliptik türden denklemlerin sonlu fark metodu ile çözümleri verilmiştir. Ayrıca [3] ve [4] parabolik türden kısmi türevli denklemlerin sonlu fark metotları ile çözümlemesi üzerine yapılmış olan çalışmalardır. Sayısal hesaplamalar, [3] te olduğu gibi Qbasic programlama dili kullanılarak yapılabildiği gibi [4] te kullanılan Mathematica gibi paket programlar kullanılarak da yapılabilir. Benzer şekilde Matlab ve Maple paket programlarının da kullanımı yaygındır. Bu çalışmada ise eliptik türden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu fark metotları ile çözümlemesi yapılmıştır. Sonlu fark denklemlerinin iterasyon metotları ile çözümleri yapılmış, bu çözümler hem analitik çözümle hem de kendi aralarında karşılaştırılmıştır.

Klein-Gordon denklemi görelî kuantum mekaniği ve alan teorisinde karşımıza çıkar. Yüksek enerji fizikçileri için büyük önem taşımaktadır ve birçok olguları modellemek için kullanılan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Lineer olmamasından dolayı analitik çözümü zordur ve hesap için nümerik yöntemlere başvurulmaktadır.

Doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemi çözümlerinin literatürde önemli bir yeri vardır. İkinci dereceden sonlu fark çeşitleri [5] te gösterilmiştir. Spektral yöntemler kullanılarak alternatif yaklaşımlar [6] ve [7] de gösterilmiştir. Dört tane sonlu fark şemasının doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemine yaklaşması incelenmiştir. Simetri uzayındaki kısmi kayıplarda ve denklemin ilk halindeki bir parametrenin büyük değeri için oluşan istikrarsızlıklarda istenmeyen sayısal özellikler gözlenmiştir. Sonlu fark yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için ilk yöntem olarak bilinir. Ancak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili olmasına rağmen, sonlu fark formüllerinin açık koşullu istikrar çözümü ve sonlu farklar yönteminde CPU kullanımı zaman aldığı için bu yöntemlerin uygulanabilirliği sınırlıdır [8]. Ayrıca bu metotlar sadece uyumlu noktalardaki problemlerin çözümü için imkân sağlamaktadır. Düzgün olmayan ve düzensiz alanlarda bu tekniklerin etkisi azdır.

Son yılların ağsız teknikleri ağ oluşumunu önlemek için araştırmacıların dikkatini çekmektedir. Ağsız yöntemde dağınık bir düğüm grubu problemin yerine kullanılır. Galerkin Yöntemi, üreyen çekirdek parçacığı, yerel nokta enterpolasyonu gibi bazı ağsız şemalar [9] da gösterilmiştir.

Son 20 yıldır, radyal temel fonksiyonları yöntemi dağınık veri enterpolasyon yöntemi için güçlü bir araç olarak bilinir. Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için bir ağsız prosedür olarak radyal temel fonksiyonların kullanımı kollakasyon şemasına dayanmaktadır. Kollakasyon tekniği nedeniyle bu metotta integral hesaplamaya gerek yoktur. Geleneksel tekniklerin üzerinde radyal temel fonksiyonların kullanıldığı sayısal prosedürlerin ana avantajı bu yöntemlerin ağsız özellikte olmalarıdır. Radyal baz fonksiyonları kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için aktif olarak kullanılmaktadır [10] ve [11].

Son 10 yılda, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne yaklaşımı ile ağsız yöntem olan radyal temel fonksiyonların gelişimi bilim ve mühendislik alanlarında birçok araştırmanın dikkatini çekmiştir. Çözümlerin sayısal tahmini için 1990'da Kansa

tarafından geliştirilen Kansa metodu doğrudan radyal temel fonksiyonların, özellikle de multiküadratik yerini almaktadır [10] ve [12]. Kansa yöntemi son zamanlarda, tek boyutlu doğrusal olmayan Burgers denklemini [13], gelgit ve akımlar için sıgı su denklemleri simülasyonunu [14], ısı transferi problemlerini [11] ve serbest sınır problemlerini [15] ve [16] içeren çeşitli adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözümleri için geliştirilmiştir. Fasshauer [17] daha sonra Kansa metodunda değişimler yaparak Hermit tipi kollakasyon metodunu elde etmiştir. Geleneksel radyal temel fonksiyonlar yöntemi, sonuçta katsayılar matrisi elde edilen fonksiyonlar olarak tanımlanır. Bu nedenle büyük ölçekli soruların çözümü için katsayılar matrisi yeterli olmayacaktır. Bu sorunu kaldırmak için radyal temel fonksiyonlarda bazı yeni değişiklikler yapılmıştır [18]. Dağınık veri enterpolasyonunda radyal temel fonksiyonun teorik gelişiminde, Madych ve Nelson az yarı norm hataları ile üstel yakınsamada radyal temel fonksiyon-multiküadratik interpolant kullanmışlardır [19] ve [20]. Son zamanlarda, Franke ve Schback sağlanan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için radyal temel fonksiyon kullanarak teorik kanıt sağlamışlardır [21] ve [22]. Daha yakın zamanlarda, Hon ve Wu çözümleme alanlarında geliştirilmiş tekniklerle radyal temel fonksiyonu bir araya getirerek yeni bir teori oluşturmuşlardır [23]. Radyal temel fonksiyonlar çok sayıda kısmi diferansiyel denklemin çözümü için [24] ve [25] te kullanılmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, analitik olarak çözümü çok zor olan lineer olmayan Klein-Gordon diferansiyel denkleminin çözümünün sayısal yöntemler ile hesaplanmasıdır. Sayısal çözümler farklı yaklaşımlarla ele alınabilir. Bu çalışmada açık ve kapalı fark şemaları gibi değişik yaklaşımlar ile sayısal çözüm yapılacaktır. Bu yaklaşımların hangisinin analitik çözüme daha yakın olduğu çeşitli analizler yapılarak hesaplanacaktır. Yapılan işlemler tek bir sayısal örneğin çözümü olmak yerine, değişik koşullarda ve durumlarda ele alınabilen bir problemin çözümü olacaktır. Bu ortaya çıkarılacak şemalar kullanılarak Dirichlet sınır şartlarına sahip Klein-Gordon denkleminin farklı durumlardaki çözümleri elde edilebilir olacaktır.

1.3 Hipotez

SFM'nin özellikleri ve bu özelliklerin ispatları açık bir şekilde verilmeye çalışılmıştır. Metodun problemlere uygulanışı sırasında MAPLE sembolik programlama dili kullanılarak hesapların hızlı ve güvenilir olması sağlanmıştır.



TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım:

Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren denklemlere “diferansiyel denklemler” denir.

2.1.2. Tanım:

Bir bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere “adi diferansiyel denklemler” denir. n.mertebeden adi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir.

2.1.3. Tanım:

En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemlere “kısmi diferansiyel denklemler” denir. Örnek olarak akışkanlar mekaniği, hidrolikler, ısı transferi, aerodinamik, yapısal analiz, elastisite, elektro-manyetik alanlar

ve nötron difüzyon problemleri verilebilir. Matematiksel modeller genelde, örneğin Newton'un hareket kanunu gibi, fiziksel yasalardan çıkarılırlar. Bazı problemler birden fazla bağımsız değişken gerektirir. Bunların modellenmesi mecburi olarak KDD ile yapılır. Sadece çok az problem ADD ile modellenenebilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir.

2.1.4. Tanım:

Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine o diferansiyel denklemin “mertebesi” denir.

2.1.5. Tanım:

Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferansiyel denklemin “derecesi” denir.

2.2 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırması

Mühendislikte karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerin büyük bir çoğunluğu bir veya ikinci mertebeden denklemlerdir. Bu tip denklemlerin bir kısmı için analitik çözüm bulunsa bile özellikle lineer olmayan tipleri için sayısal çözüme başvurmak gerekir. Sayısal çözüm için değişik yöntemler uygulanmakla beraber bu yöntemler denklemlerin tiplerine göre bazı özellikler arz eder [51]. Bu tip denklemler aşağıdaki gibi üç sınıfta incelenirler.

2.2.1. Lineerlik

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. İki bağımsız bir bağımlı

değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y) \quad (2.3)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y) \quad (2.4)$$

2.2.2. Yarı Lineerlik (Kuasi-Lineer)

Bir kısmi türevli diferansiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise bu denklem Yarı Lineer (Kuasi-Lineer) adını alır. İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z) \quad (2.5)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.6)$$

2.2.3. Hemen-Hemen Lineerlik

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme Hemen-Hemen Lineer denklem denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli;

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.7)$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ 'dir. Bu tip denklemler ise aşağıda verilen diskriminant fonksiyonuna bağlı olarak sınıflandırılırlar. Buna göre diskriminant fonksiyonu

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y).C(x, y) \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanırsa bir hemen hemen lineer denklem;

a) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik,

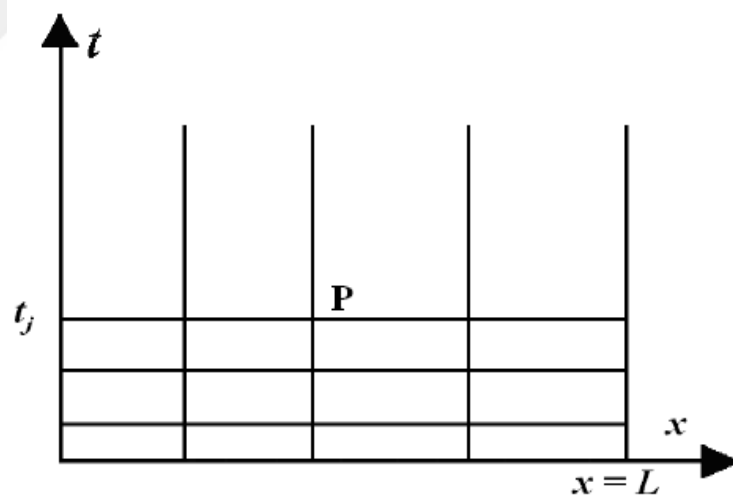
b) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik,

c) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik,

olarak adlandırılır. Şimdi fiziksel olayların bu tip kısmi diferansiyel denklemler şeklinde ifade edilmesine ait bilinen bazı örnekleri verelim.

2.2.3.1. Parabolik Diferansiyel Denklemler

Zamana bağlı ısı veya madde yayılması problemlerinde karşılaşılr. Verilen başlangıç ve sınır şartlarından başlanarak, bir yönü açık bir alanda adım adım ilerleyerek çözümü bulunan denklemlerdir. Dolayısıyla herhangi bir noktadaki çözüm, o noktadan önceki noktalardaki değerlere bağlı olarak elde edilir. Örneğin Şekil 2.1’de P noktasındaki (herhangi bir t anında) çözüm, P nin alt tarafındaki noktalara bağlı olarak bulunur. Yani P noktasındaki özellik daha önceki zaman adımlarında (t_j ’den önce) hesaplanan noktalardaki değerlere bağlı olup sonraki zaman adımlarında (t_j ’den sonra) hesaplamaların yapılacağı noktalara bağlı değildir.



Şekil 2. 1 Parabolik bir denklemin çözüm alanı

Parabolik denklemlerin tipik örneği difüzyon denklemdir. Isıl difüzyon denklemini olan geçici rejim ısı iletimi denkleminde

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

$A=0$, $B=0$ ve $C=\alpha$ olup diskriminant sıfırdır. Dolayısıyla denklem parabolik denklemdir.

Bu denklemin çözümü için başlangıç şartı ($t=0$ için sıcaklık değerleri) ve sınır şartları ($x=0$ ve $x=L$ için sıcaklıklar) verildiğinde t yönünde adım adım ilerleyerek her t anı için sıcaklık dağılımı elde edilir.

