

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Mehmet ONAT

KOMPAKT GRUP ETKİLERİNİN KOHOMOLOJİ TEORİSİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOMPAKT GRUP ETKİLERİNİN KOHOMOLOJİ TEORİSİ

Mehmet ONAT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 23/11/2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
ÜYE

.....
Prof. Dr. Erol YAŞAR
ÜYE

.....
Prof. Dr. Gonca AYIK
ÜYE

.....
Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

**Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2015-4570**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki
hükümlere tabidir.

Sevgili eşim Elife'ye ve Aileme

ÖZ

DOKTORA TEZİ

KOMPAKT GRUP ETKİLERİNİN KOHOMOLOJİ TEORİSİ

Mehmet ONAT

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Yıl: 2018, Sayfa: 79
Jüri : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

Bu çalışmada, kompakt uzaylar üzerindeki kompakt Lie grup etkileri için ifade edilen Borel-Atiyah-Segal-Quillen-Hsiang lokalizasyon teoremi sonlu boyutlu, kompakt grup etkilerine genelleştirilmiştir. Ayrıca bazı koşullar altında kompakt uzaylar üzerindeki sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı abelyen grup etkileri için sabit nokta kümesinin kohomolojik yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ekivaryant kohomoloji, Lokalizasyon Teoremi, Kompakt gruplar

ABSTRACT

PhD THESIS

THE COHOMOLOGY THEORY OF COMPACT GROUP ACTIONS

Mehmet ONAT

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2018, Pages: 79
Jury : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

In this study, Borel-Atiyah-Segal-Quillen-Hsiang localization theorem which introduced for compact Lie group actions on compact spaces is generalized to finite dimensional, compact group actions on compact spaces. Moreover, under some conditions, the cohomological structure of the fixed point set of finite dimensional, compact, connected, abelian group actions on compact spaces is investigated.

Key words: Equivariant cohomology, Localization theorem, Compact groups

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Cebirsel topolojinin topolojik dönüşüm gruplarına uygulamaları L. E. J. Brouwer'ın çalışmasıyla başlar. Hemen ardından 1930'ların sonunda P. A. Smith bir topolojik X uzayı üzerine homeomorfizmler ile etki eden asal p dereceli bir G grubunun kohomolojik özelliklerini araştırmaya başladı. Smith, küreler ve projektif uzaylar üzerine involusyonlar (involution) için sabit nokta kümesinin kohomolojisini hesaplamayı başardı. Smith ile başlayan konuya A. Borel, G. E. Bredon, P. E. Conner, E. E. Floyd, W. Y. Hsiang, R. Oliver, D. Quillen, T. Skjelbred ve başka bir çok matematikçi tarafından katkı sağlandı.

Bu çalışma temel olarak altı bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölümde tez konusu hakkında giriş yapılmış, konu hakkında daha önce yapılanların kısa bir özeti ve çalışılan problemler hakkında bazı teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca tezde yapılması düşünülen problemlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin daha kolay okunabilmesi için gerekli olan bazı temel kavram ve teoremler ifade edilmiştir. Bunlar genel olarak, dönüşüm gruplarının tanımı ve özellikleri, direkt ve ters limit kavramları, karakter grupları ve dualite teoremi, yerel kompakt gruplara Lie grupları ile yaklaşma prensibi, sınıf uzayları ve bunların kohomoloji cebirleri, Borel'in inşası, spektral diziler kavramları ve temel özellikleridir. Son olarak, bu çalışmanın ana konusunu oluşturan lokalizasyon teoremleri ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, kompakt, bağlantılı, abelyen grupların sınıf uzaylarının kohomoloji cebirleri ifade edilmiştir. Bunun sonucu olarak, A. Borel'in sabit noktanın varlığı ile ilgili teoremi kompakt uzaylar üzerindeki sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen grup etkilerine genelleştirilmiştir.

Dördüncü bölümde, öncelikle sonlu boyutlu, kompakt grupların sınıf uzaylarının kohomoloji halkasının bir kompakt Lie grubunun sınıf uzayının kohomoloji halkasına izomorfik olduğu gösterilmiştir. Kompakt gruplara Lie grupları ile yaklaşım metodu kullanılarak, sonlu boyutlu, kompakt grup etkileri

kompakt Lie gruplarına indirgenmiş ve böylece kompakt uzaylar üzerindeki kompakt Lie grup etkileri için ifade edilen Borel-Atiyah-Segal-Quillen-Hsiang lokalizasyon teoremi, kompakt uzaylar üzerindeki sonlu boyutlu, kompakt grup etkilerine genelleştirilmiştir. Bu teoremin en önemli sonuçlarından biri olan A. Borel'in sabit noktanın varlığı ile ilgili teoremi sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen grup etkiler için elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, bir sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen grubun bir kompakt uzay üzerine sıfıra tamamen non homolog (TNHZ) etkisi için sabit nokta kümesinin kohomolojik yapısı incelenmiştir.

Altıncı bölümde, temel olarak tezde elde edilen sonuç ve henüz cevap bulunamayan problemlerden bahsedilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan, kişiliği ile örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu alanda çalışmamı tavsiye eden bilgi ve kişiliğini örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ'ye, ayrıca bu çalışma sırasında sorularımı geri çevirmeyen bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca maddi destek veren Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine (Proje No: FDK-2015-4570) ve yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline çok teşekkür ederim.

Bu tezin yazılması esnasında her zaman yanımda olan, sabır gösteren ve bu süreçte manevi desteğini esirgemeyen hayat arkadaşım, eşim Elife'ye en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İyi ki varsınız...

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
2.1. Direkt ve Ters Limit.....	11
2.2. Karakter Grupları ve Dualite Teoremi	13
2.3. Yerel Kompakt Gruplara Lie Grupları ile Yaklaşmak	16
2.4. Sınıf Uzayları	18
2.5. A. Borel'in İnşaası.....	26
2.6. Spektral Diziler.....	30
2.7. Lokalizasyon Teoremleri.....	36
3. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN BOREL'İN SABİT NOKTA TEOREMİ.....	41
4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ	45
5. SABİT NOKTA KÜMESİNİN KOHOMOLOJİK YAPISI.....	65
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	71
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	79



1. GİRİŞ

Cebirsel topolojinin topolojik dönüşüm gruplarına uygulamaları L. E. J. Brouwer'ın çalışmasıyla başlar. Hemen ardından 1930'ların sonunda P. A. Smith bir topolojik X uzayı üzerine homeomorfizmler ile etki eden asal p dereceli bir G grubunun kohomolojik özelliklerini araştırmaya başladı. Smith, küreler ve projektif uzaylar üzerine involusyonlar (involution) için sabit nokta kümesinin kohomolojisini hesaplamayı başardı. Smith ile başlayan konuya A. Borel, G. E. Bredon, P. E. Conner, E. E. Floyd, W. Y. Hsiang, R. Oliver, D. Quillen, T. Skjelbred ve başka bir çok matematikçi tarafından katkı sağlandı.

Topolojik dönüşüm gruplarında, etkinin sabit nokta kümesi ve orbit uzayının kohomolojileri ile uzayın kohomolojisi arasındaki ilişkiyi araştırmak en önemli problemlerden biridir.

Orbit uzayının yerel (ya da global) topolojik (kohomolojik) özelliklerinin çoğu uzayın özellikleri tarafından belirlenir. Örneğin, X bir kompakt (benzer şekilde yerel kompakt, bağlantılı, yerel bağlantılı, parakompakt, normal) ise o zaman G bir kompakt topolojik grup olmak üzere X/G orbit uzayı da kompakt (benzer şekilde yerel kompakt, bağlantılı, yerel bağlantılı, parakompakt, normal) uzaydır.

Bu konu hakkında bir çok çalışma yapılmıştır. Conner (1960) acyclic uzayların orbit uzaylarının da acyclic olduğunu ortaya atmıştır. Yani, G bir kompakt Lie grup ve X bir sonlu kohomolojik boyutlu, sonlu çoklukta orbit tipine sahip parakompakt G -uzay olsun. k bir cisim olmak üzere her $i \geq 0$ için $\tilde{H}^i(X; k) = \{0\}$ ise o zaman her $i \geq 0$ için $\tilde{H}^i(X/G; k) = \{0\}$ dır. Conner (1960) bu teoremi $k = \mathbb{Q}$ iken kanıtlamıştır. Daha sonra Oliver (1976), Conner'in sanısını daha genel bir şekilde ifade edip kanıtlamıştır. Yani X bir kompakt ya da sonlu kohomolojik boyuta ve sonlu çoklukta orbit tipine sahip parakompakt G -uzay olsun. $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ ya da $\mathbb{Q}$ olmak üzere X, Λ -acyclic uzay

iken X/G orbit uzayının da Λ -acyclic uzay olduğunu göstermiştir. Bu problemin farklı genelleştirmeleri Skjelbred (1978) tarafından verildi.

Daha sonra Ku (1967) bazı koşullar altında yerel kompakt uzaylar üzerine etki eden sonlu boyutlu, kompakt grup etkileri için orbit uzayının ve sabit nokta kümesinin kohomolojik yapısı ile uzayın kohomolojik yapısı arasındaki ilişkileri inceledi. Sonrasında Deo (1983) farklı hipotezler altında bu tip problemlerin sonuçlarını elde etti ve Skjelbred'in sonuçlarını bu tip etkilere genelleştirdi.

1950'lerde Smith'in teorisi $X_G = X \times_G E_G$ Borel'in inşası ve $H^*(X_G)$ ekivaryant kohomolojinin ifade edilmesiyle yeniden formüle edildi. A. Borel, etkinin sabit nokta kümesinin kohomolojisi ile $H_G^*(pt)$ modül olan $H_G^*(X)$ 'in torsiyonsuz bölümünün yakından ilişkili olduğunu gözlemledi. 1960'larda bu sonuç Borel-Atiyah-Segal'ın lokalizasyon teoremi olarak ifade edildi. Quillen ve Hsiang tarafından bağımsız olarak kanıtlanan lokalizasyon teoreminin genel formu Hsiang (1975) kitabında bulunabilir.

Borel-Atiyah-Segal-Quillen-Hsiang lokalizasyon teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

G bir kompakt Lie grup ve X bir kompakt ya da sonlu kohomolojik boyuta ve sonlu çoklukta orbit tipine sahip G -uzay olsun.

$S \subseteq H^*(B_G; R)$ bir çarpımsal sistem,

$$Bi^* : H^*(B_G; R) \rightarrow H^*(B_{G_x}; R)$$

dönüşümü $i : G_x \rightarrow G$ içirme dönüşümü ile belirlenen dönüşüm olmak üzere

$$X^S = \{x \in X : \text{Her } s \in S \text{ için } Bi^*(s) \neq 0\}$$

olsun.

O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; R) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; R)$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir. Burada $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ ya da $\mathbb{Q}$ katsayı halkasıdır.

Bu teoremin kanıtında kompakt Lie gruplarının iki temel özelliği kullanılır. Bunlardan ilki tam regüler uzaylar üzerine etki eden kompakt Lie grup etkileri için dilimin (slice) varlığıdır. İkincisi, G bir kompakt Lie grup ve X bir parakompakt G -uzay ise o zaman orbit uzayının kohomolojik boyutu uzayın kohomolojik boyutunu geçemez. Bu Quillen (1971) tarafından kanıtlandı. Aslında ikincisinde de yine dilimin varlığı kullanılır. Fakat kompakt topolojik grup etkilerinde dilim olmak zorunda değildir (Franklin, 1971).

Daha sonra Deo ve ark. (1982) de finitistic uzaylar üzerine etki eden kompakt Lie grup etkileri için lokalizasyon teoreminin bir genellemesini elde etti.

G bir kompakt Lie grup ve X sonlu çoklukta orbit tipine sahip bir finitistic G -uzay olsun. $S \subseteq H^*(B_G; \mathbb{Q})$ bir çarpımsal sistem olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; \mathbb{Q})$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir.

Aynı zamanda Deo ve ark. (1982) finitistic uzaylar üzerine etki eden kompakt Lie grup etkileri için $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ ya da $\mathbb{Q}$ olmak üzere X , Λ -acyclic uzay iken X/G orbit uzayının da Λ -acyclic uzay olduğunu kanıtladı. Finitistic uzay tanımı Swan (1960) tarafından verildi ve Smith'in klasik sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmiş sonuçlarını elde etti.

Lie grup etkileri iyi bilinen etkilerdir. Literatürde bu etkiler ile ilgili bir çok çalışma vardır. Fakat herhangi kompakt topolojik grup etkileri için bir çok problem vardır. Örneğin p -adic gruplar ve solenoid diferansiyel yapılara sahip olmayan (Lie grubu olmayan) grup örnekleridir. Bu gruplar Hilbert-Smith sanısında önemli bir yere sahiptir.

Hilbert'in 5. problemi : Eğer bir yerel kompakt grup bir (sonlu boyutlu) manifold üzerine efektif etki ediyorsa o zaman grup Lie grubu olmak zorundadır.

Yamabe (1953) yerel kompakt gruplara Lie grupları ile yaklaşılabileceğini gösterdi. Biz bu yaklaşım metodunu kullanarak aşağıdaki problemi kanıtlamaya çalışacağız.

Lokalizasyon teoremi hakkındaki daha önceki çalışmalar uzayın genelleştirmesi üzerine yapıldı. Biz ise bu çalışmada grubun genelleştirmesi üzerinde duracağız. Yani

G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir kompakt G -uzay ise o zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; \mathbb{Q})$$

homomorfizmi bir izomorfizm midir?

Bu tezde temel olarak bu sorunun cevabı aranacaktır. Ayrıca bir sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen grubun bir kompakt uzay üzerine sıfıra tamamen non homomolog (TNHZ) etkisi için sabit nokta kümesinin kohomolojik yapısı incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu tez boyunca k , karakteristiği sıfır olan bir cismi gösterecektir ve tüm uzayların Hausdorff koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

Bu tez ekivaryant kohomoloji teorisi ile ilgilidir. Genel uzaylar için lokalizasyon teoremleri süreklilik özelliğine sahip bir kohomoloji teorisine ihtiyaç duyar. Alexander-Spanier kohomoloji, Čech kohomoloji ve Sheaf kohomoloji süreklilik özelliğine sahip kohomoloji teorileridir. Alexander-Spanier kohomoloji ve Čech kohomoloji teorileri tüm uzaylar için doğal olarak denktir (Dowker, 1952). Ayrıca Čech kohomoloji parakompakt uzaylar için Sheaf kohomoloji ile çakışır (Godement, 1985; Bredon, 1997, Chapter III). Bundan dolayı bizim sonuçlarımızın tümü bu kohomoloji teorileri için de doğrudur.

Bu çalışma boyunca Alexander-Spanier kohomoloji kullanılacaktır.

Tanım 2.1 G bir topolojik grup, X bir Hausdorff topolojik uzay ve $\Theta : G \times X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise (G, X, Θ) üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu denir.

1. Her $x \in X$ için $\Theta(e, x) = x$ (Burada e , G grubunun birim elemanıdır.)
2. Her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$ dir.

Θ dönüşümüne G grubunun X üzerine etkisi denir. G nin verilmiş bir Θ etkisi ile X uzayına bir G -uzayı denir. $\Theta(g, x)$ elemanını kısaca gx ile göstereceğiz.

Bir $C \subset G$ ve $A \subset X$ için $C(A) = \{gx : g \in C, x \in A\}$ olarak tanımlayalım. Eğer $G(A) = A$ ise o zaman A kümesine G altında invaryant denir. Θ etkisinin çekirdeği

$$\ker \Theta = \{g \in G : \text{Her } x \in X \text{ için } gx = x\}$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki $\ker \Theta$, G nin normal alt grubudur. Eğer $\ker \Theta = \{e\}$ ise Θ etkisine efektif etki (effective action) denir.

X bir G -uzay ve $x \in X$ olsun. x elemanını sabit bırakan G nin elemanlarının

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

kümesi G nin bir kapalı alt grubudur. Bu G_x alt grubuna x de G nin izotropi alt grubu (ya da durağan alt grubu) denir. Eğer her $x \in X$ için $G_x = \{e\}$ ise G nin X üzerine etkisine serbest etki (free action) denir.

$$F(G, X) = X^G = \{x \in X : \text{Her } g \in G \text{ için } gx = x\}$$

alt uzayına G nin X üzerindeki etkisinin sabit nokta kümesi denir.

Eğer X bir G -uzay ve $x \in X$ ise o zaman

$$G(x) = \{gx \in X : g \in G\}$$

alt uzayına x in (G altında) orbiti denir. G nin X üzerindeki etkisinin tüm $x^* = G(x)$ orbitlerinden oluşan kümeyi X/G ile gösterelim. Açıktır ki $x^* = y^*$ olması için gerek ve yeter koşul x ve y nin aynı orbitte olmasıdır. Yani orbitler uzayın bir parçalanışını verir. $\pi : X \rightarrow X/G, x \rightarrow x^*$ ile doğal dönüşümü gösterelim. O zaman X/G üzerinde bölüm topoloji verilebilir ($U \subset X/G$ açıktır ancak ve ancak $\pi^{-1}(U)$, X de açıktır). Bölüm topoloji ile birlikte X/G uzayına X in (G ye göre) orbit uzayı denir. Eğer U açık ise $G(U) = \bigcup_{g \in G} gU$ alt uzayı da açıktır. O halde U açık ise $\pi^{-1}(\pi(U)) = G(U)$ açık olup bu ise $\pi(U)$ nun X/G orbit uzayında açık küme olması demektir. O zaman $\pi : X \rightarrow X/G$ orbit dönüşümü sürekli ve açık bir dönüşümdür.

Tanım 2.2 G, H topolojik gruplar ve X, G -uzay ve Y, H -uzay olsun. $\varphi : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise her $g \in G, x \in X$ için $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ eşitliğini sağlayan sürekli $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna φ -ekivaryant denir. Özel olarak $\varphi = 1 : G \rightarrow G$ ise f ye kısaca G -ekivaryant dönüşüm denir.

