T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS GEOMETRİDE RİEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan DEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

ARALIK 2021

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS GEOMETRİDE RİEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan DEMİR
(36203614037)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ
Eş Danışman: Doç. Dr. M. Akif AKYOL

ARALIK 2021

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeden beni her konuda yönlendiren danışman hocalarım sayın Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ ve Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a ve her zaman desteklerini gördüğüm İnönü Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Çalışmalarımda ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kompleks Geometride Riemann Dönüşümler Üzerine ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ramazan DEMİR

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

M,N	: Diferansiyellenebilir Manifold
g	: Metrik Tensör
T_pM	: Tanjant Uzayı
TM	: Tanjant Demet
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	: M manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
F_*	: Türev Dönüşümü
$^*F_*$	: Adjoint Dönüşümü
$\|,\|$	: Norm
D	: Distribüsyon
∇ veya $\bar{\nabla}$	: Lineer Konneksiyon
∇F_*	: Dönüşümün İkinci Temel Formu
∇^F	: F-Dönüşümü Boyunca Geri Çekme Konneksiyonu
$[,]$	: Lie Braket(Parantez) Operatörü
Ω	: Temal 2-Form
A	: Yatay Tensör Alanı
T	: Dikey Tensör Alanı
J	: Hemen Hemen Kompleks Yapı
çekF_* veya V	: Dikey Distribüsyon
(ç$ekF_*)^\perp$ veya H	: Yatay Distribüsyon
$g\ddot{o}rF_*$	: Görüntü Uzayı
$(g\ddot{o}rF_*)^\perp$	: Görüntü Uzayının Tümleyeni
$\tau(F)$	: Tensiyon Alanı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS GEOMETRİDE
RİEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

RAMAZAN DEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

63+xi sayfa

2021

Danışman: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusunun tarihsel süreci ifade edilerek tez konusu ile ilgili genel tanımlar sunulmuştur.

İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca, Riemann submersiyonları üzerinde tanımlı O'Neill formullerinin ve izometrik immersiyonlar üzerinde tanımlı Gauss Weingarten formüllerinin daha geneli olan Riemann dönüşümleri üzerindeki temel formüller ifade edilmiştir. Daha sonra, Riemann dönüşümler için tensör alanı ve ikinci temel form arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan invaryant Riemann dönüşüm tanımı ifade edilip, bu dönüşümün varlığı ile ilgili bir örnek verilmiştir. Daha sonra, hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan anti-invaryant Riemann dönüşümünün bir örneği verilerek bu dönüşümler yardımıyla total uzay (kaynak manifold) ve baz uzay (hedef manifold) geometrisi incelenmiştir. Ayrıca anti-invaryant Riemann dönüşümler tarafından tanımlanmış distribüsyonlar için ayrışım teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan yarı-invaryant Riemann dönüşüm tanımı ifade edilerek, bu dönüşümün varlığı ile ilgili bir örnek verilmiştir. Yarı-invaryant Riemann dönüşümler tarafından tanımlanmış distribüsyonları üzerine ayrışım teoremleri incelenmiştir.

Son bölümde ise, hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan slant-Riemann dönüşümlerin tanımı ifade edilip bu dönüşümün varlığı ile ilgili örnekler verilmiştir. Burada slant-Riemann dönüşümlerin var olma koşulları incelenilmiştir ve bu dönüşümlerin harmonikliği araştırılmıştır. Ayrıca slant-Riemann dönüşümlerin tamamen geodezik olabilmesi için gerekli ve önemli koşullar verilip ve total manifoldlar için ayrışım teoremi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann submersiyonlar, Riemann dönüşümler, Hermityen manifold, Kaehler manifold, Dönüşümün ikinci temel formu

ABSTRACT

Master Thesis

ON RIEMANNIAN MAPS
IN COMPLEX GEOMETRY

Ramazan DEMİR

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

63+xi pages

2021

Supervisor: Prof. Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ

This study was prepared as a master's thesis which are consists of five chapters. In the first chapter, the historical process of the thesis subject is expressed and general definitions about the thesis subject are presented.

In the second part, the basic definitions and theorems that will be used in the next chapters are given. In addition, basic formulas on Riemannian maps, which are more general of O'Neill formulas defined on Riemannian submersions and Gauss-Weingarten formulas defined on isometric immersions, are expressed. Then, the relationship between the tensor field and the second fundamental form for Riemannian maps is shown.