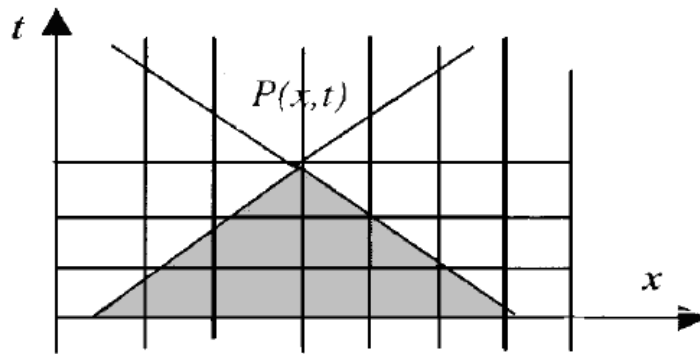
Parabolik denklemlere bir başka örnek sürekli rejimdeki bir akışa ait

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

momentum denklemdir. Burada akışın x yönünde ve bu yöndeki hız bileşeninin u olduğu dikkate alınırsa x yönünde adım adım ilerleyerek her adımda y yönündeki hız profilleri bulunur. Açıkta ki bu çözümün yapılabilmesi için başlangıç şartları ($x=0$ için hız değerleri) ve sınır şartları ($y=0$ ve $y=h$ için hız değerleri) bilinmelidir[26].

2.2.3.2. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler

Bir tarafı açık alanda, başlangıç değerlerden başlayarak adım adım ilerlemeyle çözüm bulunan denklemlerdir. Düzlemde P noktasındaki çözüm bulunmak isteniyorsa P noktasından önce gelen ve iki doğru arasında kalan noktalardaki çözüm bilinmelidir. Bu iki doğru hiperbolik denklemlerde önemli olup karakteristik doğrular olarak adlandırılır (bunlar eğri de olabilir). Karakteristik eğriler arasındaki alanın kesim noktasından önceki kısmı $P(x,t)$ noktasındaki çözümü etkileyen alan, sonraki kısım ise $P(x,t)$ deki çözümün etkilediği alan olacaktır (Şekil. 2.2).



Şekil 2. 2 Hiperbolik bir denklemin çözüm alanı

Yani etkileyen alan dışında herhangi bir tedirginlik $P(x,t)$ noktasındaki çözümü etkilemez. Bu açıdan bakıldığında parabolik denklemler, hiperbolik denklemlerin özel bir hali gibi düşünülebilir. Yani parabolik denklemlerde iki karakteristik doğru üst üste çakışık olup yatay gibi düşünülebilir. Gerçekten parabolik denklemlerde diskriminant sıfır olup katlı karakteristikler vardır.

Hiperbolik denklemlerin tipik örneği dalga denklemdir.

c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkeni ve $u = u(x,t)$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

1-boyutlu dalga denklemdir.

Burada $A=1$, $B=0$ ve $C=-c^2$ olup diskriminant pozitif olduğundan hiperbolik denklem söz konusudur. Yine burada da verilen başlangıç şartlarından hareketle adım adım çözüm elde edilir [26].

Bir boyutlu dalga denkleminin çözümü bize ℓ uzunluğunda titreşim halinde olan bir telden t saniye sonra bir ucundan x kadar uzaklıktaki enine yer değişimini verir. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır değerleri bilinir.

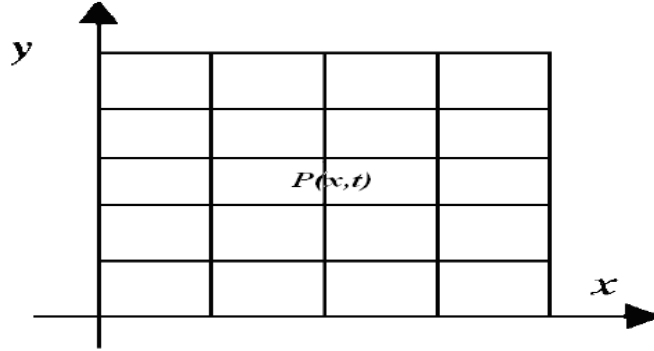
Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır. Ayrıca hiperbolik denklemler genellikle titreşim problemlerinde veya yoğunluk, basınç ve hızdaki süreksizlik durumları ile ilgili problemlerde kullanılır [27].

2.2.3.3. Eliptik Diferansiyel Denklemler

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler genellikle denge veya kararlı hal problemleri ve bunların çözümüyle karşımıza çıkar.

Sınır değer problemleri bu gruba girer. Çözüm yapılacak alan içinde bir P noktasındaki çözüm diğer noktalara ve sınır değerlerine bağlıdır (Şekil 2.3). Dolayısıyla çözüm için bütün sınır değerler bilinmelidir. İç noktalarda çözümün adım adım değil eşzamanlı olarak bulunması gerekir. Bu bakımdan çözümü diğer denklem tiplerine göre daha zor

olan denklemlerdir. Diskriminant negatif olduğu için eliptik denklemlerde reel karakteristik eğri yoktur [26].



Şekil 2. 3 Eliptik bir denklemin kapalı çözüm alanı

En iyi bilinen eliptik denklemler Laplace ve Poisson Denklemleridir. Laplace denklemi potansiyel teorisinin temel denklemlerinden birisi olduğundan fiziksel uygulamaları çoktur. Örneğin yüzeyleri izole edilmiş bir ortamda zamandan bağımsız bir ısı dağılımı varsa (ki buna kararlı ısı denir) herhangi bir (x, y) noktasındaki ısı miktarını veren $u(x, y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar. Ayrıca ısı kaynağı olmayan bir bölgede kararlı sıcaklık dağılımı, iletkenlerle çevrili yüksüz bir bölgede elektrostatik potansiyel, kaynak veya kuyu olmayan bir akışkanda hız dağılımı vs. problemlerinde de karşımıza çıkar [27].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.12)$$

Bu denklemde $A=1$, $B=0$ ve $C=1$ olup diskriminant negatiftir. İki boyutlu ısı iletimi denklemi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.13)$$

de bu tip bir denklemdir. İki boyutlu sıkıştırılamaz akışa ait momentum denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.14)$$

konuma göre eliptik, fakat zamana göre hiperbolik karakterli bir denklemdir. Bazı denklemler duruma göre karakter değiştirebilir. Mesela sıkıştırılabilir sürtünmesiz akışa ait potansiyel fonksiyon ifadesi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

mach sayısı $M > 1$ ise (ses üstü akış) hiperbolik, $M < 1$ (ses altı akış) eliptik karakter gösterecektir. Bu durum sayısal çözümde özel dikkat gerektirir [26].

2.2.4. Tanım:

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir [28].

2.2.5. Tanım:

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir.

Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin basamağı kadar (sürekli türetilbilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir [29].

2.2.6. Tanım:

Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) Sınır şartları: Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α , β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

Dirichlet şartı: $u|_{\Gamma} = g$

Neumann şartı : $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g$

Karışık (mixed) veya Robin şartı : $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$

(ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferansiyel denkleme 'Cauchy problemi' denir.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_y + Eu_x + Fu + G = 0 \quad (2.16)$$

genel şekliyle verilebilir.

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, iyi durumda, en az bir şartı sağlamaz ise kötü durumda olarak adlandırılır. Bu şartlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

a) Varlık

b) Teklik

c) Kararlılık

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını ifade etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemini sağlayan bir çözüm yapılandırmasıdır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir.

Adi diferansiyel denklemlere göre kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansır bu çözüme kararludur denir ve çözüm kararlı kabul edilir [30].

2.2.7. Tanım:

Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişkenin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa (veya birden küçük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa) bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevlerinin çarpımını içeriyorsa veya bağımlı değişkenin trigonometrik, üstel, logaritmik fonksiyonlarını içeriyorsa bu denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklem, aksi halde lineer diferansiyel denklemdir denir.

2.2.8. Tanım:

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi, verilen şartlara da başlangıç şartları adı verilir.

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine sınır değer problemi, verilen şartlara da sınır şartları adı verilir [31].

2.3 İkinci Mertebeden Denklemlerin Önemi

Birinci mertebeden KDD'ler nadiren fiziksel problemlerde kullanılırlar. Genelde analitik olarak çözülebilirler. Birinci mertebeden KDD'lerin sistemleri daha sık kullanılır. Birinci mertebeden KDD'lerin sistemleri genelde yüksek mertebeden KDD'lerin çözümlenip indirgenmiştir. Örneğin ikinci mertebeden KDD olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

ele alalım. Bu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.18}$$

şeklinde birinci mertebeden KDD sistemi olarak yazılabilir.

Birinci mertebeden denklemlerin gerçel karakteristikleri vardır. Bu yüzden doğal olarak hiperboliktirler. Örneğin akışkanlar mekaniği, sıcaklık transferi, rigid yapı dinamiği ve elastisite problemleri gibi birçok fizik problemi ikinci mertebeden KDD'ler ile modellenir. Bazen dördüncü mertebeden denklemler oluşur. Bununla birlikte bunlar genelde basit formdadırlar ve sonlu fark denklemlerini çok fazla içermesine rağmen ikinci mertebeden denklemlere uygulanan benzer yöntemlerle çözülebilirler. Örneğin katı hal mekaniğinde, ince levha altında her birim alana dağıtılan çapraz yük için yönetici denklemi şöyledir.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{s}{D}\tag{2.19}$$

Burada w yer değiştirme ve D plağın bükülebilme rigitliğidir. Bu biharmonik denklem olarak bilinir. İkinci mertebeden eliptik denklem için sonlu fark yöntemleri doğrudan bu denkleme uygulanabilir. Bunun 4.mertebe türevleri için kullanışsız bir fark denklemi ortaya çıkar. Alternatif olarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{s}{D} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= u\end{aligned}\tag{2.20}$$

şeklinde iki tane ikinci mertebeden eliptik KDD'lere ayrılabilir ki bunlar birlikte çözülebilirler [37].

2.4 Çözüm Yöntemleri Karşılaştırması

Diğer matematiksel problemlerde olduğu gibi KDD’ler ya analitik olarak ya da sayısal olarak çözülürler. KDD in karmaşık doğasından dolayı değişkenlerine ayrılma yöntemi ve integral dönüşümler gibi çeşitli analitik teknikler sadece bazı basit durumlara uygulanır. Çizelge 2.1 analitik ve sayısal çözümlerin doğasını göstermektedir.

Çizelge 2. 1 Analitik ve Sayısal Çözüm Arasındaki Karşılaştırma

Analitik Çözüm	Sayısal Çözüm
❖ Çözüm süreklidir. Örneğin bağımsız değişkenin herhangi değerinde çözüm bulunabilir. ❖ Kesin veya çok doğrudur. ❖ Problemlerde fiziksel anlayışı sağlar. Örneğin titreşim sıklığı ve şekil modu kolaylıkla elde edilebilir. ❖ Günümüzde KDD problemlerinin karmaşıklıklarından dolayı çoğunda kullanılamazlar.	❖ Çözüm sadece kesikli noktalarda elde edilir. Kesikli noktalarda çözüm elde edebilmek için enterpolasyon gereklidir. ❖ Yaklaşık sayısal hataları doğruluk için uygun bir şekilde kontrol edilmek zorundadır. ❖ Fiziksel bilgiler daha zor elde edilir. ❖ Bilgisayar teknolojisinde ve karmaşık sayısal algoritmaların yeteneklerinin gelişmesinden dolayı karmaşık problemler için çözüm elde edilebilir.