Aşağıdaki teoremlerin kanıtı Bredon (1972) de bulunabilir.

Teorem 2.3 Eğer G bir kompakt grup ve X bir G -uzay ise o zaman

1. X Hausdorff ise X/G de Hausdorff'tur.
2. $\pi : X \rightarrow X/G$ kapalı dönüşümdür.
3. $\pi : X \rightarrow X/G$ proper dönüşümdür (Yani $K \subset X/G$ kompakt ise $\pi^{-1}(K)$ da kompakttır).
4. X kompakttır $\iff X/G$ kompakttır.
5. X yerel kompakttır $\iff X/G$ yerel kompakttır.

Teorem 2.4 Eğer G bir kompakt grup ise o zaman $\alpha_x : G/G_x \rightarrow G(x)$, $gG_x \rightarrow gx$ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Kabul edelim ki $[G_x]$, G de G_x izotropi alt grubunun eşlenik sınıfını gösterebilir. Eğer $\{[G_x] : x \in X\}$ kümesi sonlu ise o zaman G grubu X uzayı üzerine sonlu çoklukta orbit tipi (FMOT) ile etki eder denir.

Kabul edelim ki X bir G -uzay ve N , G nin kapalı, normal alt grubu olsun. O zaman X/N orbit uzayı üzerine G/N bölüm grubunun bir kanonik etkisi vardır ve X/G uzayı $(X/N)/(G/N)$ uzayına homeomorfiktir (Bredon, 1972).

Aslında bu etki ve onun orbit uzayları aşağıdaki lemmada tam olarak verildi. Bu lemmanın kanıtı Hofmann ve Morris (2013, Proposition 10.31) de bulunabilir.

Lemma 2.5 G bir kompakt grup ve N , G nin kompakt, normal alt grubu olsun. G bir Hausdorff X uzayı üzerine etki etsin. O halde N de X üzerine aşık etki eder ve G/N bölüm grubu X/N orbit uzayı üzerine $gN * N(x) = N(gx)$ ile etki eder. $q : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü ve N nin X uzayı üzerine etkisinin orbit dönüşümü $\pi : X \rightarrow$

X/N olsun. $i : X/G \rightarrow (X/N)/(G/N)$, $i(G(x)) = (G/N)(N(x)) = G(x)/N$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki gerçekleri elde ederiz.

i) i bir homeomorfizmdir ve aşağıdaki diagramlar değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X & & X & \xrightarrow{\quad} & X/G \\
 \downarrow q \times \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow i \\
 G/N \times X/N & \xrightarrow{\beta} & X/N & & X/N & \xrightarrow{\quad} & (X/N)/(G/N)
 \end{array}$$

ii) Her $x \in X$ için izotropi alt grupları arasında $(G/N)_{N(x)} = G_x N/N$ ilişkisi vardır.

iii) Eğer G, X üzerine serbest etki ediyorsa o zaman G/N de X/N üzerine serbest etki eder.

Şimdi lif demetinin (fiber bundle) tanımını verelim.

Tanım 2.6 K bir topolojik grup ve F bir efektif sağ K -uzay, X ve B Hausdorff uzaylar olsun. Eğer aşağıdaki özelliklere sahip olan her $U \subset B$ açık kümesi için $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ homeomorfizmlerinden oluşan bir Φ sınıfı varsa bu Φ sınıfı ile birlikte $p : X \rightarrow B$ sürekli dönüşümü, taban (base) uzayı B , total uzayı X , lifi (fiber) F ve yapı grubu K olan B üzerindeki lif demeti olarak tanımlanır. Burada ϕ homeomorfizmlerine U üzerindeki haritalar (charts) denir.

1. U üzerindeki her $\phi \in \Phi$ haritası için aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\
 p \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\
 U & &
 \end{array}$$

2. Her $b \in B$ için bir açık $b \in U \subset B$ kümesi ve Φ de olan U üzerinde bir harita vardır.

3. Eğer $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, Φ de bir harita ve $V \subset U$ açık ise o zaman φ nin $p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ ye kısıtlanmış da Φ de bir haritadır.
4. Eğer $\varphi, \psi \in \Phi$, U üzerinde haritalar ise o zaman bir sürekli $\theta : U \rightarrow K$ dönüşümü vardır öyle ki her $f \in F$ ve $u \in U$ için $\psi(f, u) = \varphi(f, \theta(u), u)$ olur. Bu θ dönüşümüne φ ve ψ haritaları ile geçiş (transition) dönüşümü denir.
5. Φ sınıfı önceki koşulları sağlayan sınıflar arasındaki maksimaldir.

Tanım 2.7 Lifi ve yapı grubu G (G yapı grubu G lifi üzerine sağdan öteleme ile etki eder) olan lif demeti, esas G -demet (principal G -bundle) olarak adlandırılır.

Sonuç 2.8 Eğer $p : X \rightarrow B$ bir esas G -demet ise o zaman G nin X üzerine $p(gx) = p(x)$ özelliğini sağlayan bir kanonik serbest etkisi vardır ve X/G orbit uzayı B ye homeomorfiktir ($X/G \approx B$).

Tanım 2.9 Total uzayı büzülebilir olan bir esas G -demet, evrensel G -demet (universal G -bundle) olarak adlandırılır.

Tanım 2.10 Eğer E total uzayı n -bağlantılı, yani her $0 \leq i \leq n$ için $\pi_i(E) = 0$, ise $p : E \rightarrow B$ esas G -demet uzayına n -evrensel demet denir.

Lif demetleri hakkında daha fazla bilgi Bredon (1972) de bulunabilir. Şimdi ise demetimsi (fibration) tanımını verelim.

Tanım 2.11 $p \circ g(y, 0) = G(y, 0)$ özelliğini sağlayan bir $G : Y \times I \rightarrow B$ homotopi dönüşümü ve bir $g : Y \times \{0\} \rightarrow E$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer $\tilde{G}(y, 0) = g(y, 0)$ ve $p \circ \tilde{G} = G$ olacak şekilde bir $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow E$ homotopi dönüşümü varsa o zaman $p : E \rightarrow B$ dönüşümüne Y uzayına göre homotopi yükseltme özelliğini (homotopy lift-

ing property) sağlıyor denir.

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Tüm uzaylara göre homotopi yükseltme özelliğini sağlayan bir dönüşüme Hurewicz demetimsisi (Hurewicz fibration) denir. Tüm n -hücelere göre homotopi yükseltme özelliğini sağlayan bir dönüşüme Serre demetimsisi (Serre fibration) denir.

Bir demetimsi ifadesi ile biz Serre demetimsisini kastedeceğiz. Not edelim ki Hurewicz demetimsisinden ziyade daha geniş bir sınıf olan Serre demetimsiler ile çalışmanın daha uygun olmasının nedeni genelde lif demetleri Serre demetimsisidir ve bu koşul homotopi teorik yapılar için yeterince güçlüdür.

Eğer $p : E \rightarrow B$ bir demetimsi ise B ve E ye sırasıyla demetimsinin taban (base) ve total uzayı denir. Eğer $b \in B$ ise o zaman $F_b = p^{-1}(b)$ ye p nin b üzerindeki lifi (fiber) denir. F_b , b nin seçimine göre değişir fakat homotopi yükseltme özelliği F_b nin homotopi tipini kısıtlar.

Önerme 2.12 $p : E \rightarrow B$ bir Hurewicz demetimsisi ve B yol bağlantılı olsun. O zaman $b_0, b_1 \in B$ için F_{b_0} lifi F_{b_1} lifine homotopi denktir.

Lif demetleri ve demetimsiler arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Önerme 2.13 Eğer $p : E \rightarrow B$ bir lif demeti ise o zaman p bir Serre demetimsisidir. Eğer $p : E \rightarrow B$ bir lif demeti ve B parakompakt uzay ise o zaman p bir Hurewicz demetimsisidir.

Bunun ile ilgili daha fazla bilgi Dieck (2008); Davis ve Kirk (2001) de bulunabilir.

Demetimsi hakkında daha fazla bilgi ve aşağıdaki önerme McCleary (2001) de bulunabilir.

Önerme 2.14 B yol bağlantılı uzay olmak üzere bir $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ Serre demetimsisi için bir

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

uzun tam homotopi dizisi vardır.

2.1 Direkt ve Ters Limit

Tanım 2.15 Kabul edelim ki I bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer verilen her $i, j \in I$ için $i \leq k$ and $j \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ varsa I yönlü küme (directed set) olarak adlandırılır.

Tanım 2.16 I bir yönlü küme ve her $i \in I$ için X_i topolojik uzaylar ve $i, j \in I$ ve $i \leq j$ için $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise $\{X_i, f_{ij}, I\}$ ailesi direkt sistem (direct system) olarak adlandırılır.

1. Her $i \in I$ için $f_{ii} : X_i \rightarrow X_i$ özdeşlik dönüşümüdür.
2. Her $i, j, k \in I$ ve $i \leq j \leq k$ için $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ dır.

Tanım 2.17 $\{X_i, f_{ij}, I\}$ ailesi direkt sistem olsun. X topolojik uzayı $f_i : X_i \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri ile birlikte aşağıdaki diagramı değişmeli yapıyor olsun.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ij}} & X_j \\ & \searrow f_i & \downarrow f_j \\ & & X \end{array}$$

Eğer X evrensel özelliğe sahip ise, yani herhangi bir topolojik Y uzayı ve $g_i : X_i \rightarrow Y$ sürekli dönüşümleri ile birlikte aşağıdaki diagramı değişmeli yapan bir tek $f :$

$X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa $\{X_i, f_{ij}, I\}$ direkt sisteminin direkt limiti X dir denir ve $\lim_{\rightarrow i \in I} X_i$ ile gösterilir.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ & \searrow g_i & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Tanım 2.18 I bir yönlü küme ve her $i \in I$ için X_i topolojik uzaylar ve $i, j \in I$ ve $i \leq j$ için $f_{ji} : X_j \rightarrow X_i$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise $\{X_i, f_{ij}, I\}$ ailesi ters sistem (inverse system) olarak adlandırılır.

1. Her $i \in I$ için $f_{ii} : X_i \rightarrow X_i$ özdeşlik dönüşümüdür.
2. Her $i, j, k \in I$ ve $i \leq j \leq k$ için $f_{ji} \circ f_{kj} = f_{ki}$ dir.

Tanım 2.19 Kabul edelim ki $\{X_i, f_{ij}, I\}$ bir ters sistem olsun. X topolojik uzayı $f_i : X \rightarrow X_i$ sürekli dönüşümleri ile birlikte aşağıdaki diagramı değişmeli yapıyor olsun.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_j} & X_j \\ & \searrow f_i & \downarrow f_{ji} \\ & & X_i \end{array}$$

Eğer X evrensel özelliğe sahip ise, yani herhangi bir topolojik Y uzayı ve $g_i : Y \rightarrow X_i$ sürekli dönüşümleri ile birlikte aşağıdaki diagramı değişmeli yapan bir tek $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa $\{X_i, f_{ij}, I\}$ ters sisteminin ters limiti X dir denir ve $\lim_{\leftarrow i \in I} X_i$ ile gösterilir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f_i & \downarrow g_i \\ & & X_i \end{array}$$

Önerme 2.20 Eğer $\{X_i, f_{ij}, I\}$ kompakt, Hausdorff, tamamen bağlantısız topolojik uzayların (sırasıyla topolojik grupların) bir ters sistemi ise o zaman $\lim_{\leftarrow i \in I} X_i$ ters limiti de

kompakt, Hausdorff, tamamen bağlantısız topolojik uzaydır (sırasıyla topolojik gruptur).

Direkt ve ters limitler ile ilgili daha fazla bilgi Bourbaki (1966) da bulunabilir.

2.2 Karakter Grupları ve Dualite Teoremi

Karakter grupları kompakt, abelyen grupların sınıf uzaylarının kohomoloji cebirini belirlemede önemli bir yere sahiptir.

Tanım 2.21 G bir abelyen topolojik grup ve $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ çember grubu olmak üzere, G den $\mathbb{S}^1$ grubuna tüm sürekli homomorfizmlerin kümesi kompakt-açık topoloji ile bir abelyen gruptur. Bu gruba G nin karakter grubu denir ve $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$ ile gösterilir. $\widehat{G}$ nin elemanlarına da karakterler denir.

Tanım 2.22 G bir abelyen topolojik grup ve H bir alt grup olsun. O zaman

$$H^\perp = \left\{ \chi \in \widehat{G} : \text{Her } g \in H \text{ için } \langle \chi, g \rangle = \chi(g) = 0 \right\}$$

kümesine H nin $\widehat{G}$ da sıfırlayıcı (annihilatörü) denir.

G bir abelyen topolojik grup ve H , G nin bir alt grubu ve $H^\perp$, $\widehat{G}$ da H nin sıfırlayıcı olsun. $q : G \rightarrow G/H$ bölüm morfizmi ise o zaman

$$\text{Hom}(q, \mathbb{S}^1) : \widehat{G/H} = \text{Hom}(G/H, \mathbb{S}^1) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{S}^1) = \widehat{G}$$

morfizminin görüntüsü $H^\perp$ dir ve böylece q , abelyen topolojik grupların bir

$$\lambda_{G,H} : \widehat{G/H} \rightarrow H^\perp$$

morfizmini belirler.

Aşağıdaki teoremler Hofmann and Morris (2013) de bulunabilir.

Teorem 2.23 (Pontryagin-van Kampen Dualite Teoremi)

Her yerel kompakt, abelyen G topolojik grubu için $\eta_G : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$, $\eta_G(g)(\chi) = \chi(g)$ evaluation morfizmi topolojik grupların bir izomorfizmidir.

Teorem 2.24 G bir yerel kompakt, abelyen grup ve H bir alt grup olsun.

$$\begin{aligned}\lambda_{G,H} &: \widehat{G/H} \rightarrow H^\perp, \lambda_{G,H}(\chi)(g) = \chi(g+H) \\ \kappa_{G,H} &: \widehat{G}/H^\perp \rightarrow \widehat{G}, \kappa_{G,H}(\chi + H^\perp)(g) = \chi|_H\end{aligned}$$

abelyen topolojik grupların morfizmlerini tanımlayalım. O halde

i) $\lambda_{G,H}$ ve $\kappa_{G,H}$ abelyen topolojik grupların izomorfizmleridir.

ii) H, G nin kapalı bir alt grubu ise $H^{\perp\perp} = H$ olur.

iii)

$$0 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} Q \rightarrow 0$$

yerel kompakt abelyen grupların bir tam dizisi, burada i gömme morfizmi ve q bölüm morfizmi olsun. O zaman

$$0 \rightarrow \widehat{Q} \xrightarrow{\widehat{q}} \widehat{G} \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{H} \rightarrow 0$$

dual dizisi tamdır, burada $\widehat{q}$ bir gömme morfizmi ve $\widehat{i}$ bir bölüm morfizmidir.

Ayrıca $\widehat{Q} \cong H^\perp$ ve $\widehat{H} \cong \widehat{G}/H^\perp$ olur.

iv) G nin bir H alt grubunun her karakteri G nin bir karakterine genişler.

Bütün bağlantılı bileşenleri tek noktalar olan bir topolojik uzaya tamamen bağlantısız (totally disconnected) uzay denir.

Aşağıdaki lemmanın kanıtı Hofmann ve Morris (2013, Corollary 8.5) de bulunabilir.

Lemma 2.25 G bir kompakt, abelyen grup olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir.

1. G tamamen bağlantısız gruptur.
2. $\widehat{G}$ torsiyon gruptur.

Ayrıca aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

3. G bağlantılıdır.
4. $\widehat{G}$ torsiyonsuzdur.

Karakter grupları hakkında daha fazla bilgi Hofmann ve Morris (2013); Pontryagin (1986) da bulunabilir.

Bu tez sonlu boyutlu, kompakt gruplar ile ilgilidir. Bundan dolayı bir kompakt, Hausdorff topolojik uzayın boyutunu ifade edelim.

Tanım 2.26 Kabul edelim ki X bir kompakt, Hausdorff uzay olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlınırsa X uzayı $n \geq 0$ boyutuna sahiptir denir ve $\dim X = n$ ile gösterilir.

1) X in açık kümelerden oluşan her sonlu örtüsünün, kapalı kümelerden oluşan bir Σ inceltiimi vardır öyle ki her $x \in X$ için x' i içeren Σ örtüsünün elemanlarının sayısı en fazla $n + 1$ dir.

2) X in açık kümelerden oluşan bir sonlu örtüsü vardır öyle ki eğer Σ , bu örtünün kapalı kümelerden oluşan bir sonlu inceltiimi ise her $x \in X$ için x' i içeren Σ örtüsünün elemanlarının sayısı n' den fazladır.

Eğer G bir kompakt grup ise o zaman G nin boyutu ile G uzayının boyutunu kastedeceğiz. Tabi ki bir n için $\dim G = n$ ise G ye sonlu boyutlu, kompakt grup diyeceğiz.

Çeşitli boyut fonksiyonları vardır. Topolojik boyut, small inductive boyut, local large inductive boyut, kohomolojik boyut ve sheaf boyut sık sık kullanılır. Herhangi bir

kompakt, abelyen G grubu için tüm bu boyutlar çakışır ve sonlu olduğu zaman $\dim G = \text{rank} \widehat{G}$ dır (Hofmann ve Morris, 2013, Corollary 8.26).

Bu konuda daha fazla bilgi Engelking (1978); Nagami (1970) de bulunabilir.

2.3 Yerel Kompakt Gruplara Lie Grupları ile Yaklaşmak

Tanım 2.27 Bir topolojik grubun alt gruplarının sınıfı verilsin. Birimin her komşuluğu bu sınıfın bir üyesini içerir ise bu sınıfa keyfi küçük (arbitrarily small) üyeleri içerir denir.

