



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KOMPLEKS DÜZLEMDE KAPALI VE
BAĞLANTILI KÜMELERDE BAZI SÜREKLİ
FONKSİYON SINIFLARININ YAPISAL
KARAKTERİZASYONU**

Öznur DOĞU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2020
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KOMPLEKS DÜZLEMDE KAPALI VE
BAĞLANTILI KÜMELERDE BAZI SÜREKLİ
FONKSİYON SINIFLARININ YAPISAL
KARAKTERİZASYONU**

Öznur DOĞU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalını

Danışman
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Eylül-2020
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza



Öznur DOĞU

Tarih: 03.07.2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS DÜZLEMDE KAPALI ve BAĞLANTILI KÜMELERDE BAZI SÜREKLİ FONKSİYON SINIFLARININ YAPISAL KARAKTERİZASYONU

Öznur DOĞU

**Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Bu tez çalışmasında, kuasikonform (yarikonform) yaylarında değerlendirmenin noktaya bağlılık cinsinden fonksiyonlar sınıflarının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir. Daha genel kontinyümlerde ise düzgünlük cinsinden (değerlendirmenin noktadan bağımsızlık cinsinden) fonksiyonlar sınıflarının yapısal karakterizasyonu incelenmiştir. Her iki sonuçların elde etmek için fonksiyonların polinomlardan sapma değerlendirilmesinin yanı sıra polinomların türevinin büyümesi ile ilgili ilave bilgi verilmiştir.

Ayrıca, bu tez çalışmasında kompleks düzlemde bulunan yayın uç noktalarına bağlı olarak fonksiyonlar sınıfı tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar sınıfında fonksiyonların polinomlarla yaklaşımı incelenmiştir. Özel olarak kompleks düzlemde belli özelliklere sahip yaylarda fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir.

2020, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuasikonform yay, En iyi yaklaşım, Süreklilik modülü, Yaklaşım karakterizasyonu,

ABSTRACT

MS THESIS

CONSTRUCTIVE CHARACTERIZATION SOME CLASSES OF CONTINUOUS FUNCTIONS IN CLOSED AND CONNECTED SETS IN THE COMPLEX PLANE

Öznur DOĞU

**Mus Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

In this thesis; on quasi-conform arcs in terms of estimates depending on the point constructive characteristic of classes of the functions has been obtained. On more general continua in terms of uniform estimates (in terms of estimates independent of the point) constructive characterization of classes of functions has been investigated. To obtain these results in addition to estimating the deviation of functions from polynomials, additional information has been given on the growth of the derivative of polynomials.

In addition, in this thesis, depending on the end points of the arc in the complex plane, the class of functions has been defined. In this class of the functions the approximation of the functions by polynomials has been investigated. After, on arcs with certain properties of the complex plane constructive characterization of classes of functions has been obtained.

2020, 61 Pages

Keywords: Quasarc, Best approximation, Modulus of continuity, Approximation characterization

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan aileme ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışması süresince, her anlamda benden desteklerini hiçbir şekilde eksik etmeyen, zahmetten kaçınmayan ve akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, rehberliği ile bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sadulla JAFAROV'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Öznur DOĞU
MUŞ-2020



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	7
3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	7
3.2. Bazı fonksiyon ve kontinyum sınıfları.....	18
3.3. Cauchy çekirdeğinin polinom fonksiyonlarla yaklaşımı	21
3.4. Kompleks düzlemde bazı genel kontinyumların özellikleri.....	27
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA.....	35
4.1. Kuasikonform yay üzerinde sürekli olan fonksiyonlar sınıfının yaklaşım karakterizasyonu	35
4.2. Kompleks düzlemde bazı genel kontinyumlarda düzgün değerlendirme cinsinden H^λ sınıfının yaklaşım karakterizasyonu	42
4.3. $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfında polinomlarla yaklaşım	45
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
5.1 Sonuçlar	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ.....	62

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$mes\Gamma$	: Γ eğrisinin Lebesgue ölçüsü
$int\Gamma$	: Γ eğrisinin içi
$ext\Gamma$	: Γ eğrisinin dışı
$\overline{CD}$	: D 'nin tümleyeni
$\bar{z}$	: z kompleks sayısının eşleniği
∂D	: D bölgesinin sınırı
$f \preceq g$	: $f \leq cg$, c sabiti f ve g 'ye bağlı değil
$f \asymp g$	: $f \preceq g$ ve $g \preceq f$
$C(\Gamma)$	: Γ eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$C(D)$	: D bölgesinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$A(D)$	: D bölgesinde analitik fonksiyonlar sınıfı
$\lambda(u) = \lambda(g; u)$	: g fonksiyonunun birinci mertebeden süreklilik modülü
$H^\beta(D)$	: D kümesinde β . mertebeden Hölder (Lipshitz) sınıfı
$E_n(g)$	: g fonksiyonunun en iyi yaklaşımı

1. GİRİŞ

Temel olarak matematiğin tüm dallarında daha çok bileşik nesnelerin daha az bileşik nesnelerle yaklaşımı ile ilgili problemler önemli rol oynamaktadır. Bu durumların birçok kısmında fonksiyonların yaklaşım teorisinin veya yaklaşım teorisinin problemleri, sonuçları ve metotları ile ilgili bilgiler çok faydalıdır.

İlk önce yaklaşım teorisinde başlıca olarak fonksiyonların veya fonksiyon sınıflarının belli bir alt uzayında olan fonksiyonlarla yaklaşımı incelenir. Dikkat edelim ki alt uzayda bulunan fonksiyonlar bu veya diğer anlamda yaklaşıtırlan fonksiyonlar daha basit fonksiyonlardır. Genellikle, sözünü ettiğimiz alt uzay cebirsel polinomlar veya (periyodik hal için) trigonometrik polinomlar kümesinden oluşmaktadır

Özel olarak bahsedilen sonuçların alınması ile yakınlaşan fonksiyonların yapısal özelliklerine bağımlı olarak yakınlaşan polinomların (rasyonel fonksiyonların) yakınsaklık hızının değeri hakkında problemler ortaya koyulmuş ve çözülmüştür. (En iyi yaklaşımın düz teoremi). Ayrıca yakınlaşan polinomların yakınsaklık hızından bağımlı olarak fonksiyonların düzgünlük derecesinin tespit edildiği problemler ortaya koyulmuş ve çözülmüştür. (En iyi yaklaşımın ters teoremi)

Bu düz ve ters teoremlerin elde edilmesi matematiksel kaynaklarda fonksiyonların yapısal teorisi olarak adlandırılır. Kompleks düzlemde fonksiyonların yapısal teorisinin birçok özelliği bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde fonksiyonların yaklaşım teorisini ve tezde incelenen problemle ilgili kaynak araştırması yapılmaktadır. Bu tez çalışmasının Materyal ve Yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümü üç alt bölümlerden oluşmaktadır. Bu bölümde Kompleks analiz ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verilir, tezde kullanılan bazı fonksiyon ve kontinyum (kapalı ve bağlantılı kümeler)

sınıfları tanımlanır. Ayrıca, ilave olarak, $\frac{1}{\xi - z}$ Cauchy çekirdeğinin polinom

fonskiyonları ile yaklaşımı incelenir. Tezin esas sonuçları ve bu sonuçların ispatı tezin dördüncü bölümünde verilmektedir. Bu bölümde ilk önce kuasikonform (yarikonform) yaylarda polinomlar yardımıyla $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ ($d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$, $z \in \Gamma$ noktasından Γ yayının seviye

eğrisinin dallarına kadar uzaklıkların maksimumudur) büyüklük cinsinden (değerlendirme noktaya bağlıdır) $\lambda(u)$ süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilir. Daha genel kontinyumlarda

ise sözü edilen $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ büyüklük cinsinden H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal

karakterizasyonunu elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle tezin dördüncü bölümünde R sınıfına ait daha genel kontinyumlarda $\mu_n = \sup_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} d(\xi, D)$ cinsinden

(düzgünlük cinsinden, yani değerlendirme noktadan bağımsızdır) H^λ fonksiyonlar sınıfında yaklaşım teorisinin düz teoremi ispatlanır ve daha sonra H sınıfına ait kontinyumlarda H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilir.

Yukarıda ifade edilen $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ ve $\mu_n = \sup_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} d(\xi, D)$ cinslerinden H^λ fonksiyonlar

sınıfının yapısal karakterizasyonunu elde etmek için fonksiyonların polinomlardan sapma değerlendirilmesinin yanı sıra polinomların türevinin büyümesi ile ilgili ilave bilgi verilmektedir.

İlave olarak tezin dördüncü bölümünde kompleks düzlemde kuasidüzgün (yarıdüzgün) yaylarda, yayın uç noktalarına bağlı olarak tanımlanmış fonksiyonlar sınıfının polinomlarla yaklaşımı incelenir. Ayrıca, belli özelliklere sahip yaylar sınıfında tanımlanmış fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaklaşım teorisi ile ilgili ilk sonuç Chebyshev (1854) tarafından elde edilmiştir. P. L. Chebyshev tarafından $[a, b]$ aralığında sürekli olan g fonksiyonuna en iyi yaklaşım veren derecesi n yi aşmayan $P_n^*(x)$ polinomunun varlığı ile ilgili gerek ve yeter şartı ifade eden teorem ispat edilmiştir.

Şimdi şöyle bir soru ortaya çıkıyor, acaba öyle bir polinom var mıdır ki, $g \in C_{[a,b]}$ fonksiyonuna yeteri kadar iyi yaklaştırmak mümkün olsun, yani, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $P_n(x)$ polinomu varmıdır ki, $\forall x \in [a, b]$ için

$$\max_{x \in [a,b]} |g(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

şartı sağlansın. Bu soruya 1885 yılında Weierstrass olumlu cevap vermiştir. (*Karly Weierstrass(1815-1897) alman matematikçisidir). Weierstrass (1885) göstermiştir ki, $g \in C_{[a,b]}$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için öyle $P_n(x)$ polinomu vardır ki,

$$\max_{x \in [a,b]} |g(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

şartı sağlanır. Chebyshev ve Weierstrass teoremleri fonksiyonların yapısal teorisinin meydana gelmesinde ve gelişiminde önemli rol oynamıştır. Weierstrass (1885) teoremine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\{P_n\}} \max_{x \in [a,b]} |g(x) - P_n(x)| = 0$$

olur.

Şöyle soru ortaya çıkıyor:

Hangi ölçüde g fonksiyonunun hangi özelliği $\{E_n(g)\}$ dizisinin daha hızlı sıfıra gitmesini sağlar:

Fonksiyonun düzgünlük derecesi (eğer g_1 ve g_2 fonksiyonları verilirse, g_1 fonksiyonu g_2 fonksiyonu ile muakayisede daha yüksek mertebeden türeve sahip ise, bu durumda, g_1 fonksiyonu g_2 ye göre daha düzgündür denir) ne kadar yüksek olursa, $E_n(g)$ o kadar hızlı sıfıra yakınıyor. Eğer g_1 ve g_2 fonksiyonları verilirse ve bunlar aynı mertebeden türevlere sahip ise veya bunların türevleri yok ise, bu fonksiyonların düzgünlük derecesini belirtmek için süreklilik modülü denilen kavram

dahil edilir. İki fonksiyondan biri diğerine göre o zaman daha düzgün fonksiyon olur ki, bu fonksiyonun süreklilik modülü diğerine göre daha hızlı sıfıra yakınsıyor.

Jackson (1911,1912) tarafından süreklilik modülü kavramı kullanılarak yaklaşım teorisinin düz teoremi elde edilmiştir. Jackson 1911 yılında verdiği teorem ile Weierstrass teoremini daha da güçlendirmiştir. Daha sonralar fonksiyonların polinomlarla yaklaşımının hızı ile ilgili düz ve ters problemler Bernstein, (1912), Jackson (1924), Timan (1950), Stechkin (1951), Timan (1958), Timan (1966) tarafından incelenmiştir.

Yaklaşım teorisi problemleri Lebesgue, 1898; Vallée-Poussin, 1910, 1911; Favard, 1936, 1937, 1949; Kolmogorov, 1935; Nikolski, 1946; Timan, 1950 ve daha birçok matematikçiler tarafından incelenmiştir.

Ayrıca, fonksiyonlar sınıflarında fonksiyonların yakınlaşımı ile ilgili sonuçlar La Vallée-Poussin, 1919; Jackson, 1930, 1941; Natanson, 1949; Zygmund, 1959; Timan, 1994; Bary, 1964; Akhiezer, 1965; Lorentz, 1966; De Vore ve Lorentz; 1993; Stepanets, 1995; Mhaskar, 1996; Trigub ve Belisky, 2004; Dzyadyk ve Shevchuk, 2009; Andrievskii ve ark., 1995; Andrievskii ve Blatt, 2002 kitaplar'ında bulunabilir.

1959-1963 yıllarında V. K. Dzyadyk tarafından parçalı düzgün sınırlı bölgelerde tanımlanan Hölder fonksiyon sınıflarının yapısal tasviri elde edilmiştir (Dzyadyk, 1959, 1966). Daha sonralar bu sonuçlar Dzyadyk, 1972, 1975; Lebedev ve Shirokov 1971; Lebedev ve Tamrazov, 1970; Tamrazov 1973; Belyi 1977; Andrievskii 1981 çalışmalarında daha genel kümelere genelleştirilmiştir. (Daha geniş bilgi Dzyadyk 1977 kitabında verilmiştir). Bununla birlikte, benzer tasvir her zaman mümkün değildir. (bak Dzyadyk, 1977, s.478; Shirokov 1977; Andrievskii 1983).

Andrievskii 1983 çalışması gereğince belli kontinyumlarda fonksiyon sınıflarının tasviri ile ilgili Dzyadyk 1962, 1966, 1972, 1975; Lebedev ve Shirokov 1971 çalışmalarındaki sonuçlar genel olarak geçerli değildir. Özel olarak, Γ yayı kuasikonform yay olduğunda fonksiyona yaklaşan polinomlarla ilgili

$$|g(z) - P_n(z)| \leq c \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]^\beta, \quad z \in \Gamma, n=1,2,..., \quad (2.1)$$

özelliğinin sağlanması, $0 < \beta < 1$ için genel olarak, $g(z) \in H^\beta(\Gamma)$ olması için yeterli değildir. Başka deyişle (2.1) şartı fonksiyonların yapısal karakterizasyonu için yeterli değildir. Bu tezde fonksiyonların yapısal karakterizasyonu için için belli bir metot verilmiştir. Bu metodun özü fonksiyonlar ile polinomlar arasındaki uzaklığın

değerlendirmesi ile birlikte, ilave olarak polinomların türevlerinin büyüklüğü üzerine bilginin verilmesidir. (bak. Stechkin 1951; Dzyadyk 1975; Kononov 1982). İlave şartı sağlayan polinomlar yardımıyla fonksiyon sınıflarının karakterizasyonu Dzyadyk, 1975 çalışması gereğince yaklaşım karakterizasyonu adlanır. Yani, kuasikonform yaylarda $H^\lambda(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonunu elde etmek için (2.1) şartının yanı sıra polinomların türevlerinin büyüklüğü üzerine

$$|P_n(z)| \leq c_2 \frac{\lambda \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]}{d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)} \quad (2.2)$$

şartını vermek gerekir. Dolayısıyla, $f(z) \in H^\lambda(\Gamma) \Leftrightarrow (2.1)$ ve (2.2) .

Fakat daha genel kontinyumlarda $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ cisinden H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonunu elde etmek mümkün değildir. D kompleks düzlemde kontinyum, $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ ise seviye eğrisi olmak üzere $\mu_n = \sup_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} d(\xi, D)$ cinsinden H sınıfına ait daha genel kontinyumlarda H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonunu elde etmek mümkündür. Bunun için polinomlarla ilgili

$$|g(z) - P_n(z)| \leq c_3 \lambda(\mu_n) \quad (2.3)$$

şartının yanı sıra polinomların türevlerinin büyüklüğü üzerine

$$|P_n(z)| \leq c_2 \frac{\lambda(\mu_n)}{\mu_n} \quad (2.4)$$

şartını vermek gerekir. Yani, D kontinyumu H sınıfına ait ise $g(z) \in H^\lambda(D) \Leftrightarrow (2.3)$ ve (2.4) olur.

Kompleks düzlemde yayın uç noktalarına bağlı olarak yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri ile ilgili sonuçların elde edilmesi merak konusudur. Benzer problemler singüler integrallerle ilgili Musheleshvili (1968), Guseynov (1948), Babaev (1966), Salaev (1976) ve birçok bilim adamının çalışmalarında incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ilave olarak kompleks düzlemde bulunan yayın uç noktalarına bağlı olarak $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır ve kuasidüzgün (yarıdüzgün) yaylarda tanımlanan $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfında polinomlarla en iyi yaklaşım

problemi incelenmiştir. Ayrıca, belli özelliklere sahip yaylarda $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

$\mathbb{C}$ karmaşık (kompleks) düzlemi göstereyin.

Tanım 3.1. $\mathbb{C}$ düzleminde D bölgesi verilmiş olsun. Eğer $\zeta_0 \in D$ noktası ve g fonksiyonu için

$$a) g(\zeta_0) \text{ tanımlı ;}$$

$$b) \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} g(\zeta) \text{ var ;}$$

$$c) \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} g(\zeta) = g(\zeta_0)$$

şartları sağlanırsa, bu durumda g fonksiyonu $\zeta = \zeta_0$ noktasında **sürekli** denir. Eğer g fonksiyonu D bölgesinde bulunan her bir noktada sürekli ise, bu durumda g fonksiyonu D bölgesinde **sürekli** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

D bölgesinde sürekli fonksiyon sınıfı $C(D)$ ile gösterilir. Özel olarak, $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfını $C[a, b]$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2. Kabul edelim ki, $\tau = g(\zeta)$ bir D kümesinden C kümesine bire-bir sürekli bir dönüşümdür. Eğer $g(\zeta)$ 'nin tersi $g^{-1}(\tau)$, C kümesi üzerinde sürekli ise bu durumda $\tau = g(\zeta)$ dönüşümüne bir **homeomorfizm** denir (Başkan, 1998).

Tanım 3.3. $D \subset \mathbb{C}$ kümesi verilmiş olsun.

Eğer $D_1 = D \cap K_1 \neq \emptyset, D_2 = D \cap K_2 \neq \emptyset$ ve $D = D_1 \cup D_2$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ 'nin içinde ayrık ve açık K_1 ve K_2 kümeleri bulunamıyorsa, bu durumda D kümesine **bağlantılı küme** denir (Başkan, 1998).

Tanım 3.4. $\mathbb{C}$ düzleminde D kümesi verilmiş olsun. Eğer D kümesi bağlantılı ve açık ise bu durumda D kümesine **bölge** adı verilir (Pommerenke, 1992).

Tanım 3.5. $\mathbb{C}$ düzleminde D kümesi verilmiş olsun. Eğer D kümesi bağlantılı ve kapalı ise, bu durumda D kümesine **kontinyum** adı verilir (Pommerenke, 1992).