Sonlu fark, günümüzün daha ekonomik bilgisayar teknolojisiyle beraber, sayısal yöntemleri önemli ve kaçınılmaz kılmaktadır [39].

KDD'leri çözmek için sayısal çözümleri için geliştirilen yöntemler aşağıdaki gibidir [40].

1) Seri yöntemler: Taylor ve Fourier serileri kullanılır. Fizik ve mühendislikteki problemlerin büyük bir sınıfı periyodik özelliğe sahip olduğundan Fourier in trigonometrik serisi bu tür problemlerin çözümünde önemlidir.

2) Sonlu Farklar Yöntemi: Bu yöntemde çözüm alanı ağ(grid) noktalarına ayrılır. Bu noktalardaki verilen diferansiyel denklemin fonksiyonunun değerlerine bağlı olan cebirsel denklemlere dönüştürülmesine dayanır.

3) Sonlu Elemanlar Yöntemi: Bu yöntemde çözüm bölgesi elemanlara(doğru, üçgen, kare, ...) ayrılır. Her bir eleman üzerinde uygun enterpolasyon fonksiyonları kullanarak cebirsel denklemler elde edilir. Bunların çözülmesi ile de çözüme varılır.

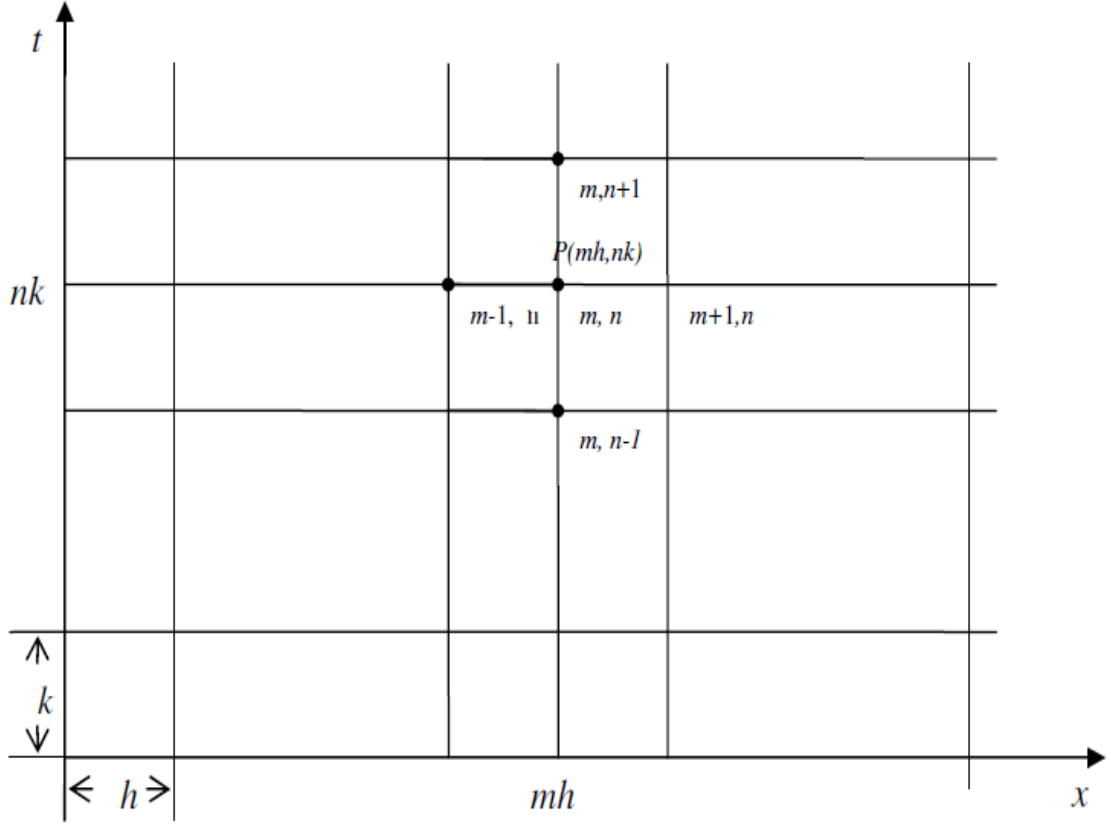
4) Sınır Elemanlar Yöntemi: Bu yöntemde ise çözüm alanının sınırlarında diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülerek çözüme ulaşılır.

5) Sonlu Hacimler Yöntemi: Bu yöntemin temeli çözüm alanının belli hacimlere ayrılması ve diferansiyel denklemin bu hacimler üzerinden integrasyonuna dayanır.

2.5 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu fark yöntemleri, lineer ve lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi Şekil 2.4 te gösterildiği gibi genellikle dikdörtgensel şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh veya grid) noktaları üzerinde hesaplanır.

Daha sonra diferansiyel denklemdeki türevler ve sınır şartları yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan lineer veya non-lineer bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür [33].



Şekil 2. 4 Düğüm Noktalarının Gösterimi

U , x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h)$, x yönünde konum adım uzunluğu, $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere, konum ve zaman koordinatları x ve t sırasıyla

$$x = x_m = m\Delta x = mh, \quad m = O(1)M, \quad l = Mh$$

$$t = t_n = n\Delta t = nk, \quad n = O(1)N$$

olarak gösterilir.

Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri $U_p = U(x, t) = U(m\Delta x, n\Delta t) = U_m^n$ ile gösterilir. U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Burada “ O ”; sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi hatanın $h \rightarrow 0$ iken h ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h)$ terimine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir (2.21), (2.22) ve (2.23) ile verilen, x değişkenine göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri, geri ve üç nokta merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.24) ve (2.25) ile verilen, t değişkenine göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.26), (2.27) ve (2.28) ile verilen, x değişkenine göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına ise sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir [32]. Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için en çok kullanılan yöntemler şunlardır:

- Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemler klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinir.

Bu çalışmada

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, t > 0 \quad (2.29)$$

ısı iletim denklemi

$$\left. \begin{aligned} U(0,t) &= f_1(t) \\ U(l,t) &= f_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ (Dirichlet Sınır Şartları)} \quad (2.30)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) &= g_1(t) \\ k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(l,t) &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ (Neumann Sınır Şartları)} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) + m_1 U(0,t) &= h_1(t) \\ k_2 \frac{\partial U}{\partial x}(l,t) + m_2 U(l,t) &= h_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ (Robin Sınır Şartları)} \quad (2.32)$$

olarak verilen üç tip sınır şartı ve

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.33)$$

başlangıç şartı için göz önüne alınacaktır. Burada $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ fonksiyonları t nin bilinen fonksiyonları olup k_1, k_2, m_1, m_2 ve α sabit sayılardır.

Bundan sonra (2.29), (2.30) ve (2.33) denklemleriyle verilen probleme Dirichlet sınır şartlı, (2.29), (2.31) ve (2.33) denklemleriyle verilen probleme Neumann sınır şartlı ve (2.29), (2.32) ve (2.33) denklemleriyle verilen probleme de Robin sınır şartlı ısı iletim problemi denilecektir.

2.5.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi

(2.29) denklemindeki $\partial U / \partial t$ ve $\partial^2 U / \partial x^2$ türevleri yerine (2.25) ve (2.26) denklemleriyle verilen sonlu fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad (2.34)$$

veya

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = O(1)M, \quad n = O(1)N \quad (2.35)$$

olur. Burada $r = \alpha k / h^2$ olup hatanın mertebesinin $O(k) + O(h^2)$ olduğu açıkça görülür. Eğer t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında değerleri U_m^{n+1} (2.35) denkleminde kolayca bulunur [32].

i) Dirichlet Sınır Şartlı Isı iletim Problemi

(2.29) denkleminin sınır şartlarının (2.30) ile verilen Dirichlet sınır şartları olması durumunda, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere, ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m=1(1)M-1, \quad n=O(1)N \quad (2.36)$$

dir. t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında U_m^{n+1} değerleri (2.36) denkleminde kolayca bulunur.

ii) Neumann Sınır Şartlı Isı iletim Problemi

Şimdi de (2.29) ısı iletim denklemi (2.31) Neumann sınır şartlarına bağlı olarak göz önüne alınacaktır. (2.35) fark denklemi $m=0$ ($x=0$) ve $m=M$ ($x=l$) için problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen $(-1, n)$ ve $(M+1, n)$ düğüm noktalarında U_{-1}^n ve U_{M+1}^n değerlerini içermektedir. $(-1, n)$ ve $(M+1, n)$ düğüm noktalarına hayali noktalar U_{-1}^n ve U_{M+1}^n değerlerine de hayali değerler adı verilir. Bu hayali değerler (2.31) sınır şartlarındaki U_x türevi yerine (2.23) ile verilen merkezi fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece

$$U_0^{n+1} = 2rU_1^n + (1-2r)U_0^n + \frac{2rh}{k_1} g_1(t)$$

ve

$$U_M^{n+1} = 2rU_{M-1}^n + (1-2r)U_M^n + \frac{2rh}{k_1} g_2(t)$$

eşitlikleri bulunur. O halde Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m+1}^n + (1-2r)U_m^n + \frac{2rh}{k_1} g_1(t), \quad m=0 \quad (2.37)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.38)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + \frac{2rh}{k_1} g_2(t), \quad m=M \quad (2.39)$$

olarak elde edilir.

iii) Robin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Burada (2.29) ısı iletim denklemi (2.32) ile verilen Robin sınır şartlarına bağlı olarak göz önüne alındı. (2.35) fark denkleminde $m=0(x=0)$ ve $m=M(x=l)$ için ortaya çıkan U_{-1}^n ve U_{M+1}^n hayali değerleri (2.32) sınır şartlarındaki U_x türevi yerine (2.23) ile verilen merkezi fark yaklaşımının kullanılmasıyla sırasıyla

$$U_{-1}^n = U_1^n + \frac{2h}{k_1} (h_1(t) - m_1 U_0^n) \quad (2.40)$$

$$U_{M+1}^n = U_{M-1}^n + \frac{2h}{k_2} (h_2(t) - m_2 U_M^n) \quad (2.41)$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikler $m=0$ ve $m=M$ için (2.35) fark denkleminde kullanılarak U_{-1}^n ve U_{M+1}^n hayali değerleri yok edilebilir. Böylece Robin sınır şartları ile verilen ısı iletim probleminin sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n-inci zaman adımında

$$U_m^{n+1} = (1-2r\beta_1)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + \frac{2rh}{k_1} h_1(t), \quad m=0 \quad (2.42)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.43)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (1-2r\beta_2)U_m^n + \frac{2rh}{k_2} h_2(t), \quad m=M \quad (2.44)$$

olarak bulunur. Burada $\beta_1 = 1 + m_1 h / k_1$ ve $\beta_2 = 1 + m_2 h / k_2$ dir [34].