In the third chapter, firstly, the definition of invariant Riemannian maps, which is defined from almost Hermitian manifold to Riemannian manifold in complex geometry, is expressed and an example is given regarding the existence of this map. Then, an example of the anti-invariant Riemannian maps, which is defined from almost Hermitian manifold to Riemannian manifold, is given and the geometry of total space (source manifold) and base space (target manifold) is examined with the help of these maps. Also, decomposition theorems for distributions defined by anti-invariantRiemannian maps are given.

In the fourth chapter, the definition of semi-invariant Riemannian maps, which is defined from almost Hermitian manifold to Riemann manifold in complex geometry, is expressed and an example of the existence of this map is given. Decomposition theorems on distributions defined by semi-invariant Riemannian maps are studied.

In the last part, the definition of slant-Riemannian maps, which are defined from almost Hermitian manifold to Riemann manifold, is expressed and examples about the existence of this map are given. Here, the conditions of existence of slant-Riemannian maps are examined and the harmonic of these maps is investigated. In addition, necessary and important conditions are given for the slant-Riemannian maps to be completely geodesic and the decomposition theorem for total manifolds is examined.

Keywords: Riemannian submersions, Riemannian maps, Hermitian manifold, Kaehler manifold, Second fundemental form of a maps

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride Riemann manifoldlar (veya yarı-Riemann manifoldlar) arasında tanımlanan dönüşümlerin temel olanları izometrik immersionlar (Riemann altmanifoldlar) ve Riemann submersiyonlardır. Bu dönüşümlerin genel hali ise Riemann dönüşümlerdir. Bu dönüşümler iki manifold üzerinde tanımlanan geometrik yapıları karşılaştırmak için yaygın bir şekilde kullanılır. İzometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldları); Riemann manifoldları, Riemann metrikleri ve Jakobiyen matrisleri ile birlikte karakterize edilmiş temel dönüşümlerdir. Daha açık bir ifade ile, (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferansiyellenebilir bir $F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ verilsin, eğer F_* türev dönüşümü birebir ve $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için,

$$g_1(X_1, X_2) = g_2(F_*X_1, F_*X_2) \tag{1.0.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa F dönüşümüne izometrik immersiyon denir [1]. Eğer F_* türev dönüşümü, örten ve yatay vektör alanı olan $(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ın elemanları için (1.0.1) denklemini sağlayan diferansiyellenebilir bir F dönüşümü mevcut ise bu dönüşüme Riemann submersiyon denir [1].

Görerelikte kompleks yapılar, uzay-zaman geometrisini anlamak için en etkili araçlardan biridir [2]. Aslında; kompleks manifoldlar, Kaehler manifoldların iki ilginç sınıfına sahiptir. Birincisi, Calabi-Yau manifoldlarıdır. Bu manifold türü süper cisim teorisideki uygulama alanlarına sahiptir [3]. Bir diğeri, görerelikteki Teichmüller uzayları uygulamasıdır [4]. Ayrıca, CR-yapıları, görereliğin uzay-zaman geometrisinde yaygın bir şekilde kullanım alanına sahiptir [5].

Riemann submersiyonlar teorisi çeşitli alanlarda kullanılmıştır. Riemann manifoldları arasındaki Riemann submersiyonları ilk olarak O'Neill [6] ve Gray [7] tarafından çalışılmıştır. İnvaryant altmanifoldların bir benzeri olarak, Watson iki hemen hemen Hermityen manifold arasında hemen hemen Hermityen submersiyon tanımını yaptı ve temel manifoldlar ve her lif, belirlenen tüm uzaylar için yapıların aynı tür özelliğe sahip olduğunu gösterdi [8].

1992 de Fischer, izometrik immersiyon ve Riemann submersiyon kavramlarının bir genelleştirilmiş hali olan Riemann manifoldlar arasında Riemann dönüşümleri şöyle tanımlamıştır [9]. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferansiyellenebilir bir $F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ dönüşümü olsun. $p \in M_1$ noktasında türev dönüşümü olan F_* lineer dönüşümünün çekirdek uzayı $\text{ç}ekF_{*p}$ ve ortogonal tümleyen uzayı $H_p = (\text{ç}ekF_{*p})^{\perp}$ ve