Tanım 3.6. g fonksiyonu $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bulunan D bölgesinde tanımlı ve $\Delta\tau = g(z + \Delta z) - g(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ olsun. $z \in D$ noktasında

$$g'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta z}$$

limiti varsa ve sonlu ise $g'(z)$ 'a g 'in z noktasındaki **türevi** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\tau = g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun türevlenebilir olduğu her bir noktada Cauchy- Riemann denilen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

şartları sağlanır.

Tersine, eğer $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları reel değişkenli fonksiyonlar olarak, (x, y) noktasında türevlenebilir ve (3.1) şartları sağlanırsa, bu durumda $\tau = g(z) = u + iv$ fonksiyonu kompleks değişkenli fonksiyon olarak, $z = x + iy$ noktasında türevlenebilirdir. (Krasnov ve ark., 1981).

Eğer, g fonksiyonuna her $z \in D$ noktasında türevlenebilirse, bu durumda g fonksiyonuna D 'de **türevlenebilirdir** denir.

Teorem 3.1. g fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) \text{ ve } \frac{\partial g}{\partial y}(z)$$

kısmi türevleri var ve

$$g'(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial g}{\partial y}(z)$$

şartı sağlanır (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.7. g fonksiyonu $z_1 \in D$ noktasında $\frac{\partial g}{\partial x}(z_1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(z_1)$ kısmi türevleri mevcut

ise, bu durumda $\frac{\partial g}{\partial z}(z_1)$ ve $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_1)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_1) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(z_1) - i \frac{\partial g}{\partial y}(z_1) \right) =: f_z(z_1),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_1) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(z_1) + i \frac{\partial g}{\partial y}(z_1) \right) =: g_{\bar{z}}(z_1)$$

Eğer özel olarak $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ biçiminde ise

$$g_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$g_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y),$$

eşitliği doğrudur (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.8. Eğer g fonksiyonu z_1 noktasında türevlenebilirse, bu durumda

$$g'(z_1) = \frac{\partial g}{\partial z}(z_1), \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_1) = 0$$

olur (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.9. $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilmiş olsun. Eğer g fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında ve bu noktanın herhangi bir komşuluğundaki bütün noktalarda türevlenebiliyorsa, g fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Eğer g fonksiyonu $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her bir noktasında türevlenebiliyorsa, bu durumda g fonksiyonuna D **bölgesinde analitiktir** denir (Zill, Shanahan, 2003)

Tanım 3.10. Eğer g fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'nin tüm noktalarında analitik ise, g 'ye tam fonksiyon denir (Başkan, 1998).

Tanım 3.11. g fonksiyonu $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. Eğer g fonksiyonu D bölgesinin farklı noktalarında farklı değerler alırsa, (yani, $z_0, z_1 \in D$, $z_0 \neq z_1$ iken $g(z_0) \neq g(z_1)$ olduğunda) kompleks değişkenli g fonksiyonuna **yalnızca fonksiyon** denir (Duren, 2001).

Tanım 3.12. Eğer kompleks değişkenli g fonksiyonu bir z_1 noktasının belli bir komşuluğunda analitik olup, fakat z_1 noktasında da analitik değilse, bu durumda z_1 noktasına g fonksiyonunun **singüler** noktası denir (Başkan, 1998).

Tanım 3.13. (i) $c, d \in \mathbb{R}$, ve $c < d$ şartı sağlansın. $\varsigma = \varsigma(s) : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathbb{C}$ de $\Gamma := \{\varsigma(t) : t \in [c, d]\}$ kümesine başlangıç noktası $\varsigma(c)$ ve bitim noktası $\varsigma(d)$ olmak üzere bir **eğri** denir;

(ii) Bir Γ verildiğinde, $\varsigma(c) = \varsigma(d)$ şartı sağlanırsa, Γ eğrisine **kapalı eğri**;

(iii) $\forall s_1, s_2 \in [c, d]$ için $s_1 \neq s_2$ iken $\varsigma(s_1) \neq \varsigma(s_2)$ ise, bu durumda Γ eğrisine **Jordan yayı**, eğer $s_1 = s_2$ için $\varsigma(s_1) = \varsigma(s_2)$ ise Γ eğrisine **basit eğri**, eğer Γ basit bir eğri ve $\varsigma(c) = \varsigma(d)$ ise Γ eğrisine **basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi)**;

(iv) $P := \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, $[c, d]$ aralığının bir parçalanması olsun. Eğer $\forall m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $\varsigma = \varsigma(s)$ fonksiyonu her (s_{m-1}, s_m) aralığında sürekli türeve sahip ve $\lim_{s \rightarrow s_{m-1}^+} \varsigma(s)$, $\lim_{s \rightarrow s_m^-} \varsigma(s)$ limitleri var ise, bu durumda Γ eğrisine **parçalı düzgün eğri**;

(v) $\forall s \in [c, d]$ için $\varsigma'(t)$ türevi var ve sürekli ise, bu durumda Γ eğrisine **diferansiyellenebilir eğri**;

(vi) Γ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere eğer $\varsigma'(t) \neq 0$ şartı sağlanırsa, Γ eğrisine **düzgün eğri** denir (Depree ve Gehring, 1969)

$[c, d]$ aralığının $P = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ şeklindeki tüm parçalanmalarının ailesi $\wp$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P) := \sum_{m=1}^n |\varsigma(s_m) - \varsigma(s_{m-1})|$ olsun.

Tanım 3.14. Eğer

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\ell_n(P) : P \in \wp\} < \infty$$

şartı sağlanırsa, Γ eğrisine **ölçülebilir eğri (düzleştirilebilir)** denir.

Tanım 3.15. Eğer Γ Jordan eğrisi bir $\left[\frac{1}{\mu} < |\zeta| < \mu \right]$, $\mu > 1$ halkasının analitik ve bire-bir $\Phi(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü ise, bu durumda Γ eğrisine **analitik eğri** denir (Pommerenke, 1992).

Tanım 3.16. Γ eğrisi parametrik denklemi $\zeta = \zeta(s), s \in [c, d]$ olmak üzere sonlu uzunluklu bir eğri olsun. $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere

$$|\zeta(s_1) - \zeta(s_2)| \leq c |s_1 - s_2|^\beta$$

şartı sağlanırsa, bu durumda Γ eğrisine β dereceden **Lipschitz eğrisi** denir ve $\Gamma \in Lip\beta$ ile gösterilir (Gaier, 1987).

Tanım 3.17. $\Gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ parçalı düzgün bir eğri ve g fonksiyonu Γ eğrisi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g = u + iv$ olmak üzere

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (u dy + v dx)$$

ifadesine g fonksiyonunun Γ eğrisi üzerindeki **integrali** denir (Ahlfors, 1979).

Tanım 3.18. Parametrik denklemi $z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ biçiminde olan parçalı düzgün bir Γ eğrisi verilmiş olsun. Bu eğrinin $L(\Gamma)$ uzunluğu

$$L(\Gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

şeklinde tanımlanır (Özkın, 1989).

Tanım 3.19. Eğer $\forall \zeta \in \Gamma$ için ζ noktasının komşuluğunda Γ 'nın düzlendirilebilir, ζ noktasını içeren ve bağlantılı bir bileşeni varsa, bu durumda Γ eğrisine **lokal düzlendirilebilir eğri** denir (Andrievskii ve ark 1995).

Tanım 3.20. Bir D bölgesinin sınırı Γ olsun. Eğer Γ bağlantılı ise, bu durumda D bölgesine **basit bağlantılı bölge** denir (Markushevich, 1985).

Tanım 3.21. Her bir D açık kümesi

$$D = \bigcup_m D_m, \quad D_m \text{ ayrık bölgelerdir ve } \partial D_m \subset \partial D$$

biçiminde yazılabilir, burada sayılabilir D_m bölgelerine D 'nin **bileşenleri** denir (Pommerenke, 1992).

Tanım 3.22. (konform dönüşümün tanımı) $D, \mathbb{C}$ de bir bölge ve $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ ise sürekli dönüşümü olsun. Ayrıca, $\zeta_0 \in D$ noktasında kesişen ve aralarında β açısı yapan herhangi iki düzgün Γ_1 ve Γ_2 eğrileri verilmiş olsun. Eğer $g(\Gamma_1)$ ve $g(\Gamma_2)$ resim eğrilerinin $\tau_0 = g(\zeta_0)$ noktasındaki aralarındaki açı, yön ve büyüklük bakımından β açısına eşit ise, bu durumda g fonksiyonuna ζ_0 da bir **konform dönüşümdür** denir. Eğer her bir $\zeta_0 \in D$ noktasında g konform ise g fonksiyonu D bölgesinde **konformdur** denir (Başkan, 1998).

Teorem 3.2. g fonksiyonu ζ_0 noktasını içeren D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $g'(\zeta_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda ise $\tau = g(\zeta)$ fonksiyonu ζ_0 noktasında da konform bir dönüşümdür (Zill ve Shanahan, 2003).

Teorem 3.3. $\tau = g(\zeta)$ dönüşümünün D bölgesinde konform olması için gerek ve yeter şart $\forall \zeta \in D$ için $g'(\zeta) \neq 0$ olmak üzere g fonksiyonunun D bölgesinde yalınkat ve analitik olmasıdır (Krasnov ve ark 1981).

Teorem 3.4. D bölgesinin sınırı analitik bir eğri olsun. D bölgesinin D^* 'a olan her bir konform dönüşümü, $\overline{D}$ 'yi kapsayan bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir. Benzer şekilde, eğer D 'nin sınırı analitik bir eğri ise, bu durumda $C\overline{D}$ bölgesinin $C\overline{D}^*$ 'a olan konform dönüşümü CD 'yi kapsayan bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir (Pommerenke, 1992).

Teorem 3.5. D bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda D 'nin D^* 'a her bir konform dönüşümü $\overline{D}$ 'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir. Benzer şekilde, D bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, bu durumda $C\overline{D}$ 'nin $C\overline{D}^*$ 'ye olan her bir konform dönüşümü CD 'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir (Pommerenke, 1992).

Teorem 3.6. (Riemann Dönüşüm teoremi)

$D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $\zeta_0 \in D$ tespit edilmiş bir nokta olsun. D bölgesini $D^* := \{\tau : |\tau| < 1\}$ birim daireğine dönüştüren ve $\varphi(\zeta_0) = 0$, $\varphi'(\zeta_0) > 0$ şartlarını sağlayan bir tek $\tau = \varphi(\zeta)$ konform dönüşümü vardır (Depree ve Gehring, 1969).

Teorem 3.7. En az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir $D \subset \mathbb{C}$ kontinyumu vermiş olsun. Bu durumda, CD bölgesini $\overline{CD^*}$ bölgesine

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} > 0$$

şartları altında resmeden bir tek Φ konform dönüşümü vardır (Markushevich, 1967, s.104)

Teorem 3.7 deki Φ fonksiyonu CD bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ bunun bir basit kutup yeridir. Bu nedenle, Φ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} = a$$

olmak üzere,

$$\Phi(\zeta) = a\zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots$$

biçimindedir. $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} = a$ koşulu $\Phi'(\infty) = a$ biçiminde de yazılabilir. Φ

fonksiyonunun tersini Ψ ile gösterelim. Bu durumda Ψ fonksiyonu $|\tau| > 1$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında bir basit kutbu vardır. Ψ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı, $c = \frac{1}{a}$ olmak üzere,

$$\Psi(\tau) = c\tau + c_0 + \frac{c_{-1}}{\tau} + \frac{c_{-2}}{\tau^2} + \dots, |\tau| > 1$$

biçimindedir. c sayısına, D kontinyumunun **kapasitesi** denir (Gaier, 1987).

Tanım 3.23. Eğer tarafları x ve y eksenlerine paralel olan keyfi kapalı $R \subset D$ dikdörtgeni için $u(x, y)$ fonksiyonu hemen tüm yatay ve hemen tüm düşey parçalarında mutlak sürekli ise, bu durumda diyeceğiz ki, D bölgesinde $u(x, y) \in ACL$ 'dir. (eğrilerde mutlak sürekli). Bu tür fonksiyonunun elbette D 'de hemen –hemen her yerde u'_x, u'_y kısmi türevleri vardır ve

$$u_z = \frac{1}{2}(u'_x - iu'_y) ; \quad u_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u'_x + iu'_y)$$

eşitlikleri geçerlidir (Ahlfors, 1987).

Kuasi(yarım) konform dönüşümün farklı tanımları bulunmaktadır. Bunlardan birini kullanalım.

Tanım 3.24. Eğer

- 1) D 'de $\varphi \in ACL$;
- 2) D de hemen – hemen her yerde $|\varphi_z| \leq \frac{K+1}{K-1} |\varphi_{\bar{z}}|$ şartı sağlansa,

bu durumda D bölgesinin topoloji φ dönüşümüne K - **kuasikonform** (K - **yarikonform**) denir. (Ahlfors, 1987).

Teorem 3.8. Kuasikonform dönüşümlerin aşağıdaki özellikleri vardır:

- a-) Konform dönüşümler 1-kuasikonformdur. Tersine , 1-kuasikonform dönüşümler de konformdular;
- b-) K - kuasikonform bir dönüşümün tersi de K - kuasikonformdur;
- c-) K_1 - kuasikonform bir dönüşüm ile K_2 - kuasikonform bir dönüşümün bileşkesi $K_1 K_2$ - kuasikonformdur (Ahlfors, 1987).

Teorem 3.9. G bölgesinin K - kuasikonform w dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm G 'nin her kompakt M altkümesinde $\frac{1}{K}$ mertebeden Hölder sınıfındandır:

$$|w(z_1) - w(z_2)| \leq c |z_1 - z_2|^{1/K}, \quad \forall z_1, z_2 \in M.$$

(Ahlfors, 1987).

Bizi esas olarak Γ nin kuasikonform eğri olduğu halı ilgilendirecektir.

İleride $c, c_1, \dots$ ile sadece D 'ye bağlı sabitler kullanılacaktır (bu sabitler genel olarak farklı ifadelerde farklıdır). İleride aynı zamanda $M_1 \preceq M_2$ sembolünü de kullanacağız. Bu $C = \text{const} > 0$ olmak üzere $M_1 \leq CM_2$ demektir, burada C sabiti M_1 ve M_2 'ye bağlı değildir. Eğer aynı zamanda $M_1 \preceq M_2$ ve $M_1 \succeq M_2$ ise, $M_1 \asymp M_2$ yazacağız.

Tanım 3.25. Düzlemi kendisine dönüştüren herhangi K - kuasikonform dönüşümünde çemberin görüntüsüne **kuasikonform (yarıkonform) eğri** veya **kuasiçember** denir. (Ahlfors, 1987).

Eğirinin kuasikonformluğunun geometrik kriteri daha kullanışlıdır. (bk. Lehto ve Virtanen, 1973, s.100) Γ -Jordan eğrisin ve onun üzerinde keyfi iki z_1 ve z_2 noktalarını göz önüne alalım. z_1 ve z_2 noktalarının Γ eğrisini böldüğü iki yaydan birini (küçük çaplı) $\Gamma(z_1, z_2)$ ile gösterelim. Γ eğrisinin kuasikonform olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki bağıntının sağlanmasıdır:

$$\text{diam} \Gamma(z_1, z_2) \preceq |z_1 - z_2| \quad (3.2)$$

Lemma 3.1. D , Γ kuasikonform sınırlı bölge, $z_1 \in \Gamma$, $z_2 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda uzunluğu $S(\widehat{z_1, z_2})$ olmak üzere

$$S(\widehat{z_1, z_2}) \leq M |z_1 - z_2| \quad (3.3)$$

şartını sağlayan $\widehat{z_1, z_2} \in \overline{B}$ düzeltilebilir yayı vardır, üstelik $M > 1$ sabiti ancak D den bağımlıdır. (Belyi, 1977)

Tanım 3.26. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ yayı verilmiş olsun. Eğer Γ yayının keyfi z_1 ve z_2 noktalar çifti için bu noktalar arasında kalan $\Gamma(z_1, z_2)$ küçük parçasının uzunluğu

$$\text{mes} \Gamma(z_1, z_2) \preceq |z_1 - z_2|$$

şartını sağlıyorsa, düzeltilebilir Jordan Γ yayına **kuasidüzgün (yarıdüzgün)** yay denir (Lavrentev, 1936).

Açıktır ki, keyfi kuasidüzgün eğri kuasikonformdur.

$\Gamma - \Omega = C\Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $(0 \in \Omega_1, \infty \in \Omega_2)$ tümleyeni ile keyfi kapalı Jordan eğrisi olsun. Konform ve yalınkat olarak $\Phi_1(0) = 0$, $\Phi_1'(0) \neq 0$, $\Phi_2(\infty) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(z)}{z} > 0$ normu ile uygun olarak $\Omega_i - i$, $\Omega_i' - a$ ($\Omega_1' = \{w : |w| < 1\}$, $\Omega_2' = \{w : |w| > 1\}$) dönüştüren $w = \Phi_i(z)$, $i = 1, 2$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Tanım 3.27. $0 < r < 1 < R < +\infty$ olsun.

$$\Gamma_r := \{z \in \Omega_1 : |\Phi_1(z)| = r\}, \Gamma_R := \{z \in \Omega_2 : |\Phi_2(z)| = R\}, \Gamma_1 \equiv \Gamma$$

eğrilerine sırasıyla **iç** ve **diş seviye eğrileri** denir.

Tanım 3.28. D , basit bağlantılı bir bölge, D_∞ ise $\overline{CD}$ 'nin sonsuz noktasını içeren birleşeni olsun. Eğer D ve D_∞ bölgeleri aynı sınıra sahipseler, bu durumda D bölgesine **Carathedory bölgesi** denir (Markushevich, 1967).

Her Jordan bölgesi bir Carathedory bölgesidir, fakat yarıçapı çıkarılmış bir disk Carathedory bölgesi değildir. Ayrıca, Carathedory bölgeleri polinom yaklaşımı (PA) özelliğine sahiptirler (Gaier, 1987).

$D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik fonksiyonlar sınıfını $A(D)$ ile gösterelim.

Teorem 3.10. (Cauchy-Goursat Teoremi) $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $g \in A(D)$ olsun. Bu durumda D bölgesinde bulunan her bir basit kapalı Γ eğrisi için

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$$

eşitliği geçerlidir (Zill ve Shanahan, 2003).

Teorem 3.11. (Morera Teoremi) g fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde sürekli olsun. Eğer D içinde bulunan her bir basit kapalı Γ eğrisi için

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$$

şartı sağlanırsa, bu durumda g fonksiyonu D bölgesinde analitiktir (Başarır, 2010).

Teorem 3.12. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ yayı verilmiş olsun. Eğer indislerin artımına göre Γ yayı üzerinde bulunan z_1, z_2, z_3 noktaları için $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3|$ şartı sağlanırsa, Γ yayına **kuasikonform (yarikonform)** yay denir (Andrievskii, 1984).

Teorem 3.13. (Cebirin Temel Teoremi) Sabit olmayan

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$$

polinomu verilmiş olsun. $P_n(z_0) = 0$ olacak şekilde bir z_0 var. (Başkan, 1998).