2.5.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemde (2.29) ısı iletim denklemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$ yerine $n+1$ -inci zaman adımındaki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$ merkezi fark formülü ve $\partial U / \partial t$

türevi yerine (2.24) ile verilen ileri fark formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad (2.45)$$

veya

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = O(1)M, \quad n = O(1)N \quad (2.46)$$

dir. Burada $r = \alpha k / h^2$ olup hatanın mertebesinin $O(k) + O(h^2)$ olduğu açıkça görülür [32].

i) Dirichlet Sınır Şartlı Isı iletim Problemi

Bu problem için herhangi bir n -inci zaman adımındaki U_0^{n+1} ve U_M^{n+1} değerleri (2.30) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (2.29) ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere,

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M-1, \quad n = O(1)N \quad (2.47)$$

dir.

ii) Neumann Sınır Şartlı Isı iletim Problemi

(2.31) ile verilen Neumann sınır Sartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine n -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \quad (2.48)$$

merkezi fark formülü yazılırsa sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} = g_1(t)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} = g_2(t)$$

elde edilir. Bu eşitlikler sırasıyla

$$U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + \frac{2hg_1(t)}{k_1}$$

ve

$$U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + \frac{2hg_2(t)}{k_1}$$

olarak yazılabilirler. Görüldüğü gibi bu son eşitliklerde problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen U_{-1}^{n+1} ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerleri bulunmaktadır. Bu hayali değerler $m=0$ ve $m=M$ için (2.46) fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı,

$$(1+2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} - \frac{2rh}{k_1}g_1(t) = U_m^n, \quad m=0 \quad (2.49)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.50)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - \frac{2rh}{k_1}g_2(t) = U_m^n, \quad m=M \quad (2.51)$$

olarak bulunur.

iii) Robin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

(2.32) ile verilen Robin sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine (2.48) ile verilen merkezi fark yaklaşımı yazılırsa, sol sınır üzerinde $m=0(x=0)$ ve sağ sınır üzerinde $m=M(x=l)$ olacağından sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} + m_1 U_0^{n+1} = h_1(t) \quad (2.52)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} + m_2 U_M^{n+1} = h_2(t) \quad (2.53)$$

veya

$$U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + 2 \frac{h}{k_1} (h_1(t) - m_1 U_0^{n+1}) \quad (2.54)$$

$$U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + 2 \frac{h}{k_2} (h_2(t) - m_2 U_M^{n+1}) \quad (2.55)$$

hayali değerleri elde edilir. Bu değerler $m=0$ ve $m=M$ için (2.46) fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece Robin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımı için

$$(1+2r\beta_1)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} - \frac{2rh}{k_1} h_1(t) = U_m^n, \quad m=0 \quad (2.56)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.57)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r\beta_2)U_m^{n+1} - \frac{2rh}{k_2} h_2(t) = U_m^n, \quad m=M \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir.

2.5.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından önerilen modifiye edilmiş bir kapalı yöntemdir [32]. Bu yöntem sırasıyla (2.35) ve (2.46) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının averajlarının alınmasıyla elde edilmiştir.

(2.29) ısı iletim denkleminin Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right] \quad (2.59)$$

dir. Bu denklem $m=O(1)M$ ve $n=O(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (2.60)$$

olarak yazılabilir [35].

i) Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

Bu ısı iletim problemi için herhangi bir n -inci ve $n+1$ -inci zaman adımlarındaki U_0^n, U_M^n ve U_0^{n+1}, U_M^{n+1} değerleri sırasıyla (2.30) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (2.29) ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere, $m=1(1)M-1$ ve $n=O(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (2.61)$$

şeklindedir.

ii) Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

(2.31) ile verilen Neumann sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine n -inci zaman adımındaki (2.23) ve $n+1$ -inci zaman adımındaki (2.48) merkezi fark formülleri yazılırsa sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} = g_1(t) \quad (2.62)$$

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} = g_1(t) \quad (2.63)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^n - U_{M-1}^n}{2h} = g_2(t) \quad (2.64)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} = g_2(t) \quad (2.65)$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi bu son eşitliklerde problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen $U_{-1}^n, U_{-1}^{n+1}, U_{M+1}^n$ ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerleri bulunmaktadır. Bu hayali değerler $m=0$ ve $m=M$ için (2.60) fark denklemi ve (2.62), (2.63), (2.64) ve (2.65) denklemleri kullanılarak yok edilebilir. Böylece Neumann şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$(2+2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = (2-2r)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + 4r \frac{hg_1(t)}{k_1}, \quad m=0 \quad (2.66)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.67)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + 4r \frac{hg_2(t)}{k_2}, \quad m = M \quad (2.68)$$

olarak elde edilir.

iii) Robin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi

(2.32) ile verilen Robin sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine n -inci zaman adımındaki (2.23) ve $n+1$ -inci zaman adımındaki (2.48) merkezi fark formülleri, sol sınır üzerinde $m = 0$ ($x = 0$) ve sağ sınır üzerinde $m = M$ ($x = l$) olacağından sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} + m_1 U_0^n = h_1(t) \quad (2.69)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^n - U_{M-1}^n}{2h} + m_2 U_M^n = h_2(t) \quad (2.70)$$

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} + m_1 U_0^{n+1} = h_1(t) \quad (2.71)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} + m_2 U_M^{n+1} = h_2(t) \quad (2.72)$$

elde edilir. Bu yaklaşımlar problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen $U_{-1}^n, U_{-1}^{n+1}, U_{M+1}^n$ ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerlerini içermektedir. Bu hayali değerler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.60) fark denklemi ve (2.69), (2.70), (2.71) ve (2.72) denklemleri kullanılarak yok edilebilir. Böylece Robin sınır şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$(2+2r\beta_1)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = (2-2r\beta_1)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + 4r \frac{hh_1(t)}{k_1}, \quad m = 0 \quad (2.73)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M-1 \quad (2.74)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r\beta_2)U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (2-2r\beta_2)U_m^n + 4r \frac{hh_2(t)}{k_2}, \quad m = M \quad (2.75)$$

olarak bulunur [34].

2.6 Ağırlıklı Averaj Yaklaşımı

(2.29) ile verilen ısı iletim denkleminin ağırlıklı averaj yaklaşımı, $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{\alpha}{h^2} \left\{ \theta (U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) + (1-\theta) (U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) \right\} \quad (2.76)$$

veya

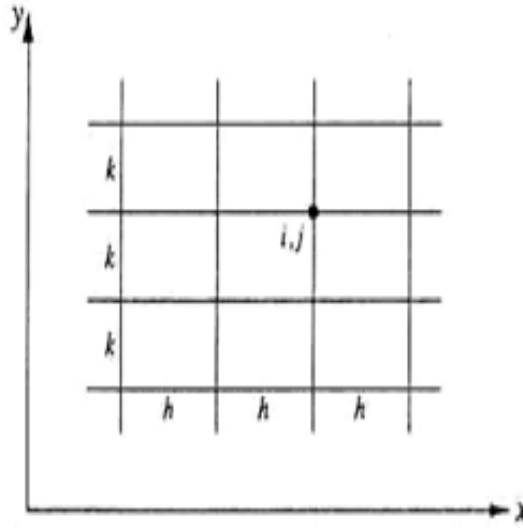
$$-r\theta U_{m-1}^{n+1} + (1+2r\theta)U_m^{n+1} - r\theta U_{m+1}^{n+1} = r(1-\theta)U_{m-1}^n + (1-2r)(1-\theta)U_m^n + r(1-\theta)U_{m+1}^n \quad (2.77)$$

şeklindedir. Burada (2.77) denklemini $\theta=0$ için (2.29) ısı denkleminin açık sonlu fark yaklaşımını, $\theta=1$ için tamamen kapalı sonlu fark yaklaşımını, $\theta=1/2$ için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını verir [32].

2.7 Taylor Seri Yaklaşımları ve Sayısal Hatalar

Tüm sayısal yöntemlerde önemli olan yaklaşım hataları hakkında, bu doğrudan yaklaşım ile herhangi bir bilgi edinemeyiz. Sonlu fark gösterimleri çoğunlukla Taylor serilerinden elde edilir. Bu yaklaşım hatalarının bulunmasına da yardım eder ki; bu hatalar kesme hatası olarak bilinir [37].

2.8 Düzgün Ağ Sistemi



Şekil 2. 5 Düzgün ağ sistemi

Şekil.2.5'te görüldüğü gibi $\Delta x = h = sbt$, $\Delta y = k = sbt$ olan düzgün aralıklı bir sistemi göz önüne alalım.

$(x_i + h)$ ve $(x_i - h)$ 'da bir $u(x, y)$ fonksiyonu x_i ye göre Taylor serisine açılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \\ u(x-h, y) &= u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.78)$$

elde edilir. Burada h , ağ büyüklüğü(grid size) veya ağ boşluğu (grid spacing) veya adım büyüklüğü (step size) olarak adlandırılır. Yaklaşımın olması için h yeterince küçüktür.

Birinci indis x-pozisyonunu, ikinci indis ise y-pozisyonunu göstermek üzere ikili alt indis gösterilimi ile bu ifadeleri yazalım:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.79)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.80)$$

(2.79)'dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h)\end{aligned}\quad (2.81)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.80)'den da aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)\end{aligned}\quad (2.82)$$

Böylece iki ve daha yüksek mertebeden türevler içeren terimler bu ifadelerden kesilirse, birinci mertebeden türevler için ileri ve geri fark yaklaşımlarını elde ederiz. h yeterince küçük olması gerektiğinden seri yakınsaktır. Tüm kesilen terimler için kullanılan ifade, ilk seri nereden kesilmişse o terimin mertebesinin büyüklüğüne uygun şekilde yazılır.

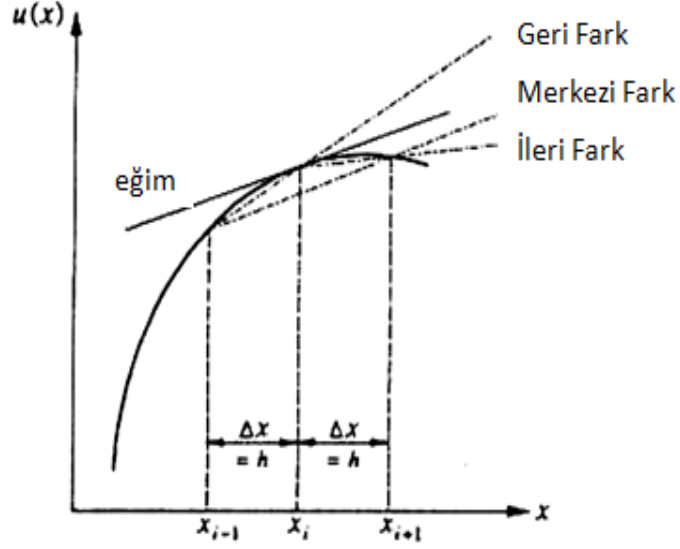
(2.81) ve (2.82)'de h mertebesinden hata $O(h)$ olarak bu kesilen terimleri ifade eder. Verilen bir problemdeki tüm türevler aynı mertebeden olduğundan bu kesme hataları yaklaşık olarak h ile orantılıdır. Yani h yarısı kadar küçültülürse hatalarda yarısı kadar küçülecektir. Bu sonlu fark ifadeleri “birinci-mertebeden doğrulukludur” denir. Fiziksel olarak kesme hatası, türevin gerçek değeri ile sonlu fark değeri arasındaki fark olarak gösterilir [44].

Eğer (2.79)-(2.80) ele alıp, tekrar düzenlersek, merkezi fark ifadelerini elde ederiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2)\end{aligned}\quad (2.83)$$

Kesme hatası $O(h^2)$ dir ve h^2 ile orantılıdır. Böylece merkezi fark ikinci-mertebeden doğruluğa sahiptir. Bu durumda h yarısı kadar küçültüldüğünde kesme hatası h mertebesindeki hatadan bir çeyrek daha küçük olacaktır. Bu da merkezi farkların hatası, ileri ve geri farkların hatasından daha küçük hataya sahip olduğunu gösterir.

Geometrik olarak Şekil 2.6'dan görüleceği gibi birinci mertebe türev için merkezi farklar gerçek tanjanta daha yakındır.