Yerel kompakt gruplar hakkındaki önemli özelliklerden biri bu gruplara Lie grupları ile yaklaşılabilmesidir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse G bir yerel kompakt grup ve G/G_0 kompakt grup ise G/N bir Lie grup olacak şekilde G keyfi küçük kompakt, normal N alt gruplarına sahiptir. Bu Yamabe (1953) tarafından kanıtlanmıştır.

Ayrıca G nin boyutu sonlu ise G , bir tamamen bağlantısız (sıfır boyutlu) kompakt, normal N alt grubu içerir öyle ki G/N bölüm grubu G ile aynı boyutlu bir kompakt Lie gruptur (Stroppel, 2006).

Bu teoremin kanıtı ayrıca Pontryagin (1986, Theorem 69) da bulunabilir.

Aşağıdaki önerme ve teoremin kanıtları Hofmann ve Morris (2003) de bulunabilir.

Önerme 2.28 i) $G = \lim_{i \in I} G_i$ kompakt grupların bir ters limiti olsun. $\mathcal{U}_i$, G_i nin birim komşuluklarının filtresini, $\mathcal{U}$, G nin birim komşuluklarının filtresini ve $\mathcal{N}$, $\{\ker f_i : i \in I, f_i : G \rightarrow G_i\}$ kümesini gösterebilir. O zaman

- a) $\mathcal{U}$, $\{f_k^{-1}(U) : k \in I, U \in \mathcal{U}_k\}$ birim komşuluklarının bir bazına sahiptir.
- b) $\mathcal{N}$, 1 e yakınsayan kompakt, normal alt grupların bir filtre bazına sahiptir (yani 1 in verilen her U komşuluğu için $N \subseteq U$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ vardır).

- ii) Tersine, kabul edelim ki $G, \bigcap \mathcal{N} = \{1\}$ olacak şekilde kompakt, normal alt gruplardan meydana gelen bir $\mathcal{N}$ filtre bazına sahip bir kompakt grup olsun. Her $M, N \in \mathcal{N}, M \subseteq N$ için $f_{NM} : G/M \rightarrow G/N, f_{NM}(gM) = gN$ olarak tanımlanan doğal morfizmi gösterebiliriz. O zaman

$$\{f_{NM} : G/M \rightarrow G/N \mid M, N \in \mathcal{N} \text{ ve } M \subseteq N\}$$

topolojik grupların bir ters limit sistemini oluşturur ve aşağıdaki diagramı değişmeli yapan bir tek

$$\eta : \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N \rightarrow G$$

izomorfizmi vardır.

$j \leq k$ için $M = \ker f_k, N = \ker f_j$ ve $f'_j : G/\ker f_j \rightarrow G_j$ dönüşümü, $f_j : G \rightarrow G_j$ limit dönüşümü ile belirlensin.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & G/N & \xleftarrow{f_{NM}} & G/M & \xleftarrow{f_M} & \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N \\ & & \downarrow f'_j & & \downarrow f'_k & & \downarrow \eta \\ \cdots & \longleftarrow & G_j & \xleftarrow{f_{kj}} & G_k & \xleftarrow{f_k} & G \end{array}$$

f_M limit dönüşümleri bölüm dönüşümleridir.

- iii) Tüm $f_{kj} : G_k \rightarrow G_j$ bağlayan (bonding) dönüşümleri bölüm morfizmleri ve tüm f_j limit dönüşümleri örten olsun. O zaman $f_j : G \rightarrow G_j$ limit dönüşümleri bölüm morfizmleridir.

Ters limitlerin kapalı alt grup teoremini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

Teorem 2.29 $G, \bigcap \mathcal{N} = \{1\}$ olacak şekilde kapalı, normal alt gruplardan meydana gelen bir $\mathcal{N}$ filtre bazına sahip bir kompakt grup ve H, G nin kapalı bir alt grubu olsun.

- i) $\gamma_G : G \rightarrow \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ izomorfizmi H kapalı alt grubunu izomorfik olarak $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} HN/N$ üzerine dönüştürür.

- ii) $H \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} (H/H \cap N) \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} HN/N \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \overline{HN}/N$
- iii) $M \in N$ için $\mu_M : \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} HN/N \rightarrow HM/M$ limit dönüşümleri bölüm morfizmleridir.
- iv) $H/H \cap N \rightarrow HN/N$ standart morfizmleri topolojik grupların bir izomorfizmidir.

Dolayısıyla G , n -boyutlu, kompakt grup ise o zaman $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ olarak düşünülebilir. Burada $\mathcal{N}$, G nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız alt grupların bir filtre bazıdır öyle ki $\bigcap \mathcal{N} = \{1\}$ ve her $N \in \mathcal{N}$ için G/N , n -boyutlu kompakt Lie gruptur.

Eğer G , n -boyutlu torusların (kompakt, bağlantılı, abelyen Lie grup) ters limiti ise o zaman G ye n -boyutlu pro-torus denir. 1-boyutlu pro-torus grubu solenoid olarak adlandırılır.

Bu tezde pro-torus ile daima sonlu boyutlu pro-toruslar kastedilecektir.

G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir G -uzay olsun. O zaman

$$(G, X) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} (G/N, X/N)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathcal{N}$ yukarıdaki gibidir.

Konu hakkında daha fazla bilgi Hofmann ve Morris (2007); Hofmann ve Morris (2013) de bulunabilir.

2.4 Sınıf Uzayları

Hatırlayalım ki total uzayı büzülebilir olan bir esas G -demete evrensel G -demet denir. Aşağıdaki teorem evrensel demetlerin varlığını garanti eder. Bu teorem Milnor (1956) tarafından kanıtlandı. Daha fazla bilgi Dieck (2008) de bulunabilir.

Teorem 2.30 Herhangi bir topolojik G grubu için bir evrensel $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ esas G -demet vardır.

Dikkat edelim ki burada G topolojik grubu E_G büzülebilir uzayı üzerine serbest etki eder ve orbit uzayı B_G ile gösterilir, yani $B_G = E_G/G$ dir. B_G uzayı G nin sınıf uzayı olarak adlandırılır ve homotopi denkliğe göre tektir.

Bazı iyi bilinen grupların sınıf uzayını not edelim.

$B_{\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1$ (çember grubu), $B_{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (n boyutlu torus), $B_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{RP}^\infty$ (sonsuz boyutlu reel projektif uzay), $B_{\mathbb{S}^1} = \mathbb{CP}^\infty$ (sonsuz boyutlu kompleks projektif uzay)

Torus ya da p -torus için sınıf uzayının kohomoloji halkası aşağıdaki şekildedir.

$G = \mathbb{T}^r$ ise $H^*(B_G; k) = k[t_1, t_2, \dots, t_r]$ dir. Burada $\deg t_j = 2$ dir.

$G = \mathbb{Z}_2^r$ ise $H^*(B_G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t_1, t_2, \dots, t_r]$ dir. Burada $\deg t_j = 1$ dir.

$G = \mathbb{Z}_p^r$ ise $H^*(B_G; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[t_1, t_2, \dots, t_r] \otimes \wedge[v_1, v_2, \dots, v_r]$ dir. Burada $\deg t_j = 2$, $\deg v_j = 1$ ve $\beta(v_j) = t_j$ dir.

Burada $\beta : H^1(G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(G; \mathbb{Z}_p)$ dönüşümü $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$ katsayı dizisi ile ilgili Bockstein homomorfizmidir.

Şimdi sınıf uzaylarının kohomolojileri ile ilgili iyi bilinen bazı sonuçlardan bahsedelim.

Önerme 2.31 [Borel, 1960, IV, Proposition 2.4] Eğer G bir sonlu grup ve k , karakteristiği sıfır ya da $|G|$ ile aralarında asal olan bir cisim ise o zaman $H^*(B_G; k) = k$ olur.

Aşağıdaki lemmaların kanıtı Hsiang (1975) de bulunabilir.

Lemma 2.32 G bir kompakt Lie grup ve G_0 , G nin birim bileşeni (identity component) olsun. O zaman $\Gamma = G/G_0$ sonlu gruptur ve

$$p : B_{G_0} = E_G/G_0 \rightarrow E_G/G = B_G$$

bir örtü uzayıdır. Grothendieck (1957)'nin bir basit teoreminden

$$p^* : H^*(B_G; k) \rightarrow (H^*(B_{G_0}; k))^\Gamma$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Burada $(H^*(B_{G_0}; k))^\Gamma$, Γ nın $H^*(B_{G_0}; k)$ üzerine etkisinin sabit noktalarının kümesidir.

Aşağıdaki lemmaların kanıtları Hofmann ve Mostert (1968); Hofmann ve Mostert (1973) de bulunabilir.

Lemma 2.33 G bir kompakt, abelyen grup ve G_0 , G nin birim bileşeni, R bir birimli ve değişmeli halka olsun. Eğer

$$0 \rightarrow G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/G_0 \rightarrow 0$$

kısa tam dizi ise o zaman

$$q^* : H^*(B_{G/G_0}; R) \rightarrow H^*(B_G; R)$$

monomorfizm ve

$$i^* : H^*(B_G; R) \rightarrow H^*(B_{G_0}; R)$$

epimorfizmdir.

Lemma 2.34 G bir kompakt, abelyen grup ve k , karakteristiği sıfır olan bir cisim olsun. O zaman

$$i^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_0}; k)$$

bir izomorfizmdir.

Not 2.35 Eğer $G \rightarrow G/H$ bir esas H -demet ise o zaman $E_G \rightarrow E_G/H$ bir evrensel esas H -demet olur. Böylece E_G/H , H nin sınıf uzayı olarak alınabilir. İyi bilinir ki G bir kompakt Lie grup ve H , G nin kapalı bir alt grubu ise o zaman $G \rightarrow G/H$ bir esas H -demettir.

Herhangi bir kompakt topolojik G grubu için bu doğru olmayabilir. Aşağıdaki aksi örnek Adams (2001) de bulunabilir.

Örnek 2.36 $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ olsun. $\mathbb{S}$ bir çarpımsal Lie gruptur. $\mathbb{T} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{S}$ olarak tanımlayalım. $G = \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}$ koordinat-koordinat çarpma ve çarpım topoloji ile verilsin. O zaman G bir kompakt, metriklenebilir, abelyen topolojik grup olur. $H = \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ olarak tanımlarsak H, G nin kapalı bir alt grubu olur. Şimdi aksine kabul edelim ki $p : G \rightarrow G/H$ bir esas H -demet olsun. G/H yi $(\mathbb{S}/\mathbb{T})^{\mathbb{Z}}$ ile özdeşleştirirsek o zaman $p : \mathbb{S}^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{S}/\mathbb{T})^{\mathbb{Z}}$ dönüşümü $q : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\mathbb{T}$ kanonik dönüşümlerinin $\mathbb{Z}$ -katlı çarpımı olur. Kabul edelim ki $U = \prod_{i \in \mathbb{Z}} U_i, G/H = (\mathbb{S}/\mathbb{T})^{\mathbb{Z}}$ de birimin bir temel açık komşuluğu ve $s : U \rightarrow G$ bir sürekli çapraz kesit olsun. Bir $k \in \mathbb{Z}$ seçelim öyle ki $U_k = \mathbb{S}/\mathbb{T}$ olsun. $j : U_k \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{Z}} U_i, k$ 'nci koordinat içermesi olsun. Ayrıca $u : \mathbb{S}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{S}$ ve $v : (\mathbb{S}/\mathbb{T})^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{S}/\mathbb{T}, k$ 'nci koordinat projeksiyonları olsun. O halde $v \circ j = 1_{U_k}$ ve $p \circ s = 1_U$ olur. Ayrıca $q \circ u$ bileşkesi $G = \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}$ üzerinde $v \circ p$ bileşkesine eşit olur. Buradan $q \circ u \circ s \circ j = v \circ p \circ s \circ j = v \circ j = 1_{U_k}$ elde edilir. Sonuç olarak $u \circ s \circ j : \mathbb{S}/\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$ dönüşümü $q : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\mathbb{T}$ kanonik dönüşümünün bir sürekli çapraz kesitidir. Fakat örtü uzayı teorisinden böyle bir çapraz kesit yoktur. Bu ise çelişkidir. O halde $p : G \rightarrow G/H$ bir esas H -demet olamaz.

Fakat sonlu boyutlu, yerel kompakt gruplarda Nagami (1963) aşağıdaki teoremi kanıtladı.

Teorem 2.37 Bir sonlu boyutlu, yerel kompakt grubun herhangi bir kapalı alt grubu bir yerel çapraz kesite (local cross section) sahiptir.

İyi bilinir ki $G \rightarrow G/H$ kanonik dönüşümünün bir esas H -demet olması için gerek ve yeter koşul bir yerel çapraz kesite sahip olmasıdır (Dieck, 2008, Proposition 14.1.11).

Böylece G bir sonlu boyutlu, yerel kompakt grup ve H, G nin herhangi bir kapalı alt grubu ise o zaman $G \rightarrow G/H$ bir esas H -demet olur.

Aşağıdaki lemmaların kanıtları Bruner ve ark. (1974) de bulunabilir. Şimdi sınıf uzayları arasındaki dönüşümleri ifade etmeden önce bazı notasyonları ifade ede-

lim.

X yol bağlantılı ve $x_0 \in X$ olsun.

$$PX = \{\lambda : [0, 1] \rightarrow X : \lambda \text{ sürekli ve } \lambda(0) = x_0\}$$

ve

$$\Omega X = \{\lambda : [0, 1] \rightarrow X : \lambda \text{ sürekli ve } \lambda(0) = x_0 = \lambda(1)\}$$

olarak tanımlayalım.

Lemma 2.38 $\pi : E_G \rightarrow B_G$ bir evrensel G -demet ve $h(y, 0) = *$ ve $h(y, 1) = y$ olmak üzere $h : E_G \times I \rightarrow E_G$ bir büzen homotopi olsun. PB_G , $\pi(*)$ da başlayan B_G deki yolların uzayı olmak üzere $\tilde{h} : E_G \rightarrow PB_G$ dönüşümü $\tilde{h}(y)(t) = \pi h(y, t)$ olarak tanımlansın. $p : PB_G \rightarrow B_G$ dönüşümü son nokta projeksiyonu olsun. O halde $p\tilde{h} = \pi$ ve $p^{-1}\pi(*) = \Omega B_G$ olup $\tilde{h}$, bir $\zeta : G \rightarrow \Omega B_G$ dönüşümüne kısıtlanır. Burada G , $\pi^{-1}(\pi(*))$ ile özdeşleştirilir. Buradan aşağıdaki değişmeli diagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & E_G & \xrightarrow{\pi} & B_G \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \tilde{h} & & \parallel \\ \Omega B_G & \longrightarrow & PB_G & \xrightarrow{p} & B_G \end{array}$$

Uzun tam homotopi dizilerinin karşılaştırılmasından dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 2.39 Her $n \geq 0$ için $\pi_{n+1}(B_G)$, doğal olarak $\pi_n(G)$ ye izomorfiktir ve $\zeta : G \rightarrow \Omega B_G$ dönüşümü bir homotopi denkliktir.

Özellikle eğer G bir bağlantılı Lie grup ise B_G basit bağlantılıdır.

Açıktır ki B_G , G nin bir fonktörüdür. Bu fonktörün bazı özelliklerini ifade edelim.

Lemma 2.40 $\gamma : G \rightarrow G'$ bir sürekli homomorfizm, $\pi : E_G \rightarrow B_G$ ve $\pi : E_{G'} \rightarrow B_{G'}$ evrensel demetler olsun. Eğer $f : E_G \rightarrow E_{G'}$, her $g \in G$ ve $y \in E_G$ için $f(gy) = \gamma(g)f(y)$ olacak şekilde herhangi bir dönüşüm ise o zaman orbitlere geçme ile f den elde edilen $B_G \rightarrow B_{G'}$ dönüşümü $B\gamma$ nın homotopi sınıfındadır.

O halde biz aşağıdaki iyi bilinen lemmayı elde ederiz.

Lemma 2.41 1. G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve H , G nin kapalı bir alt grubu olsun. O zaman homotopi denkliğe göre

$$G/H \rightarrow B_H \rightarrow B_G$$

bir lif demeti dizisi vardır.

2. G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve N , G nin bir kapalı, normal alt grubu olsun. O zaman homotopi denkliğe göre $i : N \hookrightarrow G$ içerme dönüşümü ve $q : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü ile belirlenen bir

$$B_N \xrightarrow{Bi} B_G \xrightarrow{Bq} B_{G/N}$$

lif demeti dizisi vardır.

İspat:

1. G nin serbest etki ettiği uzay E_G olsun. G sonlu boyutlu, kompakt grup ve H , G nin kapalı bir alt grubu olduğundan $G \rightarrow G/H$ bir esas H -demet olur. Buradan $E_G \rightarrow E_G/H$ bir esas H -demet olup böylece $E_G/H, B_H$ ın sınıf uzayı olarak alınabilir. O halde

$$E_G/H = B_H \rightarrow E_G/G = B_G$$

doğal dönüşümünün lifi G/H koset uzayı olur.