Teorem 3.14. (Cauchy İntegral Formülü). $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $g \in A(D)$ ve D

bölgesi parçalı düzgün kapalı Γ eğri si ile sınırlanmış olsun. Bu durumda $\zeta_0 \in D$ için

$$g(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - \zeta_0} d\xi$$

dır, burada kapalı Γ eğrisi üzerinde hareket ettiğimizde D bölgesi solda kalmaktadır (Krasnov ve ark., 1981).

Teorem 3.15. (Cauchy Türev Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu sayıda parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge, $G \subset D$ ve $g \in A(D)$ olsun. Bu durumda $\forall \zeta_0 \in G$ ve her $n = 0, 1, 2, \dots$, için

$$g^{(n)}(\zeta_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}} d\zeta,$$

formülü geçerlidir (Saff ve Snider, 1993).

Teorem 3.16. (Maksimum –Modülüs Prensibi) $D \subset \mathbb{C}$, bölgesi $\Gamma := \partial D$ Jordan eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge olsun. Eğer g , D bölgesinde analitik ve $\overline{D}$ de sürekli ise $|g|$, maksimum değerini ∂D de alır (Saff ve Snider, 1993).

Şimdi sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünü verelim:

Teorem 3.17. D , sonlu uzunluklu pozitif yönlendirilmiş Γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir bölge olsun. Eğer g fonksiyonu CD bölgesinde analitik bir fonksiyon ise bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} g(\infty), & z \in D \\ g(\infty) - g(z), & z \in C\overline{D} \end{cases}$$

formülü doğrudur (Gonzalez, 1991).

Teorem 3.18. (Green Formülü): D , parçalı düzgün ve pozitif yönlendirilmiş Γ eğrisi ile sınırlı basit veya katlı bağlantılı bir bölge olsun. Ayrıca g_1 ve g_2 , D 'de analitik, $\overline{D}$ ' de sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\iint_D g_1 \overline{g_2'} dm = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} g_1 \overline{g_2} dz$$

eşitliği geçerlidir (Gaier, 1987).

Teorem 3.19. (Cauchy-Green Formülü). D , sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca, kabul edelim ki g , D bölgesinde sürekli kısmi türevlere sahip ve $\overline{D}$ ' de sürekli bir fonksiyondur. Eğer g_z fonksiyonu D bölgesinde integrallenebilir ise, bu durumda her $z \in G$ için

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{g_{\bar{z}}}{\xi - z} d\sigma_z$$

formülü geçerlidir (Conway, 1995).

3.2. Bazı fonksiyon ve kontinyum sınıfları

Tanım 3.29. $g \in C[a, b]$ olsun.

$$\lambda(g; u) = \sup_{\substack{a \leq x \leq b-h \\ 0 \leq h \leq u}} |g(x+h) - g(x)|$$

eşitliği ile tanımlanan $\lambda(u) = \lambda(g; u)$, $u \in [0, b-a]$ fonksiyonuna **birinci mertebeden süreklilik modülü** denir (Dzyadyk, 1977).

Tanım 3.29 $(-\infty, \infty)$ aralığında da geçerlidir.

Yukarıdaki tanımdan özel olarak,

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \lambda(h), \quad x, x+h \in [a, b]$$

eşitsizliği elde edilir.

Birinci mertebeden süreklilik modülü ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- 1) $\lambda(0) = 0$;
- 2) $\lambda(u)$ monoton artan fonksiyondur;
- 3) $\lambda(u)$ sürekli fonksiyondur;
- 4) $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ olmak üzere

$$\lambda(u_1 + u_2) \leq \lambda(u_1) + \lambda(u_2)$$

eşitsizliği sağlanır;

5) $n \in \mathbb{N}$ ve $nu \in [0, b-a]$ için

$$\lambda(nu) \leq n\lambda(u)$$

eşitsizliği sağlanır, Ayrıca, keyfi $p > 0$, $(p+1)u \in [0, b-a]$ için

$$\lambda(pu) \leq \llbracket p+1 \rrbracket \lambda(u) \leq (p+1)\lambda(u)$$

eşitsizliği doğrudur;

6) $\lambda(u) \neq 0$ olmak üzere $u \in [0, b-a]$

$$\lambda(u) \geq \frac{\lambda(b-a)}{2(b-a)}u$$

olur (Dzyadyk, 1977).

Tanım 3.30. $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\lambda(g; u) \leq Mu^\beta, 0 < \beta \leq 1, M = \text{sabit} > 0$$

şartı sağlanırsa, bu durumda g fonksiyonuna **Hölder (Lipshitz) β sınıfı**'ndandır denir, burada M sabiti u dan bağımsız, pozitif bir sayıdır ve farklı fonksiyonlar için genel olarak farklıdır. Bu fonksiyonlar sınıfı $g \in H^\beta(D)$ ($g \in \text{Lip}\beta(D)$) ile gösterilir.

Hölder sınıfı ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- 1) $g \in H(D) \Rightarrow g \in C(D)$;
- 2) $\beta \leq \alpha$ ise $g \in H^\alpha \Rightarrow g \in H^\beta$ dir. Yani, $H^\alpha \subseteq H^\beta$ dir.
- 3) $g_1 \in H(D), g_2 \in H(D)$ olmak üzere,

$$g_1 + g_2 \in H(D), g_1 \cdot g_2 \in H(D), \frac{g_1}{g_2} \in H(D), (g_2 \neq 0)$$

olur (Dzyadyk, 1977).

Tanım 3.31. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ - Jordan eğrisi verilmiş olsun. Eğer

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq C_g \max\{|z_0 - z_1|^\beta, |z_0 - z_2|^\beta\} |z_1 - z_2|^\alpha, \forall z_1, z_2 \in \Gamma$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda g fonksiyonu $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$ ($z_0 \in \Gamma$), $(0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 0)$ **sınıfı**' ndandır denir ve $g \in D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$ ile gösterilir . Mamedkhanov (1981) açığt ki , $\beta = 0$ olduğundan $H^\alpha(\Gamma)$ sınıfı elde edilir.

Tanım 3.32. Kompleks düzlemde uç noktaları a ve b den Γ yayı verilmiş olsun.

$z_1, z_2 \in \Gamma$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|^\alpha}{\left| \sqrt{z_1^2 - a^2} + \sqrt{z_2^2 - b^2} \right|^\alpha}$$

şartı sağlanırsa, bu durumda f fonksiyonu $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ sınıfı' ndandır denir ve

$g(z) \in A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ ile gösterilir.

Daha sonralar, genelliği bozmadan, eğer $a = -2$ ve $b = 2$ ise $A_{-2,2}^\alpha(\Gamma)$ sınıfını $A^\alpha(\Gamma)$ ile göstereceğiz

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde $D^* = CD = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bağlantılı tamamlayıcısına sahip sonlu D , ($\text{diam } D > 0$), kontinyumu verilmiş olsun. Burada $\Gamma = \partial D^* = \partial D$ bu

bölgelerin ortak sınırı olsun. $\tau = \varphi(z)$ fonksiyonu konform ve yalınkat olarak

$\varphi(\infty), \varphi'(\infty) > 0$ normallaştırılmış şartlar altında D^* bölgesini $D_1^* = \{\tau : |\tau| > 1\}$

bölgesine dönüştürsün. Caratheodory göre basit uçlarla tanımlanmış $\widetilde{D}^*$ ile $\overline{D}_1^*$

kompaktifikasyonu arasındaki homeomorfizimi, D^* bölgesinde $\varphi(z)$ ile çakışan, aynı işaretli olan φ ile göstereceğiz (örneğin, bak. Kollingvud ve Lovater, 1971).

$\varphi^{-1} = \psi$ ters fonksiyonu, $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{D}^* \setminus D^*$ ise sınır basit uçlar kümesini gösterebilirsin.

$\Gamma_r = \{\xi : |\varphi(\xi)| = r\}$, $r > 1$ seviye eğrisi olsun.

D 'nin tamamında sürekli ve içinde analitik olan fonksiyonlar sınıfını ise $A(D)$ ile göstereceğiz.

$\lambda(\delta)$, $\delta > 0$ süreklilik modülü tipli bir fonksiyon olsun, yani pozitif işaretli, azalmayan ($\lambda(+0) = 0$ olmak üzere) ve belirli bir $C = \text{sabit} > 0$ için

$\lambda(t\delta) \leq Ct\lambda(\delta)$, $\delta > 0$, $t > 1$ şartı sağlansın.

$C = \text{sabit} > 0$ için

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq C\lambda(|z_1 - z_2|), z_1, z_2 \in D ;$$

koşulunu sağlayan $g(z) \in A(D)$ fonksiyonlar sınıfını $CH^\lambda = CH^\lambda(D)$ ile gösterelim.

Bazı C 'ler için CH^λ sınıfına dahil olan fonksiyonlar kümesini ise H^λ ile göstereceğiz.

$\lambda(\delta) = \delta^\beta$, $0 < \beta \leq 1$ durumunda ise standart CH^β veya H^β gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 3.33. Her bir $z_1, z_2 \in D$ noktaları

$$\text{mes}\Gamma(z_1, z_2) \leq C|z_1 - z_2|, \quad C = C(D) \geq 1,$$

özelliğine sahip $\Gamma(z_1, z_2) \subset D$ yayı ile birleştirilebilir ise, bu durumda D

kontinyumu H sınıfı'ndandır denir ve bunu $D \in H$ olarak göstereceğiz (Andrievskii, 1984).

$\mu > 0$ için

$$U(\zeta, \mu) = \{\xi : |\xi - \zeta| < \mu\}, \quad d(\zeta, D) = \inf_{\xi \in D} |\xi - \zeta|,$$

$$D_\mu = \bigcup_{\zeta \in D} U(\zeta, \mu) = \{\xi : d(\xi, D) < \mu\}$$

gösterelim.

Tanım 3.34. Belli $C = C(D) = \text{const} > 1$ sabiti ve $\zeta \in \Gamma = \partial D$ ve $\mu > 0$ için

$$U(\zeta, C\mu) \cap CD_\mu \neq \emptyset,$$

şartı sağlanırsa, bu durumda D kontinyumu **R sınıfı**' ndandır denir ve bunu $D \in R$ olarak göstereceğiz, burada $CD_\mu = \overline{\mathbb{C}} \setminus D_\mu$, D_μ bölgesinin tamamlayıcısıdır (Andrievskii, 1984).

$$\mu_n = \sup_{\xi \in \text{int}\Gamma \setminus \frac{1}{n}} d(\xi, D), \quad n = 1, 2, \dots$$

gösterelim, burada $\text{int}\Gamma$ ' sınırı Γ ile çakışan sonlu bir bölgedir (Γ 'nin sonlu Jordan eğrisi olduğu dikkate alınmaktadır).

3.3. Cauchy çekirdeğinin polinom fonksiyonlarla yaklaşımı

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemde $D = \Gamma$ yayı verilmiş olsun. Γ yayının uçlarını z_1 ve z_2 olarak gösterelim ve $r > 1$ için $\varphi(z_i) = \tau_i$, $i = 1, 2$,

$$D_{11}^* = \{s : |s| > 1, \arg s_1 < \arg s < \arg s_2\},$$

$$D_{12}^* = D^* \setminus \overline{D_{11}^*}, \quad D_i^* = \psi(D_{1i}), \quad \widetilde{D}_i^* = \psi(\overline{D_{1i}}),$$

$$\Gamma_r^i = \Gamma_r \cap \overline{D_i^*}, \quad \widetilde{\Gamma}^i = \widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{D}_i^*, \quad d_r^i(z) = \inf_{\xi \in \Gamma_r^i} |\xi - z|, \quad d_r^*(z) = \max_{i=1,2} d_r^i(z)$$

gösterelim.

Bu bölümde Γ 'yi sonlu kvazikonforma yay olarak kabul edeceğiz. Uç noktalar hariç her bir $z \in \Gamma$ noktası $z^1 \in \widetilde{\Gamma}^1$ ve $z^2 \in \widetilde{\Gamma}^2$ gibi basit iki ucun cismidir. $\Omega = C\Gamma$

bölgesindeki ve Γ yayı üzerindeki noktaları sırasıyla z ve ξ ile gösterelim ve cismi bu noktalarla çakışan, $\tilde{\Omega}^m$, $m=1,2$, bölgesine ait olan basit uçları ise sırasıyla Z^j ve $\mathfrak{Z}^j$ veya sadece Z ve $\mathfrak{Z}$ olsun.

Bazı lemmaları ve onlardan çıkan sonuçları ifade edelim. $j(=1,2)$ indislerini sabitleyelim (Andrievskii, 1980; 1981).

Lemma 3.2. $\xi_i \in \overline{\Omega}^m$, $\varphi(\mathfrak{Z}_i^m) = \tau_i$, $i=1,2,3$ olsun. Bu durumda $|\xi_1 - \xi_2| \preceq |\xi_1 - \xi_3|$ ve $|\tau_1 - \tau_2| \preceq |\tau_1 - \tau_3|$ koşulları denktir ve bu durumda

$$\left| \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} \right|^{s_1} \preceq \left| \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_2} \right| \preceq \left| \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} \right|^{s_2} \quad (3.4)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $s_2 > s_1 > 0$ sabitleri sadece Γ 'ye bağlıdır.

Lemma 3.2'i seçilmiş üç tane noktaya uyguladığımızda aşağıdaki bağıntıların doğru olduğunu göreceğiz (Andrievskii, 1981).

Lemma 3.3. z, ξ ve ξ_Γ , noktaları $Z^m \in \tilde{\Gamma}^m$, $\mathfrak{Z}^i \in \overline{\Omega}^i$ basit uçların cismi olsun

$(|\varphi(\mathfrak{Z}^m)| \preceq 1)$ ve $\mathfrak{Z}_\Gamma = \psi \left[\varphi(\mathfrak{Z}^m) |\varphi(\mathfrak{Z}^m)|^{-1} \right]$ olsun. $R > 1$ için

$$\tilde{z}_R^m = \psi \left[R\varphi(Z^m) \right], \xi_R^m = \psi \left[R\varphi(\mathfrak{Z}^m) \right]$$

gösterelim. Bu durumda

$$d(\xi, \Gamma) \asymp |\xi - \xi_\Gamma|; \quad (3.5)$$

$$d_R^m(z) \asymp |z - \tilde{z}_R^m|; \quad (3.6)$$

$$|\xi - \tilde{\xi}_R^m| \asymp d_R^m(z), \text{ eğer } |\xi - z| \preceq d_R^m(z) \quad (3.7)$$

$$\left| \frac{\xi - \tilde{\xi}_R^m}{\xi - z} \right| \preceq \left| \frac{d_R^m(z)}{\xi - z} \right|^p, \text{ eğer } |\xi - z| \succeq d_R^m(z) \quad (3.8)$$

bağılantıları geçerlidir, burada $p > 0$ sabiti sadece Γ 'ye bağlıdır.

Sonuç 3.1. (3.7) ve (3.8) eşitsizliklerini kullanarak $\xi \in \Gamma$ için aşağıdaki bağılantıların doğruluğu kolayca gösterilebilir:

$$d_R^*(\xi) \asymp d_R^*(z), \text{ eğer } |\xi - z| \preceq d_R^*(z); \quad (3.9)$$

$$\frac{d_R^*(\xi)}{|\xi - z|} \preceq \left| \frac{d_R^*(z)}{\xi - z} \right|^p, \text{ eğer } |\xi - z| \succeq d_R^*(z) \quad (3.10)$$

Doğrulanması lemma 3.3' ya dayanan bir başka bağıntıyı gösterelim.

Sonuç 3.2. $R > r > 1$ olsun. (3.1) eşitsizliğini üç tane $\xi_1 = z \in \Gamma, \xi_2 = \tilde{z}_r^m$ ve $\xi_3 = \tilde{z}_R^m$ noktalar için yazalım:

$$\left(\frac{R-1}{r-1} \right)^{s_1} \preceq \left| \frac{z - \tilde{z}_R^m}{z - \tilde{z}_r^m} \right| \preceq \left(\frac{R-1}{r-1} \right)^{s_2}$$

Bu eşitsizlikten basit muhakeme ile aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\left(\frac{R-1}{r-1} \right)^{s_1} \preceq \frac{d_R^*(z)}{d_r^*(z)} \preceq \left(\frac{R-1}{r-1} \right)^{s_2} \quad (3.11)$$

$\nu > 0$ yeteri kadar küçük bir sayı olsun. Γ yayını ayrı ayrı parçalara bölen $\{\xi_i\}_0^p$ noktalar dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım: z_1 ve z_2 noktaları Γ yayının uç noktaları olsun. $\xi_0 = z_1$ olarak kabul edelim. ξ_1 ise $\Gamma \cap \{t : |t - \xi_0| = d_{1+\nu}^*(\xi_0)\}$ kesişiminin noktalarından biri olsun. Böylece, devam edelim ve ξ_{i+1} noktası olarak ise Γ yayı üzerinde, ξ_i ile z_2 noktaları arasında olmak üzere $\{t : |t - \xi_i| = d_{1+\nu}^*(\xi_i)\}$, çember üzerindeki noktayı kabul edelim. Bu sıralama o zamana kadar devam edecektir ki, $\xi_{p-1} \in \Gamma$ noktası için Γ yayı üzerindeki $\Gamma(\xi_{p-1}, z_2)$ parçasının çapı,

$$d_{1+\nu}^*(\xi_{p-1}) \preceq \text{diam} \Gamma(\xi_{p-1}, z_2) \preceq 3d_{1+\nu}^*(\xi_{p-1})$$

eşitsizliğini sağlamış olsun. $\xi_p = z_2$ kabul edelim. Cismi ξ_i olmak üzere basit uçları

$\mathfrak{T}_i^m \in \tilde{\Gamma}^m (m=1,2; i=0,\dots,p)$, ile gösterelim. Lemma 3.3 ve sonuç 3.1 gereğince birim çemberler üzerindeki noktalar için aşağıdaki özellikler yazılabilir:

$$|\tau_i^m - \tau_{i-1}^m| \succeq \nu, \quad i=1,\dots,p, \quad m=1,2;$$

$$|\tau_{i+1}^m - \tau_i^m| \asymp |\tau_i^m - \tau_{i-1}^m|, \quad i=1,\dots,p-1, \quad m=1,2;$$

$$|\tau_0^m - \tau_1^m| \asymp |\tau_p^m - \tau_{p-1}^m| \asymp \nu, \quad m=1,2.$$

Aşağıdaki gibi noktalar sistemini tanımlayalım:

$$t_i^m = \begin{cases} \left(1 + |\tau_{i+1}^m - \tau_i^m|\right) \tau_i^m, & i = 1, \dots, p-1; \\ (1+\nu) \tau_i^m, & i = 0, p. \end{cases}$$

t_i^m , $i = 0, \dots, p$, $m = 1, 2$ noktalarını argümanın artım sırasıyla $\Gamma_{1+\nu} \subset \Omega'$ kesiği ile

birleştirelim ve $\Gamma_{1+\nu}^* = \psi(\Gamma_{1+\nu})$ kabul edelim. Böylece, biz $\nu > 0$ 'ın küçük değerleri için

$\Gamma_{1+\nu}$ seviye eğrisinden farklı ve $z \in \Gamma$, $j = 1, 2$ için,

$$d_{1+\nu}^*(z) \asymp d(z, \Gamma_{1+\nu}^*) \asymp d(z, \Omega^m \cap \Gamma_{1+\nu}^*) \quad (3.12)$$

bağıntısını sağlayan $\Gamma_{1+\nu}^* \subset \Omega$ eğrisini oluştururuz.