Şekil 2. 6 Fark yaklaşımları

Eğer (2.79)+(2.80) toplanıp düzenlenirse ikinci mertebeden türev için merkezi farkları elde ederiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2h}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}\quad (2.84)$$

Benzer olarak y 'ye göre türevler şöyledir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)\end{aligned}\quad (2.85)$$

(2.84) ve (2.85) denklemleri sıklıkla kullanılırlar. Bunlar, yüksek mertebeden türevler veya çok nokta kullanarak daha doğru olan merkezi fark ifadelerinin elde edilmesinde kullanılırlar. Bu bölümün sonunda bu ifadeler verilmiştir. Yüksek mertebeden türevler için sonlu farklar nadiren kullanılır. Çünkü fiziksel problemlerdeki KDD'lerin çoğu ikinci mertebededir. Daha doğru olan bu ifadelerin nadir kullanılmasının sebebi, çok daha fazla terim içermeleridir. Buna alternatif olarak doğruluğu daha düşük olan ifadelerdeki ağ genişliği küçültülerek, doğruluk artırılabilir [44].

2.9 Sayısal Hatalar

İki tür sayısal hata vardır: Kesme ve Yuvarlatma hatası. Sayısal çözümün doğruluğunu etkileyen diğer hatalar ise eksik yaklaşımlar (ardışık yöntemler için), veri giriş hataları v.d. Bu hatalar, bununla birlikte sayısal yöntem ve bilgisayar kullanımıyla ilişkili değildir. Bunlar dikkatle kolaylıkla kontrol edilebilir.

2.8'de tartışıldığı gibi Taylor serisinin ihmal edilen terimleri kesme hatasını oluşturur. Daha önce elde edilen tüm sonlu fark gösterimleri içinde görüldüğü gibi, seride daha fazla terim hesaba katıldığında ve/veya ağ büyüklüğü azaldığında kesme hataları da azalır. Bununla birlikte seriye çok terim katmak uygulama açısından güçlükler içerir. Çünkü yüksek mertebeden türevler içerirler. Dahası bilgisayar sonsuz bir seriyi değerlendiremez. Teoride, ağ büyüklüğü sıfıra yaklaşırken kesme hataları da sıfıra yaklaşır diye düşünebiliriz. Ama pratikte ağ büyüklükleri iki sebepten dolayı çok küçük seçilemez. İlki, çözümdeki toplam hata (kesme ve yuvarlatma hatalarının toplamı) yuvarlatma hatası birikmesi nedeniyle çözümü hatalı hale getireceğinden önemli olabilir. İkincisi, verilen hesaplama bölgesindeki ağ sayısı aşırı fazla olabilir, öyle ki çözümü üretmek için daha fazla bilgisayar zamanı gereklidir. Bilgisayar zamanındaki artış, iteratif yöntemlerde daha da ciddidir. Kesme hatası ve ağ genişliği arasındaki ilişki Şekil.2.7'de gösterilmiştir.

Bir dijital bilgisayarda bir gerçel sayı bir sonlu dijitteki formda yuvarlatılarak saklanır. Örneğin, $2/3$ sayısı bir bilgisayarda 0.666667 sayısına denk binary formda yuvarlatılarak saklanır. Aslında gerçek değer 0,6666666... dır. Yuvarlatmanın sebep olduğu hata yuvarlatma hatası olarak adlandırılır ve bu kaçınılmazdır. Yuvarlatma hataları makineye bağlıdır. Sonlu fark gösterimlerinde, eğer ağ genişliği çok küçükse

komşu ağ noktalarındaki bağımlı değişkenin değerleri çok yakındır. Sonlu fark değeri gibi küçük bir değer başka küçük bir değerle bölünmesi önemli yuvarlatma hatasına sebep olur. Bunu göstermek için ileri fark denklemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (2.86)$$

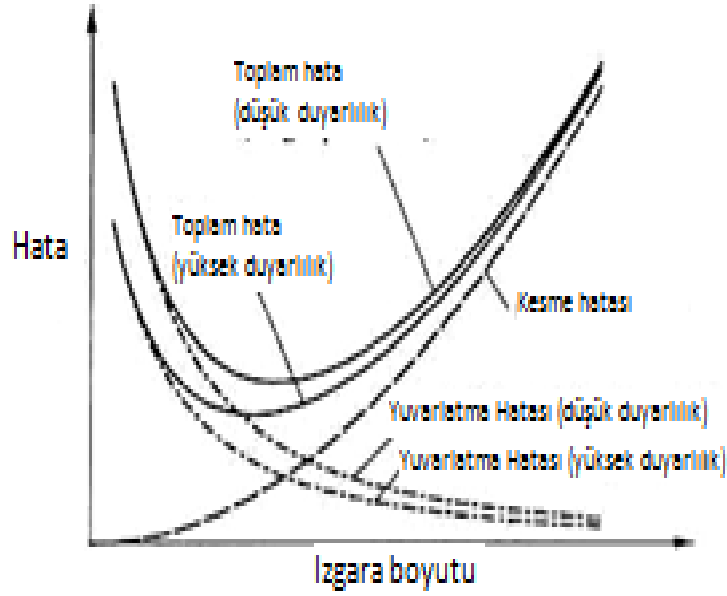
$u = ye^x$ ve tüm sayılar üç ondalık basamakla yuvarlatılmış olsun ve $x=1.3$ de $y=1$ olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.01)} - e^{1.3}}{0.01} = \frac{3.706 - 3.669}{0.01} = 3.700, \quad h = 0.01$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.001)} - e^{1.3}}{0.001} = \frac{3.673 - 3.669}{0.001} = 4.000, \quad h = 0.001$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.0001)} - e^{1.3}}{0.0001} = \frac{3.670 - 3.669}{0.0001} = 10.000, \quad h = 0.0001$$

Oysa gerçek değer $e^{1.3} = 3.669$ dur. Bu yüzden ağ genişlikleri küçülürken yuvarlatma hataları büyür. Ağ genişliklerini küçültülmesi, verilen ağ bölgesi için ağ noktalarının sayısının artmasından dolayı aritmetik işlemlerin artışı ve her adım için yuvarlatma hatalarının birikmesine yol açması ile bir KDD'nin çözümünde durum daha da kötüye gidecektir. Daha büyük ağ genişliği daha küçük yuvarlatma hatasına sebep olmasına rağmen iki sebepten dolayı ağ genişliği çok büyük seçilemez. Bunlardan ilki, aşırı kesme hatasından dolayı toplam hata önemli hale gelir. İkincisi, kesin yöntemlerdeki kararsızlığın çözüme etki etmesidir. Ağ genişliğinin arttırılması yerine yüksek hassaslıkla aritmetik kullanarak yuvarlatma hataları büyük oranda azaltılabilir. Çünkü bu durumda kayan-nokta sayısı için daha fazla basamak kullanılır. Bununla birlikte bu çok daha fazla zaman ve yer kaybına sebep olur. Yuvarlatma hatası ve ağ genişliği arasındaki ilişki Şekil.2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2. 7 Ağ boyutuna bağlı olarak hatalar

Şekil.2.7’de gösterildiği gibi anlamlı çözüm elde etmek için toplam hata kontrol edilmelidir. Yer ve hız etkenlerini düşünerek, doğruluğu iyileştirmek için sadece son çare olarak yüksek hassas olan hesaplamalar kullanılabilir. Minimum toplam hata için ağ genişliğinin analitik hesabı çok güçtür. Minimum toplam hata için ağ genişliği tahmin etmenin basit bir yolu deneme-yanılmadır. O halde belli bir ağ genişliği için elde edilen sayısal sonuçtan sonra farklı (sıklıkla daha küçük) ağ genişliği için tekrar sayısal çözüm elde edilir. Bu iki başarılı sonuç karşılaştırıldıktan sonra gerekli ağ genişliğine karar verilebilir.

Bununla birlikte minimum toplam hata için ağ genişliği en iyi seçim olmayabilir. Çok ihtiyaç olmadıkça yavaşça genişleyen ağ büyüklüğü belki daha iyi olacaktır. Çünkü daha az ağ içereceğinden çözümü elde etmek için daha az bilgisayar zamanına ihtiyaç olacaktır. Ağ genişliği seçimi problemin fiziksel doğasına da bağlıdır. Hesaplama bölgesindeki çözümün yavaşça değişmesinin beklendiği problemler için daha büyük ağ genişliği kullanılabilir. Hızlı değişimi zapt edebilmek için bölgedeki çözümün hızlıca değişmesinin beklendiği problemlerde daha küçük ağ genişliği kullanılmalıdır. Bölgesinin bir kısmında çözümün yavaşça değişmesinin ve diğer kısmında ise daha yavaş değişmesinin beklendiği problemlerde “hızlı-değişen” bölgede dar aralıklı ağı ve “yavaş-değişen” bölgede geniş aralıklı ağı düzgün olmayan sistem kullanılması en uygun seçim olacaktır [37].

2.10 Klasik sonlu fark yöntemlerinin lokal kesme hatası

Bu bölümde $\alpha = 1$ için (2.29) ısı iletim denkleminin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının lokal kesme hatalarının mertebesi hesaplanacaktır.

$\alpha = 1$ için (2.29) ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (2.87)$$

olur. (2.87) ısı iletim denkleminin tam çözümü U_m^n ve bu denkleme karşılık gelen herhangi bir sonlu fark denkleminin tam çözümü de U_m^n olsun. Bu durumda $u_m^n \equiv U_m^n$ dir.

2.10.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(2.87) denkleminin karşılık gelen açık sonlu fark denklemini

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = 0$$

şeklinde dir.

Böylece lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad (2.88)$$

dir. U_{m+1}^n , U_{m-1}^n ve U_m^{n+1} ifadelerinin Taylor seri açılımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_{m+1}^n &= U\{(m+1)h, nk\} = U(x_m + h, t_n) \\ &= U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{m,n} + \dots \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} U_{m-1}^n &= U\{(m-1)h, nk\} = U(x_m - h, t_n) \\ &= U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{m,n} + \dots \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= U\{mh, (n+1)k\} = U(x_m, t_n + k) \\ &= U_m^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} k^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{m,n} + \dots \end{aligned} \quad (2.91)$$

dir. (2.88) eşitliğinde (2.89), (2.90) ve (2.91) eşitliklerinin yazılmasıyla

$$T_{m,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} k^2 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{m,n} - \frac{1}{360} h^4 \left(\frac{\partial^6 U}{\partial x^6} \right)_{m,n} + \dots \quad (2.92)$$

elde edilir. U , verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan açıkça

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklindedir. O halde lokal kesme hatası

$$T_{m,n} = O(k) + O(h^2)$$

dir [34].

2.10.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(2.87) denkleminin karşılık gelen kapalı sonlu fark denklemi

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

şeklindedir. Böylece lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad (2.93)$$

dir. U_{m+1}^{n+1} , U_{m-1}^{n+1} ve U_m^{n+1} ifadelerinin Taylor seri açılımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_{m+1}^{n+1} &= U\{(m+1)h, (n+1)k\} = U(x_m + h, t_n + k) \\ &= U_m^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m+1,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m+1,n} + \dots \\ &= U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}
U_{m-1}^{n+1} &= U\{(m-1)h, (n+1)k\} = U(x_m - h, t_n + k) \\
&= U_m^n k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m-1,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m-1,n} + \dots \\
&= U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dots \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dots \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{2.95}$$

dir. (2.93) eşitliğinde (2.91), (2.94) ve (2.95) eşitliklerinin yazılmasıyla

$$T_{m,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{24} h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n} - k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \dots$$

elde edilir. U , verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı,

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{24} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklindedir. O halde kapalı yöntem için lokal kesme hatasının

$$T_{m,n} = O(k) + O(h^2)$$

olduğu görülür [32].