2. Kabul edelim ki $E_G \rightarrow B_G$ ve $E_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ sırasıyla G ve G/N nin evrensel demetleri olsun. G sonlu boyutlu, kompakt grup ve N , G nin kapalı bir alt grubu olduğundan $G \rightarrow G/N$ esas N -demet olup N için $E_G \rightarrow E_{G/N}$ evrensel demetini alabiliriz, yani $B_N = E_{G/N}$ seçebiliriz. Biz $Eq : E_G \rightarrow E_{G/N}$ dönüşümünü $(Eq)(gy) = q(g)(Eq)(y)$ olarak kabul edebiliriz. $n \in N$ için $q(n) = e$ olduğundan Eq dönüşümü B_N de ayrılabilir ve aşağıdaki demet dönüşümünü elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} B_N & \longrightarrow & E_{G/N} \\ \downarrow Bi & & \downarrow \\ B_G & \xrightarrow{Bq} & B_{G/N} \end{array}$$

Özellikle bu diagram bir pullback diagramıdır. Biz Bq dönüşümünü bir demetimsi ile yer değiştirebiliriz (Davis ve Kirk, 2001, Theorem 6.18). Bu demetimsinin lifi Bq nun $F(Bq)$ homotopi lifidir. Burada Bq nun homotopi lifi

$$\begin{array}{ccc} F(Bq) & \longrightarrow & PB_{G/N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_G & \xrightarrow{Bq} & B_{G/N} \end{array}$$

pullback diagramı ile tanımlanır. $F(Bq)$ nun B_N ye homotopi denk olduğunu göstereceğiz. Dikkat edelim ki $E_{G/N}$ büzülebilir olduğu için $PB_{G/N}$, $E_{G/N}$ uzayına homotopi denktir.

Pullback'lerin evrensel özelliğinden aşağıdaki diagramı değişmeli yapan bir

$$\theta : B_N \rightarrow F(Bq)$$

dönüşümü vardır.

$$\begin{array}{ccccc} G/N & \longrightarrow & B_N & \longrightarrow & B_G \\ \downarrow \zeta & & \downarrow \theta & & \downarrow \\ \Omega B_{G/N} & \longrightarrow & F(Bq) & \longrightarrow & B_G \end{array}$$

Demetimsilerin uzun tam homotopi dizisinden dolayı aşağıdaki değişmeli diagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \longrightarrow & \pi_n(G/N) & \longrightarrow & \pi_n(B_N) & \longrightarrow & \pi_n(B_G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(G/N) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_n(\Omega B_{G/N}) & \longrightarrow & \pi_n(F(Bq)) & \longrightarrow & \pi_n(B_G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(\Omega B_{G/N}) & \longrightarrow
 \end{array}$$

ζ homotopi denklik olduğundan Five lemma'dan θ homotopi gruplarında bir izomorfizm belirler ve bundan dolayı bir homotopi denkliktir. Bu ise kanıtı sonlandırır.

Not 2.42 $E_G^m \rightarrow B_G^m$, m -evrensel demet olsun. Herhangi bir kompakt topolojik G grubu için E_G ve B_G kompakt olmak zorunda değildir fakat E_G^m ve B_G^m kompakttır. Sheaf kohomolojide bazı sonuçlar (Künneth formülü gibi) kompaktlık varsayımlarına ihtiyaç duyduğu için B_G nin yerine B_G^m yi göz önünde bulundurmak daha uygundur.

$$H^i(B_G^{m+1}; k) \rightarrow H^i(B_G^m; k)$$

morfizmleri her $i < m$ için izomorfizm olduğu için $H^i(B_G; k)$ kohomoloji modülü $i < m$ için kanonik olarak $H^i(B_G^m; k)$ modülüne izomorftir (Hofmann ve Mostert, 1973). Bazı teknik zorluklardan kaçınmak için genelliği kaybetmeksizin $H^i(B_G; k)$ kohomoloji modülü, yeterince büyük bir m için $H^i(B_G^m; k)$ olarak alınabilir.

Hofmann ve Mostert (1973) tarafından kompakt, bağlantılı, abelyen grupların sınıf uzaylarının kohomoloji cebiri aşağıdaki şekilde ifade edildi.

Teorem 2.43 Herhangi kompakt, abelyen G grubu için $H^*(B_G; \mathbb{Z})$ cebirinin 2 dereceli $H^2(B_G; \mathbb{Z})$ homojen bileşeni doğal olarak $\widehat{G}$ karakter grubuna izomorftir. Eğer G bağlantılı ise o zaman bütün $H^*(B_G; \mathbb{Z})$ kohomoloji cebiri, bu 2 dereceli homojen bileşen tarafından üretilen $P(\widehat{G})$ simetrik $\mathbb{Z}$ -cebiridir. Aynı zamanda bu durumda

$H^*(G; \mathbb{Z})$ nin 1 dereceli $H^1(G; \mathbb{Z})$ homojen bileşeni doğal olarak $\widehat{G}$ grubuna izomorfiktir ve bütün $H^*(G; \mathbb{Z})$ kohomoloji cebiri $\wedge(H^1(G; \mathbb{Z}))$ dış (exterior) cebire izomorfiktir.

Özellikle herhangi birimli, değişmeli R halkası ve kompakt, bağlantılı, abelyen G grubu için

$$H^*(B_G; R) \cong R \otimes P(\widehat{G}) \cong P(R \otimes \widehat{G})$$

olur.

2.5 A. Borel'in İnşası

A. Borel'in inşası topolojik transformasyon gruplarının kohomoloji teorisi için güçlü bir yapıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

G bir topolojik grup ve X bir G -uzay olsun. O halde $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ evrensel G -demet olmak üzere G nin $X \times E_G$ üzerinde diagonal (serbest) etkisi vardır ($g(x, e) = (gx, ge)$) ve Borel'in inşası bu etkinin $(X \times E_G)/G$ orbit uzayı olarak tanımlanır ve X_G ile gösterilir. Bu ise aşağıdaki değişmeli diagrama yol açar.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\quad} & X \times E_G & \xrightarrow{\quad} & E_G \\ \downarrow & \searrow i_G & \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \xleftarrow{\pi_1} & X_G & \xrightarrow{\pi_2} & B_G \end{array}$$

Burada π_2 , X lifli ve G/K yapı gruplu (burada $K = \bigcap_{x \in X} G_x$) bir lif demeti (aynı zamanda bir demetimsidir, Borel demetimsisi olarak adlandırılır) ve π_1 , $x^* \in X/G$ ve $x \in x^*$ olmak üzere $\pi_1^{-1}(x^*) = E_G/G_x$ olan bir dönüşümdür.

Not edelim ki G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ise G_x kapalı alt grup olduğundan $G \rightarrow G/G_x$ bir esas G_x -demet olup $E_G \rightarrow E_G/G_x$, evrensel esas G_x -demet olur. Böylece E_G/G_x , B_{G_x} sınıf uzayı olarak alınabilir ve $\pi_1^{-1}(x^*) = B_{G_x}$ olur.

Ayrıca $H^*(X_G; k)$, $\pi_2^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(X_G; k)$ dönüşümü yardımı ile $H^*(B_G; k)$ üzerinde bir cebirdir ve X in k katsayılı ekivariant (equivariant) dereceli

cebiri olarak adlandırılır ve $H_G^*(X; k)$ ile gösterilir (Borel, 1960). Yani

$$\begin{aligned} H^*(B_G; k) \times H^*(X_G; k) &\rightarrow H^*(X_G; k) \\ (a, b) &\rightarrow \pi_2^*(a) \cup b \end{aligned}$$

işlemi ile $H^*(X_G; k)$, $H^*(B_G; k)$ üzerinde bir cebirdir. Burada $\cup$, $H^*(X_G; k)$ yı halka yapan "cup product" işlemini gösterir.

O halde $H^*(B_G; k)$ nın cebirsel yapısı ekivaryant kohomoloji cebirini belirlemede önemlidir.

1. Ekivaryant kohomoloji, yani $H_G^*(X; k)$, E_G nin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca tek noktanın ekivaryant kohomolojisi tanımdan dolayı

$$H_G^*(pt; k) = H^*(pt \times_G E_G; k) = H^*(B_G; k)$$

olur.

2. Eğer bir X uzayı serbest G -uzay ise o zaman $X \times_G E_G \rightarrow X/G$ dönüşümü lifi E_G (büzülebilir) olan bir demetimsidir. Bundan dolayı

$$H^*(X/G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$$

dönüşümü bir izomorfizm olur.

3. Eğer bir X uzayı aşıkâr G -uzay ve k bir cisim ise o zaman $X \times_G E_G = (X \times E_G)/G$ olup Künneth formülünden $H_G^*(X; k) = H^*(X; k) \otimes_k H^*(B_G; k)$ elde edilir. Özellikle $H_G^*(X; k)$ bir serbest $H^*(B_G; k)$ -modüldür.

4. Eğer $f : X \rightarrow Y$ bir G -ekivaryant dönüşüm ise $f \times id : X \times E_G \rightarrow Y \times E_G$, G -uzayların bir G -ekivaryant dönüşümü olup bir

$$f' : X \times_G E_G \rightarrow Y \times_G E_G$$

dönüşümünü belirler. Buradan $f : X \rightarrow Y$, G -ekivaryant dönüşümü

$$f^* : H_G^*(Y; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$$

homomorfizmini belirler.

Şimdi ise kohomoloji teorisinde önemli bir yere sahip olan Vietoris-Begle teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.44 [Spanier, 1966, s. 344] X ve Y parakompakt uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ kapalı, sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki bir $n \geq 0$ vardır öyle ki her $y \in Y$ ve $q < n$ için $\tilde{H}^q(f^{-1}(y); k) = \{0\}$ olsun. O zaman

$$f^q : H^q(Y; k) \rightarrow H^q(X; k)$$

dönüşümü $q < n$ için bir izomorfizm ve $q = n$ için bir monomorfizmdir.

Bu teoremin Sheaf kohomoloji için daha genel hali Quillen (1971) de bulunabilir.

Not 2.45 X bir G -uzay ve Y bir H -uzay olsun. $\phi : G \rightarrow H$ bir homomorfizm, $f : X \rightarrow Y$ bir ϕ -ekivaryant dönüşüm (yani $f(gx) = \phi(g)f(x)$) ise f dönüşümünün

$$f^* : H_H^*(Y; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$$

dönüşümünü nasıl belirlediğini ifade edelim. $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ ve $H \rightarrow E_H \rightarrow B_H$ sırasıyla G ve H nin evrensel esas demetleri olsun.

$$\begin{array}{ccc} X \times_G (E_G \times E_H) & \xrightarrow{p_2} & X \times_G E_H \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \bar{f} \\ X \times_G E_G & \xrightarrow{\quad \bar{f} \times \phi \quad} & Y \times_H E_H \end{array}$$

Bu diagramda p_1 ve p_2 dönüşümleri $E_G \times E_H$ nin çarpanları üzerine projeksiyonları ile belirlenir ve sırasıyla E_H ve E_G liflerine sahiptir. Vietoris-Begle teoreminden p_1 dönüşümü kohomoloji üzerinde izomorfizm belirler. Ayrıca $\overline{f \times \varphi}$ dönüşümü $f \times \varphi$ ile belirlenen orbit uzayları üzerindeki dönüşümdür. p_1^* izomorfizm olduğundan bir kanonik

$$(p_1^*)^{-1} p_2^* \overline{f}^* : H^*(Y \times_H E_H; k) \rightarrow H^*(X \times_G E_G; k)$$

homomorfizmini belirler. φ nin grafiği $(\{(g, \varphi(g)) : g \in G\})$ p_1 dönüşümünün bir kesi-tini verir. Bundan dolayı $(p_1^*)^{-1} p_2^* \overline{f}^*$ homomorfizmi $\overline{f \times \varphi}^*$ homomorfizmi ile çakışır. Yani $\overline{f \times \varphi}^* : H_H^*(Y; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ olur.

Diğer taraftan E_G büzülebilir olduğundan yine Vietoris-Begle teoreminden p_2^* izomorfizm olup $H^*(X \times_G E_H; k) \cong H^*(X \times_G E_G; k)$ izomorfizmini elde ederiz. Bu ise $H_G^*(X; k) = H^*(X \times_G E_G; k)$ ekivaryant kohomoloji cebirinin E_G nin seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. Aslında $G = H$ ve $X = Y$ alınırsa diagramdaki noktalı ok bir homotopi denklik olur böylece $H_G^*(X; k)$, E_G nin seçiminden bağımsız olur.

Ekivaryant kohomoloji için Mayer-Vietoris dizisi, sıradan kohomoloji için Mayer-Vietoris dizisinden çıkar.

Teorem 2.46 (Ekivaryant Mayer-Vietoris Dizisi) X bir G -uzayı olsun. Eğer A ve B , X uzayının kapalı, invaryant alt uzayları ise o zaman $H^*(B_G; k)$ -modüllerin bir

$$\dots \rightarrow H_G^i(A \cup B; k) \rightarrow H_G^i(A; k) \oplus H_G^i(B; k) \rightarrow H_G^i(A \cap B; k) \rightarrow H_G^{i+1}(A \cup B; k) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi vardır.

İspat: A ve B , G -invaryant olduğundan $A \cap B$ de G -invarianttır. Ayrıca $(A \cap B)_G = A_G \cap B_G$ ve $(A \cup B)_G = A_G \cup B_G$ olacağından sıradan kohomoloji için Mayer-Vietoris dizisinden sonuç elde edilir.

Süreklilik: X bir G -uzayı ve A , X in kapalı invaryant alt uzayı olsun. Eğer X parakompakt ya da A kompakt ve X Hausdorff ise o zaman

$$H_G^*(A) = \varinjlim_{U \supset A} H_G^*(U)$$

dur. Burada U , X de A nın invaryant komşulukları üzerinden alınır.

Not 2.47 Sınıf uzaylarında bahsettiğimiz gibi kompakt G topolojik grubu ve kompakt X , G -uzayı için X_G kompakt olmak zorunda değildir. Fakat iyi bilinir ki X parakompakt G -uzay ise X_G de parakompakt uzaydır (Bourbaki, 1966, Chapter IX, §4, Ex. 20 (d)). $G \rightarrow E_G^N \rightarrow B_G^N$, N -evrensel esas G -demet olsun. $X_G^N = X \times_G E_G^N$ olarak tanımlayalım. Açık ki E_G^N kompakt, N -bağlantılıdır ve X_G^N de kompakttır. Sheaf kohomoloji için Vietoris-Begle teoreminden (Quillen, 1971) $X_G^N \rightarrow X_G$ içermesi her $i < N + 1$ için

$$H^i(X_G; k) \rightarrow H^i(X_G^N; k)$$

izomorfizmini belirler. Böylece bazı teknik zorluklardan kaçınmak için genelliği kaybetmeksizin yeterince büyük bir N için $H^i(X_G; k)$ kohomoloji modülü yerine $H^i(X_G^N; k)$ modülü alınabilir.

2.6 Spektral Diziler

Bir spektral dizi homolojik cebirde hesaplamalar yapmaya yarayan oldukça karmaşık ve güçlü bir cebirsel alettir.

Bir demetimsinin Leray-Serre spektral dizisi lif, taban ve total uzaylar arasındaki homolojik ya da kohomolojik ilişkileri analiz etmeye yarayan temel bir alettir.

Tanım 2.48 Bir R halkası üzerinde bir diferansiyel bidereceli modül (differential bi-graded module) bir R -lineer $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ dönüşümü ile birlikte her p, q tamsayıları için R -modüllerin bir $\{E^{p,q}\}$ sınıfıdır öyle ki $d \circ d = 0$ dır. Burada bir s tamsayısı için $d, (s, 1-s)$ ya da $(-s, s-1)$ dereceli diferansiyeldir.

Bir diferansiyel bidereceli modülün homolojisi alınabilir.

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\text{Kerd} : E^{p,q} \rightarrow E^{p+s,q-s+1}}{\text{Imd} : E^{p-s,q+s-1} \rightarrow E^{p,q}}$$

Dolayısıyla aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.49 Bir spektral dizi $r = 1, 2, \dots$ için R -modüllerin bir $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ sınıfıdır öyle ki diferansiyellerin tümü ya $(-r, r-1)$ dereceli (homolojik tipte spektral dizi) ya da tümü $(r, 1-r)$ derecelidir (kohomolojik tipte spektral dizi) ve her p, q, r için $E_{r+1}^{p,q}, H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$ ye izomorfiktir.

Tanım 2.50 Bir A, R -modülün üzerinde bir F filtrasyon her $p \in \mathbb{Z}$ için $\{F^p A\}$ alt modüllerin bir ailesidir öyle ki

$$\dots \subset F^{p+1}A \subset F^p A \subset F^{p-1}A \subset \dots \subset A \text{ (azalan filtrasyon)}$$

$$\dots \subset F^{p-1}A \subset F^p A \subset F^{p+1}A \subset \dots \subset A \text{ (artan filtrasyon)}$$

dır.

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = \begin{cases} F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q} & F^* \text{ azalan filtrasyon ise} \\ F^p H^{p+q} / F^{p-1} H^{p+q} & F^* \text{ artan filtrasyon ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 2.51 Eğer $E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F)$ olacak şekilde H^* (bir dereceli R -modül) üzerinde bir F filtrasyonu varsa o zaman $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ spektral dizisi H^* a yakınsak denir. Burada $E_\infty^{*,*}$, spektral dizinin limit terimidir.

Şimdi bir demetimsinin taban uzayının temel grubunun, lif uzayının homoloji (ya da kohomoloji) cebiri üzerine nasıl etki ettiğini açıklayalım.

$F \rightarrow E \rightarrow B$ bir demetimsi ve B yol bağlantılı olsun.

$$\Omega B = \Omega(B, b) = \{\lambda : [0, 1] \rightarrow B \mid \lambda \text{ sürekli ve } \lambda(0) = b = \lambda(1)\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\mu : \Omega B \times F \rightarrow F$ etkisi vardır (Arkowitz, 2011, Theorem 4.3.4). $\alpha \in \Omega B$ ve $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ olsun.

Aşağıdaki önermenin kanıtı McCleary (2001, Proposition 4.27) de bulunabilir.

Önerme 2.52 $\mu : \Omega B \times F \rightarrow F$ ve $\alpha \in \Omega B$ olsun. $h_\alpha = \mu(\alpha^{-1}, -) : F \rightarrow F$ diyelim.

O zaman

1. Eğer $\alpha \simeq \beta$ (homotopik) ise o zaman $h_\alpha \simeq h_\beta$ dir.
2. Eğer α sabit dönüşüme homotopik ise o zaman $h_\alpha \simeq 1_F$ dir.
3. $\alpha * \beta$, α ile β nın loop çarpımı ise o zaman $h_{\alpha * \beta} \simeq h_\alpha \circ h_\beta$ dir.