Daha sonra $(\xi - z)^{-1}$ Cauchy çekirdeğinin,

$$q_n(\xi, z) = \sum_{m=0}^n a_m(\xi) z^m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

polinom fonksiyonlarla yaklaşım problemini inceleyeceğiz.

Lemma 3.4. $R > 1$ ve $k = 1, 2, \dots$ ise sabit edilmiş sayılar olsun. Bu durumda her bir

$n = 1, 2, \dots$ doğal sayı için $\xi \in \Omega_R \cap \text{int } \Gamma_R$ de ξ değişkenine göre sürekli olan $a_m(\xi)$

katsayılarla (3.13) biçiminde öyle bir fonksiyon var ki, $z \in \Gamma$, $\xi \in \Omega_R$ ve $l = 0, 1$

olduğunda,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| \leq \frac{1}{|\xi - z|^{l+1}} \left[\frac{d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)}{|\xi - z| + d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)} \right]^k; \quad (3.14)$$

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} q_n(\xi, z) \right| \leq \left[|\xi - z| + d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]^{-l-1} \quad (3.15)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: n yeterince büyük olsun. İlk önce $\xi \in \Omega_R \cap \overline{\text{ext } \Gamma_{1+1/n}^*}$ olduğunu kabul edelim.

(burada Γ Jordan eğrisi olmak üzere $\text{ext } \Gamma = \mathbb{C} \setminus \overline{\text{int } \Gamma}$ dir). $Q_{1,k,i,n}(\xi, z)$ Dzyadyk

polinom çekirdeğini göz önüne alalım (Dzyadyk, 1975; Belyi, 1979) çalışmasında D

keyfi kontinyum ise $i \geq 2$ ve $l = 0, 1$ için,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left[\frac{1}{\xi - z} - Q_{1,s,k,n}(\xi, z) \right] \right| \leq \frac{|\tilde{\xi} - \xi|^{ki}}{|\xi - z|^{l+1} |\tilde{\xi} - z|^{ki}}; \quad (3.16)$$

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} Q_{1,s,k,n}(\xi, z) \right| \preceq |\tilde{\xi} - z|^{-l-1}; \quad (3.17)$$

eşitsizliklerinin doğruluğu ispat edilmiştir, burada $\xi = \psi \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(\xi) \right]$ dir.

Yukarıdaki varsayımlara göre

$$|\tilde{\xi} - z| \asymp |\xi - z| \asymp |\xi - z| + d_{1+1/n}^*(z),$$

ve bazı doğal $i_1 = i_1(\Gamma) > 0$ sayıları için lemma 3.57 gereğince,

$$\left| \frac{\xi - \tilde{\xi}}{\xi - z} \right| \preceq \left| \frac{d_{1+1/n}^*(z)}{\xi - z} \right|^{1/i_1}$$

değerlendirmesi doğrudur. Böylece,

$$q_n(\xi, z) \stackrel{def}{=} Q_{1,k,i,[Cn]}(\xi, z),$$

kabul edilir ise (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinden (3.16) ve (3.17) değerlendirmeleri bulunur, burada $i = \max\{i_1, 2\}$ dır, yeterli kadar küçük $C = C(k, i)$ sabiti öyle seçilmiştir ki, $\deg q_n \leq n$ olsun. Şimdi ise $\xi \in (\text{int } \Gamma_{1+1/n}^*) \setminus \Gamma$ olduğunu kabul edelim.

$\xi_1 \in \Gamma_{1+1/n}^*$ noktasını ise $\arg \varphi(\xi) = \arg(\xi_1)$ koşulundan seçelim,

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\xi_1 - \xi)^m}{(\xi_1 - z)^{m+1}} + \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - z} \right)^p \frac{1}{\xi - z}$$

özdeşliği aranan polinom çekirdeğinin

$$q_n(\xi, z) = \sum_{m=0}^{p-1} (\xi_1 - z)^m \left[q_{\left[\frac{n}{(m+2)} \right]}(\xi_1 - z)^{m+1} \right] \quad (3.18)$$

biçiminde olacağının ipucunu verir $p = p(\Gamma, k)$ sayısının nasıl seçileceği aşağıda belirtilecektir. (3.18) biçiminde verilen çekirdeğin (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerini sağlandığını gösterelim. Lemma 3.2' yı z, ξ, ξ_1 ve ξ_1, ξ, ξ_Γ noktalarına uygulayarak ve (3.5) ve (3.12) formüllerini dikkate alarak,

$$|z - \xi| \preceq |z - \xi_1| \quad d_{1+1/n}^*(\xi_\Gamma) \asymp d(\xi_1, \Gamma) \succeq |\xi - \xi_1|$$

bağıntısını elde ederiz. Şimdi ise $z \in \Gamma$ ve $\xi \in (\text{int } \Gamma_{1+1/n}^*) \setminus L$ olduğunda

$$\left| \frac{\xi - \xi_1}{z - \xi_1} \right| \preceq \left[\frac{d_{1+1/n}^*(z)}{|z - \xi| + d_{1+1/n}^*(z)} \right]^\beta, \beta = \beta(\Gamma) > 0, \quad (3.19)$$

eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Gerçekten, eğer $|\xi_\Gamma - z| \leq d_{1+1/n}^*(z)$ ise (3.9)

ifadesine göre $d_{1+1/n}^*(z) \asymp d_{1+1/n}^*(\xi_\Gamma)$ dir ve buradan da

$$|\xi - \xi_1| \preceq d(\xi_1 - \Gamma) \leq |z - \xi_1|$$

yazılabilir. Böylece, her bir not edilmiş $\beta > 0$ için

$$\left| \frac{\xi - \xi_1}{z - \xi_1} \right| \preceq 1 \asymp \left[\frac{d_{1+1/n}^*(z)}{|z - \xi| + d_{1+1/n}^*(z)} \right]^\beta,$$

değerlendirmesi elde edilir. Eğer $|\xi_\Gamma - z| > d_{1+1/n}^*(z)$ ise uygun üç noktaya lemma 3.56 uygulandığında

$$|z - \xi_\Gamma| \asymp |z - \xi_1| \asymp |z - \xi|$$

bulunur. (3.19) değerlendirmesinin bulunması için (3.10) eşitsizliğin kullanılması gerekir:

$$\left| \frac{\xi - \xi_1}{z - \xi_1} \right| \preceq \frac{d_{1+1/n}^*(\xi_\Gamma)}{|z - \xi_\Gamma|} \preceq \left| \frac{d_{1+1/n}^*(z)}{z - \xi_\Gamma} \right|^\beta$$

Eğer $p = \left\lceil \frac{k}{\beta} \right\rceil + 1$ kabul edilirse, $q_n(\xi_1, z)$ çekirdeğinin ispatlanmış özelliklerinden,

(3.18) ve (3.19) ifadelerinde kolayca (3.14) ve (3.15) eşitsizlikleri elde edilebilir.

$Q_{1,k,i,n}(\xi, z)$ çekirdeğinin $\xi \in \Omega_R \cap \overline{ext\Gamma_{1+1/n}^*}$ değişkenine göre sürekli olmasından $a_m(\xi)$ katsayılarının sürekli olması elde edilir.

Teorem 4.1' in yeterli koşulunun ispatını yapmak için (Lebedev, 1971; Tamrazov, 1973; Dzyadyk, 1977)'in sonuçlarından birini, önemini etkilemeyecek şekilde değişik bir biçimde ele alalım.

Lemma 3.5. D tek bağlantılı tümleyene sahip keyfi kontinyum olsun. Kabul edelim ki, $K_0 = \text{const} > 0$, $\xi_0 \in \partial D$, $d > 0$ olmak üzere $Q_n(z)$, $\deg Q_n \leq n$, $n = 1, 2, \dots$, polinomu için bütün $\xi \in \partial D$ noktalarında

$$|Q_n(\xi)| \leq M_0 \left(1 + \left| \frac{\xi - \xi_0}{d} \right|^{S_1} \right), S_1 = \text{sabit} > 0,$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda tüm $S_2 = \text{sabit} > 0$ ve $\xi \in U(\xi_0, d) \cap \text{int } L_{1+\frac{S_2}{n}}$ için,

$S_3 = S_3(S_1, S_2, D) > 0$ olmak üzere

$$|Q_n(z)| \leq S_3 K_0$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.4. Kompleks düzlemde bazı genel kontinyumların özellikleri

Yaklaştıran polinomun türevlerinin değerlendirilmesi ile Bölüm 4.1 de gerçekleştirilen yöntem ayrıca, H^λ sınıfının yaklaşım karakterizasyonunu düzgünlük teriminin de (yani, değerlendirme noktadan bağımsızdır) elde etmeğe imkan vermektedir. Bu durumda ele alınan kontinyum sınıfları, daha da genişlenir. Yani, düzgünlük teriminde daha genel kontinyumlarda H^λ sınıfını yaklaşım karakterizasyonunu elde etmek mümkündür (Dzyadyk, 1966; 1975; 1977; Belyi, 1977; Andrievskii, 1981). Her şeyden önce, bu genel kümelerde Andrievskii (1983) çalışması gereğince

$$d_{1+1/n}(z) = \inf_{z \in \Gamma_{1+1/n}} |\xi - z|$$

terimlerinde fonksiyonların yapısal karakterizasyonunun elde edilmesi mümkün değildir.

Uygun sonuçları ifade etmek için ilk önce bazı yardımcı sonuçları verelim.

Lemma 3.6. $H \subset R$ dahil olması geçerlidir.

İspatı: $D \in H$ olsun. Bu durumda tüm $Z \in \tilde{\Gamma}$ noktaları birinci tür basit uçlarıdır, yani onlar $|Z| = z \in \Gamma = \partial D$ tek noktalı cisme sahiptirler.

Collingwood ve Lohwater (1966) çalışması gereğince bilindiği gibi her bir $Z \in \tilde{\Gamma}$ basit uç $i \rightarrow \infty$ olduğunda r_i çapları sıfıra yakınsayan $\{s_i\}_{i=1,2,\dots}$ dairesel kesitler dizisi ile belirtilebilir (uygun uçları t_i ve t_i^* noktalarıdır). r_i çapları ise $i \rightarrow \infty$ giderken sıfıra gider t_i ve t_i^* noktalarını,

$$\text{mess}(t_i, t_i^*) \preceq |t_i - t_i^*| \leq r_i$$

şartını sağlayan $s(t_i, t_i^*) \subset D$ ile birleştirelim. Böylece $|Z|$ cismi çapı $\preceq r_i$, $i = 1, 2, \dots$, bölgede tutulabilir, tabi ki o bir noktadır.

$z_0 \in \Gamma$ keyfi bir nokta olsun, $Z_0 \in \tilde{\Gamma}$ ise $|Z_0| = z_0$ şartını sağlayan basit uçlardan biri olsun. $t_0 \in \Gamma$ noktasını ve $\mathfrak{Z}_0 \in \tilde{\Gamma}$ basit ucunu ise,

$$|z_0 - t_0| = \sup_{t \in \Gamma} |z_0 - t|, \quad |\mathfrak{Z}_0| = t_0$$

şartından belirleyelim. Z_0 ve $\mathfrak{Z}_0$ basit uçları $\tilde{\Gamma}$ 'yi iki kısma ayırır: $\tilde{\Gamma}^1$ ve $\tilde{\Gamma}^2$. μ ($0 < \mu < \mu_0 = \mu_0(D)$) yeterince küçük olduğunda $\partial \cup(z_0, \delta)$ çemberi üzerinde Z_0 basit ucunu $\mathfrak{Z}_0$ ve ∞ 'dan ayıran en az bir tane $s = s_{z_0}(\mu)$ yayı bulunabilir (diğer bir deyişle s yayı Ω bölgesini iki alt bölgeye böler: bunlardan biri sınırlıdır ve Z_0 basit uca dayanır, diğeri ise sınırsızdır ve $\mathfrak{Z}_0$ basit uca dayanmaktadır). $d(t', \Gamma) \succeq \mu$ koşulunu sağlayan $t' \in s$ noktasının varlığını gösterelim. $z \in s$ olsun $|t - z| = d(z, \Gamma)$ koşulunu sağlayan $t \in \Gamma$ noktayı ele alalım. $[z, t]$ parçası herhangi bir $\mathfrak{Z} \in \tilde{\Gamma}$ basit uçu belirtir. (daha doğrusu $\mathfrak{Z}$ merkezi t noktasında olan ve $[z, t]$ parçası ile kesişen dairesel kesitlerle tanımlanır). s yayı da iki tane basit $Z_1 \in \tilde{\Gamma}^1$ ve $Z_2 \in \tilde{\Gamma}^2$ uçlarını belirler. Burada genel kurallardan sapmayarak, $s = \{\mu e^{i\alpha}, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$ ve $|Z_i| = \mu e^{i\alpha_i}$, $i = 1, 2$. kabul edeceğiz. $d(\mu e^{i\alpha}, \Gamma) = |t - \mu e^{i\alpha}|$ özelliğini sağlayan en az bir tane $t \in \Gamma$ olmak üzere α ların en üst sınırlarını α_0 ile gösterelim. $[\mu e^{i\alpha}, t]$ parçası $\mathfrak{Z} \in \tilde{\Gamma}$ sabit ucu belirler. $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$ eşitsizliği açıktır. $\varepsilon > 0$ küçük bir sayı olsun. $0 \leq \alpha_0 - \beta_1 < \varepsilon$, $0 \leq \beta_2 - \alpha_0 < \varepsilon$ olmak üzere $t_i^* = \mu e^{i\beta_i}$, $i = 1, 2$ noktalarını ele alalım ve bu noktalar içerisinde $d(t_i^*, \Gamma) = |t_i^* - t_i|$ koşulu sağlayan t_i , $i = 1, 2$ noktaları vardır. $[t_i^*, t_i]$ parçası $\mathfrak{Z}_i \in \tilde{\Gamma}^i$ basit ucu belirler. $\gamma = [t_1^*, t_1] \cup [t_2^*, t_2] \cup \{\mu e^{i\alpha} : \beta_1 \leq \alpha \leq \beta_2\}$ yayı ise Z_0 basit ucunu $\mathfrak{Z}_0$ ve ∞ dan ayırmaktadır. Sonuç olarak, $diam \gamma \succeq \mu$ dır. (Bu bağıntı tersini kabul etmekle ispat edilebilir). Şimdi eğer,

$$diam \gamma \leq 2\varepsilon\mu + d(t_1^*, \Gamma) + d(t_2^*, \Gamma) \leq 4\varepsilon\mu + 2d(\mu e^{i\alpha_0}, \Gamma)$$

göz önüne alınırsa, ε sayısının keyfi olmasından dolayı $d(t', \Gamma) \succeq \mu$ eşitsizliği bulunur, burada $t' = \mu e^{i\alpha_0}$ dır.

Yukarıda söylenenlerin sonucu olarak aşağıdaki yazabilir: $\forall z \in \Gamma$ ve $\mu > 0$ en az bir $t \in \partial \cup(z, \mu)$ ve $C = C(D) = \text{const} > 0 : d(t, \Gamma) > C\mu$ olur. Buradan da,

$$\cup(z, C^{-1}\mu) \cap CD_\mu \neq \emptyset; z \in \Gamma, \mu > 0$$

elde edilir.. Böylece $D \in R$ olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.7. D herhangi bir continyum, $z_0, z \in \Omega = CD$, $\tau = \varphi(z)$ ve $\tau_0 = \varphi(z_0)$ olsun.

Eğer $|\tau - \tau_0| < e^{-2\pi} (|\tau_0| - 1)$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$e^{-2\pi} \frac{|\tau - \tau_0|}{|\tau_0| - 1} \leq \frac{|z - z_0|}{d(z_0, \Gamma)} \leq e^{2\pi} \frac{|\tau - \tau_0|}{|\tau_0| - 1} \quad (3.20)$$

İspat: $L = L(z_0, z)$, Ω bölgesinde yerleşen lokal düzlenebilen eğri ailesi olsun ve söz konusu eğrilerin her biri Ω 'yi iki alt bölgeye böler. Bu alt bölgelerden biri sınırlıdır (z ve z_0 noktalarını içerir), diğeri ise sınırı $\Gamma = \partial D$ 'yi içeren sınırsız bölgedir. Sonraki adımlarımız $m(L)$ ve $m[\varphi(L)]$ modülleri için değerlendirmelerinin bulunmasına dayanır (Ahlfors, 1987), burada $m(L)$, L eğriler ailesinin modülü, $m[\varphi(L)]$ ise L eğriler ailesinin φ dönüşümü sonucunda elde edilen $\varphi(L)$ eğri ailesinin modülüdür. $m[\Phi(\Gamma)] = m(\Gamma)$ eşitliği söz konusu değerlendirmelerin karşılaştırmasını sağlar.

Başlangıç için $|z - z_0| < d(z_0, \Gamma)$ olsun.

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(z_0, \Gamma)}{|z - z_0|} \leq m(L) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(z_0, \Gamma)}{|z - z_0|} + 1 \quad (3.21)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim. L eğriler ailesi onun sınırındaki bileşenlerini $\{\xi : |z - z_0| < |\xi - z_0| < d(z_0, L)\}$ dairesel şeritten ayıran eğriler ailesini içerir. Bu nedenle (4.2) değerlendirmesi sol tarafı geçerlidir. (3.21) değerlendirmesinin sağ tarafının doğruluğun ispatlamak için aşağıdaki fonksiyonu ele alalım (Ahlfors, 1987).

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} |\xi - z_0|^{-1}, & |z - z_0| e^{-\pi} \leq |\xi - z_0| e^{\pi} d(z_0, \Gamma) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda

$$M_\alpha(\Gamma) \stackrel{df}{=} \inf_{\gamma \in L} \int_\gamma \alpha(\xi) |d\xi| = 2\pi,$$

olduğu kolayca görünmektedir. Buradan da eğriler ailesinin modülünün tanımına göre (Ahlfors, 1987).

$$m(L) \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{C}} \alpha^2(\xi) d\sigma_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(z_0, \Gamma)}{|z - z_0|} + 1$$

yazılabilir. Şimdi $|z - z_0| \geq d(z_0, \Gamma)$ olsun. Bu durumda ise benzer işlemler yapılarak

$$0 \leq m(L) \leq 1 \quad (3.22)$$

eşitsizliğin doğruluğu gösterilebilir (4.2) eşitsizliğini $|\tau - \tau_0| < |\tau_0| - 1$ olmak üzere $\tau, \tau_0 \in \Omega'$ noktaları için yazalım:

$$0 \leq m[\varphi(L)] - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\tau_0| - 1}{|\tau - \tau_0|} \leq 1. \quad (3.23)$$

Şimdi ise $|\tau - \tau_0| < e^{-2\pi} (|\tau_0| - 1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.4) formülüne göre $m(L) = m[\varphi(L)] > 1$ olur. Buradan da (4.3) ifadesini kullanarak $|z - z_0| < d(z_0, \Gamma)$ eşitsizliğine ulaşabiliriz. (4.2) ve (4.4) eşitsizlikleri gereğince (4.1) elde edilir.