2.10.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(2.87) denkleminin karşılık gelen Crank-Nicolson sonlu fark denklemi

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{2h^2} = 0$$

şeklindedir. Lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2h^2} = 0 \tag{2.96}$$

dir. (2.89), (2.90), (2.91), (2.94) ve (2.95) ifadelerinin Taylor seri açılımlarının (2.96) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla

$$T_{m,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{m,n} + \frac{1}{6} k^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + O(h^4) + O(kh^2)$$

elde edilir. U fonksiyonu verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan açıkça

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı

$$\left(\frac{1}{6} k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklindedir. O halde Crank-Nicolson yöntemi için lokal kesme hatasının mertebesi

$$T_{m,n} = O(k^2) + O(h^2)$$

dir [36].

KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Klein-Gordon Denklemi

Klein-Gordon denklemi görelî kuantum mekaniği ve alan teorisinde karşımıza çıkar, yüksek enerji fizikçiler için büyük önem taşımaktadır ve birçok farklı olguları modellemek için kullanılır. Tek boyutlu Klein-Gordon denklemi aşağıdaki kısmî diferansiyel denklem ile verilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 + q(x, t) \quad ; \quad a \leq x \leq b \quad , \quad 0 < t \leq T, \quad u = u(x, t)$$

Sınır şartları: (Dirichlet sınır koşulları)

$$u(0, t) = \gamma_a(t) \quad , \quad u(1, t) = \gamma_b(t) \quad (3.1)$$

Başlangıç şartları:

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

Bu problemin çözümünü sonlu fark metoduyla bulmak için çözüm bölgesini ayrıştırmak gerekir. Bölgeyi x eksenî boyunca Δx adım aralığı ile t eksenî boyunca Δt adım aralığı ile bölebiliriz. Bu sayede x eksenî $j\Delta x$ aralığına, t eksenî $m\Delta t$ aralığına bölünmüş olur [34].

Sonlu fark şeması oluşturulurken denklemdeki türevli ifadeler yerine bunların Taylor açılımı ile elde edilmiş yaklaşık ifadeleri yazılır. Düzenleme yapılarak sonlu fark şeması

oluşturulmuş olur. Taylor açılımı yapılırken kullanılan noktaların aralıkları ileri, geri ve merkezi olarak farklı şekillerde alınabilir.

Örneğin problemdeki $\frac{\partial u}{\partial t}$ ifadesi şu şekilde değiştirilir.

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{u_{tt}(x, t)}{2}(\Delta t)^2 + \dots$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + O(\Delta t)$$

(3.2)

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_t(x, t) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}$$

Benzer şekilde diğer türevli ifadelerin yerine de fark ifadeleri yazılırsa fark şeması elde edilmiş olur. (Kolaylık olması için $\alpha=1$ olarak alalım.)

$$u_x(x, t) = \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (3.3)$$

$$u_{xx}(x, t) = \left(\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (3.4)$$

3.2 Açık Fark Şeması

Bu fark şemasında bilinen değerlerin kullanılması ve iterasyonla çözüm yapılması için ileri, geri ve merkezi fark açılımı kullanılabilir. Dolayısıyla elde etmek istediğimiz fark şeması aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{v_j^{m+1} - 2v_j^m + v_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} - (v_j^m)^2 + q(x_j, t_m) \quad (3.5)$$

Sınır ve Başlangıç şartlarımız;

$$v_0^m = \gamma_a(t_m) \quad \text{ve} \quad v_{n+1}^{m+1} = \gamma_a(t_m)$$

$$u(x, 0) = v_j^0 = f(x_j) \quad \text{ve}$$

$$u_t(x, t) = \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} \Rightarrow u_t(x, 0) = g(x_j) \frac{v_j^{+1} - v_j^0}{\Delta t}$$

şeklinde olur. Çeşitli düzenlemeler yapılır ve $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ olarak alınırsa;

$$v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m \right] - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m)$$

$$\begin{aligned} v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1} &= r^2 \left[v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m \right] - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \\ &= r^2 \left[v_{j-1}^m + v_{j+1}^m \right] - 2r^2 v_j^m - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \end{aligned}$$

Bu elde ettiğimiz denklemde bilinen ve bilinmeyen değerleri farklı yerlerde toplarsak

$$\Rightarrow v_j^{m+1} = r^2 \left[v_{j-1}^m + v_{j+1}^m \right] + \left[2 - 2r^2 - (\Delta t)^2 v_j^m \right] v_j^m - v_j^{m-1} + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \quad (3.6)$$

denklemini elde ederiz.

Açık fark şemasının kararlı bir çözüm elde edebilmesi için;

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1$$

oranının sağlanması gerekir.

3.2.1 Açık Fark Şemasının Kararlılık Analizi

Yaklaşık çözümü için değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u_k(x, t) = T_k(t) e^{i\lambda x} = v_j^m = e^{i\theta t} e^{i\lambda x}, \quad |T_k(t)| \leq 1 \quad (3.7)$$

Bu elde ettiğimiz ayrık çözüm ifadesini Klein-Gordon Denklemi için oluşturulan açık fark şemasında yerine yazarsak;

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \left[e^{i\theta(t-\Delta t)} e^{i\lambda x} - 2e^{i\theta t} e^{i\lambda x} + e^{i\theta(t+\Delta t)} e^{i\lambda x} \right] = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[e^{i\theta t} e^{i\lambda(x-\Delta x)} - 2e^{i\theta t} e^{i\lambda x} + e^{i\theta t} e^{i\lambda(x+\Delta x)} \right] \quad (3.8)$$

(3.8)'de $\frac{\Delta t}{\Delta x} = r$ alıp ve her iki tarafı $\frac{(\Delta t)^2}{e^{i\theta t} e^{i\lambda x}}$ ile çarparsak (3.9) denklemini elde ederiz.

$$\left[e^{-i\theta\Delta t} - 2 + e^{i\theta\Delta t} \right] = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \left[e^{-i\lambda\Delta x} - 2e^{i\lambda x} + e^{i\lambda\Delta x} \right] \quad (3.9)$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ olduğunu biliyoruz,

$$(\cos \theta\Delta t - i \sin \theta\Delta t - 2 + \cos \theta\Delta t + i \sin \theta\Delta t) = r^2 [\cos \lambda\Delta x - i \sin \lambda\Delta x - 2 + \cos \lambda\Delta x + i \sin \lambda\Delta x]$$

Denklemi bulunur bu denklemde imajiner kısımlar sadeleştirilirse,

$$(\cos \theta\Delta t - \cancel{i \sin \theta\Delta t} - 2 + \cos \theta\Delta t + \cancel{i \sin \theta\Delta t}) = r^2 [\cos \lambda\Delta x - \cancel{i \sin \lambda\Delta x} - 2 + \cos \lambda\Delta x + \cancel{i \sin \lambda\Delta x}]$$

$$2(\cos \theta\Delta t - 1) = 2r^2 [\cos \lambda\Delta x - 1] \Rightarrow (\cos \theta\Delta t - 1) = r^2 [\cos \lambda\Delta x - 1] \quad (3.10)$$

(3.10) denkleminde trigonometrik dönüşümler uygularsak;

$$\left\{ \cos x - 1 = -2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right\}$$

$$(-2) \sin^2 \left(\frac{\theta\Delta t}{2} \right) = r^2 \left[(-2) \sin^2 \left(\frac{\lambda\Delta x}{2} \right) \right]$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Rightarrow \sin^2 \left(\frac{\theta\Delta t}{2} \right) = r^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\lambda\Delta x}{2} \right) \right] \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Burada, $0 \leq \sin^2\left(\frac{\theta\Delta t}{2}\right) \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \underbrace{r^2 \sin^2\left(\frac{\lambda\Delta x}{2}\right)}_{\leq 1} \leq 1 \quad (3.12)$$

dir. Buradan $r^2 \leq 1$ olarak bulunur. Buda Klein-Gordon Denkleminin kararlı olabilmesi için bizim aradığımız koşuldur.

3.3 Kapalı Fark Şeması (Crank – Nicholson)

Bu yöntemde bilinmeyen nokta sayısı birden fazla olmalıdır ve denklem sistemi yardımıyla çözüme ulaşılır. İleri ve merkezi fark kullanılması gereklidir. Normal kapalı şemaya ek olarak Crank – Nicholson şeması kullanılarak bir türev ifadesi için aynı anda hem ileri hem de merkezi fark kullanılır. Açık şemaya benzer şekilde fark ifadelerini Klein-Gordon Denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki kapalı fark şemasını elde ederiz.

$$\frac{v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1}}{(\Delta t)^2} = \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} - (v_j^m)^2 + q(x_j, t_m) \quad (3.13)$$

(3.13) denkleminin her iki tarafını $(\Delta t)^2$ ile çarpalım;

$$v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1} = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} [v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}] - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \quad (3.14)$$

buradan,

$$v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}] - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \quad (3.15)$$

denklemini elde ederiz. (3.15)'te $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$v_j^{m-1} - 2v_j^m + v_j^{m+1} = r^2 [v_{j-1}^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}] - 2r^2 v_j^{m+1} - (\Delta t)^2 (v_j^m)^2 + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \quad (3.16)$$

Bilinmeyen terimleri bir tarafa toplarsak;

$$[1 + 2r^2] v_j^{m+1} = r^2 [v_{j-1}^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}] + [2 - (\Delta t)^2 v_j^m] v_j^m - v_j^{m-1} + (\Delta t)^2 q(x_j, t_m) \quad (3.17)$$

Kapalı fark şemasını elde ederiz m ve j değerlerine göre sol tarafta bilinmeyenler oluşur ve bir denklem sistemi elde ederiz bu denklem sistemi çözülerek bölgedeki tüm noktalar yaklaşık olarak hesaplanır. Kapalı fark şemasında kararlılık sorunu olmadığı için kararlılık analizi yapılmasına gerek yoktur.

3.4. Örnek:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = 6xt(x^2 + t^2) + x^6 t^6, \quad x \in (0,1), \quad 0 < t, \quad \alpha = 1 \quad (3.18)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,1)$$

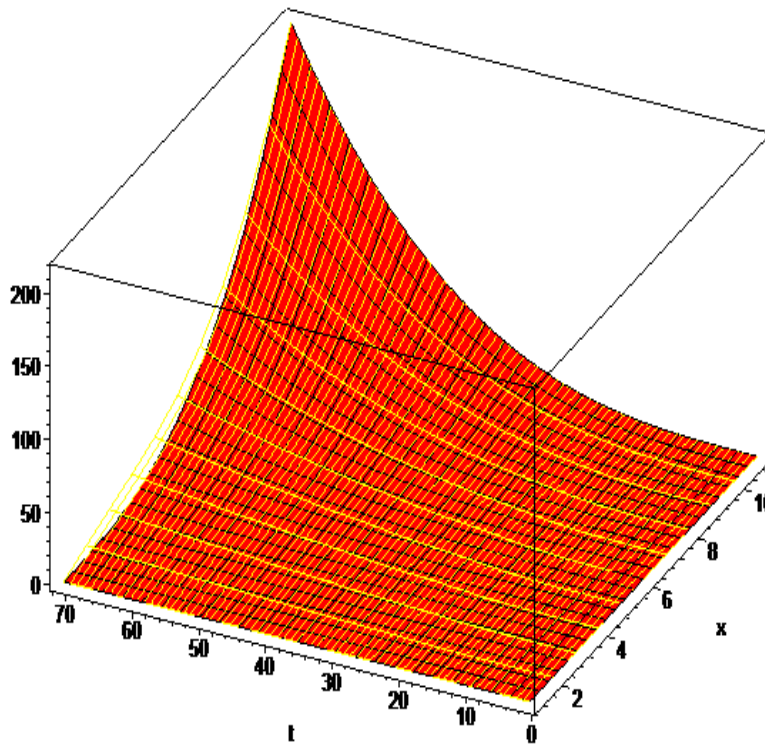
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t^3, \quad t \geq 0$$

denklemini $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$ değerleri için çözünüz.