Bu önerme ile birlikte $\pi_1(B)$ nın $H^*(F)$ (ya da $H_*(F)$) üzerine etkisini tanımlayabiliriz.

Sonuç 2.53 $F \rightarrow E \rightarrow B$ bir demetimsi ve B yol bağlantılı olsun. O zaman $[\alpha] \rightarrow h_\alpha^*$ (ya da $[\alpha] \rightarrow h_{\alpha*}$) dönüşümü ile $\pi_1(B)$ temel grubu $H^*(F)$ (ya da $H_*(F)$) üzerine etki eder. Yani

$$\begin{aligned} \pi_1(B) \times H^*(F) &\rightarrow H^*(F) \\ ([\alpha], [x]) &\rightarrow h_\alpha^*([x]) \end{aligned}$$

ile etki eder. Bir başka ifade ile $\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(H^*(F))$ homomorfizmi vardır. Burada $h_\alpha^* : H^*(F) \rightarrow H^*(F)$ izomorfizmi lif homotopi denkliği ile belirlenen dönüşümdür.

Tanım 2.54 Eğer $\pi_1(B)$ temel grubu $H^*(F)$ üzerine aşikar etki ederse (başka bir ifade ile $\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(H^*(F))$ homomorfizmi aşikar ise) o zaman B üzerindeki $F \rightarrow E \rightarrow B$ demetimsisinin lokal katsayılar sistemi basittir denir.

Açıktır ki etkinin aşikar olması

$$h_\alpha^* : H^*(F) \rightarrow H^*(F)$$

izomorfizminin özdeşlik olmasıdır.

Aşağıdaki lemma Mamoru ve Toda (1978) de bulunabilir.

Lemma 2.55 B yol bağlantılı olmak üzere bir $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ demetimsisi verilmiş olsun.

O zaman

$$\pi^* : H^n(B; R) \rightarrow H^n(E; R)$$

ve

$$i^* : H^n(E; R) \rightarrow H^n(F; R)$$

kenar (edge) homomorfizmleri aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\begin{aligned} \pi^* : H^n(B; R) &\xrightarrow{j_*} H^n(B; \mathcal{H}^0(F; R)) = E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_3^{n,0} \twoheadrightarrow \dots \\ &\twoheadrightarrow E_n^{n,0} \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} \subseteq H^n(E; R) \end{aligned}$$

dir. Burada $j : R \rightarrow H^0(F; R)$ dönüşümü $r \rightarrow r.1_b \in H^0(F_b; R)$ ile verilen aşıkâr lokal R katsayı halkasının bir dönüşümüdür. Ayrıca

$$\begin{aligned} i^* : H^n(E; R) &\twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} = E_{n+2}^{0,n} \subseteq E_{n+1}^{0,n} \subseteq \dots \subseteq E_2^{0,n} = H^0(B; \mathcal{H}^n(F; R)) \xrightarrow{i_0^*} \\ &H^0(b; H^n(F_b; R)) = H^n(F; R) \end{aligned}$$

dir. Burada $i_0 : b \rightarrow B$ içirme dönüşümüdür ($F_b = \pi^{-1}(b)$).

Not 2.56 Eğer B ve F yol bağlantılı olmak üzere $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ demetimsisinde lokal katsayılar sistemi basit (yani $\pi_1(B)$ temel grubu $H^n(F; R)$ üzerine aşıkâr olarak etki ediyor) ise o zaman kenar dönüşümleri aşağıdaki şekilde olur.

$$\pi^* : H^n(B; R) = H^n(B; H^0(F; R)) = E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_3^{n,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_n^{n,0} \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} \subseteq H^n(E; R)$$

ve

$$i^* : H^n(E; R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} = E_{n+2}^{0,n} \subseteq E_{n+1}^{0,n} \subseteq \dots \subseteq E_2^{0,n} = H^0(B; H^n(F; R)) = H^n(F; R)$$

Şimdi demetimsiler için Leray-Serre spektral dizinin varlığını ifade edelim.

Teorem 2.57 [Kohomoloji Leray-Serre Spektral Dizi] R bir birimli değişmeli halka ve B yol bağlantılı olmak üzere $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ demetimsisi verilmiş olsun. O zaman $H^*(E; R)$ ye cebir olarak yakınsayan cebirlerin birinci çeyrek bir $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ spektral dizisi vardır ve

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R))$$

dir. Burada $\mathcal{H}^q(F; R)$, F nin kohomolojisiinde lokal katsayılar sistemini gösterir. Diğer bir deyişle $\mathcal{H}^q(F; R)$, $\pi_1(B)$ temel grubunun kanonik etkisi ile belirlenen lokal katsayılar sistemidir. Ayrıca bu spektral dizi demetimsilerin lif koruyan dönüşümlerine göre doğaldır.

Not edelim ki eğer k bir cisim ise o zaman $H^*(E; k)$ dereceli değişmeli cebiri $E_\infty^{*,*}$ ın total kompleksi $Tot E_\infty^{*,*}$ dereceli değişmeli cebirine izomorftir. Burada

$$(Tot E_\infty^{*,*})^q = \bigoplus_{k+l=q} E_\infty^{k,l}$$

dir. Yani $H^q(E; k) \cong \bigoplus_{k+l=q} E_\infty^{k,l}$ dir.

Şimdi spektral dizilerin teorisinde önemli bir yere sahip olan ve verilen iki demetimsinin lif, taban ve total uzaylarının kohomoloji halkaları arasındaki ilişkiyi veren Zeeman karşılaştırma teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi ifade edelim. Bu teorem hakkında daha fazla bilgi McCleary (2001); Zeeman (1957) de bulunabilir.

Teorem 2.58 [Zeeman karşılaştırma teoremi] Kabul edelim ki $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ ve $\{\bar{E}_r^{*,*}, \bar{d}_r\}$ kohomoloji tipli birinci çeyrek spektral diziler olsun. $\{f_r\}$ spektral dizilerin bir morfizmi

ve aşağıdaki diagram satırları tam değişmeli diagram olsun.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q} & \longrightarrow & E_2^{p,q} & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(E_2^{p+1,0}, E_2^{0,q}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_2 \otimes f_2 & & \downarrow f_2 & & \downarrow \text{Tor}(f_2, f_2) \\
 0 & \longrightarrow & \bar{E}_2^{p,0} \otimes \bar{E}_2^{0,q} & \longrightarrow & \bar{E}_2^{p,q} & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(\bar{E}_2^{p+1,0}, \bar{E}_2^{0,q}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

O zaman aşağıdakilerden herhangi ikisi sağlanıyor ise üçüncüsü de sağlanır.

1. Her p için $f_2 : E_2^{p,0} \rightarrow \bar{E}_2^{p,0}$ bir izomorfizmdir.
2. Her q için $f_2 : E_2^{0,q} \rightarrow \bar{E}_2^{0,q}$ bir izomorfizmdir.
3. Her p ve q için $f_\infty : E_\infty^{p,q} \rightarrow \bar{E}_\infty^{p,q}$ bir izomorfizmdir.

Özellikle, eğer $F \rightarrow E \rightarrow B$ demetimsisinde taban ve lifleri yol bağlantılı ve taban uzayının temel grubu $(\pi_1(B))$ lif uzayının kohomolojisi $(H^*(F))$ üzerine aşıkâr etki ediyorsa o zaman Zeeman karşılaştırma teoremi, Leray-Serre spektral dizisi için faydalıdır. Çünkü bu durumda 1. şık taban uzaylarının, 2. şık lif uzaylarının ve 3. şık total uzayların kohomoloji cebirlerinin izomorfizmini ifade eder.

Transformasyon gruplarının kohomoloji teorisinde temel ilgi alanlarından biri orbit uzayının kohomolojisi hakkında fikir sahibi olmaktır. Bundan dolayı ana teoremlerimizi kanıtlamak için aşağıdaki teoremlere ihtiyaç olacaktır.

Teorem 2.59 [Borel, 1960, III, Corollary 2.3] G bir sonlu grup, X bir yerel kompakt G -uzay ve $\pi : X \rightarrow X/G$ orbit dönüşümü olsun. Eğer k , karakteristiği sıfır ya da $|G|$ ile aralarında asal olan bir cisim ise o zaman

$$\pi^* : H_c^*(X/G; k) \rightarrow (H_c^*(X; k))^G$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Burada $(H_c^*(X; k))^G$, G nin X üzerine etkisi tarafından belirlenen $H_c^*(X; k)$ üzerine etkisinin sabit nokta kümesidir ve H_c^* kompakt destekli kohomolojiyi gösterir.

Teorem 2.60 [Bredon, 1972, Chapter III, Theorem 7.2] G bir sonlu grup, X bir parakompakt G -uzay ve $\pi : X \rightarrow X/G$ orbit dönüşümü olsun. Eğer k , karakteristiği sıfır ya da $|G|$ ile aralarında asal olan bir cisim ise o zaman

$$\pi^* : H^*(X/G; k) \rightarrow (H^*(X; k))^G$$

dönüşümü bir izomorfizmdir.

2.7 Lokalizasyon Teoremleri

A. Borel'in $H_G^*(X)$ 'in $H^*(B_G)$ -modül yapısını araştırması X^G sabit nokta kümesinin kohomolojisi ile yakından ilgili olduğuna yol açtı. Bu bölümde ekivaryant kohomolojide önemli bir yere sahip olan lokalizasyon teoremi ve sabit noktanın varlığı ile ilgili olan A. Borel'in kriteri ifade edilecektir.

R bir birimli, değişmeli halka ve G bir kompakt grup olsun. Kabul edelim ki X bir G -uzay ve $S \subseteq H^*(B_G; R)$ bir çarpımsal sistem (yani $\{1\} \subseteq S$ olan $H^*(B_G; R)$ nin merkezinde içeren çarpımsal yarı grup) olsun.

$$Bi^* : H^*(B_G; R) \rightarrow H^*(B_{G_x}; R)$$

dönüşümü $i : G_x \rightarrow G$ içirme dönüşümü ile belirlenen dönüşüm olsun.

Ayrıca Hsiang (1975)'in kitabında olduğu gibi,

$$X^S = \{x \in X : \text{Her } s \in S \text{ için } Bi^*(s) \neq 0\}$$

olarak tanımlayalım.

Not edelim ki

$$H_G^*(G(x); k) \cong H_G^*(G/G_x; k) \cong H^*(B_{G_x}; k)$$

olduğundan Bi^* dönüşümü (izomorfizme göre) sadece $[G_x]$ eşlenik sınıfına bağlıdır. Böylece X^S , X in G -invariant alt uzayıdır. Eğer X bir parakompakt uzay ve Alexander-Spanier kohomoloji kullanılırsa, o zaman X^S , X nin bir kapalı invariant alt uzayıdır (Allday ve Puppe, 1993). Aşağıdaki önerme tanımdan hemen çıkar.

Önerme 2.61 G bir kompakt grup ve X bir G -uzay olsun. $S \subseteq H^*(B_G; R)$ bir çarpımsal sistem olsun.

1. Her $s \in S$ için $X^G \subseteq X^S \subseteq X^s$ dir.
2. Eğer X uzayı sonlu çoklukta orbit tipine sahip (FMOT) ise o zaman bir $s \in S$ için $X^S = X^s$ dir.

Şimdi lokalizasyon teoremlerini ifade edebiliriz. Aşağıdaki teoremlerin kanıtları Hsiang (1975) de bulunabilir.

Teorem 2.62 G bir kompakt Lie grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; R) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; R)$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur.

Teorem 2.63 G bir kompakt Lie grup ve X bir sonlu kohomolojik boyutlu, parakompakt G -uzay olsun. Kabul edelim ki $S \subseteq H^*(B_G; R)$ bir çarpımsal sistem ve $s \in S$ olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; R) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^s; R)$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur. Eğer X sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise o zaman

$$S^{-1}H_G^*(X; R) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; R)$$

dönüşümü bir izomorfizm olur.

Lokalizasyon teoreminin önemli bir sonucu A. Borel'in sabit noktanın varlığı için kriteridir.

Sonuç 2.64 [A. Borel] $G = \mathbb{T}^r$ (ya da $\mathbb{Z}_p^r$) ve k , karakteristiği 0 olan bir cisim (ya da $\mathbb{Z}_p$) olsun. Eğer X bir kompakt ya da sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt G -uzay ise o zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^G; k) = H^*(X^G; k) \otimes_k (S^{-1}H^*(B_G; k))$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur. Burada $S = H^*(B_G; k) - \{0\}$ dır.

Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki elde edilir.

Sonuç 2.65 [A. Borel] (Sabit Noktanın Varlığı Kriteri) $G = \mathbb{T}^r$ (ya da $\mathbb{Z}_p^r$) ve k , karakteristiği 0 olan bir cisim (ya da $\mathbb{Z}_p$) olsun. Eğer X bir kompakt ya da sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt G -uzay ise o zaman $X^G \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümünün monomorfizm olmasıdır.

Not 2.66 G bir abelyen grup değilse $H^*(X^G)$ ile $H_G^*(X)$ arasında genelde bir ilişki olmayabilir. G bir kompakt, bağlantılı Lie grup fakat abelyen değilse bir aksi örnek Hsiang (1975, s. 44) de bulunabilir.

Deo ve ark (1982) bu teoremlerin aşağıdaki şekilde bir genellemesini kanıtladı.

Her açık örtüsü sonlu dereceli bir açık inceltirilmiş sahip uzaylara finitistic uzay denir. Eğer bir açık örtünün her $n + 2$ farklı elemanının arakesiti boş ise bu açık örtünün derecesi en fazla n olarak tanımlanır.

Kompakt uzaylar ve sonlu örtü boyutuna sahip parakompakt uzaylar finitistic uzaylardır.

Teorem 2.67 [Deo ve ark, 1982] G bir kompakt Lie grup ve X bir finitistic G -uzay olsun. Kabul edelim ki $S \subseteq H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem ve $s \in S$ olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^s; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur. Eğer X sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise o zaman

$$S^{-1}H_G^*(X;k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S;k)$$

dönüşümü bir izomorfizm olur.





3. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN BOREL'İN SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde A. Borel'in sabit noktanın varlığı kriteri bir kompakt uzay üzerine etki eden herhangi sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen topolojik grup (pro-torus) etkisi için genişletilecektir.

Öncelikle aşağıdaki lemmaları ifade edelim.

G/N bölüm grubunun X/N orbit uzayı üzerine etkisinin sabit nokta kümesi ile ilgili aşağıdaki lemma Ku (1967) de bulunabilir.

Lemma 3.1 1. G bir yerel kompakt grup ve X bir G -uzay olsun. N , G nin normal alt grubu ise G/N bölüm grubunun X/N orbit uzayı üzerine bir doğal etkisi vardır ve X^G sabit nokta kümesi $(X/N)^{G/N}$ sabit nokta kümesinin bir alt uzayına homeomorfiktir.

2. Kabul edelim ki bir kompakt, bağlantılı G grubu bir X uzayı üzerine etki etsin. N , G nin kompakt, tamamen bağlantısız, normal alt grubu olsun. O zaman X^G sabit nokta kümesi $(X/N)^{G/N}$ sabit nokta kümesine homeomorfiktir ($X^G \approx (X/N)^{G/N}$).

İspat:

1. Herhangi bir $x \in X^G$ için $G(x) = \{x\}$ ve $N(x) = \{x\}$ olur. Buradan $(gN)(N(x)) = N(gx) = N(x)$ olup $N(x) \in (X/N)^{G/N}$ olur.
2. Keyfi bir $N(x) \in (X/N)^{G/N}$ alalım. O halde her $g \in G$ için $(gN)(N(x)) = N(gx) = N(x)$ olur. Buradan $G(x) = N(x)$ elde edilir. $G(x)$ bağlantılı ve $N(x)$ tamamen bağlantısız olduğundan $G(x) = N(x) = \{x\}$ olur. O halde $x \in X^G$ olup $X^G \approx (X/N)^{G/N}$ elde edilir.

3. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN BOREL'İN SABİT NOKTA TEOREMİ

Mehmet ONAT

Lemma 3.2 G bir kompakt, bağlantılı, abelyen grup ve N , G nin tamamen bağlantısız, kapalı bir alt grubu olsun. O zaman $q : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü

$$Bq^* : H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_G; k)$$

izomorfizmini belirler.

İspat: Aşağıdaki tam diziyi düşünelim.

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/N \rightarrow 0$$

Buradan biz karakter gruplarının aşağıdaki tam dizisini elde ederiz.

$$0 \rightarrow \widehat{G/N} \xrightarrow{q^*} \widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{N} \rightarrow 0$$

Ayrıca k ile tensör çarpmak kısa tam dizileri koruduğu için aşağıdaki tam diziyi elde ederiz.

$$0 \rightarrow \widehat{G/N} \otimes k \rightarrow \widehat{G} \otimes k \rightarrow \widehat{N} \otimes k \rightarrow 0$$

Diğer taraftan, kompakt, abelyen, tamamen bağlantısız grubun karakter grubu torsiyon gruptur (Lemma 2.25) ve buradan $\widehat{N} \otimes k = 0$ olur. Böylece

$$\widehat{G/N} \otimes k \rightarrow \widehat{G} \otimes k$$

dönüşümü izomorfizm olup simetrik cebirlerin

$$P(\widehat{G/N} \otimes k) \rightarrow P(\widehat{G} \otimes k)$$

izomorfizmi elde edilir.

$$H^*(B_G; k) \cong P(k \otimes \widehat{G})$$

ve

$$H^*(B_{G/N}; k) \cong P(k \otimes \widehat{G/N})$$

doğal izomorfizmlerinden dolayı (Teorem 2.43)

$$H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_G; k)$$

dönüşümünün izomorfizm olduğu elde edilir.