Bölüm 4.2 de sonuçlar

$$\mu(v) = \sup_{z \in \text{int } \Gamma_{1+v}} d(z, D), \quad v > 0,$$

terimininde elde edilmektedir. Şimdi $\mu(v)$ ile ilgili bazı özellikleri inceleyelim.

Lemma 3.8. $\mathfrak{M}$ herhangi continuum olsun bu durumda bütün $u > 0$ ve $C = \text{const} > 1$ için

$$\mu(Cu) \leq 2^{C \exp\{2\pi\}} \mu(v)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : $\arg \tau = \arg \eta$ ve $1 + v = |\tau| < |\eta| = 1 + Cv$ eşitsizliğini sağlayan $\tau, \eta \in \Omega'$ noktalarını göz önüne alalım. $[\tau, \eta]$ aralığının $\tau_0 = \tau, \tau_1, \dots, \tau_m = \eta, |\tau_0| < \dots < |\tau_m|$ noktaları ile $m = \lceil ce^{2\pi} \rceil$ sayıda eşit kısımlara bölelim. $i = 0, \dots, m-1$ olduğunda

$$|\tau_{i+1} - w_i| < e^{-2\pi} v \leq e^{-2\pi} (|\tau_i| - 1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\xi_i = \psi(\tau_i), j = 0, \dots, m$, kabul ederek ve Lemma 3.7' yi kullanarak,

$$d(\xi_m, D) < 2d(\xi_{m-1}, D) < \dots < 2^m d(\xi_0, D) \quad (3.24)$$

bulunur. Şimdi ise $\mu(Cv) = d(\xi, D)$ şartını sağlayan $\xi \in \overline{\text{int } L_{1+Cv}}$ noktayı göz önüne alalım $|\varphi(\xi)| > 1+v$ şartı sıradan bir durum değildir. $\arg \varphi(z) = \arg \varphi(\xi)$ koşullunu sağlayan noktayı $z \in \Gamma_{1+v}$ ile gösterelim. (3.24) eşitsizliğini göz önüne alırsak, aradığımız değer aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mu(Cv) = d(\xi, D) \leq 2^m d(z, D) \leq 2^{C \exp\{2\pi\}} \mu(v)$$

$\xi \in \Omega$ ve $v > 0$ için $\tilde{\xi}_{1+v} = \psi[(1+v)\varphi(\xi)]$ ve $B_v = \text{int } \Gamma_{1+v}$ olsun. Yaklaşım

polinomlarının oluşturulması için $|\xi - \tilde{\xi}_{1+v}|$ 'nin üst sınırının belirlenmesi gerekmektedir.

Bu nedenle aşağıdaki sonuç çok önemlidir:

Lemma 3.9. D herhangi bir continyum $v_0 > 0$ sabit bir sayı ve $C = (1+v_0)e^{2\pi}$ olsun.

Bu durumda bütün $\xi \in B_{v_0} \setminus D_{\mu(Cv)}$, $0 < v < v_0$ noktaları için

$$|\xi - \tilde{\xi}_{1+v}| \leq (1+v_0)^2 \mu(Cv) \quad (3.25)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Her bir not edilmiş v ($0 < v < v_0$) için

$$\varphi_v^*(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - \tilde{\xi}_{1+v}}{\varphi^2(\xi) \mu(Cv)}, & \xi \in \Omega \setminus \{\infty\}; \\ 0, & \xi = \infty \end{cases}$$

fonksiyonu ele alalım. Söz konusu fonksiyon Ω bölgesinde analitiktir. Diğer taraftan eğer $d(\xi, D) = \mu(Cv)$ ise, bu durumda $|\varphi(\xi)| \geq 1+Cv$ eşitsizliği elde edilir. Bu

nedenle Lemma 3.7 'yi ξ ve $\tilde{\xi}_{1+v}$ noktalarını uygularsak, $|\varphi_v^*(\xi)| \leq (1+Cv)^{-2} < 1$ eşitsizliğini elde ederiz. (3.25) eşitsizliğinin ispatı için sadece $\Omega \setminus D_{\mu(Cv)}$ bölgesinde

$\varphi_v^*(\xi)$ fonksiyonu için var olan maksimum modül prensibini kullanmak gerekmektedir.

Gerçekten, eğer $\xi \in B_{v_0} \setminus D_{\mu(Cv)}$ ise ,

$$1 > \frac{|\xi - \tilde{\xi}_{1+v}|}{|\varphi(\xi)|^2 \mu(Cv)} > \frac{|\xi - \tilde{\xi}_{1+v}|}{(1+v_0)^2 \mu(Cv)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (3.25) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3. D herhangi kontinyum $v_0 > 0$ herhangi sabitlenmiş sayı, $C = 2(1 + v_0)e^{2\pi}$ olsun. Bu durumda bütün $n = 1, 2, \dots$, doğal sayıları için ve $\xi \in B_{v_0} \setminus D_{\mu(C/n)}$ için ξ 'ye göre sürekli olan $a_i(\xi)$, $i = 0, \dots, n$, katsayılarıyla (3.13) biçiminde öyle $q_n(\xi, z)$ polinom çekirdeği var ki, $z \in D$ ve $p = 0, 1$, için,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| \leq \mu^2 \left(\frac{1}{n} \right) |\xi - z|^{-l-3}; \quad (3.26)$$

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} q_n(\xi, z) \right| \leq |\xi - z|^{-l-1} \quad (3.27)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

(3.26) ve (3.27) eşitsizliklerinin doğruluğunu gösterelim. Gerçekten n sayısının çok büyük olduğunu varsayalım. Yukarıdaki varsayımlar göz önüne alındığına Lemma 3.63 gereğince $|\xi - \tilde{\xi}_{1+1/n}| \leq \frac{1}{2} d(\xi, D)$ olur. Buradan da $|z - \tilde{\xi}_{1+1/n}| \asymp |z - \xi|$ yazılabilir. $q_n(\xi, z)$ olarak ise $Q_{1,2,3,[n/18]}(\xi, z)$ polinom çekirdeğinin alınması gerekir (Dzyadyk, 1977, s. 429). Bu durumda Lemma 3.8 ve 3.9 dan ve (3.16), (3.17) değerlendirmelerinden (3.26) ve (3.27) eşitsizlikleri elde edilir.

Yaklaşım polinomunun düzgün yaklaşımını incelemek için Mergelyan teoreminin ispat metodunu kullanmak gerekir (Dzyadyk, 1977). Gerçekten, $g(z) \in H^\lambda(D)$ olduğunu kabul edelim. $g(z)$ fonksiyonunu tüm $\mathbb{C}$ kompleks düzleme öyle analitik devam ettirelim ki, (genişletmek) devam ettirilen fonksiyonun (devam ettirilen fonksiyon için gösterim $g(z)$ olarak kalsın) süreklilik modüllü $C\omega(\mu)$, $C = \text{const} > 0$ büyüklüğü ile baskılanmış (majorize) olsun, yani $|g(z_1) - g(z_2)| \leq C\omega(|z_1 - z_2|)$ şartını sağlasın. Fonksiyonun gösterilen özelliğe sahip mümkün olan genişlemelerinden biri (Stein 1973) çalışmasında gösterilmiştir. Sabitlenmiş $n = 1, 2, \dots$ ve $\mu_n \stackrel{df}{=} \mu(1/n)$ için $g(z)$ fonksiyonun μ_n ortalaması olarak bilinen

$$g_n(z) = \frac{1}{\pi \mu_n^2} \iint_{U(z, \mu_n)} g(\xi) d\sigma_\xi, z \in \mathbb{C} \quad (3.28)$$

fonksiyonunu yazalım.

Elde edilen $g_n(z)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Dzyadyk, 1977, s. 341, Lemma 2):

$$|g(z) - g_n(z)| \leq \lambda(\mu_n), \quad z \in \mathbb{C}; \quad (3.29)$$

$$g(z) = g_n(z), \quad z \in D \setminus F_n; \quad (3.30)$$

Buradan $F_n = \{z : d(z, \Omega) < \mu_n\}$ dir. Üstelik bu fonksiyon $g_n(z)$, $z = x + iy$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de sürekli kısmi türevlidir ve onun formalite türevi

$$\left| \frac{\partial g_n(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq \omega(\mu_n) \mu_n^{-1}, \quad z \in C. \quad (3.31)$$

eşitsizliğini sağlar. $g_n(z)$ fonksiyonuna Cauchy-Green formülünü uygulayalım. Bu durumda

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+v_0}} \frac{g_n(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_{F_n \cap B_{v_0}} \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\sigma_\xi}{\xi - z} \quad (3.32)$$

elde ederiz, burada $u_0 > 0$ sabitlenmiş nokta, $z \in B_{v_0}$ dir.

Lemma 3.10. $D \in R$ ve $v_0 > 0$ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda her bir $n=1,2,..$ ve $\xi \in F_n \cap B_{v_0}$ için ζ' ya göre toplanabilir $a_i(\xi)$, $i=0,...,n$, katsayıları ile (3.13 biçimine öyle $q_n(\xi, z)$ polinom çekirdeği var ki, $z \in D$ ve $l=0,1$ için

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| \leq \frac{1}{|\xi - z|^{l+1}} \left[\frac{\mu_n}{|\xi - z| + \mu_n} \right]^2; \quad (3.33)$$

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} q_n(\xi, z) \right| \leq (|\xi - z| + \mu_n)^{-l-1} \quad (3.34)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: n yeteri kadar büyük bir sayı olsun. İspat için $D \in R$ şartından ve sonuç 3.3 den yararlanacağız. $C = 2(1+v_0)e^{2\pi}$ ve $H_n = \overline{F_n} \cap D_{\mu(C/n)}$ olsun. varsayalım $\overline{H_n}$ 'nin kompakt çokluk olması nedeniyle onun içerisinde,

$$\overline{H_n} \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup (\xi_i, \mu_n)$$

koşulunu sağlayan sonlu sayıda $\xi_1, ..., \xi_m \in \overline{H_n}$ noktalarını ayırabiliriz. $D \in R$ olduğuna göre her bir ξ_i , $i=1,...,m$ noktası için,

$$|\xi_i - \xi'_i| \leq \mu_n \quad (3.35)$$

özelliğini sağlayan $\xi'_i \in B_{v_0} \setminus D_{\mu(C/n)}$ noktasını oluşturmak mümkündür. Bu durumda,

$$|\xi'_i - z| \asymp |\xi - z| + \mu_n; \quad z \in D, \quad \xi \in \bigcup (\xi_i, \mu_i) \quad (3.36)$$

bağıntısını sağlanması açıktır.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi'_i - z} + \frac{\xi'_i - \xi}{(\xi'_i - z)^2} + \left(\frac{\xi'_i - \xi}{\xi'_i - z} \right)^2 \frac{1}{\xi - z}$$

özdeşliğini kullanarak $\xi \in \bigcup (\xi_i, \mu_n)$, $i = 1, \dots, m$, için,

$$w_{n,i}(\xi, z) = q_n(\xi'_i, z) + (\xi'_i - \xi) \left(q_{[n/2]}(\xi'_i, z) \right)^2$$

polinom çekirdeğini göz önüne alım, burada $q_n(\xi'_i, z)$ Sonuç 3.3 de verilen polinom fonksiyonlarıdır. Aradığımız $q_n(\xi, z)$ çekirdeğini aşağıdaki kurallara dayanarak verelim:

- a) Eğer $\xi \in \bigcup (\xi_1, \mu_n)$ ise $q_n(\xi, z) = w_{n,1}(\xi, z)$ alınacak;
- b) Eğer $\xi \in \bigcup (\xi_i, \mu_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup (\xi_i, \mu_n)$, $k = 2, \dots, m$, ise $q_n(\xi, z) = w_{n,k}(\xi, z)$ alınacak;
- c) Eğer $\xi \in B_{v_0} \setminus \left[D \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \bigcup (\xi_i, \mu_n) \right) \right]$ ise sonuc 3.3 de verilen polinom

çekirdeğini almak gerekir.

(3.33) ve (3.34) değerlendirmeleri yukarıdaki işlemlerden, (3.26), (3.27), (3.35) ve (3.36) değerlendirmelerinden kolayca elde edilir

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1. Kuasikonform yay üzerinde sürekli olan fonksiyonlar sınıfının yaklaşım karakterizasyonu

$H^\beta(\overline{D})$, $0 < \beta < 1$, sınıflarının yaklaşım karakterizasyonunun elde edilmesinde incelenen D bölgesi daha geniştir (bak. Kolesnik, 1967; Batchaev ve Mamedkhanov, 1980; Andrievskii, 1981; Lavrent'ev, 1963; Shirokov, 1977; Dzyadyk, 1963; Mergelyan, 1962). Hatta $\Gamma^0 = [0,1] \cup [0,i]$ basit yaylarda düz ve ters teoremlerin elde edilmesinde fonksiyona yaklaşan polinom dizisi için bir çok önemli farklı şartlar bulunmaktadır. Böylece, Γ yayının Jordan yayı olması durumunda H^λ sınıfının yaklaşım karakterizasyonunun elde edilmesi problemi merak konusudur. Bu nedenle bu bölümde Γ yayı kvazikonform yay olduğunda H^λ sınıfının yaklaşım karakterizasyonu incelenmektedir. Aşağıdaki teorem geçerlidir (Andrievskii, 1986).

Teorem 4.1. Γ -sonlu kuasikonform bir yay ve $\lambda(u)$ ise süreklilik modülü tipinde fonksiyonu olsun. Bu durumda $g(z) \in H^\lambda(\Gamma)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \Gamma$ 'ler için,

$$|g(z) - p_n(z)| \leq c_1 \lambda \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right], \quad (4.1)$$

$$|p_n'(z)| \leq c_2 \frac{\lambda \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]}{d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)}, \quad (4.2)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\{P_n(z)\}_{n=1,2}$, $\deg P_n \leq n$ polinomlar dizisinin varlığıdır, burada c_i , $i = 1,2$ ler z ve n 'den bağımsız sabitlerdir.

İspat: $g(z) \in H^\lambda(\Gamma)$ ve n yeterince büyük bir sayı olsun. $\mu(z) = d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ notasyonunu yapalım. Andrievskii (1981) çalışmasının sonuçlarına göre (Teorem 1, Lemma 7 ve 8) $g(z)$ fonksiyonunu Γ yayını takip ederek $\overline{\text{int } \Gamma_3}$ 'de tanımlı ve sürekli, $\Omega_3 = (\text{int } \Gamma_3) \setminus \Gamma$ 'de ise sürekli kısmı türevlere sahip olan ve

$$|g(z) - g_n(z)| \leq \lambda[\mu(z)], \quad z \in \Gamma; \quad (4.3)$$

$$|g_n(z) - g_n(\xi)| \leq \lambda[\mu(z)], \quad z \in \Gamma, |z - \xi| \leq \mu(z); \quad (4.4)$$

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \asymp \begin{cases} \mu^{-1}(\xi_\Gamma) \lambda[\mu(\xi_\Gamma)], & \xi \in E_n; \\ d^{-1}(\xi, \Gamma) \lambda[\mu(\xi_\Gamma)], & \xi \in \Omega_3 \setminus E_n; \end{cases} \quad (4.5)$$

şartlarını sağlayan belli bir $g_n(z)$ fonksiyonu ile yaklaştırmak mümkündür, burada

$E_n = (\text{int } \Gamma_{1+1/n}^*) \setminus \Gamma$ dir. Cauchy-Green formülüne göre

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} g_n(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_3} \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \sigma_\xi}{\xi - z}, \quad (4.6)$$

olur, burada $z \in \text{int } \Gamma_3$ dir. Bu durumda $P_n(z)$ yaklaşım polinomu tabi ki,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} g_n(\xi) q_n(\xi, z) d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_3} \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} q_n(\xi, z) d\sigma_\xi \quad (4.7)$$

biçimindedir, burada $z \in \Gamma$ ve $q_n(\xi, z)$ ise lemma 3.4' da verilen (3.13) şeklindeki

çekirdektir. Lemma 3.4 ve (4.3), (4.6) ve (4.7) eşitlikleri gereğince, $z \in \Gamma$ için

$$|g(z) - P_n(z)| \leq \lambda[\mu(z)] + \iint_{\Omega_3} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \frac{\mu^k(z) d\sigma_\xi}{|\xi - z| (|\xi - z| + \mu(z))^k} \quad (4.8)$$

elde ederiz. (4.1) eşitliğinin ispatı için öyle bir $k \geq 1$ sayısı seçilmelidir ki, (4.8) ifadesinin sağ tarafındaki $I(\Omega_3)$ integrali üstten $\lambda[\mu(z)]$ ile değerlendirilmiş olsun.

Bunun için Ω_3 integrallama bölgesini,

$$V_1 = \{\xi : \xi \in \Omega_3, |\xi - z| \leq \mu(z)\};$$

$$V_2 = (\text{int } \Gamma_{1+1/n}^*) \setminus (V_1 \cup \Gamma);$$

$$V_3 = \Omega_3 \setminus (V_1 \cup V_2).$$

biçiminde bölgelere bölelim. Böylece, $I(\Omega_3) = \sum_{i=1}^3 I(V_i)$ olur. Her bir $I(V_i)$, $i=1,2,3$

integralini değerlendirelim. $\xi \in V_1$ olsun. Bu durumda (4.5) formülü, lemma 3.3 ve sonuç 3.1 gereğince,

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \leq \lambda[\mu(\xi_\Gamma)] \mu^{-1}(\xi_\Gamma) \asymp \lambda[\mu(z)] \mu^{-1}(z)$$

olur. Buradan da,

$$I(V_1) \leq \frac{\lambda[\mu(z)]}{\mu(z)} \iint_{V_1} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|} \leq \lambda[\mu(z)]. \quad (4.9)$$

elde edilir.

Şimdi ise $\xi \in V_2$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi} \right| \preceq \frac{\lambda[\mu(\xi_\Gamma)]}{\mu(\xi_\Gamma)} \preceq \frac{\lambda(\mu(z))|\xi - z|^{p-1}}{[\mu(z)]^{1+p-1}} \quad (4.10)$$

eşitsizliği doğrudur, burada $p > 0$, (3.10) eşitsizliğinde verilen sabittir.

Gerçekten, eğer $|\xi - z| \leq \mu(z)$ ise $|\xi - z| \asymp \mu(z)$ olur. Bu durumda (4.10) eşitsizliği (3.6) ve (4.5) bağıntılarından elde edilir. Eğer $|\xi_\Gamma - z| > \mu(z)$ ise bu durumda $|\xi - z| \asymp |\xi_\Gamma - z|$ olur ve (3.10) eşitsizliğini kullanarak,

$$\frac{\lambda[\mu(\xi_\Gamma)]}{\mu(\xi_\Gamma)} \preceq \frac{\lambda(|\xi - z|)|\xi - z|}{|\xi - z|\mu(\xi_\Gamma)} \preceq \frac{\lambda[\mu(z)]}{\mu(z)} \frac{|\xi_\Gamma - z|^{p-1}}{|\mu(z)|} \asymp \frac{\lambda[\mu(z)]|\xi - z|^{p-1}}{[\mu(z)]^{1+p-1}}$$

elde edilir.