Bu denklem için analitik çözüm;

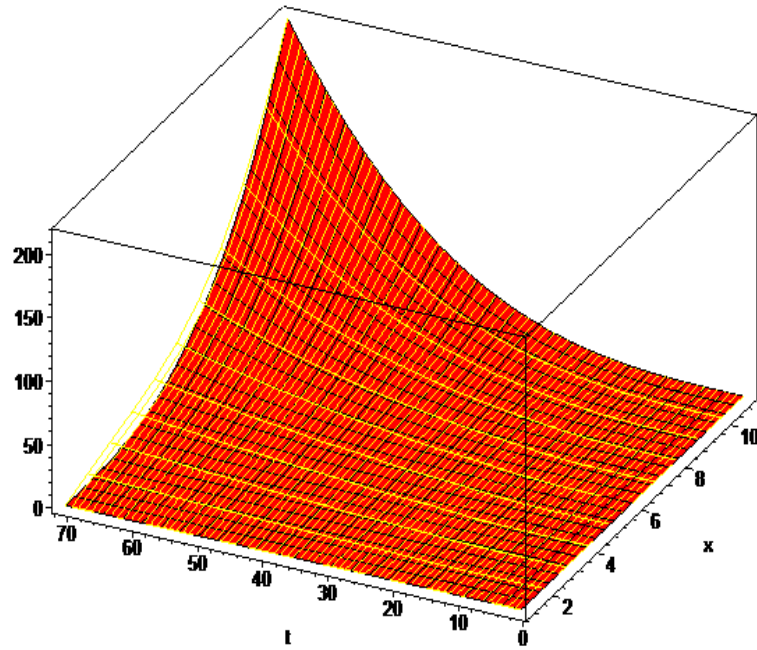
$$u(x,t) = x^3 t^3 \quad (3.19)$$

Denkleminizi Maple programı yardımıyla çözecek olursak elde edeceğimiz çözüm grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 3. 1 Açık Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$

Kapalı Fark Şeması ile çözüm yaptığımızda aşağıdaki çözüm grafiğini elde edebiliriz.



Şekil 3. 2 Kapalı Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$

Grafiklere bakıldığında, çözüm aralıkları çok küçük alındığı için aradaki fark anlaşılmayabilir. Bu yüzden çeşitli noktalardaki yaklaşık ve analitik çözüm değerleri karşılaştırılarak, yaklaşık çözüm ve analitik çözüm arasındaki farklar rahat bir şekilde görülebilir.

Çizelge 3. 1 Örnek 3.1 için hata analizi

X	Analitik Çözüm	Açık Şema	
		Yaklaşık Değer	Hata
0	0	0	0
0.1	0.6525240e-6	0.1000000e-5	0.3474759e-6
0.2	0.4243424e-5	0.8000000e-5	0.3756575e-5
0.3	0,0000137e-4	0,000270e-4	0.0000132e-4
0.4	0.0000319e-4	0.0000640e-4	0.0000320e-4
0.5	0.0000620e-4	0.0000125e-4	0.0000629e-4
0.6	0.0001067e-3	0.0002160e-3	0.0001090e-3
0.7	0.0001691e-3	0.0003430e-3	0.0001738e-3
0.8	0.0002520e-3	0.0005120e-3	0.0002599e-3
0.9	0.0003584e-3	0.0007290e-3	0.0003705e-3
1	0.0005223e-3	0.0010000e-2	0.0004776e-3

Bu tabloya baktığımızda çözüm bölgesinin farklı yerlerinden alınan değerler karşılaştırıldığında kapalı fark şeması ile hesaplanan yaklaşık çözümün daha yakınsak çözümler verdiği görülmüştür.

3.5. Örnek:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -\cos t + x^2 \cos^2 t, \quad x \in (-1,1), \quad 0 < t, \quad \alpha = 1 \quad (3.20)$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]$$

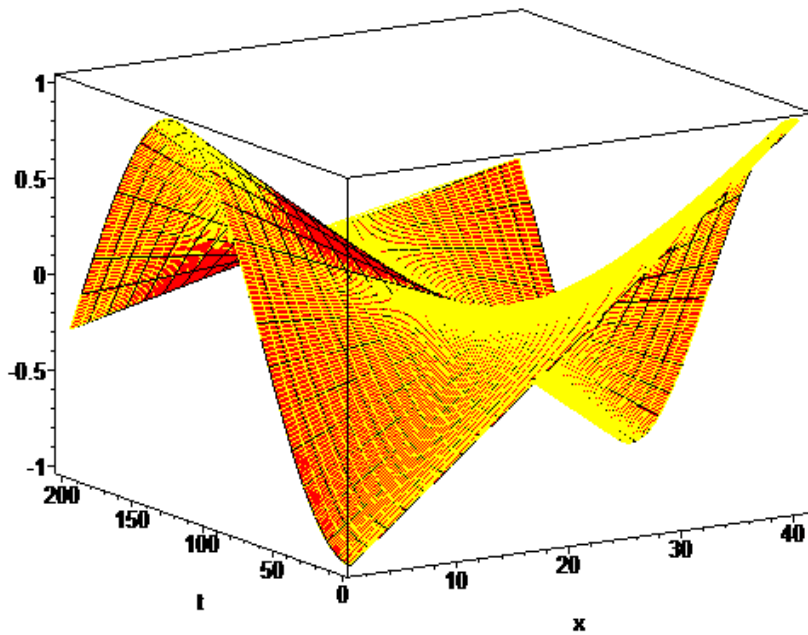
$$u(0,t) = -\cos t, \quad u(1,t) = \cos t, \quad t \geq 0$$

denklemini $\Delta x = 0.1000$ and $\Delta t = 0.0857$ değerleri için çözünüz.

Bu denklem için analitik çözüm;

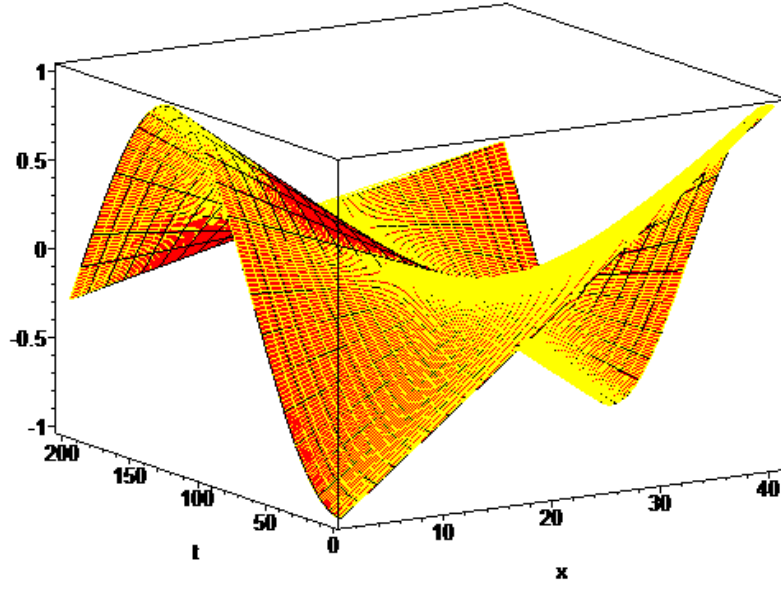
$$u(x,t) = x \cos t \quad (3.21)$$

Denkleminizi Maple programı yardımıyla çözecek olursak elde edeceğimiz çözüm grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 3. 3 Açık Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$

Kapalı Fark Şeması ile çözüm yaptığımızda aşağıdaki çözüm grafiğini elde edebiliriz.



Şekil 3. 4 Kapalı Şema $\Delta x = 0.1000$ ve $\Delta t = 0.0857$

Grafiklere bakıldığında, çözüm aralıkları çok küçük alındığı için aradaki fark anlaşılmayabilir. Bu yüzden çeşitli noktalardaki yaklaşık ve analitik çözüm değerleri karşılaştırılarak yaklaşık çözüm ve analitik çözüm arasındaki farklar rahat bir şekilde görülebilir.

Çizelge 3. 2 Örnek 3.2 için hata analizi

X	Analitik Çözüm	Açık Şema	
		Yaklaşık Değer	Hata
0	0	0	0
0.1	-0.4326934581	-0.4322418447	0.0004516134
0.2	-0.3134630157	-0.3241813835	-0.0107183678
0.3	-0.1962114060	-0.2161209224	-0.0199095164
0.4	-0.08131869712	-0.1080604612	-0.02674176408
0.5	0.03065756452	0	-0.03065756452
0.6	0.1369726038	0.1080604612	-0.0289121426
0.7	0.2146389950	0.2161209224	-0.0255180726
0.8	0.3456333291	0.3241813835	-0.0214519456
0.9	0.4493244414	0.4322418447	-0.0170825967
1	0.5529893615	0.5403023059	-0.0126870556

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Klein-Gordon denkleminin sonlu farklar metoduyla çözümü incelendi, bu tanımlar açık olarak ifade edildi ve bu tanımları açıklayıcı örnekler verildi. Sonlu fark metodu kullanılarak Klein-Gordon denkleminin, açık ve kapalı fark şemaları ile yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlerin hangisinin analitik çözüme daha çok yakınsadığı ve açık fark şemasının kararlı bir çözüm vermesi için hangi çözüm aralıklarına sahip olması gerektiği kararlılık analizi yapılarak bulunmuştur. Örnekler için Dirichlet sınır şartı ve başlangıç şartı kullanılarak analizler yapılmıştır.

Daha sonraki çalışmalarda kesirli mertebeden Klein-Gordon diferansiyel denklemi için oluşturulan sonlu fark şemasının analizleri yapılabilir ve bu yöntemi diğer lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için kullanılabilir hale getirilmesi sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Demir, H. , (1996). "The stability properties of some rheological flows", Ph. D. Thesis, The University Of Glamorgan, School Of Accounting And Mathematics, Division Of Maths And Computing, Glamorgan, 264.
- [2] Smith, G.D. , (1978). "Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods", Oxford University Press, Oxford.
- [3] Gölgeleyen, F. , (2003), "Parabolik türden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu-fark metodu ile sayısal çözümleri ve kararlılık analizi", Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun
- [4] Yıldız, M. K. , (2000). "Parabolik denklemler için Sonlu Fark Metotlarıyla kararlılık ve yaklaşım analizi", Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon
- [5] Lynch, M. A. M. , (1999). "Large amplitude instability in finite difference approximations to the Klein-Gordon equation", Appl. Numer. Math. 31: 173-182.
- [6] Guo, B.Y. , Li, X. ve Vazquez, A. , (1996). "Legendre spectral method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation", Math. Appl. Comput. 15 (1): 19-36.
- [7] Li, X. , ve Guo, B.Y. , (1997). "A Legendre spectral method for solving nonlinear Klein-Gordon equation", J. Comput. Math. 15 (2): 105-126.
- [8] Dehghan, M. , (2006). "Finite difference procedures for solving a problem arising in modeling and design of certain optoelectronic devices", Math. Comput. Simulation 71: 16-30.
- [9] Liu, G.R. ve Gu, Y.T. , (2004). "Boundary meshfree methods based on the boundary point methods", Eng. Anal. Bound. Elem. 28: 475-487.
- [10] Kansa, E.J. , (1990). "Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-I, Comput. Math. Appl. 19: 127-145.
- [11] Zerroukat, M. , Power H. ve Chen, C.S. , (1992). "A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis functions", Internat. J. Numer. Methods Engrg. 42: 1263-1278.
- [12] Kansa, E.J. , (1990). "Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-II", Comput. Math. Appl. 19: 147-161.