Teorem 3.3 G bir pro-torus ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. $X^G \neq \emptyset$
2. $\pi_2 : X_G \rightarrow B_G$ dönüşümü çapraz kesite sahiptir.
3. $\pi_2^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümü monomorfizmdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri açıktır. Biz (3) $\Rightarrow$ (1) önermesini kanıtlayacağız.

$H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümü monomorfizm olsun. G bir pro-torus olduğundan G nin bir tamamen bağlantısız, kapalı, normal N alt grubu vardır öyle ki G/N bölüm grubu bir torustur. Aşağıdaki değişmeli diagramdan

$$H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H_{G/N}^*(X/N; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olduğu elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{G/N}; k) & \longrightarrow & H_{G/N}^*(X/N; k) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B_G; k) & \longrightarrow & H_G^*(X; k) \end{array}$$

Buradan $(X/N)^{G/N} \neq \emptyset$ elde edilir (Sonuç 2.65) ve Lemma 3.1 den $X^G \approx (X/N)^{G/N} \neq \emptyset$ elde edilir.

3. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN BOREL'İN SABİT
NOKTA TEOREMİ

Mehmet ONAT



4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Yeniden hatırlayalım ki her sonlu boyutlu, kompakt grup bir tamamen bağlantısız (yani sıfır boyutlu) kapalı, normal alt gruba sahiptir öyle ki bölüm grubu aynı boyutlu bir kompakt Lie gruptur. Böylece kompakt, tamamen bağlantısız grup etkileri kompakt grup etkilerinin çalışmasında önemli bir rol oynar.

Bu bölümde, aksi ifade edilmedikçe G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve N , G nin tamamen bağlantısız, kapalı, normal alt grubudur öyle ki G/N , G ile aynı boyutlu kompakt Lie gruptur.

Şimdi biz tamamen bağlantısız grup etkileri için iyi bilinen bir kaç teorem vereceğiz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.59 un bir genellemesi olarak yerel kompakt uzaylar üzerine kompakt, tamamen bağlantısız grup etkileri için Ku (1967) tarafından kanıtlandı.

Teorem 4.1 G bir kompakt, tamamen bağlantısız grup ve X bir yerel kompakt G -uzay ise o zaman $\pi : X \rightarrow X/G$ orbit dönüşümü

$$H_c^*(X/G, k) \cong (H_c^*(X, k))^G$$

izomorfizmini belirler.

İspat: Her $N \in \mathcal{N}$ için G/N bir sonlu grup olmak üzere

$$(G, X) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} (G/N, X/N)$$

dir. Teorem 2.59 dan

$$H_c^*(X/G; k) \cong [H_c^*(X/N; k)]^{G/N}$$

elde edilir. Alexander-Spanier kohomolojinin süreklilik özelliğinden direkt limite geçilerek

$$H_c^*(X/G; k) \cong [H_c^*(X; k)]^G$$

elde edilir.

Açıktır ki eğer X bir kompakt G -uzay ise o zaman $\pi : X \rightarrow X/G$ orbit dönüşümü

$$H^*(X/G, k) \cong (H^*(X, k))^G$$

izomorfizmini belirler.

Teorem 4.2 [Bredon, 1997, Corollary 11.11] G bir kompakt, bağlantılı topolojik grup ve X bir yerel kompakt Hausdorff G -uzay olsun. Herhangi bir L katsayı halkası için G , $H_c^*(X; L)$ üzerine aşikar etki eder.

Not 4.3 G bir kompakt, bağlantılı grup, X bir kompakt G -uzay ve N , G nin tamamen bağlantısız alt grubu olsun. Dolayısıyla G nin $H^*(X; k)$ üzerine etkisi ve dolayısıyla N nin $H^*(X; k)$ üzerine etkisi aşıkardır. Böylece

$$H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)^N = H^*(X; k)$$

elde ederiz.

Not 4.4 G bir topolojik grup ise o zaman E_G büzülebilir $\Rightarrow E_G$ yol bağlantılıdır $\Rightarrow B_G = E_G/G$ yol bağlantılıdır.

Aşağıdaki teorem Ku (1967) tarafından kanıtlandı.

Önerme 4.5 G bir kompakt, tamamen bağlantısız grup ise o zaman $H^*(B_G; k) = k$.

İspat: Her $N \in \mathcal{N}$ için G/N bir sonlu grup olmak üzere $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ dir. O zaman Hofmann ve Mostert (1973, III, Corollary 1.12) den dolayı

$$H^i(B_G; k) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H^i(B_{G/N}; k)$$

elde edilir. Her $i \geq 1$ için $H^i(B_{G/N}; k) = \{0\}$ olduğundan (Önerme 2.31)

$$H^i(B_G; k) = \varinjlim_{N \in \mathcal{N}} H^i(B_{G/N}; k) = \{0\}$$

elde edilir. Ayrıca B_G yol bağlantılı olduğundan $H^*(B_G; k) = k$ elde edilir.

Ana teoremi kanıtlamak için lokal katsayılar sistemi hakkında aşağıdaki gerçeklere ihtiyacımız vardır.

Not 4.6 G bir kompakt, bağlantılı Lie grup ve $X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$ Borel demetimsisi olsun. O zaman bu demetimsinin Leray-Serre spektral dizisinde lokal katsayılar sistemi basittir. Çünkü $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ evrensel esas G -demetinin homotopi tam dizisinden $\pi_1(B_G) \cong \pi_0(G)$ olur (burada $\pi_0(G)$, G/G_0 bağlantılı bileşenlerin grubunu gösterir). Diğer taraftan G bir Lie grubu olduğundan yerel yol bağlantılıdır. Yerel yol bağlantılı ve bağlantılı uzaylar yol bağlantılı olduğundan G bağlantılı Lie grubu yol bağlantılı olur. O halde $\pi_1(B_G) \cong \pi_0(G) = \{0\}$ olup $H^*(X)$ üzerine aşıkâr etki eder.

Dikkat etmek gerekir ki bu özellik her kompakt, bağlantılı topolojik grup için doğru olmayabilir. Örneğin $G = \varprojlim (S^1, f)$ çember gruplarının ters limiti 1-boyutlu, kompakt, bağlantılı, abelyen fakat yol bağlantılı olmayan (f özdeşlik dönüşümü değilse) bir topolojik gruptur. Yani $\pi_1(B_G) \neq \{0\}$ dır.

Fakat şimdi biz yine de kompakt uzaylar üzerine etki eden sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı topolojik gruplar için lokal katsayılar sisteminin basit olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır. Bu önerme ile ilgili daha fazla bilgi Arkowitz (2011) de bulunabilir.

Önerme 4.7 $F \rightarrow E \rightarrow B$ ve $F' \rightarrow E' \rightarrow B'$ iki demetimsi ve $\mu : \Omega B \times F \rightarrow F$ ve $\mu' :$

$\Omega B' \times F' \rightarrow F'$ etkilerini gösterebilirsin. Eğer

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow d & & \downarrow a & & \downarrow b \\ F' & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

diagramı değişmeli ise o zaman aşağıdaki diagram homotopi-değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} \Omega B \times F & \xrightarrow{\mu} & F \\ \downarrow \Omega b \times d & & \downarrow d \\ \Omega B' \times F' & \xrightarrow{\mu'} & F' \end{array}$$

Not 4.8 Bu önermenin bir sonucu olarak eğer $h_\alpha = \mu(\alpha^{-1}, -) : F \rightarrow F$ ve $\Omega b(\alpha) = \alpha'$ olmak üzere $h'_{\alpha'} = \mu'((\alpha')^{-1}, -) : F' \rightarrow F'$ ise o zaman aşağıdaki diagram homotopi-değişmeli olur.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h_\alpha} & F \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ F' & \xrightarrow{h'_{\alpha'}} & F' \end{array}$$

Lemma 4.9 G bir sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman

$$X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$$

Borel demetimsisinin Leray-Serre spektral dizisinde B_G üzerinde $\mathcal{H}^*(X; k)$ lokal katsayılar sistemi basittir.

İspat: G/N bölüm grubu kompakt, bağlantılı Lie grup olacak şekilde G nin bir tamamen bağlantısız, kapalı, normal N alt grubu vardır. G/N bölüm grubunun X/N orbit

uzayı üzerine etkisini ve aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X_G & \longrightarrow & B_G \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Bq \\ X/N & \longrightarrow & (X/N)_{G/N} & \longrightarrow & B_{G/N} \end{array}$$

G/N bağlantılı Lie grup ve Lie grupları yerel yol bağlantılı olduğundan G/N yol bağlantılı olup $B_{G/N}$ basit bağlantılı uzaydır (Not 4.6). Dolayısıyla $\pi_1(B_{G/N}) = \{0\}$ olup $B_{G/N}$ üzerinde $\mathcal{H}^*(X/N; k)$ lokal katsayılar sistemi basit olur. Diğer taraftan

$$\pi^* : H^*(X/N; k) \rightarrow H^*(X; k)$$

dönüşümü izomorfizmdir (Not 4.3).

$$X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$$

ve

$$X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$$

demetimsileri için $\mu : \Omega B_G \times X \rightarrow X$ ve $\mu' : \Omega B_{G/N} \times X/N \rightarrow X/N$ etkilerini düşünelim.

Not 4.8 den aşağıdaki diagram homotopi-değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_\alpha} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/N & \xrightarrow{h'_{\alpha'}} & X/N \end{array}$$

Böylece aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} H^*(X/N; k) & \xrightarrow{(h'_{\alpha'})^*} & H^*(X/N; k) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ H^*(X; k) & \xrightarrow{h_\alpha^*} & H^*(X; k) \end{array}$$

$\pi_1(B_{G/N})$ temel grubu $H^*(X/N; k)$ üzerine aşıkâr etki ettiğî için $(h'_{\alpha'})^*$ dönüşümü özdeşlik dönüşümüdür. Diğer taraftan $\pi^* : H^*(X/N; k) \rightarrow H^*(X; k)$ dönüşümü izomorfizm olduğundan yukarıdaki diagramdan h_{α}^* dönüşümü de özdeşlik dönüşümü olur. Bu ise $\pi_1(B_G)$ temel grubunun $H^*(X; k)$ üzerine aşıkâr etki etmesi demektir. Böylece B_G üzerinde $\mathcal{H}^*(X; k)$ lokal katsayılar sistemi basittir.

Lemma 4.10 G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve N , G nin tamamen bağlantısız, kapalı, normal alt grubu olsun. O zaman $q : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü ile belirlenen

$$Bq^* : H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_G; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir.

İspat: Yeniden hatırlayalım ki $i : N \hookrightarrow G$ içirme dönüşümü ve $q : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü

$$B_N \xrightarrow{Bi} B_G \xrightarrow{Bq} B_{G/N}$$

Serre demetimsisini belirler (Lemma 2.41). Ayrıca $H^*(B_G; k)$ cebirine yakınsayan ve $E_2^{p,q} \cong H^p(B_{G/N}; \mathcal{H}^q)$ olacak şekilde bir Leray-Serre spektral dizi vardır. Burada $\mathcal{H}^q$, $x \mapsto H^q((Bq)^{-1}(x); k) = H^q(B_N; k)$ ile katsayılar sistemini gösterir. B_N acyclic uzay, yani $H^*(B_N; k) = k$, olduğundan o zaman $\pi_1(B_{G/N})$ temel grubu $H^*(B_N; k)$ üzerine aşıkâr etki eder, yani bu spektral dizinin lokal katsayılar sistemi basittir. Bundan dolayı evrensel katsayı teoreminden

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B_{G/N}; k) \otimes H^q(B_N; k)$$

elde edilir.

Diğer taraftan her n için

$$Bq^n : H^n(B_{G/N}; k) \rightarrow H^n(B_G; k)$$

dönüşümü

$$H^n(B_{G/N}; k) = E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_3^{n,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} \subseteq H^n(B_G; k)$$

kenar dönüşümü ile ifade edilebilir. Spektral dizi $H^*(B_G; k)$ ya yakınsadığından ve her $p \neq 0$ için $H^p(B_N; k) = \{0\}$ olduğundan

$$H^n(B_G; k) \cong \bigoplus_{r+s=n} E_\infty^{r,s} = E_\infty^{n,0} \cong E_2^{n,0}$$

olur. $H^n(B_G; k) \cong E_2^{n,0} = H^n(B_{G/N}; k)$ olduğundan istenen sonuç elde edilmiş olur.

Bu teoremin kanıtı aynı zamanda Vietoris-Begle teoreminden de (Teorem 2.44) kolayca elde edilir.

Şimdi $S \subseteq H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem olsun. $H^*(B_{G/N}; k)$ da S nin bir kopyası olan $R = (Bq^*)^{-1}(S)$ çarpımsal sistemini düşünelim.

Ayrıca G/N kompakt Lie grubunun kompakt X/N orbit uzayı üzerine belirlenen etkisini düşünelim.

Lemma 4.11 $\pi : X \rightarrow X/N$ orbit dönüşümü $X^S \rightarrow (X/N)^R$ dönüşümünü belirler.

İspat: $x \in X^S$ ve kabul edelim ki $x^* = N(x) \notin (X/N)^R$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ için $Bj^*(r) = 0$ olur. Burada

$$Bj^* : H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_{(G/N)_{x^*}}; k)$$

$(G/N)_{x^*} \rightarrow G/N$ içermesi ile belirlenen dönüşümdür. $s = (Bq^*)(r) \in S$ olsun. Aşağıdaki değişmeli diagramdan $s \in S$ elemanının $Bi^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$ dönüşümü altındaki görüntüsü sıfırdır.

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{G/N}; k) & \xrightarrow{Bj^*} & H^*(B_{(G/N)_{x^*}}; k) \\ Bq^* \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B_G; k) & \xrightarrow{Bi^*} & H^*(B_{G_x}; k) \end{array}$$

Bu ise $x \in X^S$ olması ile çelişir.

Not 4.12 G/N nin $(G/N)_{N(x)}$ izotropi alt grupları Hofmann ve Morris (2013, Proposition 10.31) de tam olarak belirlenmiştir. Buna göre

$$(G/N)_{x^*} = G_x N / N \cong G_x / (G_x \cap N)$$

dir. Ayrıca, $G_x \cap N$, G_x in tamamen bağlantısız, kapalı, normal alt grubu olduğu için, $H^*(B_{G_x \cap N}; k) = k$ olur (Önerme 4.5). Böylece Lemma 4.10 daki gibi $G_x \rightarrow G_x N / N$ kanonik dönüşümü ile belirlenen yukarıdaki diagramdaki sağ düşey dönüşümün de,

$$B_{G_x \cap N} \rightarrow B_{G_x} \rightarrow B_{G_x / G_x \cap N}$$

demetimsisinin Leray-Serre spektral dizisi düşünülerek bir izomorfizm olduğu görülür.

Sonuç 4.13 $X^S / N = (X/N)^R$.

İspat: Önceki diagramı düşünelim. Eğer $X^S = \emptyset$ ise o zaman her $x \in X$ için

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

dönüşümü altında sıfıra giden bir $s_x \in S$ elemanı vardır. $r_x = (Bq^*)^{-1}(s_x)$ diyelim. Not 4.12 den

$$H^*(B_{(G/N)_{x^*}}; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

dönüşümü bir izomorfizm olduğundan $Bj^*(r_x) = 0$ olur. Buradan her $x \in X$ için $x_* = N(x) \notin (X/N)^R$ olup bu ise $(X/N)^R = \emptyset$ olmasını gerektirir.

Kabul edelim ki $X^S \neq \emptyset$ olsun. Lemma 4.11 den açıktır ki $X^S / N \subseteq (X/N)^R$ dir. Şimdi bir $N(x) \in (X/N)^R$ alalım. Varsayalım ki $x \notin X^S$ olsun. O zaman bir $s \in S$ için $Bi^*(s) = 0$ olur. $r = (Bq^*)^{-1}(s)$ diyelim.

$$H^*(B_{(G/N)_{x^*}}; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

dönüşümü bir izomorfizm olduğu için $Bj^*(r) = 0$ olur. Bu ise $N(x) \in (X/N)^R$ olması ile çelişir. Bundan dolayı $x \in X^S$ olur. Bu ise $N(x) \in X^S / N$ olmasını gerektirir.

İlk olarak biz lokalizasyon teoremini bir kompakt uzay üzerine etki eden sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı grup etkileri için kanıtlayacağız.

Teorem 4.14 G bir sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur.

İspat: G kompakt, bağlantılı grup olduğu için G nin (ve böylece N nin) $H^*(X; k)$ üzerine etkisi aşıkardır. Bundan dolayı $X \rightarrow X/N$ orbit dönüşümü

$$H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)^N = H^*(X; k)$$

izomorfizmini belirler (Not 4.3). Şimdi biz teoremi, G nin X üzerine etkisini G/N kompakt Lie grubunun X/N kompakt uzayı üzerine etkisine indirgemeye kanıtlayacağız.

Kompakt Lie grup etkileri için lokalizasyon teoreminden (Teorem 2.62)

$$R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; k) \rightarrow R^{-1}H_{G/N}^*((X/N)^R; k)$$

izomorfizmi elde edilir. Burada $R \subseteq H^*(B_{G/N}; k)$ çarpımsal sistemi, $S \subseteq H^*(B_G; k)$ çarpımsal sisteminin $Bq^* : H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_G; k)$ dönüşümü altındaki öngörüntüsüdür.