Böylece, $k > 1 + p^{-1}$ için,

$$\begin{aligned} I(V_2) &\preceq \frac{\lambda[\mu(z)]}{[\mu(z)]^{1+p^{-1}-k}} \iint_{V_2} \frac{d\delta_\xi}{|\xi - z|^{1+k-p^{-1}}} \\ &\preceq \frac{\lambda[\mu(z)]}{[\mu(z)]^{1+p^{-1}-k}} \int_{\mu(z)}^{+\infty} \frac{dt}{t^{k-p^{-1}}} \asymp \lambda[\mu(z)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

değerlendirilmesi bulunur.

Son olarak $\xi \in V_3$ olsun. Önceki yaptıklarımıza benzer işlemler yaparak,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi} \right| &\preceq \frac{\lambda[d(\xi, \Gamma)]}{d(\xi, \Gamma)} \preceq \frac{\lambda[\mu(z)]|\xi - z|^{p-1}}{[\mu(z)]^{1+p-1}}; \\ I(V_3) &\preceq \lambda[\mu(z)], \quad k > 1 + p^{-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde ederiz. (4.8), (4.9), (4.11) ve (4.12) değerlendirmelerinden (4.1) eşitsizliğine ulaşabiliriz.

Şimdi (4.2) eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamaya çalışalım. $z \in \Gamma$ olsun.

$U = \{\xi : |\xi - z| < \mu(z)\}$, $l = \partial U$, olsun. bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\left| P'_n(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} g_n(\xi) \frac{\partial q_n(\xi, z)}{\partial z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_3} \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial q_n(\xi, z)}{\partial z} d\sigma_\xi \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi} \iint_V \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \cdot \left| \frac{\partial q_n(\xi, z)}{\partial z} \right| d\sigma_\xi + \frac{1}{2\pi} \int_I \frac{|g_n(\xi) - g_n(z)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} |g_n(\xi)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| |d\xi| \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_3 \setminus U} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| d\sigma_\xi.
\end{aligned}$$

Lemma 3.4, (4.4) ve (4.5) değerlendirmelerden yararlanarak, (4.1) eşitsizliğinin ispatındaki işlemleri tekrar yaparak, (4.2) eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi ise $g \in H^\lambda$ olması için (4.1) ve (4.2) koşullarının yeterliliğini gösterelim. $\mu > 0$ yeterli kadar küçük bir sayı olsun. $|\xi - z| \leq \mu$ özelliğini sağlayan $\xi, z \in \Gamma$ noktalarını ele alalım. n ile $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \leq \mu$ şartını sağlayan en küçük doğal sayıyı işaretleyelim. (3.11) eşitsizliğine göre $d_{1+\frac{1}{n}}^* \asymp \mu$ olur. Genel kuralardan sapmayarak, $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) = d_{1+1/n}^1(z)$ olduğunu varsayalım. z ve ξ noktalarını $mes s(z, \xi) \preceq |z - \xi|$ özelliğini sağlayan $s(z, \xi) \subset \overline{\Omega}^1$ yayıyla birleştirelim. (böyle bir yayın varlığı Belyi, 1977, lemma 8 de gösterilmiştir).

(4.1) ve (4.2) eşitsizliğini sağlayan $P_n(\zeta)$ polinomu için aşağıdaki değerlendirme vardır:

$$|P_n(\zeta)| \preceq \frac{\lambda(\mu)}{\mu} \left(1 + \left| \frac{\zeta - z}{\mu} \right|^{p-1} \right),$$

buradaki $p > 0$ sabiti (3.10) eşitsizliğinde belirtilmiş sabittir. Sonuç olarak, lemma 3.60' ı göz önüne alırsak,

$$|P_n'(\xi)| \preceq \lambda(\mu) \mu^{-1}, \quad \xi \in s(z, \xi)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$|g(z) - g(\xi)| \leq |g(z) - P_n(z)| + \left| \int_{s(z, \xi)} P_n'(\zeta) d\zeta \right| + |P_n(\xi) - g(\xi)| \preceq \lambda(\mu)$$

eşitsizliğinden $g \in H^\lambda$ olduğu elde edilir. Teorem 4.1'in ispatı tamamlanmış olur.

(4.1) eşitsizliğini sağlayan polinomlar dizisinin varlığı, yay üzerinde yaklaşım teorisinin düz teoremleri için standart bir koşuldur (Dzyadyk, 1977; Lebedev, 1971; Kolesnik, 1967; Batchaev ve Mamedkhanov, 1980; Andrievskii, 1981). Bu koşulu her H^β , $0 < \beta < 1$ sınıfı için lokal olarak iyileştirmek mümkün değildir. Uygun sonucu formüle edelim (Andrievskii, 1986):

Teorem 4.2. Γ - sonlu ve kuasidüzgün (yarıdüzgün) bir yay olsun. Bu durumda her $\xi \in \Gamma$, $0 < \beta < 1$, $C > 0$ ve $n = 1, 2, \dots$ için öyle bir $g(z) = g_{\xi, \beta, C, n}(z) \in 1H^\lambda$ fonksiyonu vardır ki, her $z \in \Gamma$ için,

$$|g(z) - P_n(z)| \leq C \left(|z - \xi|^\beta + \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]^\beta \right) \quad (4.13)$$

şartını sağlayan ve derecesi n ' yi aşmayan $P_n(z)$ polinomu için,

$$\sup_{\substack{z \in \Gamma \\ |z - \xi| \leq d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)}} \frac{|g(z) - P_n(z)|}{\left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]^\beta} \geq C_1 \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlansın, burada $C_1 = C_1(\Gamma, \beta, C) > 0$ olmak üzere bir sabittir.

İspat: $\zeta \in \Gamma$ ve n ' nin çok büyük olduğunu kabul edelim $\gamma_0 \subset \Gamma$ ile Γ üzerinde bulunan $|\zeta - \xi| \leq d_{1+\frac{1}{n}}^*(\xi)$ özelliğine sahip ve bütün $\xi \in \Gamma$ noktalarını içeren en küçük yayı işaretleyelim. ξ_1 ve ξ_2 söz konusu yayın uç noktaları olsun. Γ kuasidüzgün yay olduğuna göre,

$$mes \gamma_0 \asymp diam \gamma_0 \asymp |\xi_1 - \xi_2|$$

yazılabilir. $|\xi_0 - \xi_1| = |\xi_0 - \xi_2|$ koşullunu sağlayan herhangi bir $\xi_0 \in \gamma_0$ noktasını ele alalım. (3.9) ifadesine göre,

$$\mu = d_{1+\frac{1}{n}}^*(\xi) \asymp_{1+\frac{1}{n}}^*(\zeta), \zeta \in \gamma_0 \quad (4.15)$$

bağıntısı geçerlidir.

$Z_j^i \in \widetilde{\Gamma}^i$, $j = 0, 1, 2$, $i = 1, 2$ cismi ξ_j olan basit bir uç olsun. $\tau_j^i = \psi(Z_j^i)$ işaretleyelim. Uçları τ_1^i ve τ_2^i noktalarında ve çember üzerinde olan öyle bir $\gamma_i' \subset \bar{\Omega}_i'$ yayını göz önüne alalım ki, söz konusu çemberin merkezi τ_1^i ve τ_2^i noktaları ile ayrılan birim

çemberinin iki yayından en küçüğünün merkezinde olsun. $\gamma_i = \psi(\gamma'_i)$ olsun. lemma 3.2 gereğince $|\tau_0^i - \tau_1^i| \asymp |\tau_0^i - \tau_2^i|$ olur. Sonuç olarak,

$$|\zeta - \xi_0| \asymp \mu, \zeta \in \gamma_i, i = 1, 2,$$

bağıntısı elde edilir. γ_i yayları düzeltilebilirdir ve onların uzunluğu ise lemma 3.2' e, (3.5) bağıntısına ve (Andrievskii, 1980) çalışmasındaki lemma 6'ya göre aşağıdaki gibi değerlendirilir :

$$\begin{aligned} \text{mess}_i &= \int_{s_i} |d\zeta| = \int_{s'} |\psi'(\tau)| |d\tau| \\ &\asymp \int_{\gamma_1} \frac{d(\zeta, \Gamma)}{|\tau| - 1} |d\tau| \asymp \mu \int_{\gamma_1} \frac{|\zeta - \zeta_\Gamma|}{|\zeta - \xi_0|} \frac{|d\tau|}{|\tau| - 1} \\ &\preceq \mu \int_{\gamma'_1} \frac{|\tau| - 1}{|\tau - \tau_0^i|} \frac{|d\tau|}{|\tau| - 1} \preceq \frac{\mu}{|\tau_1^i - \tau_2^i|} \int_0^{|\tau_1^i - \tau_2^i|} \frac{dv}{v^{1-s_1}} \asymp \mu \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kesinliği için $d_{1+\frac{1}{n}}^*(\xi_0) = d_{1+\frac{1}{n}}^1(\xi_0)$ kabul edelim.

$$L_i = \{\zeta : \zeta \in \Omega, \arg \varphi(\zeta) = \arg \tau_0^i\}, j = 1, 2.$$

gösterelim. $g(z) = g_{\alpha, \xi_0}(z)$ ile $C_2(z - \xi_0)^\beta$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \setminus \bar{L}_1$ de keyfi bir değerli dallarından birini işaretleyelim, burada $g \in 1H^\beta$ olması için $C_2 = C_2(\alpha, \Gamma)$ sabiti yeterli kadar küçük seçilmiştir (Γ yayı kuasidüzgün yay olduğuna göre böyle sabiti seçmek mümkündür). L_2 üzerinde $|\xi_0 - \xi'| = \varepsilon\mu$ özelliğini sağlayan öyle bir ξ' noktasını seçelim ki, γ_2 yayı Z_0^2 basit ucunu ve ξ' noktasını ∞ ' dan ayırmış olsun. $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \Gamma) > 0$ sabitlerinin yeterince küçük olmaları hakkındaki ilave sınırlamalar aşağıda verilecektir. (3.5) bağıntısına göre $d(\xi', \Gamma) \asymp |\xi_0 - \xi'|$ yazılabilir. Kabul edelim ki, $P_n(z)$ polinomu (4.13) koşulunu sağlamaktadır. $\gamma_j, j = 0, 1, 2$ yaylarının uygun yönleri seçildiğinde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\pi i g'(\xi') = \int_{\gamma_2} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \xi')^2} + \int_{\gamma_0} \frac{g(\zeta) - P_n(\zeta)}{(\zeta - \xi')^2} d\zeta + \int_{\gamma_1} \frac{P_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \xi')^2}.$$

$z \in \Gamma$ için

$$|P_n(z)| \leq |g(z) - P_n(z)| + |g(z)| \leq C_3(|z - \xi|^\beta + \mu^\beta)$$

eşitsizliği sağlandığına göre, Lemma 3.5 gereğince

$$|P_n(z)| \leq C_4 \mu^\beta, \quad z \in \gamma_1, \quad C_4 = C_4(\alpha, \Gamma) > 0$$

değerlendirmesi geçerlidir. $d = \sup_{z \in \gamma_0} |g(z) - P_n(z)|$ rotasyonu yapalım ve yeterince küçük ε değerleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$2\pi |g'(\xi')| = \frac{\alpha C_2 2\pi}{(\varepsilon \mu)^{1-\beta}} \leq \frac{C_5 \mu^{\beta-1}}{(C_6 - \varepsilon)^2} + \frac{C_7 d}{\varepsilon^2 \delta} + \frac{C_9 \mu^{\beta-1}}{(C_8 - \varepsilon)^2},$$

burada ε 'nin uygun seçilmesi ile,

$$\frac{C_7 d}{\varepsilon^{1+\beta} \delta^\beta} \geq \beta C_2 2\pi - \frac{C_5 \varepsilon^{1-\beta}}{(C_6 - \varepsilon)^2} - \frac{C_9 \varepsilon^{1-\beta}}{(C_8 - \varepsilon)^2} \geq C_2 \beta$$

eşitsizliğine ulaşır. Buradan da (4.15) bağıntısı kullanılırsa, (4.14) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1. Γ -sonlu kuasidüzgün yay,

$$E_n(g, \Gamma) = \inf_{\{P_n\}} \max_{z \in \Gamma} |g(z) - P_n(z)|$$

se Γ üzerinde $g(z) \in A(\Gamma)$ fonksiyonun en iyi düzgün polinomsal yaklaşımı ve

$d_n = \sup_{z \in \Gamma} d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ olsun. Teorem 4.1' den $g(z) \in H^\beta(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$ için $E_n(g, \Gamma) \preceq d_n^\beta$

değerlendirmesi elde edilir. Diğer taraftan teorem 4.2' den kolaylıkla, istenilen

$n = 1, 2, \dots$ ve belirlenmiş β ($0 < \beta < 1$) için $E_n(g_0, \Gamma) \geq c d_n^\beta$ şartı sağlayan

$g_0(z) \in 1H^\beta(\Gamma)$ fonksiyonunun varlığı elde edilir. Elde edilen bu sonuç gösterir ki, her

bir kvazidüzgün yay ve H^β , $0 < \beta < 1$ Hölder sınıfı için (4.1) eşitsizliğinden elde edilen polinomsal yaklaşımın düzgün değerlendirilmesi iyileştirilemez.

Diğer taraftan yaklaşım polinomlarla ilgili,

$$|f(z) - P_n(z)| \preceq \left[d_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \right]^\beta, \quad z \in \Gamma, \quad n = 1, 2, \dots,$$

özelliğinin sağlanması, hiçbir $0 < \beta < 1$ değerinde genel olarak, $g(z) \in H^\beta(\Gamma)$ olması

için yeterli değildir. Teorem 4.1 'den görüldüğü gibi H^λ sınıfının yapısal tasviri için

ilave olarak, fonksiyona yaklaşan polinomun türevi ile ilgili (4.2) şartının verilmek gerekir.

4.2. Kompleks düzlemde bazı genel kontinyumlarda düzgün değerlendirme

cinsinden H^λ sınıfının yaklaşım karakterizasyonu

Teorem 4.3. $D \in R$ ve $g(z) \in H^\lambda(D)$ olsun. Bu durumda derecesi n 'yi aşmayan öyle $\{P_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ polinomlar dizisi vardır ki, $z \in D$ ve $n=1,2,\dots$ için,

$$|g(z) - P_n(z)| \leq c_1 \lambda(\mu_n), \quad (4.17)$$

$$|P'_n(z)| \leq c_2 \lambda(\mu_n) \mu_n^{-1} \quad (4.18)$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada $c_i \geq 0, i=1,2$, sabitleri z ve n 'ye bağlı olmayan sabitlerdir.

İspat: (3.29) ve (3.32) formüllerine dayanarak aradığımız polinomal aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} g_n(\xi) \pi_n(\xi, z) d\xi \\ - \frac{1}{\pi} \iint_{F_n \cap B_1} \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} q_n(\xi, z) d\sigma_\xi; \quad z \in D, \quad n=1,2,\dots,$$

burada $q_n(\xi, z)$ Lemma 3.10 da gösterilen $u_0 = 1$ durumu için çok terimli çekirdektir.

(4.17) eşitsizliğini kanıtlayalım. $z \in D$ olsun ve $W_n = F_n \cap B_1$ ve $U_n = U(z, \mu_n)$ olsun.

Lemma 3.10 ve (3.29), (3.31) eşitsizliklerinden,

$$|g(z) - P_n(z)| \leq |g(z) - g_n(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} |g_n(\xi)| \cdot \left| \frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right| |d\xi| \\ + \frac{1}{\pi} \iint_{W_n} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right| d\sigma_\xi \\ \preceq \lambda(\mu_n) + \mu_n^2 + \frac{\lambda(\mu_n)}{\mu_n} \iint_{U_n} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|} + \lambda(\mu_n) \mu_n \iint_{W_n \setminus U_n} \frac{d\sigma_\xi}{|\psi - z|^3} \preceq \lambda(\mu_n)$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemlere benzer yaparak, $z \in D$ ve $\zeta \in \partial U_n \stackrel{def}{=} \gamma_n$ için, açık olan

$$|g_n(\zeta) - g(z)| \leq |g_n(\xi) - g(\xi)| + |g(\xi) - g(z)| \preceq \lambda(\mu_n)$$

eşitsizliği kullanarak. $z \in D$ için,

$$|P'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \frac{|g_n(\xi) - g(z)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| + \frac{1}{\pi} \iint_{U_n} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| \left| \frac{\partial}{\partial z} q_n(\xi, z) \right| d\sigma_\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} |g_n(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| |d\xi| \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{W_n \setminus U_n} \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi} \right| \left| \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\xi - z} - q_n(\xi, z) \right] \right| d\sigma_\xi \preceq \frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n}
\end{aligned}$$

bulunur. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 de gösterilen polinomların (4.17) özelliğine sahip olması ayrıca merak konusudur. Mergelyan'ın (1962) çalışmasında aşağıda sonuç formüle edinmiştir:

$\forall g \in H^\omega$ için derecesi $\leq n$ olan öyle $\{P_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ polinomlar dizisi var ki,

$$|g(z) - P_n(z)| \leq c\omega \left[d^* \left(\frac{\ln(n+1)}{n} \right) \right] \quad (4.19)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $z \in D$ ve $d^*(u) = \sup_{z \in \partial D} d_{1+u}(z)$, $u > 0$ dır. Fakat, söz konusu sonuç $\Gamma^0 = [0,1] \cup [0,i]$ basit yaylarda bile geçerli değildir. Gerçekten, bu durumda $d^*(u) \asymp u$ olduğu için (4.20) ifadesine göre $g \in H^{1/2}$ fonksiyonu için,

$$E_n(g, \Gamma^0) \preceq \left(\frac{\ln(n+1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

değerlendirilmesi doğrudur. Diğer taraftan Dzyadyk (1977, s.478) çalışmasında bir örnek olarak, öyle $g_0(z) \in H^{1/2}(\Gamma^0)$ fonksiyonu gösterilmiştir ki, hiçbir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|g_0(z) - P_n(z)| \preceq n^{-\frac{1}{4}-\varepsilon}.$$

özelliğini sağlayan, derecesi $\leq n$ olan $\{P_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ polinomlar dizisi bulunmamaktadır. Bu ise (4.20) ile çelişir.