- [13] Hon, Y.C. ve Mao, X.Z. , (1998). "An efficient numerical scheme for Burgers equation", *Appl. Math. Comput.* 95 (1): 37-50.
- [14] Hon, Y.C. , Cheung, K.F. , Mao, X.Z. ve Kansa, E.J. , (1999). "Multiquadric solution for shallow water equations", *ASCE J. Hydraul. Eng.* 125 (5): 524-533.
- [15] Hon, Y.C. ve Mao, X.Z. , (1999). "A radial basis function method for solving options pricing model", *Financ. Eng.* 8 (1): 31-49.
- [16] Marcozzi, M. , Choi, S. ve Chen, C.S. , (2001). "On the use of boundary conditions for variational formulations arising in financial mathematics", *Appl. Math. Comput.* 124: 197-214.
- [17] Fasshauer, G.E. , (1997). "Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions, in: A. Le Méhauté, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.), *Surface Fitting and Multiresolution Methods*", Vanderbilt University Press, Nashville. 131-138.
- [18] Wendland, H. , (1995). "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree", *Adv. Comput. Math.* 4: 389-396.
- [19] Madych, W.R. ve Nelson, S.A., (1990). "Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions II", *Math. Comput.* 54 (189): 211-230.
- [20] Madych, W.R. ve Nelson, S.A. , (1992). "Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation", *J. Approx. Theory.* 70: 94-114.
- [21] Franke, C. ve Schaback, R. , (1997). "Convergence orders of meshless collocation methods using radial basis functions", *Adv. Comput. Math.* 8 (4): 381-399.
- [22] Franke, C. ve Schaback, R. , (1998). "Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions", *Appl. Math. Comput.* 93 (1): 73-82.
- [23] Hon, Y.C. ve Wu, Z. , (2000). "Additive Schwarz domain decomposition with radial basis approximation", *Int. J. Appl. Math.* 4 (1): 599-606.
- [24] Tatari, M. ve Dehghan, M., (2009). "On the solution of the non-local parabolic partial differential equations via radial basis functions", *Appl. Math. Modelling* 33: 1729-1738.
- [25] Dehghan, M. ve Shokri, A. , (2008). "A numerical method for solution of the two-dimensional Sine-Gordon equation using the radial basis functions, *Math. Comput. Simulation* 79: 700-715.
- [26] Yasar, İ. , B. , (1999). "Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları", Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [27] Çilingir, İ. , B. , (2005). "Eliptik Türden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu-Fark Metodu İle Çözümü Ve Yakınsaklık Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Samsun.
- [28] Cerit, C. , (1997). "Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri)", Beta Basım Yayınevi.
- [29] Duchateau, P. ve Zachmann, D. W. , (1986). "Partial Differentiel Equations", McGraw Hill, Shaum's Outline Series.

- [30] Gustafson, K. E. , (1999). "Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Pace Methods", Dover Publications, Inc, Mineola.
- [31] Dennemeyer, R. , (1968). "Partial Differential Equations and Boundary Value Problems", New York; McGraw-Hill.
- [32] Smith, G. D. , (1985). "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", Clarendon Pres-Oxford.
- [33] Uçar, Y. , (2005). "1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri", MSc. Thesis, İnönü University, Turkey.
- [34] Özışık, M. N. , (1989). "Boundary Value Problems of Heat Conduction", Dover Publications, Inc. , New York.
- [35] Dehghan, M. , (2001). "An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation", Applied Mathematical Modelling, 25: 743-754.
- [36] Hill, J. M. ve Dewynne, J. N. , (1987). "Heat Conduction, Blackwell Scientific Publications", London.
- [37] Chung-Yau, L. , (1994). "Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations Nanyang technological Univesity", Prentice Hall Press, Singapore.
- [38] Burgers, J.M. , (1948). "A mathematical model illustrating the theory of turbulence", Adv. Appl. Mech 1, 171–199.
- [39] Celia, M.A. ve Gray, W.G. , (1992). "Numerical Methods for Differantial Equations", Prentice-Hall, New Jersey.
- [40] Hoffman, J. D. , (1992). "Numerical Methods for Engineer and Scientists", McGraw Hill, New York.
- [41] Jiminez, S. ve Vazquez, L. , (1990). "Analysis of four numerical schemes for a nonlinear Klein-Gordon equation", Appl. Math. Comput. 35: 61-94.
- [42] Larn, C.Y. , (1992). "Spreadsheet Approach to Partial Differantial Equations- Part 1: Elliptic Equation", Int. J. Engineering Education, vol 8, no 4, 278-287.
- [43] Larn, C.Y. , (1992). "Spreadsheet Approach to Partial Differantial Equations- Part 2: Parabolic and Hyperbolic Equations, Int. J. Engineering Education", vol 8, no 5, 371-383.
- [44] Leveque, R.J. , (2005). "Finite Diference Methods for Diferential Equations", DRAFT VERSION for use in the course A Math 585-586 University of Washington.
- [45] Bayın, S. , (2004). "Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler", Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi, ISBN 975-443-397-6.
- [46] Loverro, A. , (2004). "Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer", Depertment of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- [47] Arfken, G.B. ve Weber, H.J. , (1995). "Mathematical Methods for Physicist", Fourth Edition, Academic Pres.

- [48] Zhang, P.G. ve Wang, J.P. , (2012). "A predictor–corrector compact finite difference scheme for Klein-Gordon equation", Applied Mathematics and Computation, 219, 892-898.
- [49] Hopf, E. , (1950). "The partial differential equationut puuxluxx", Commun. Pure Appl. Math 3 (1950) 201–230.
- [50] Cole, J.D. , (1951). "On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics", Quart. Appl. Math 9, 225–236.
- [51] Partal, T. , (2011). "Bazı Doğrusal Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sonlu Farklar Metodu ile Sayısal Çözümü", Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.



KODLAR

Örnek 3.4 için maple kodları;

```
> restart;
> with(linalg):with(plots):
> interface(rtablesize=infinity):
> f:=unapply(-cos(t),t);
g:=unapply(cos(t),t);
> n:=41; m:=199;
> h:=evalf(2/(n-1));
> k:=evalf(5/(m-1));
> X:=Vector(n):for i from 1 to n do X[i]:=-1+(i-1)*h od:
> X:
> T:=Vector(m):for i from 1 to m do T[i]:=(i-1)*k od:
> r:=k/h;
> U:=Matrix(n,m):
> for i from 1 to m do U[1,i]:=evalf(f(T[i])) od:
> for i from 1 to m do U[n,i]:=evalf(g(T[i])) od:
> for i from 1 to n do U[i,1]:=evalf(X[i]) od:
> for i from 1 to 1 do for j from 2 to n-1 do U[j,i+1]:=r^2*(U[j-1,i]+U[j+1,i])+(2-2*r^2-
k^2*U[j,i])*U[j,i]-U[j,i]+k^2*(-X[i]*cos(T[j])+(X[i])^2*(cos(T[j]))^2) od: od:
> for i from 2 to m-1 do for j from 2 to n-1 do U[j,i+1]:=r^2*(U[j-1,i]+U[j+1,i])+(2-2*r^2-
k^2*U[j,i])*U[j,i]-U[j,i-1]+k^2*(-X[j]*cos(T[i])+(X[j])^2*(cos(T[i]))^2) od: od:
U^+:
> Yak:=matrixplot(U,color=yellow,style=wireframe):
> display({Yak});
> Ana:=plot3d((-1+2*(x-1)/(n-1))*cos((5*(t-1)/(m-1))),x=1..n,t=1..m,color=red):
> display({Yak,Ana});
> f:=unapply(x*cos(t),x,t);
> Tablo:=Matrix(n,3):
> for q from 1 to n do Tablo[q,1]:=U[q,(m+1)/5] od:
> for q from 1 to n do Tablo[q,2]:=evalf(f((q-1)*h-1,1)) od:
> for q from 1 to n do Tablo[q,3]:=Tablo[q,2]-Tablo[q,1] od:
```

```

> Tablo:
> yeni:=Matrix(11,3):
> at:=(n-1)/10:
> for p from at+1 to n by at do for i from 1 to 3 do yeni[(p-1)/at+1,i]:=Tablo[p,i] od: od:
> yeni;

```

Örnek 3.5 için maple kodları;

```

> restart;
> with(linalg):with(plots):
> interface(rtables:=infinity):
> f:=unapply(0,t);
g:=unapply(t^3,t);
> n:=41; m:=299;
> h:=evalf(1/(n-1));
> k:=evalf(6/(m-1));
> X:=Vector(n):for i from 1 to n do X[i]:=(i-1)*h od:
> T:=Vector(m):for i from 1 to m do T[i]:=(i-1)*k od:
> r:=k/h;
> r2:=k^2/h^2;
> U:=Matrix(n,m):
> for i from 1 to m do U[1,i]:=evalf(f(T[i])) od:
> for i from 1 to m do U[n,i]:=evalf(g(T[i])) od:
> for i from 1 to n do U[i,1]:=evalf(0) od:
> for i from 1 to 1 do for j from 2 to n-1 do U[j,i+1]:=r^2*(U[j-1,i]+U[j+1,i])+(2-2*r^2-
k^2*U[j,i])*U[j,i]-U[j,i]+k^2*(6*X[i]*T[j]*((X[i])^2+(T[j])^2)+(X[i]*T[j])^6) od: od:
> for i from 2 to m-1 do for j from 2 to n-1 do U[j,i+1]:=r^2*(U[j-1,i]+U[j+1,i])+(2-2*r^2-
k^2*U[j,i])*U[j,i]-U[j,i-1]+k^2*(6*X[j]*T[i]*((X[j])^2+(T[i])^2)+(X[j]*T[i])^6) od: od:
U^+:
> Yak:=matrixplot(U,color=yellow,style=wireframe):
> display({Yak});
> Ana:=plot3d(((x-1)/(n-1))^3*(6*(t-1)/(m-1))^3,x=1..n,t=1..m,color=red):
> display({Ana},axes=boxed);
> display({Yak,Ana},axes=boxed);
> f:=unapply(x^3*t^3,x,t);
> Tablo:=Matrix(n,3):
> for q from 1 to n do Tablo[q,1]:=U[q,(m+1)/60] od:
> for q from 1 to n do Tablo[q,2]:=evalf(f((q-1)*h,0.1)) od:
> for q from 1 to n do Tablo[q,3]:=Tablo[q,2]-Tablo[q,1] od:
> Tablo:
> yeni:=Matrix(11,3):
> at:=(n-1)/10:
> for p from at+1 to n by at do for i from 1 to 3 do yeni[(p-1)/at+1,i]:=Tablo[p,i] od: od:
> yeni;

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hüseyin Beran KAŞ
Doğum Tarihi ve Yeri : 21.10.1986 / Şanlıurfa
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hberankas@gmail.com
Askerlik : Yaptı

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2009
Lise	Fen - Matematik	Şanlıurfa Orhangazi Lisesi	2003
2.Lisans	İşletme	İstanbul Üniversitesi	2014-...

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2006-2009	İstanbul Üniversitesi	Asistan Öğrenci

YAYINLARI

BİLDİRİ

1. Kaş, H.B. ve Kurulay, M. , (2013). “Finite Difference Method Solution and Analysis for Klein-Gordon Equation”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 02-05 Haziran 2013, İstanbul, Issue 226.