Diğer taraftan,

$$X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$$

ve

$$X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$$

demetimsilerinin Leray-Serre spektral dizileri sırasıyla $(E^{*,*})$ ve $(\bar{E}^{*,*})$ olsun. G/N bir bağlantılı Lie grup olduğundan $X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ demetimsisinin lokal kat-sayılar sistemi basittir (çünkü $\pi_1(B_{G/N}) = \{0\}$). Ayrıca Lemma 4.9 dan $X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$

demetimsisinin lokal katsayılar sistemi de basit olur. O zaman evrensel katsayı teoreminden

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H^p(B_G; k) \otimes H^q(X; k) \\ \bar{E}_2^{p,q} &= H^p(B_{G/N}; k) \otimes H^q(X/N; k) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Diğer taraftan $H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)$ ve $H^*(B_{G/N}; k) \cong H^*(B_G; k)$ olduğundan her $p, q \geq 0$ için $\bar{E}_2^{p,q} \cong E_2^{p,q}$ elde edilir. Buradan özellikle $\bar{E}_2^{p,0} \cong E_2^{p,0}$ ve $\bar{E}_2^{0,q} \cong E_2^{0,q}$ olup Zeeman karşılaştırma teoreminden (Teorem 2.58) her $p, q \geq 0$ için

$$\bar{E}_\infty^{p,q} \cong E_\infty^{p,q}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$H_{G/N}^*(X/N; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$$

izomorfizmi elde edilir. Çünkü

$$H_{G/N}^q(X/N; k) \cong \bigoplus_{k+l=q} \bar{E}_\infty^{k,l}$$

ve

$$H_G^q(X; k) \cong \bigoplus_{k+l=q} E_\infty^{k,l}$$

dir. Böylece

$$R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; k) \cong S^{-1}H_G^*(X; k)$$

elde edilir. Benzer şekilde, X^S üzerindeki kısıtlanmış G etkisi düşünülerek

$$R^{-1}H_{G/N}^*(X^S/N; k) \cong S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

izomorfizmi elde edilir. Bundan dolayı Sonuç 4.13 den

$$R^{-1}H_{G/N}^*((X/N)^R; k) \cong S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Mehmet ONAT

izomorfizmi elde edilir.

Aşağıdaki değişmeli diagramdan dolayı

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

izomorfizmi elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; k) & \xrightarrow{\cong} & R^{-1}H_{G/N}^*((X/N)^R; k) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ S^{-1}H_G^*(X; k) & \longrightarrow & S^{-1}H_G^*(X^S; k) \end{array}$$

Aşağıdaki teorem lokalizasyon teoreminin sonlu boyutlu, kompakt grup etkileri için doğru olduğunu ifade eder.

Teorem 4.15 G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur.

İspat: G_0 , G nin birim elemanının bağlantılı bileşenini gösterebiliriz. Bu durumda G_0 , G nin kapalı, normal alt grubu ve G/G_0 tamamen bağlantısız, kompakt grup olur.

G_0 , E_G üzerine serbest olarak etki ettiği için biz $E_{G_0} = E_G$ ve B_{G_0} sınıf uzayını E_G/G_0 bölüm uzayı olarak alabiliriz (G sonlu boyutlu, kompakt grup olduğundan $G \rightarrow G/G_0$ bir esas G_0 -demet olup $E_G \rightarrow E_G/G_0$ evrensel esas G_0 -demet olur). O halde G/G_0 , X_{G_0} ve B_{G_0} üzerine doğal etki belirler. G/G_0 tamamen bağlantısız olduğu için Teorem 4.1 den dolayı

$$X_{G_0} \rightarrow X_G = (X_{G_0}) / (G/G_0)$$

ve

$$B_{G_0} \rightarrow B_G = (B_{G_0}) / (G/G_0)$$

orbit dönüşümleri

$$H^*(X_G; k) \rightarrow H^*(X_{G_0}; k)$$

ve

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_0}; k)$$

monomorfizmlerini belirler (X_{G_0} ve B_{G_0} yerine yeterince büyük bir N için $X_{G_0}^N$ ve $B_{G_0}^N$ kompakt uzaylarını düşünerek).

Durum 1: İlk olarak biz $X^S = \emptyset$ kabul edelim. Kabul edelim ki T, S nin $H^*(B_{G_0}; k)$ içindeki homomorfik görüntüsü olsun. O zaman sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı G_0 grubunun X üzerindeki kısıtlanmış etkisi düşünülerek ve aşağıdaki değişmeli diagramdan $X^T = \emptyset$ olduğu kolayca görülür.

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_G; k) & \longrightarrow & H^*(B_{G_x}; k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B_{G_0}; k) & \longrightarrow & H^*(B_{(G_0)_x}; k) \end{array}$$

Buradan Teorem 4.14 gerektirir ki bir $t \in T$ vardır öyle ki t nin

$$H^*(B_{G_0}; k) \rightarrow H^*(X_{G_0}; k)$$

dönüşümü altında görüntüsü sıfırdır.

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_0}; k)$$

monomorfizmi altında t nin öngörüntüsü $s \in S$ olsun. Şimdi

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X_{G_0} & \longrightarrow & B_{G_0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X_G & \longrightarrow & B_G \end{array}$$

demetimsilerin değişmeli diagramı tarafından belirlenen aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim.

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_G; k) & \longrightarrow & H^*(X_G; k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B_{G_0}; k) & \longrightarrow & H^*(X_{G_0}; k) \end{array}$$

Diğer taraftan

$$H^*(X_G; k) \rightarrow H^*(X_{G_0}; k)$$

monomorfizm olduğu için s nin

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(X_G; k)$$

dönüşümü altındaki görüntüsü sıfırdır. Bu ise $S^{-1}H_G^*(X; k) = \{0\}$ olmasını gerektirir.

Durum 2: Şimdi, kabul edelim ki $X^S \neq \emptyset$ ve B, X^S nin X içinde bir kapalı invaryant komşuluğu olsun. $B' = X - \text{int}(B)$ diyelim. O halde

$$\dots \rightarrow H_G^*(X; k) \rightarrow H_G^*(B; k) \oplus H_G^*(B'; k) \rightarrow H_G^*(B \cap B'; k) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisini düşünelim. Buradan lokalizasyonun tamlığından

$$\dots \rightarrow S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(B; k) \oplus S^{-1}H_G^*(B'; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(B \cap B'; k) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi elde edilir. $(B')^S = \emptyset$ ve $(B \cap B')^S = \emptyset$ olduğundan Durum 1 den dolayı $S^{-1}H_G^*(B'; k) = \{0\}$ ve $S^{-1}H_G^*(B \cap B'; k) = \{0\}$ olur. O zaman yukarıdaki uzun tam diziden

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(B; k)$$

dönüşümü bir izomorfizm olur. X^S nin tüm B invaryant kapalı komşulukları üzerinden direkt limit alınırsa Alexander-Spanier kohomolojinin süreklilik özelliğinden dolayı

$$H_G^*(X^S; k) = \varinjlim_{B \supset X^S} H_G^*(B; k)$$

elde edilir. Süreklilik ve lokalizasyonun direkt limit ile değişme özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} S^{-1}H_G^*(X^S; k) &= S^{-1}\left(\varinjlim_{B \supset X^S} H_G^*(B; k)\right) \\ &= \varinjlim_{B \supset X^S} S^{-1}H_G^*(B; k) \\ &= \varinjlim_{B \supset X^S} S^{-1}H_G^*(X; k) = S^{-1}H_G^*(X; k) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi A. Borel'in sabit noktanın varlığı kriterini pro-torus etkilerine genellemesini göstereceğiz.

Not 4.16 Eğer G bir kompakt, abelyen grup ve N , G nin herhangi kapalı, normal alt grubu ise o zaman dualite ile $i : N \rightarrow G$ içermesi $\hat{i} : \hat{G} \rightarrow \hat{N}$ bölüm dönüşümünü belirler. Bu dönüşümün çekirdeği

$$\ker \hat{i} = N^\perp \cong \widehat{G/N}$$

dır. Bundan dolayı

$$H^2(Bi; \mathbb{Z}) : H^2(B_G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B_N; \mathbb{Z})$$

dönüşümünün monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $N = G$ olmasıdır. Eğer G bağlantılı ise bu sonuç k katsayısı için de doğrudur, yani

$$H^2(Bi; k) : H^2(B_G; k) \rightarrow H^2(B_N; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $N = G$ olmasıdır.

Bunun için $H^2(B_G; k) \rightarrow H^2(B_N; k)$ monomorfizm iken $N = G$ olduğunu göstermek yeterlidir. $H^2(B_G; k) \rightarrow H^2(B_N; k)$ monomorfizm olsun. İçerme ve bölüm dönüşümü ile belirlenen karakter gruplarının

$$0 \rightarrow \widehat{G/N} \rightarrow \hat{G} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0$$

4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Mehmet ONAT

kısa tam dizisini düşünelim. O halde

$$0 \rightarrow \widehat{G/N} \otimes k \rightarrow \widehat{G} \otimes k \rightarrow \widehat{N} \otimes k \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi elde edilir. Ayrıca $H^2(B_G; k) = H^2(B_G; \mathbb{Z}) \otimes k = \widehat{G} \otimes k$ ve $H^2(B_N; k) = \widehat{N} \otimes k$ olup $H^2(B_G; k) \rightarrow H^2(B_N; k)$ monomorfizm olduğundan $\widehat{G/N} \otimes k = 0$ elde edilir. Diğer taraftan G bağlantılı olduğundan G/N bağlantılı olup $\widehat{G/N}$ torsiyonsuz olur (Lemma 2.25). O halde $\widehat{G/N}$ karakter grubu $\widehat{G/N} \otimes k$, k -vektör uzayının bir alt grubuna izomorfik olur. Böylece $\widehat{G/N} = 0$ olup dualite teoreminden $N = G$ elde edilir.

Bu gözlemi transformasyon grubuna uygulayalım. Yani G kompakt, bağlantılı, abelyen grubu X uzayı üzerine etki etsin ve $N = G_x$ olsun. O zaman x in bu etkinin sabit noktası olması için gerek yeter koşul

$$Bi^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olmasıdır. Burada Bi^* dönüşümü, $i : G_x \rightarrow G$ içermesi dönüşümü ile belirlenir.

Bunun başka bir kanıtını aşağıdaki şekilde yapabiliriz.

Önerme 4.17 G bir pro-torus ve X bir G -uzay olsun. O zaman

$$x \in X^G \Leftrightarrow Bi^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k) \text{ dönüşümü monomorfizmdir.}$$

İspat: $\Rightarrow x \in X^G$ ise Bi^* dönüşümü monomorfizm olur.

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki $Bi^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$ monomorfizm olsun. G/N torus olacak şekilde G nin bir tamamen bağlantısız, kapalı N alt grubu vardır. Aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim.

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{G/N}; k) & \xrightarrow{Bj^*} & H^*(B_{(G/N)_{N(x)}}; k) \\ Bq^* \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B_G; k) & \xrightarrow{Bi^*} & H^*(B_{G_x}; k) \end{array}$$

Bq^* bir izomorfizm olduğundan (Lemma 4.10)

$$Bj^* : H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_{(G/N)_{N(x)}}; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olduğu elde edilir.

Ayrıca toruslar için iyi bilinir ki

$$H^*(B_{G/N}; k) \rightarrow H^*(B_{(G/N)_{N(x)}}; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $N(x)$ in G/N nin X/N üzerine etkisinin sabit noktası olmasıdır, yani $N(x) \in (X/N)^{G/N}$ dir (Hsiang, 1975, s. 45).

Diğer taraftan $\pi : X \rightarrow X/N$ orbit dönüşümü $X^G \approx (X/N)^{G/N}$ homeomorfizmini belirler (Lemma 3.1). Bu ise $x \in X^G$ olmasını gerektirir.

Böylece eğer bir kompakt, bağlantılı, abelyen G grubu X uzayı üzerine etki ederse o zaman $S = H^*(B_G; k) - \{0\} \subset H^*(B_G; k)$ çarpımsal sistemi için $X^S = X^G$ olur.

Bundan dolayı biz A. Borel'in sabit nokta teoremini pro-torus etkileri için genişletmiş olacağız.

Sonuç 4.18 G bir pro-torus ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^G; k) = H^*(X^G; k) \otimes_k (S^{-1}H^*(B_G; k))$$

homomorfizmi bir izomorfizm olur. Burada $S = H^*(B_G; k) - \{0\}$ dır.

Sonuç 4.19 G bir pro-torus ve X bir kompakt G -uzay olsun. O zaman $X^G \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$$

dönüşümünün monomorfizm olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $X^G \neq \emptyset$ ve $x \in X^G$ olsun. Böylece $B_G \rightarrow \{x\}_G \subseteq X_G$ dönüşümü $X_G \rightarrow B_G$ lif demetinin bir çapraz kesitidir, yani $B_G \rightarrow \{x\}_G \subseteq X_G \rightarrow B_G$ bileşkesi özdeşlik dönüşümüdür. Bu dönüşüme kohomoloji fonktoru uygulanırsa $H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümü monomorfizm olmak zorundadır.

Eğer $H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ monomorfizm ise o zaman $1 \in H_G^*(X; k)$ torsiyonsuzdur ve bundan dolayı $S^{-1}H_G^*(X; k) \neq \{0\}$ olur. Buradan Sonuç 4.18 den dolayı $S^{-1}H_G^*(X^G; k) \cong S^{-1}H_G^*(X; k) \neq \{0\}$ elde edilir. Açıktır ki bu $X^G \neq \emptyset$ olmasını gerektirir.

Şimdi Teorem 4.14 ün X , sonlu çoklukta orbit tipine sahip iken kanıtı farklı bir metod ile aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Teoremi kanıtlamadan önce aşağıdaki lemmaları verelim. Bu lemmaların kanıtı Deo ve ark. (1982) de bulunabilir.

Lemma 4.20 Bir finitistic uzayın Čech kohomoloji cebirinde pozitif dereceli her eleman nilpotenttir.

X herhangi bir uzay, Y bir finitistic uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir sürekli dönüşüm olsun. f nin $H^{p+q}(X)$ e yakınsayan bir Leray spektral dizisi vardır öyle ki

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; \mathcal{H}^q(f))$$

dir. Burada $\mathcal{H}^q(f)$, f dönüşümünün Leray sheaf'idir. Kabul edelim ki $F, H^*(X)$ üzerinde bir azalan filtrasyon olsun öyle ki $F^p/F^{p+1} \cong E_\infty^{p,q}$ ve kabul edelim ki $s \in F^1(H^*(X)) \subset H^*(X)$ olsun. O zaman aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma 4.21 $0 = s^{n_0} \in H^*(X; k)$ olacak şekilde bir pozitif n_0 tamsayısı vardır.

Şimdi lokalizasyon teoremini kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.22 G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. $S \subseteq$

4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Mehmet ONAT

$H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem ve $s \in S$ ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^s; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir.

Ayrıca X uzayı sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir.

İspat: Durum 1: İlk olarak $X^s = \emptyset$ olsun. O halde $s \in S$ elemanı

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

(her $x \in X$ için) dönüşümü altında sıfır olur. $\pi_1 : X_G \rightarrow X/G$ dönüşümünün Leray spektral dizisini düşünelim. Bu spektral dizinin ikinci terimi

$$E_2^{p,q} = H^p(X/G; \mathcal{H}^q(\pi_1))$$

ve $E_\infty^{p,q} = F^q/F^{p+1}$ olan $H_G^*(X; k)$ cebirinin bir azalan filtrasyonu vardır ve $a \in F^p$, $b \in F^q$ ise $a.b \in F^{p+q}$ dur. Ayrıca H_G^* in süreklilik özelliğinden bir $x \in X$ için $x^* = \pi(x)$ ($\pi : X \rightarrow X/G$) noktasında $\mathcal{H}^*(\pi_1)$ Leray sheaf'inin stalk'ları $H^*(\pi_1^{-1}(x^*); k) = H^*(B_{G_x}; k)$ ya izomorfik olur. Çünkü burada G sonlu boyutlu, kompakt grup ve G_x kapalı alt grup olduğundan $G \rightarrow G/G_x$ bir esas G_x -demet olup $\pi_1^{-1}(x^*) = E_G/G_x$, B_{G_x} sınıf uzayı olarak alınabilir.

$s \in S$ elemanı $H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$ (her $x \in X$ için) dönüşümü altında sıfıra gittiğinden $\mathcal{H}^*(\pi_1)$ Leray sheaf'inin her stalk'unda da sıfıra gider. Böylece s elemanı $E_2^{0,*} = H^0(X/G; \mathcal{H}^*(\pi_1))$ de sıfır olur ve sonuç olarak $E_\infty^{0,*}$ da sıfır olur. Aşağıdaki tam diziden dolayı $\pi_2^*(s) \in F^1 H_G^*(X; k)$ elde edilir. Burada $\pi_2^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(X_G; k)$ dönüşümü, $\pi_2 : X_G \rightarrow B_G$ Borel demetimsisi ile belirlenen dönüşümdür.

$$0 \rightarrow F^1(H_G^*(X; k)) \rightarrow F^0(H_G^*(X; R)) = H_G^*(X; R) \rightarrow E_\infty^{0,*} \rightarrow 0$$

4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Mehmet ONAT

X/G orbit uzayı bir kompakt uzay olduğundan Lemma 4.21 den bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $0 = (\pi_2^*(s))^{n_0} = (\pi_2^*(s^{n_0})) \in H_G^*(X; k)$ elde edilir. Bu ise $s^{n_0} \in S$ olduğundan $S^{-1}H_G^*(X; k) = \{0\}$ olmasını gerektirir. Çünkü $s^{n_0} \in S$ elemanı $\pi_2^* : H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümü altında sıfıra gider.

Durum 2: $X^S \neq \emptyset$ olsun. Bu durum Teorem 4.15 deki Durum 2 ile aynıdır.

Şimdi ise sonlu çoklukta orbit tipi varsayımı ile lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $G_1, G_2, \dots, G_n, X - X^S$ kümesindeki orbit tipleri olsun. Ayrıca $s_i \in S, H^*(B_{G_{s_i}}; k)$ da sıfıra dönüşsün. O halde açıktır ki $s = s_1.s_2 \dots s_n$ için $X^S = X^s$ olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

4. SONLU BOYUTLU KOMPAKT GRUP ETKİLERİ İÇİN LOKALİZASYON TEOREMİ

Mehmet ONAT



5. SABİT NOKTA KÜMESİNİN KOHOMOLOJİK YAPISI

Lokalizasyon teoreminin bir başka önemli sonucu aşağıdaki teoremdir.