$D \in R$ olduğunda $d^*(1/n)$ terimininden μ_n teriminine geçiş yaparak, Mergelyan sonuçlarındaki belirsizlik giderilebilir ve sonuc 4.3'e göre, $\Gamma = D$ keyfi kuasidüzgün bir yay olduğunda, her bir H^α , $0 < \alpha < 1$ Hölder sınıflarında iyileşmeyen $E_n(g, D)$ için değerlendirme elde edilir. Fakat, sıfır açılı yay üzerindeki yaklaşım yönteminin oluşturduğu etki merak konusudur.

$$\Gamma^* = \left\{ \xi : |\xi - i| = 1, \frac{3\pi}{2} \leq \arg(\xi - i) \leq 2\pi \right\}$$

$$\cup \left\{ \xi : |\xi + i| = 1, 0 \leq \arg(\xi + i) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Jordan yayını göz önüne alalım. Basit hesaplamalarla aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\mu_n \asymp \ln^{-2}(n+1), \quad d_n = \sup_{z \in \Gamma^*} d_{1+1/n}^*(z) \asymp \ln^{-1}(n+1)$$

Böylece, Teorem 4.3 in $\Gamma^*(\in R)$ yayına uygulanması ile bulunan $E_n(g, \Gamma^*)$ en iyi yaklaşımın değeri, (4.1) formülünün uygulanması ile bulunan değerden daha iyidir. Şu olay gösterir ki, ele alınan yay için kuasikonformluk şartı bozulursa, bu tür yaylar için (4.1) tipinde değerlendirme optimal değildir. Aşağıdaki teorem geçerlidir (Andrievskii 1986):

Teorem 4.4. $D \in H$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $g(z) \in H^\lambda(D)$ olması, $z \in D$ ve $n = 1, 2, \dots$ için (4.17) ve (4.18) koşullarını sağlayan derecesi n 'yi aşmayan $\{P_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ polinomlar dizisinin varlığına denktir

İspat: Kabul edelim ki, $g \in H^\lambda$ dir. Bu durumda (4.18) ve (4.19) özelliğine sahip polinomlar dizisinin varlığı Lemma 3.7 ve Teorem 4.3 den elde edilir. Teoremin yeterliliği aşağıdaki standart argümanlara dayanarak ispat edilir: $z_1, z_2 \in D$ ve $|z_1 - z_2| < \varepsilon$ (burada ε yeterince küçük bir sayıdır) şartı sağlansın. $D \in H$ olduğuna göre bu noktaları

$$\text{mes} \Gamma(z_1, z_2) \leq C |z_1 - z_2|, \quad C = C(D) \geq 1$$

özelliğine sahip $\Gamma(z_1, z_2) \subset D$ yayı ile birleştirelim ve $\mu_{n+1} < |z_1 - z_2| \leq \mu_n$ koşullundan n doğal sayısını seçelim. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\begin{aligned} |g(z_1) - g(z_2)| &\leq |g(z_1) - P_n(z_1)| + \int_{\Gamma(z_1, z_2)} |P_n'(\xi)| |d\xi| + |g(z_2) - P_n(z_2)| \\ &\leq \lambda(\mu_n) \leq \lambda(|z_1 - z_2|). \end{aligned}$$

z_1 ve z_2 noktaları keyfi seçildiğine göre $g \in H^\lambda$ elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.3. $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfında polinomlarla yaklaşım

Kompleks düzlemde bulunan yayın uçlarına bağlı olarak fonksiyonların yaklaşımının incelenmesi yaklaşım teorisinde önem arz etmektedir.

Benzer problemler, hem iç, hem de dış dönüş noktalarına sahip olan kapalı eğrilerde de incelenebilir. Özellikle iç dönüş noktasına sahip sınırlı bölgelerde $D_\alpha^\beta(\Gamma)$ sınıfından olan fonksiyonların yaklaşım problemleri ilgi çekicidir.

Benzer problemler singüler integrallerle ilgili Musheleshvili (1968), Guseynov (1948), Babaev (1966), Salaev (1976) ve birçok bilim adamının çalışmalarında incelenmiştir.

Bu bölümde kompleks düzlemde bulunan eğrinin uç noktalarına bağlı olarak $A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ fonksiyon sınıfının en iyi yaklaşım problemi incelenmektedir.

Esas sonuçların ispatında aşağıdaki teorem kullanılmaktadır:

Teorem 4.5. Γ kapalı kuasidüzgün bir eğri ve $g \in H^\beta(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda her bir doğal n sayısı için derecesi n ' den küçük veya eşit olan öyle $R_n(z)$ rasyonel fonksiyonu var ki,

$$|g(z) - R_n(z)| \leq c \left(d^\beta \left(z, \frac{1}{n} \right) + d_1^\beta \left(z, \frac{1}{n} \right) \right)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $d \left(z, \frac{1}{n} \right)$, $z \in \Gamma$ noktasından $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ seviye eğrisine kadar

olan uzaklık, $d_1 \left(z, \frac{1}{n} \right)$ ise $z \in \Gamma$ noktasından $\Gamma_{1-\frac{1}{n+1}}$ seviye eğrisine kadar olan

uzaklıktır (Mamedkhanov, 1981).

Aşağıdaki teorem doğrudur:

Teorem 4.6. Γ kompleks düzlemde bulunan K - kuasi (yarım) düzgün yay ve $g(z) \in A_{a,b}^\alpha(\Gamma)$ olsun. Bu durumda her bir doğal n sayısı için derecesi n 'yi aşmayan öyle bir $P_n(z)$ polinomu var ki,

$$|g(z) - P_n(z)| \leq \frac{\left[d_{1+\frac{1}{n}}^1(z) \right]^\alpha}{\left| \sqrt{\tilde{z}_+^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|^\alpha} + \frac{\left[d_{1+\frac{1}{n}}^2(z) \right]^\alpha}{\left| \sqrt{\tilde{z}_-^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|^\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\tilde{z}_{\pm} = \Psi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi^{\pm}(z)\right)$ dir, φ fonksiyonu Γ yayının dışını γ_0 bir dairesinin dışına dönüştürür ve ψ fonksiyonu ise tersine, yani, γ_0 bir dairesinin dışını, Γ yayının dışına dönüştürür.

İspat:

$$z = \tau + \frac{1}{\tau} \left(\tau = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - 1} \right)$$

fonksiyon yardımıyla z düzlemini τ düzlemine dönüştürelim. Açıktır ki, bu durumda Γ yayının dış kısmı τ düzleminde bulunan kapalı K - kuasidüzgün C eğrisinin dışına veya içine içine dönüşmüş olur. Genelliği bozmadan kabul edelim ki, $z = 0$ nokta kapalı C eğrisinin içinde bulunmaktadır. Bu dönüşüm zamanı $f(z)$ fonksiyonu

$$g^*(\tau) = g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) = g(z), z \in C$$

fonksiyonuna dönüşmüş olur.

Not edelim ki, eğer $g(z) \in A^{\alpha}(\Gamma)$ ise $g^*(\tau) \in H^{\alpha}(\Gamma)$, $(0 < \alpha \leq 1)$ olur. Gerçekten, eğer

$$|g(z_1) - g(z_2)| \preceq \frac{|z_1 - z_2|^{\alpha}}{\left|\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4}\right|}$$

eşitsizliğinin sağ tarafını

$$\left|\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4} + z_1 + z_2\right|^{\alpha} \asymp 1$$

ifadesine çarparsak ve bölersek aşağıdakini elde ederiz:

$$|g(z_1) - g(z_2)| \preceq |z_1 - z_2|^{\alpha} \frac{\left|\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4} + z_1 + z_2\right|^{\alpha}}{\left|\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4}\right|^{\alpha}}.$$

Eğer yukardaki, bağıntıda $z_1 = \tau_1 + \frac{1}{\tau_1}$ ve $z_2 = \tau_2 + \frac{1}{\tau_2}$ değişken değiştirmeler kullanırsa,

$$|g^*(\tau_1) - g^*(\tau_2)| \preceq |\tau_1 - \tau_2|^{\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $g^*(\tau) \in H^{\alpha}(C)$ olduğunu gösterir.

Bu durumda Teorem 4.5 gereğince, $g^*(\tau)$ fonksiyonu için derecesi n 'yi aşmayan

$$R_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$$

biçiminde öyle $R_n(z)$ rasyonel fonksiyonu var ki,

$$|g^*(\tau) - R_n(\tau)| \leq d^\alpha\left(\tau, \frac{1}{n}\right) + d_1^\alpha\left(\tau, \frac{1}{n}\right) \quad (4.21)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $d\left(\tau, \frac{1}{n}\right)$, $\tau \in C$ noktasından dış $C_{1+\frac{1}{n}}$ seviye eğrisine kadar olan uzaklıktır, $d_1\left(\tau, \frac{1}{n}\right)$ ise $\tau \in C$ noktasından iç $C_{1-\frac{1}{n+1}}$ seviye eğrisine kadar olan uzaklıktır.

Keyfi kuasidüzgün eğriler için

$$d\left(\tau, \frac{1}{n}\right) \asymp |\tilde{\tau} - \tau|, \quad d_1\left(\tau, \frac{1}{n}\right) \asymp |\tilde{\tau}_1 - \tau| \quad (4.22)$$

bağıntıları geçerlidir, burada $\tilde{\tau} = \Psi_1\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_1(\tau)\right)$ dir, φ_1 fonksiyonu C eğrisinin dışını γ_0 birim çemberinin dışına dönüştürür, Ψ_1 fonksiyonu ise γ_0 birim çemberinin dışını C eğrisinin dışına dönüştürür.

Yukarda ifade edilenler gereğince (4.21) eşitsizliği

$$\left|g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) - R_n(\tau)\right| \leq |\tilde{\tau} - \tau|^\alpha + |\tilde{\tau}_1 - \tau|^\alpha \quad (4.23)$$

biçiminde yazılır. Yukardaki eşitsizlikte τ yerine $\frac{1}{\tau}$ yazılırsa,

$$\left|g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) - R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)\right| \leq |\tilde{\tau}_1 - \tau|^\alpha + \left|\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right|^\alpha \asymp |\tilde{\tau}_1 - \tau|^\alpha + |\tilde{\tau} - \tau| \quad (4.24)$$

elde edilir. Not edelim ki, τ yerine $\frac{1}{\tau}$ yazıldığında $\tilde{\tau} \rightarrow \frac{1}{\tau_1}, \tilde{\tau}_1 \rightarrow \frac{1}{\tau}$ olur. Bu özellik,

(4.24) bağıntısını elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Sonuç olarak, (4.23) ve (4.24) bağıntıları toplanırsa,

$$\left|g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) - \frac{R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)}{2}\right| \leq |\tilde{\tau} - \tau|^\alpha + |\tilde{\tau}_1 - \tau|^\alpha \quad (4.25)$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi gösterelim ki,

$$\frac{R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)}{2}$$

fonksiyonu $\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$ değişkenine göre n . dereceden bir polinomdur.

$$R_n(\tau) = \sum_{k=-n}^n c_k \tau^k \quad \text{ve} \quad R_n\left(\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{k=-n}^n c_k \tau^{-k} \quad \text{eşitliklerinden}$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{c_k + c_{-k}}{2} \left(\tau^k + \frac{1}{\tau^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\tau^k + \tau^{-k} \right) = a_0 + a_1 \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) + \dots + a_{n-1} \left(\tau^{n-1} + \frac{1}{\tau^{n-1}} \right) + a_n \left(\tau^n + \frac{1}{\tau^n} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. Eğer ardışık olarak

$$\tau^k + \tau^{-k} = \left(\tau + \tau^{-1} \right)^k + b_1 \left(\tau^{k-1} + \frac{1}{\tau^{k-1}} \right) + \dots + b_{k-1} \left(\tau - \tau^{-1} \right), k = n, n-1, \dots \quad (4.27)$$

Newton – Binom formülü kullanılırsa , (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden

$$\frac{R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)}{2} = P_n\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$$

bulunur. Bu ise gösterir ki,

$$\frac{R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)}{2}$$

ifadesi $\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$ değişkenine göre n . dereceden bir polinomdur. Bu durumda (4.25)

eşitliğinden

$$\left| g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) - P_n\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) \right| \preceq |\tilde{\tau} - \tau|^\alpha + |\tilde{\tau}_1 - \tau|^\alpha \quad (4.28)$$

elde edilir.

Şimdi gösterelim ki, $z = \tau + \tau^{-1}$ dönüşümü

$$\tilde{z} = \tilde{\tau} + \tilde{\tau}^{-1} \quad \text{ve} \quad \tilde{z}_- = \tilde{\tau}_1 \left(\frac{1}{n+1} \right) + \tilde{\tau}_1^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \quad (4.29)$$

bağlantılarını gerektirir, burada

$$\tilde{z}_- \left(\frac{1}{m} \right) = \psi \left(\left(1 + \frac{1}{m} \right) \varphi^{-1}(z) \right), \quad z \in \Gamma$$

dir, φ ve ψ fonksiyonları belli bir normallaştırılmış şartlar altında Γ yayının dışını w kompleks düzlemde γ_0 birim çemberinin dışına dönüştürür.

İlk önce gösterelim ki, $z = \tau + \tau^{-1}$ dönüşümü $\tilde{z} = \tilde{\tau} + \tilde{\tau}^{-1}$ dönüşümünü gerektirir. Bunun için φ ve φ_1 , ψ ve ψ_1 fonksiyonları arasındaki bağıntıları bulalım. Bu bağıntılar açıktır ki aşağıdaki şekildedir:

$$\psi_1(\tau) = \varphi\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) = \varphi(z), \quad \psi(w) = \psi_1(w) + \frac{1}{\psi(w)} \quad (4.30)$$

Gerçekten, $\tau \in C$ olsun. Şu noktayı γ_0 birim çemberine 2 yöntem ile dönüştürmek mümkündür.

1. Doğrudan doğruya $w = \varphi_1(z)$ fonksiyonu yardımıyla ;
2. Ardışık dönüşümler yardımıyla ilk önce z düzleminde (yani Γ - yayına) $z = \tau + \tau^{-1}$ fonksiyonu yardımıyla, daha sonra ise $w = \varphi(z)$ fonksiyonu yardımıyla γ_0 birim çemberine dönüşümü gerçekleştirmek gerekir, sonuçta

$$\varphi_1(\tau) = \varphi\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) \quad (z = \tau + \tau^{-1})$$

elde edilir. Buradan (4.30) bağıntısının birincisi ispat edilmiş olur.

(4.30) bağıntısında ikinci formülü ispat etmek için $w \in \gamma_0$ noktasını alalım. Şu noktanın iki yöntem ile Γ yayında dönüşümünü bulalım.

1. $z = \varphi(w)$ fonksiyonu yardımıyla;
2. Ardışık dönüşümler yardımıyla: İlk önce $z = \psi_1(w)$ dönüşümü yardımıyla τ düzlemine (yani, C eğrisine), daha sonra $z = \tau + \tau^{-1}$ fonksiyonu yardımıyla z düzlemine (yani, Γ yayına) dönüştürmek .

Sonuçta

$$\psi(w) = \psi(w) + \psi_1^{-1}(w)$$

dönüşümü elde edilir.

Dolayısıyla, (4.30) bağıntısı tam ispat edildi.

Şimdi gösterelim ki, $z = \tau + \tau^{-1}$ dönüşümü $\tilde{z} = \tilde{\tau} + \tilde{\tau}^{-1}$ dönüşümünü gerektirir. Gerçekten, aşağıdaki doğrudur:

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= \psi \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(z) \right) = \psi_1 \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(z) \right) + \psi_1^{-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(z) \right) \\
&= \psi_1 \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi_1(z) \right) + \psi_1^{-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi_1(z) \right) = \tilde{\tau} + \tilde{\tau}^{-1}.
\end{aligned}$$

Demek ki, (4.29) bağıntılarından birincisi ispat edildi. (4.29) bağıntılarından ikincisini ispat edelim. Kabul edelim ki, $z = \tau + \tilde{\tau}$ fonksiyonu Γ yayının dışını C eğrisinin dışına, hem de C eğrisinin içine dönüştürür. $\tilde{\psi}_1$ ve ψ_1 , aynı zamanda $\tilde{\varphi}_1$ ve φ_1 fonksiyonları arasındaki bağıntıyı bulalım

Göstermek olur ki, aşağıdaki bağıntılar geçerlidir;

$$\varphi_1(\tau) = \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tau^{-1}), \psi_1(w) = \tilde{\psi}_1^{-1}(w^{-1}) \quad (4.31)$$

Gerçekten, $w \in \gamma_0$ noktasının C eğrisi üzerine dönüşümü için iki yöntemi kullanarak,

$$w = w_1^{-1} = \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tau^{-1}) = \varphi_1(\tau)$$

elde edilir

$\tau \in C$ noktasının γ_0 birim çemberi üzerine dönüştürerek,

$$z_1 = z_1^{-1} = \tilde{\psi}^{-1}(w^{-1}) = \psi_1(w)$$

elde edilir. (4.30) ve (4.31) bağıntılarını kullanarak, aşağıda ki, elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_- \left(\frac{1}{n} \right) &= \psi \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi^{-1}(z) \right) = \tilde{\psi}_1^{-1} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi^{-1}(z)} \right) + \tilde{\psi}_1 \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi^{-1}(z)} \right) \\
&= \tilde{\psi}_1^{-1} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \tilde{\varphi}(z^{-1}) \right) + \tilde{\psi}_1^{-1} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \tilde{\varphi}(\tilde{z}^{-1}) \right) \\
&= \tilde{\tau}_1 \left(\frac{1}{n+1} \right) + \tilde{\tau}_1^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.29) bağıntılarından ikincisi de ispat edildi. (4.29), (4.28) bağıntıları ve

$z = \tau + \frac{1}{\tau} \left(\tau = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - 1} \right)$ eşitliği gereğince aşağıdaki elde edilir:

$$|f(z) - P_n(z)| \leq \left| \frac{\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 4}}{2} - \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right|^\alpha + \left| \frac{\tilde{z}_- + \sqrt{\tilde{z}_-^2 - 4}}{2} - \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right|^\alpha$$

$$\begin{aligned}
& \asymp |\tilde{z} - z|^\alpha \left| \frac{\sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} + \tilde{z} + z}{\sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4}} \right| \\
& \asymp |\tilde{z}_- - z|^\alpha \left| \frac{\sqrt{\tilde{z}_-^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} + \tilde{z}_- + z}{\sqrt{\tilde{z}_-^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4}} \right| \\
& \asymp \frac{|\tilde{z} - z|^\alpha}{\left| \sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|^\alpha} + \frac{|\tilde{z} - z|^\alpha}{\left| \sqrt{\tilde{z}_-^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|^\alpha}. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Öte yandan $|\tilde{z} - z|$ değeri z noktasından $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ seviye eğrisinin iki dalından birine kadar olan uzaklığa, $|\tilde{z}_- - z|$ değeri ise z noktasından $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ seviye eğrisinin diğer dalına kadar olan uzaklığa denktir (Andrievski, 1984). Yani, $|\tilde{z} - z| \asymp d_+^\alpha(z, 1/n), |\tilde{z}_- - z| \asymp d_-^\alpha(z, \frac{1}{n})$ dir. Buradan (4.32) eşitliğinden Teorem 4.6 de verilen bağıntı elde edilir. Teorem 4.6 ispat edildi.

Şimdi

$$d_{1+\frac{1}{n}}^1\left(z, \frac{1}{n}\right) \asymp d_{1+\frac{1}{n}}^2\left(z, \frac{1}{n}\right), \left| \sqrt{\tilde{z}_+^2 - 4} - \sqrt{z^2 - 4} \right| \asymp \left| \sqrt{\tilde{z}^2 - 4} - \sqrt{z^2 - 4} \right|$$

şartını sağlan yaylar sınıfını göz önüne alalım. Şu yaylar sınıfını Q ile gösterelim.

Sonuç 4.2. $\Gamma \in Q$ ve $g(z) \in A^\alpha(\Gamma)$ ($0 < \alpha < 1$) olsun. Bu durumda her bir doğal n sayısı için derecesi n olan öyle $P_n(z)$ polinomu var ki,

$$|f(z) - P_n(z)| \preceq \frac{d^\alpha(z, 1/n)}{\left| \sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|^\alpha}$$

olur.

Şimdi $A^\alpha(\Gamma)$ ($0 < \alpha < 1$) fonksiyonlar sınıfını yapısal karakterizasyonunu elde etmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki teoremi ispat etmemiz gerekir

Teorem 4.7. $\Gamma \in Q$ olsun. Ayrıca, keyfi doğal n sayısı için derecesi n olan öyle $P_n(z)$ polinomu var ki, öyle ki,

$$|g(z) - P_n(z)| \preceq \frac{d^\alpha\left(z, \frac{1}{n}\right)}{\left| \sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4} \right|}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (4.33)$$

şartı sağlanır. Bu durumda $g(z) \in A^\alpha(\Gamma), (0 < \alpha < 1)$ dir.

İspat: Bilindiği gibi kuasidüzgün yaylar için $d\left(z, \frac{1}{n}\right) \asymp |\tilde{z} - z|$ şartı sağlanır. Bu durumda (4.33) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$|g(z) - P_n(z)| \leq \frac{|\tilde{z} - z|^\alpha}{\left|\sqrt{\tilde{z}^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4}\right|^\alpha}.$$

(4.33) bağıntısında $z = \tau + \frac{1}{\tau}$ dönüşümü yapalım, bu durumda Γ yayı, $z = 0$ noktasını içine alan kapalı C eğrisine dönüşmüş olur. Aşağıdaki elde edilir:

$$\left|g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) - P_n\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right| \leq |\tilde{\tau} - \tau|^\alpha$$

Diğer taraftan benzer dönüşüm yardımıyla Q yaylar sınıfı

$$d\left(\tau, \frac{1}{n}\right) \asymp d_1\left(\tau, \frac{1}{n}\right)$$

özelliğini sağlayan kapalı kuasidüzgün eğrilere dönüşmüş olur.

$g\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) = g^*(\tau)$ ve $R_n^*(\tau) = R_n(\tau) + R_n\left(\frac{1}{\tau}\right)$ olsun. Bu durumda

$$R_n^*(\tau) = \sum_{k=-n}^n c_k \tau^k$$

biçiminde öyle $R_n^*(\tau)$ rasyonel fonksiyonu var ki,

$$|g^*(\tau) - R_n^*(\tau)| \leq |\tilde{\tau} - \tau|^\alpha \asymp d^\alpha\left(\tau, \frac{1}{n}\right)$$

olur. Buradan uygun ters teorem kullanırsa, $g^*(\tau) \in H^\alpha(C)$ elde edilir. Şimdi

$g^*(\tau) \in H^\alpha(C)$ ise $g(z) \in H^\alpha(C)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tau_1, \tau_2 \in C$ için

$$|g^*(\tau_1) - g^*(\tau_2)| \leq |\tau_1 - \tau_2|^\alpha$$

veya

$$\left|g\left(\tau_1 + \frac{1}{\tau_1}\right) - g\left(\tau_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)\right| \leq |\tau_1 - \tau_2|^\alpha$$

olsun. $z = \tau + \frac{1}{\tau} \left(\tau = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right)$ ters değişken değiştirme yapalım. Bu durumda aşağıdaki elde ederiz:

$$|g(z_1) - g(z_2)| \preceq |z_1 - z_2|^\alpha \left| \frac{\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4} + z_1 + z_2}{\sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4}} \right|^\alpha \asymp \frac{|z_1 - z_2|^\alpha}{\left| \sqrt{z_1^2 - 4} + \sqrt{z_2^2 - 4} \right|^\alpha}.$$

Bu ise istenen sonuçtur.

Teorem 4.7 ve Sonuç 4.2 birleştirilirse, Q yaylar sınıfında $A^\alpha(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde ederiz.

Teorem 4.8. $\Gamma \in Q$ olsun. Bu durumda $g(z) \in A^\alpha(\Gamma)$, $(0 < \alpha < 1)$ olması için gerek ve yeter şart her bir doğal n sayısı için öyle $P_n(z)$ polinomu var öyle ki,

$$|g(z) - P_n(z)| \preceq \frac{d^\alpha\left(z, \frac{1}{n}\right)}{\left|\sqrt{z^2 - 4} + \sqrt{z^2 - 4}\right|^\alpha}$$

olur.

Bu sonuç $\Gamma = [-1, 1]$ olduğunda da yenidir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Γ kuasikonform yay olmak üzere $H^\lambda(\Gamma)$ fonksiyonlar sınıfının polinomlar yardımıyla $d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$ ($d_{1+\frac{1}{n}}^*(z)$, $z \in \Gamma$ noktasından Γ yayının seviye eğrisinin dallarına kadar uzaklıkların maksimumudur) büyüklük cinsinden (değerlendirme noktaya bağlıdır) $\lambda(u)$ süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan H^λ fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edildi. Daha sonra R sınıfına ait daha genel kontinyumlarda $\mu_n = \sup_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} d(\xi, D)$ cinsinden (düzgünlük cinsinden, yani değerlendirme noktadan bağımsızdır) H^λ fonksiyonlar sınıfında yaklaşım teorisinin düz teoremi ispatlanır ve H sınıfına ait kontinyumlarda H^λ fonksiyonlar sınıfının yaklaşım karakterizasyonu elde edildi.

İlave olarak kompleks düzlemde kuasidüzgün (yarıdüzgün) yaylarda, yayın uç noktalarına bağlı olarak tanımlanmış fonksiyonlar sınıfının polinomlarla yaklaşımı incelenmiştir. Ayrıca, belli özelliklere sahip yaylar sınıfında tanımlanmış fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir.

5.2 Öneriler

Bu tezdeki sonuçlar sürekli fonksiyonlar uzayında elde edilmiştir. Daha genel özelliklere sahip kontinyumlarda ve başka uzaylarda incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Ahlfors, L. V., 1987, Lectures on quasiconformal mappings *Wads Worth and Brooks /Cole Advanced Books and Software, Monterey, California.*
- Ahlfors, L. V., 1979, “ Complex Analysis” second Edition, *McGrow Hill. Ltd.* Tokyo, 336.
- Akhiezer, N.I., 1965, Lectures on Approximation Theory, *Nauka*, Moscow,
- Andrievskii ,V.V. 1981. Constructive characterization of functions of Hölder classes on continua without exterior zero angles, *Dokl, Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, (6),3-5.
- Andrievskii, V. V. 1983. Constructive description of classes of functions on continua of the complex plane taking account of growth of the approximation polynomials, Preprint 12, *Inst . Math.Acad.Sci.Ukrainian SSR, Kiev*, (in Russian) MR 84j: 30054.
- Andrievskii, V. V. 1980. Direct theorems of approximation theory on quasiconformal arcs, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser.Mat.* 44, 243-261.
- Andrievskii, V. V., 1980, Approximation of functions of a complex variable on arcs , Metric Questions of Function Theory (G.D.Suvorov, editör), 2 ’’*Naukova Dumka*’’, Kiev, 3-5.
- Andrievskii, V.V. 1980. Some properties of continua with a piecewise quasiconformal boundary , *Ukrain. Mat .Zh.* 32, 435-440.
- Andrievskii, V.V., Belyi, V.I., Dzydyk, V.K., 1995, Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane Atlanta: *World Federation Publ. Comp.*, 199.
- Andrievskii, V. V. 1986. Approximation characterization of classes of functions on continua of the complex plane, *Math. USSR Sbornik*, 53 (1), 69-87.
- Andrievskii, V.V., and Pritsker, I.E. 2000. Convergence of Bieberback Polynomials in domains with Interior Cusps, *Journal d’ Analyse Mathématique*, 82, 315-332.
- Andrievskii, V.V., and Blatt, H.P., 2002, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, *Springer-Verlag New York*.

- Aral, D.A. (2006), “Cebirsel polinomların farklı normları arasındaki bağıntılar”, Yüksek Lisans Tezi, *Mersin Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü*.
- Babaev, A.A. 1966. Certain estimates for a singular integral, *DAN SSSR*, 170(5), 1003-1005.
- Başkan, T., 1998, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi 3. Baskı *Vipaş*, 360.
- Başarır, M., 2010, Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, 2. Baskı, *Sakarya Yayıncılık*, 339.
- Batchaev, N.M., and Mamedkhanov, Dzh. I. 1980. Questions of approximation in the uniform metric on quasiconformal arcs, *First Conf. Graduate of the Azerbaijani Republic, Abstracts of Reports*, Baku,
- Belyi, V. I. 1977. Conformal mappings and approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary, *Mat.Sb.*102(144), 331-361.
- Belyi, V. I. 1979. Approximation of functions of the classes $A^r(\bar{G})$ in finite domains with a quasiconformal boundary, *Theory of Functions and Mappings*, (G. D. Suvurov, editor), ‘*Naukova Dumka*’, Kiev, 37-62.
- Bernstein, S.N. 1912. Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes, *Proceedings of 5th International Mathematical Congress* 1, 256-266.
- Chebyshev, P.L. 1953. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Mémoires de l’Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, 7 (1854). 539-568.
- Collingwood, E. F., and Lohwater, A.J., 1966, The theory of cluster sets, *Cambridge Univ. Press*.
- Conway, J.B., 1995, Functions of one Complex Variable II, *Springer – Verlag, Berlin*, New York, London.
- Depree, J. D., Gehring, C.C., 1996, Elements of Complex Analysis, *Addison Wesley Publishing Company*, USA.

- Depree, J.D., Gehring, C.C., 1969, Elements of Complex Analysis, *Addison Wesley Publishing Company, USA*.
- Değer, V., (2004), "Alan Üzerinde Ortogonal Polinomların Bazı Özellikleri " Yüksek Lisans Tezi, *Mersin Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü*, 90.
- De Vore, R.A., and Loretz, G.G., 1993, Constructive Approximation, *Springer Berlin Heidelberg New York*.
- Duren, P.L., 2001, Univalent Functions, *Springer-Verlag*, New York, 384.
- Dzyadyk, V. K. 1959. On a problem of S. M. Nikol'skii in the complex domain , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 697-736.
- Dzyadyk, V. K. 1962. On the approximation of continuous functions in closed domains with corners, and on a problem of S.M. Nikol'skii, I, *Izv.Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **26** (1962), 797-824.
- Dzyadyk, V.K. 1963. On the theory of approximation of analytic functions continuous on closed domains , and on a problem of S. M. Nikol'skii. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **27**, 1135-1164.
- Dzyadyk, V. K. 1972. The application of generalized Faber polynomials to the approximation of integrals of Cauchy type and functions of the class A' in domains with smooth or piecewise smooth boundary, *Ukrain. Mat. Zh.* 24, 3-19.
- Dzyadyk, V. K. 1975. On the theory of approximation of functions on closed sets of the complex plane (with reference to a problem of S.M.Nikol'skii),*Trudy Mat. Inst .Steklov.* **134** ,63-114 .
- Dzyadyk, V.K. 1975. An approximation characterization of the Lipschitz classes $W^r H^1$ ($r = 0,1,2,\dots$), *Anal . Math* 1, 19-29.
- Dzyadyk, V. K., 1977, Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials. "Nauka", Moscow.
- Dzyadyk, V.K., and Shevchuk, I.A., 2009, Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials, *Brill Academic Publishers*.
- Elias M. Stein., 1970, Singular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.*

- Gaier, D., 1987, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, *Boston, Basel, Stuttgart*.
- Gonzalez, M.O., 1991, Classical Complex Analysis, *Marcel Dekker, Inc.*, New York.
- Guseinov, A.I. 1948. On a class of nonlinear singular integral equations, *Izv. AN. SSSR, Ser. Matem.*, 12(2), 193-212.
- Jackson, D., 1911, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganzerationale *Functionen* gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, *Diss., Göttingen*.
- Jackson, D. 1912. On approximation by trigonometric sums and polynomials, *Transaction American Mathematica Society*, 13, 491-515.
- Jackson, D. 1924. A general class of problems in approximation, *American Journal. of Mathematics*, 46, 215-234.
- Jackson, D., 1930, The Theory of Approximation, *Amer. Math. Soc., New York*.
- Jackson, D., 1941, Fourier series and orthogonal polynomials, *Carus Mathematical Monographs*.
- Kolesnik, L.I. 1967. Approximation of functions continuous on Jordan curves, *Ukrain. Mat. Zh* 19(2), 30-37.
- Kolmogoroff, A.N. 1935. Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen, *Ann. of Mathem.* 36, 521-526.
- Konovalov, V. N. 1982. Approximation characterization of some classes of functions of a complex variable, *Methods of Approximation Theory and Their Applications* (V.K.Dzyadyk, editor), *Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukrain. SSR. Kiev*, 54-66.
- Krasnov, M. L., Kiselev, A. I., Makarenko, G. I., 1981, Complex Variable Functions Operational Calculus; *Stability Theory*, Moscow, "Nauka".
- Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley Sons, New York*.
- Kollingvud, E., Lovater, A., 1971, Theory of limit sets, *M.: Mir*.

- Kırcı, S. (2003), “En İyi Polinomial Yaklaşım Hakkında Bernstein ve Jackson Teoremleri”, Yüksek Lisans Tezi , *Ankara Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara.*
- Lavrent, M. A. 1936. Boundary problems in the theory of univalent functions, *Mat. Sb.* 1 (43), 815-844.
- Lebedev, N. A., and Tamrazov, P.M. 1970. Inverse approximation theorems on regular compact of the complex plane, *Izv. Akad.Nauk SSSR Ser.Mat.* 34, 1340-1390.
- Lebedev N. A., and Shirokov N. A . 1971. The uniform approximation of functions on closed sets that have a finite number of angular points with nonzero exterior angles, *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat.* 6, 311-341.
- Lebesgue, H. 1898. Sur l’approximation des fonctions, *Bulletin Science Mathematica*, 2 (22) 278-287.
- Lehto, O., and Virtanen, K., 1973, Quasiconformal Mappings in the Plane “*Springer* “ Verlag, Berlin , Heidelberg, New York.
- Lorentz, G.G., 1966, Approximation of Functions, *New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London.*
- Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press, Cambridge, Londonand New York.*
- Mamedkhanov, Dj. I. 1981. Local theorems of the theory of best approximation, *DAN Azerb. SSR*, (8), 14-19.
- Markushevich, A.I., 1967, Theory of Functions of a Complex Variable III, *Prentice Hall, Inc.*
- Markushevich, A.I., 1985, Teory of Fancions of a Complex Variable. Chelsea Publishing Company , *New York* , Theree volumes in one , 1231.
- Mergelyan, S.N. 1952. Uniform approximation of functions of a comlex variable *Uspekhi Mat. Nauk* 7, 2(48), 31-122.
- Mhaskar, H.N., 1996, Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation, Series in Approximation and Decompositions 7, *World Sci., River Edge, NJ.*

Muskhelishvili, V.P., 1968, Singular integral equations, M.“Nauka” .

Natanson, I.P., 1949, Constructive theory of functions, Moskow-Leningrad: *Gostecizdat*.

Nikolskii, S.M. 1946. Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean, *Izvestia Akademia Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 10, 207-256.

Oktay, B. (2003), ‘‘Ekstremal polinomlar ve onların yaklaşım özellikleri’’, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü*.

Özkın, K. (1989). ‘‘Kompleks Fonksiyonlar Teorisi’’, Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi, Ankara.

Pommerenke, Ch., 1992, Boundary Behaviour of Conformal Maps, *Springer- Verlag*, Berlin, 300.

Rudin, W., 1974, Real and Complex Analysis, *Me Graw –Hill*, 452.

Salaev, V.V. 1976. Direct and inverse estimates for a singular Cauchy integral along a closed curve, *Matem. Zametki*, 19(3), 365-380.

Saff, E.B., Snider A.D. 1993. Fundamentals of Complex Analysis, *Prentice Hall, Uper saddle River, New Yersey*, 528.

Shirokov, N. A. 1977. Approximate entropy of continua , *Dokl.Akad.Nauk SSSR* 235, 546-549 .

Stechkin, S.B. 1951. On the order of the best approximation of continuous funktions, *Izv. Akad . Nauk SSSR Ser. Mat.* 15, 219-242.

Stein, E.M., 1970, Sigular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.*

Stepanets, A.I., 1995, Clasification and Approximation of Periodic Functions, *Naukova Dumka, Kiev*, 1987.

Timan, A.F., and Timan, M.F. 1950. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean, *Doklad Akademia Nauk SSSR* 71, 17-20.

Timan, M.F. 1958. Converse Theorems of the Constructive Theory of Functions, *Matematicheskii Sbornik*, 46, 125-132.

- Timan, M.F. 1966. On Jackson's Theorem in spaces, *Ukrainian Mathematica Journal*, 18, 134-137.
- Timan, A. F., 1994, Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Dover Publications. Russian original, Moscow: Fizmatgiz, 1960. First English edition, Oxford: Pergamon Press, 1963.
- Trigub, R.M., and Belisky, E.S., 2004, Fourier Analysis and Approximation of Functions, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London*.
- Vallée-Poussin, Ch. J. La. 1910. Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, *Bulletin Academie Science Belgique*, 12, 808-844.
- Vallée-Poussin, Ch. J. La. 1911. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, *Buletin de l'Academie Royali des Sciences de Belgique Clesse des Sciences*, 199-211.
- Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1919, Leçons sur l'approximation des fonctions d'unevariable reele, *Paris, Gautier-Villars*.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darsdellung sogenannter willkürlicher Funktionen einerieelen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akad. zu. Berlin*, 633-639, 789-805.
- Tamrazov, P.M. 1973. The solid inverse problem of polynomial approximation of functions on a regular compatum, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 37,148-164.
- Wunsch, A.D. 2005, Complex Variables with Applications Thurd Edition, *Addison Wesley Publishing Company, USA*, 696 .
- Zill, D.G., Shanahan, P.D., 2003, A First Course in Complex Analysis with Applications, *Jones and Bartlett Publishers, USA*, 449.
- Zygmund, A., 1959, Trigonometric series, 2nd ed. Voll I.II, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*.
- Zygmund, A., 1988, Trigonometric Series, Vols. I &II. 2nd ed. Cambridge: *Cambridge University Press. First edition. Warsaw,1935*.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Öznur DOĞU
Uyruğu : 49450685764
Doğum Yeri ve Tarihi : SİİRT/BAYKAN/02.10.1992
Telefon :
Faks :
e-mail : Oznur.dogu56@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Veysel Karani Çok Programlı Lisesi	2011
Üniversite	: Muş Alparslan Üniversitesi	2015
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	2016
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2016-2017	Muş Merkez Suvaran Ortaokulu	Matematik öğretmeni
2017-2018	Muş Merkez Serinova YBO	
2018-2019	Siirt/Baykan/ Baykan YBO	
2019-2020	Siirt/Baykan/ Baykan YBO	