$X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ Borel demetimsisini düşünelim. Eğer

$$i^* : H_G^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$$

dönüşümü örten ise o zaman $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de sıfıra tamamen non homologdur (totally non-homologous to zero) denir ve kısaca TNHZ ile gösterilir.

Kompakt uzaylar üzerine torus etkileri için aşağıdaki teorem Bredon (1968); Dieck (1987, Chapter III, Proposition 1.18) de kanıtlandı.

Teorem 5.1 G bir torus, X bir kompakt G -uzay ve $\dim_k H^*(X; k) < \infty$ olsun. O zaman

$$\dim_k H^*(X^G; k) \leq \dim_k H^*(X; k)$$

dır. Ayrıca $\dim_k H^*(X^G; k) = \dim_k H^*(X; k)$ olması için gerek ve yeter koşul $i^* : H_G^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$ örten olmasıdır. Yani $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olmasıdır. Burada $\dim_k, k$ üzerindeki vektör uzayı boyutunu gösterir.

Şimdi biz bu teoremi kompakt uzaylar üzerine etki eden pro-torus etkileri için kanıtlayacağız.

Teorem 5.2 G bir pro-torus, X bir kompakt G -uzay ve $\dim_k H^*(X; k) < \infty$ olsun. O zaman

$$\dim_k H^*(X^G; k) \leq \dim_k H^*(X; k)$$

dır. Ayrıca $\dim_k H^*(X^G; k) = \dim_k H^*(X; k)$ olması için gerek ve yeter koşul $i^* : H_G^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$ örten olmasıdır. Yani $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olmasıdır.

İspat: G/N bir torus olacak şekilde G nin bir tamamen bağlantısız N alt grubu vardır. G/N bölüm grubunun X/N orbit uzayı üzerine etkisini düşünelim. Lemma 3.1 ve Not

4.3 den biliyoruz ki $(X/N)^{G/N} \approx X^G$ ve $H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)$ dır. O halde

$$\dim_k H^*((X/N)^{G/N}; k) = \dim_k H^*(X^G; k)$$

ve

$$\dim_k H^*(X/N; k) = \dim_k H^*(X; k)$$

olacağından yukarıdaki teoremden $\dim_k H^*(X^G; k) \leq \dim_k H^*(X; k)$ elde edilir. Şimdi teoremin ikinci kısmını kanıtlayalım. İlk olarak kabul edelim ki $\dim_k H^*(X^G; k) = \dim_k H^*(X; k)$ olsun. O halde yukarıdakine benzer şekilde $\dim_k H^*((X/N)^{G/N}; k) = \dim_k H^*(X/N; k)$ eşitliğini elde ederiz. Teorem 5.1 den $X/N, X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ de TNHZ olur.

Şimdi

$$X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$$

ve

$$X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$$

demetimsilerinin aşağıdaki değişmeli diagramını düşünelim.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X_G & \longrightarrow & B_G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X/N & \longrightarrow & (X/N)_{G/N} & \longrightarrow & B_{G/N} \end{array}$$

$H^*(X/N; k) \rightarrow H^*(X; k)$ dönüşümü izomorfizm ve $H_{G/N}^*(X/N; k) \rightarrow H^*(X/N; k)$

dönüşümü örten (çünkü X/N , TNHZ) olduğundan aşağıdaki diagramdan

$$H_G^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$$

dönüşümünün örten olduğunu elde ederiz, yani $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olur.

$$\begin{array}{ccc} H_{G/N}^*(X/N; k) & \longrightarrow & H^*(X/N; k) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_G^*(X; k) & \longrightarrow & H^*(X; k) \end{array}$$

Şimdi kabul edelim ki $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olsun. X/N nin de $X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ de TNHZ olduğunu göstereceğiz. Yine demetimsilerin yukarıdaki değişmeli diagramını düşünelim.

$(E^{*,*})$ ve $(\bar{E}^{*,*})$ sırasıyla

$$X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$$

ve

$$X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$$

demetimsilerinin Leray-Serre spektral dizileri olsun. O halde G/N bağlantılı Lie grup olup $B_{G/N}$ basit bağlantılı olacağından $X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ demetimsisinin lokal katsayılar sistemi basittir. Yani

$$\bar{E}_2^{p,q} = H^p(B_{G/N}; \mathcal{H}^q(X/N; k)) = H^p(B_{G/N}; H^q(X/N; k))$$

olur. Diğer taraftan k bir cisim olduğundan evrensel katsayı teoreminden

$$\bar{E}_2^{p,q} = H^p(B_{G/N}; H^q(X/N; k)) = H^p(B_{G/N}; k) \otimes H^q(X/N; k)$$

olur. Ayrıca $X, X \xrightarrow{i} X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olduğundan $X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$ demetimsisinin de lokal katsayılar sistemi basit olup (Mamoru ve Toda, 1978, Chapter III, Theorem 4.4)

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G; H^q(X; k)) = H^p(B_G; k) \otimes H^q(X; k)$$

elde edilir. O halde

$$H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)$$

ve

$$H^*(B_{G/N}; k) \cong H^*(B_G; k)$$

olduğundan

$$\bar{E}_2^{p,q} = H^p(B_{G/N}; k) \otimes H^q(X/N; k) \cong H^p(B_G; k) \otimes H^q(X; k) = E_2^{p,q}$$

elde edilir. Özel olarak her $p, q \geq 0$ için $\bar{E}_2^{p,0} \rightarrow E_2^{p,0}$ ve $\bar{E}_2^{0,q} \rightarrow E_2^{0,q}$ izomorfizm olduğundan Zeeman karşılaştırma teoreminden (Teorem 2.58) her $p, q \geq 0$ için $\bar{E}_\infty^{p,q} \rightarrow E_\infty^{p,q}$ izomorfizm olur. Ayrıca her $n \geq 0$ için

$$H_{G/N}^n(X/N; k) \cong \bigoplus_{k+l=n} \bar{E}_\infty^{k,l}$$

ve

$$H_G^n(X; k) \cong \bigoplus_{k+l=n} E_\infty^{k,l}$$

olduğundan

$$H_{G/N}^*(X/N; k) \xrightarrow{\cong} H_G^*(X; k)$$

izomorfizmi elde edilir. O halde

$$\begin{array}{ccc} H_{G/N}^*(X/N; k) & \longrightarrow & H^*(X/N; k) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_G^*(X; k) & \longrightarrow & H^*(X; k) \end{array}$$

değişmeli diagramdan

$$H_{G/N}^*(X/N; k) \rightarrow H^*(X/N; k)$$

dönüşümü örten olur. Yani $X/N, X/N \rightarrow (X/N)_{G/N} \rightarrow B_{G/N}$ de TNHZ olur. Teorem 5.1 den

$$\dim_k H^*((X/N)^{G/N}; k) = \dim_k H^*(X/N; k)$$

elde edilir. Ayrıca $H^*(X/N; k) \cong H^*(X; k)$ ve $(X/N)^{G/N} \approx X^G$ olduğundan

$$\dim_k H^*((X/N)^{G/N}; k) = \dim_k H^*(X^G; k)$$

ve

$$\dim_k H^*(X/N; k) = \dim_k H^*(X; k)$$

olup

$$\dim_k H^*(X^G; k) = \dim_k H^*(X; k)$$

elde edilir.

Bu teoremin bir basit sonucu aşağıdakidir.

Sonuç 5.3 G bir pro-torus ve X bir kompakt G -uzay olsun. Eğer $X, X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ ve $0 < \dim_k H^*(X; k) < \infty$ ise $X^G \neq \emptyset$ olur.

İspat: $\dim_k H^*(X; k) < \infty$ ve $X, X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$ de TNHZ olduğundan

$$0 < \dim_k H^*(X^G; k) = \dim_k H^*(X; k)$$

elde edilir. Bu ise $X^G \neq \emptyset$ olmasını gerektirir.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde temel olarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 6.1 G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir kompakt G -uzay olsun. $S \subseteq H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizmdir.

Lokalizasyonla ilgili aşağıdaki sorulara henüz cevap bulunamamıştır.

Soru: G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir parakompakt G -uzay olsun. O zaman X/G orbit uzayının kohomolojik boyutu (k üzerinde) X in kohomolojik boyutundan küçük ya da eşit midir?

Bu sorunun cevabı G bir kompakt Lie grup iken Quillen (1971) tarafından verildi.

Eğer bu sorunun cevabı evet ise sonlu kohomolojik boyutlu parakompakt uzaylar için aşağıdaki lokalizasyon teoremi kanıtlanmış olur.

Soru: G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt G -uzay olsun. $S \subseteq H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem ve $s \in S$ ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm midir?

Ayrıca X uzayı sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm midir?

İspat: Durum 1: $X^s = \emptyset$ olsun. O halde $s \in S$ elemanı

$$H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$$

(her $x \in X$ için) dönüşümü altında sıfır olur. $\pi_1 : X_G \rightarrow X/G$ dönüşümünün Leray spektral dizisini düşünelim. Bu spektral dizinin ikinci terimi

$$E_2^{p,q} = H^p(X/G; \mathcal{H}^q(\pi_1))$$

ve $H_G^*(X; k)$ nın aşağıdaki özellikleri sağlayan bir azalan filtrasyonu vardır.

- i) $a \in F^p, b \in F^q$ ise $a.b \in F^{p+q}$ dur.
- ii) $E_\infty^{p,*} = F^q H_G^*(X; k) / F^{p+1} H_G^*(X; k)$ dır.

Yukarıdaki sorudan $\dim_k X/G \leq \dim_k X < \infty$ olduğundan $\pi_1 : X_G \rightarrow X/G$ dönüşümünün Leray spektral dizisini ikinci terimi sağdan sınırlı olur, yani yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $p > N$ için $E_2^{p,q} = 0$ ve buradan her $p > N$ için $E_\infty^{p,q} = 0$ olur. Dolayısıyla $F^{N+1} H_G^*(X; k) = \{0\}$ olur.

Ayrıca G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve G_x kapalı alt grup olduğundan $G \rightarrow G/G_x$ bir esas G_x -demet olup $\pi_1^{-1}(x^*) = E_G/G_x, B_{G_x}$ sınıf uzayı olarak alınabilir. H_G^* in süreklilik özelliğinden (Quillen, 1971) bir $x \in X, x^* = \pi(x)$ ($\pi : X \rightarrow X/G$) noktasında $\mathcal{H}^q(\pi_1)$ Leray sheaf'inin stalk'ları $H^q(\pi_1^{-1}(x^*); k) = H^q(B_{G_x}; k)$ modülüne izomorfik olur.

$s \in S$ elemanı $H^*(B_G; k) \rightarrow H^*(B_{G_x}; k)$ (her $x \in X$ için) dönüşümü altında sıfıra gittiğinden $\mathcal{H}^*(\pi_1)$ Leray sheaf'inin her stalk'unda da sıfıra gider. Böylece s elemanı $E_2^{0,*} = H^0(X/G; \mathcal{H}^*(\pi_1))$ de sıfır olur ve sonuç olarak $E_\infty^{0,*}$ da sıfır olur. Aşağıdaki kısa tam diziden dolayı $\pi_2(s) \in F^1 H_G^*(X; k)$ elde edilir. Burada $\pi_2 : H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümüdür.

$$0 \rightarrow F^1(H_G^*(X; k)) \rightarrow F^0(H_G^*(X; R)) = H_G^*(X; R) \rightarrow E_\infty^{0,*} \rightarrow 0$$

Dolayısıyla

$$(\pi_2(s))^{N+1} = (\pi_2(s^{N+1})) \in F^{N+1}H_G^*(X; k) = \{0\}$$

elde edilir. Bu ise $s^{N+1} \in S$ olduğundan $S^{-1}H_G^*(X; k) = \{0\}$ olmasını gerektirir. Çünkü $s^{N+1} \in S$ elemanı $\pi_2 : H^*(B_G; k) \rightarrow H_G^*(X; k)$ dönüşümü altında sıfıra gider.

Durum 2: Kabul edelim ki $X^S \neq \emptyset$ olsun. Bu durum Teorem 4.15 in kanıtındaki Durum 2 ile aynıdır.

X sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise bir $s \in S$ için $X^S = X^s$ dir (Teorem 4.22).

Lokalizasyon ile ilgili bir başka cevaplanması gereken soru aşağıdakidir.

Soru 2: G bir sonlu boyutlu, kompakt grup ve X bir finitistic G -uzay olsun. $S \subseteq H^*(B_G; k)$ bir çarpımsal sistem ve $s \in S$ ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^s; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm midir?

Ayrıca X uzayı sonlu çoklukta orbit tipine sahip ise lokal kısıtlanmış

$$S^{-1}H_G^*(X; k) \rightarrow S^{-1}H_G^*(X^S; k)$$

homomorfizmi bir izomorfizm midir?



KAYNAKLAR

- Adams, S., 2001. Dynamics on Lorentz manifolds, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.
- Allday, C., Puppe, V., 1993. Cohomological Methods in Transformation Groups. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Arkowitz, M., 2011. Introduction to homotopy theory. Universitext. Springer, New York.
- Atiyah, M. F., Segal, G. B., 1965. Equivariant cohomology and localization. Lecture notes, Warwick.
- Borel, A., 1960. Seminar on Transformation Groups. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.
- Bourbaki, N., 1966. General Topology. Vol 1. Addison-Wesley, New York.
- Bredon, G. E., 1968. Cohomological aspects of transformation groups. Proceeding of the conference on transformation groups. New Orleans, 1967, edited by Mostert P.S., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 245-280.
- _____, 1972. Introduction to Compact Transformation Groups. Academic Press, New York.
- _____, 1997. Sheaf Theory. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 170. New York, NY, USA: Springer.
- Bruner, R. R., Catanzaro, M., May, J. P., 1974. Characteristic classes. <https://www.math.uchicago.edu/may/~CHAR/charclasses.pdf>
- Conner, P. E., 1960. Retraction properties of the orbit space of a compact topological transformation group, Duke Math. J. (27) 341-357.
- Davis, J. F., Kirk, P., 2001. Lecture Notes in Algebraic Topology, Graduate Studies in Mathematics, vol. 35, American Mathematical Society.
- Deo, S., 1983. On some local and global cohomological properties which pass on to the orbit space. Indian Jour. Pure Appl Math. (14) 1319-1326.

- Deo, S., Singh, T. B., Shukla, R. A., 1982. On an extension of localization theorem and generalized Conner conjecture. *Trans Amer Math Soc* (269) 395-402.
- Dieck, T. T., 1987. *Transformation Groups*. de Gruyter Studies in Math. 8, Walter de Gruyter, Berlin.
- _____, 2008. *Algebraic Topology*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich.
- Dowker, C. H., 1952. Homology groups of relations. *Ann. of Math.* (56); 84-95.
- Engelking, R. D., 1978. *Dimension Theory*. North Holland, Amsterdam.
- Franklin, L. M., 1971. On the Nonexistence of Slices for p-Adic Transformation Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* (27) 183-185.
- Godement, R., *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. 1958.
- Grothendieck, A., 1957. Sur quelques points d'algebre homologique. *Tôhoku Math. J.* (9) 119-221.
- Hofmann, K. H., Morris, S. A., 2003. Projective limits of finite dimensional Lie groups. *Proc London Math Soc* (87:3) 647-676.
- _____, 2007. *The Lie theory of connected Pro-Lie groups*. European Mathematical Society Publishing House, Zürich.
- _____, 2013. *The Structure of Compact Groups*. 3rd ed. Berlin, Germany: de Gruyter.
- Hofmann, K. H., Mostert, P. S., 1968. The cohomology of compact abelian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* (74:5) 975-978.
- _____, 1973. *Cohomology Theories for Compact Abelian Groups*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Hsiang, W. Y., 1975. *Cohomology Theory of Transformation Groups*. Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Ku, M. C., 1967. Some topics in compact transformation groups. PhD, Tulane University.

- Mamoru, M., Toda, H., 1978. *Topology of Lie Groups, I and II*. American Mathematical Society, Tokyo, 91.
- McCleary, J., 2001. *A User's Guide to Spectral Sequences*. 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 58, Cambridge.
- Milnor, J., 1956. Construction of universal bundles II. *Ann Math* (63) 430-436.
- Nagami, K. R., 1963. Cross sections in locally compact groups. *J. Math. Soc. Japan* (15) 301-303.
- _____, 1970. *Dimension Theory*. Academic Press. New York.
- Oliver, R., 1976. A proof of the Conner conjecture. *Ann Math.* (103) 637-644.
- Pontryagin, L. S., 1986. *Topological Groups*. 3rd ed. Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- Quillen, D., 1971. The Spectrum of an equivariant cohomology ring I. *Ann Math* (94) 549-572.
- Skjelbred, T., 1978. Cohomology eigenvalues of equivariant mappings. *Comment. Math. Helv.* (53) 634-642.
- Spanier, E. H., 1966. *Algebraic Topology*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Stroppel, M., 2006. *Locally compact groups*. European Mathematical Society (EMS), Zürich.
- Swan, R. G., 1960. A new method in fixed point theory. *Comm. Math. Helv.* (34) 1-16.
- Yamabe, H., 1953. A generalization of a theorem of Gleason. *Ann Math* (58) 351-365.
- Zeeman, E. C., 1957. A proof of the comparison theorem for spectral sequence. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (53) 57-62.



ÖZGEÇMİŞ

1986 tarihinde Osmaniye'nin Düziçi ilçesinde doğdu. 2003 yılında Osmaniye Dervişpaşa Lisesi'nden mezun oldu. 2007 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek lisansını kazandı. YADİM'de 1 yıl İngilizce hazırlık eğitimi aldıktan sonra 2009 yılında Matematik Bölümünde Yüksek lisansa başladı. 2012 yılında Yüksek lisansı ve 2018 yılında doktorayı bitirdi. 2010-2018 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevliliği yaptı.