$boyM_1 = m$ ve $boyM_2 = n$ için $0 < rankF < \min\{m,n\}$ olsun. M_1 nin $p \in M_1$ noktasındaki tanjant uzayı,

$$T_pM_1 = çekF_{*p} \oplus H_p \tag{1.0.2}$$

ayrışımına sahiptir. Aynı şekilde $p \in M_1$ noktasındaki F_* türev dönüşümünün görüntü kümesi $görF_{*p}$ ve bu kümenin ortogonal tümleyen uzayı $(görF_{*p})^{\perp}$ şeklinde alınsın. M_2 nin tanjant uzayı olan $T_{F(p)}M_2$ nin $p \in M_1$ noktasında

$$T_{F(p)}M_2 = görF_{*p} \oplus (görF_{*p})^{\perp} \tag{1.0.3}$$

ayrışımına sahiptir. $p_1 \in M_1$ noktasında $p_2 = F(p_1)$ olmak üzere

$$((çekF_{*p_1})^{\perp},\ g_1(p_1)\ |_{(çekF_{*p_1})^{\perp}})$$

ve

$$((görF_{*p_1}),\ g_2(p_2)\ |_{(görF_{*p_1})})$$

iç çarpım uzayları arasında $F^h_{*p_1} : (çekF_{*p_1})^{\perp} \to (görF_{*p_1})$ yatay kısıtlaması bir lineer izometri ise $F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ diferansiyellenebilir dönüşümüne $p_1 \in M_1$ noktasındaki Riemann dönüşümü denir [9]. Yani $X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için F_* türev dönüşümü

$$g_1(X_1, X_2) = g_2(F_*X_1, F_*X_2)$$

denklemini sağlamış olur.

Son zamanlarda Riemann dönüşümleri yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Özellikle, Riemann manifoldlardan kompleks manifoldlara tanımlanan Riemann dönüşümleri, Riemann manifoldları arasında tanımlanan Riemann dönüşümleri ve hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan Riemann dönüşümlerinin invaryant, anti-invaryant, yarı-invaryant ve slant olma durumları incelenmiştir. İki Riemann manifoldu arasında tanımlanan bu kavramlar Şahin tarafından hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna sırasıyla invariant Riemann dönüşümler, anti-invariant Riemann dönüşümler, yarı-invaryant Riemann dönüşümler ve slant-Riemann dönüşümleri tanımlayarak Riemann dönüşümlere yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. [10–13]. Sonrasında, Akyol ve Şahin tarafından bazı özel Riemann dönüşümler üzerine çalışılmıştır [14–18].

Bu yüksek lisans tezinde kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna sırasıyla; invariant Riemann dönüşümler, anti-invariant Riemann dönüşümler, yarı-invaryant Riemann dönüşümler ve slant-Riemann dönüşümler sunulmaktadır.

Tezin esas kısımlarını oluşturan bölümleri üç, dört ve beşinci bölümlerdir. Üçüncü bölümde kompleks geometride invaryant ve anti-invaryant Riemann dönüşümler çalışılmaktadır. Bu başlık altında önce hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan invaryant Riemann dönüşümler verilerek bu dönüşümün varlığı ile ilgili bir örnek verilmiştir. Daha sonra, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan anti-invaryant Riemann dönüşümler verilerek bu dönüşümün varlığı ile ilgili örnek verilmiştir. Son olarak gerekli teorem ve ispatlara yer verilip, ikinci alt bölümde tamamen geodezik anti-invaryant Riemann dönüşümler işlenmiştir ve genel bir sonuç elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde kompleks geometride, bir hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan yarı-invaryant Riemann dönüşümler konusu çalışılmaktadır. Bu başlık altında önce hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan yarı-invaryant Riemann dönüşümler verilerek bu dönüşümün varlığı ile ilgili örnek verilmektedir. Daha sonra gerekli teorem ve ispatlara yer verilip, ikinci alt bölümde tamamen umbilik noktalar ile yarı-invaryant Riemann dönüşümler işlenmiş ve genel bir sonuç elde edilmektedir.

Son bölüm olan beşinci bölümde kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan slant-Riemann dönüşümler konusu çalışılmaktadır. Bu başlık altında önce hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan slant-Riemann dönüşümlerin tanımı yapılarak bu dönüşümün varlığı ile ilgili örnek verilmektedir. Daha sonra gerekli teorem ve ispatlara yer verilmiştir. Son olarak slant-Riemann dönüşümler yolu ile ayrışım teoremi verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldlar

Bu bölümde Riemann manifoldları ile ilgili bazı temel kavramlar ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. *M bir diferansiyellenebilir manifold ve $\chi(M)$ ise bu manifold üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall\, X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,*

$$g_1 : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

olmak üzere

1. $g(X_1, X_2) = g(X_2, X_1)$, *(Simetrik)*
2. $g(X_1, X_1) \geq 0$, $\forall X_1 \in \chi(M)$ *için* $g(X_1, X_1) = 0 \Longleftrightarrow X_1 = 0$, *(Pozitif tanımlılık)*
3. *İkilineer;*

   $g(aX_1 + bX_2, X_3) = ag(X_1, X_3) + bg(X_2, X_3)$

   $g(X_1, aX_2 + bX_3) = ag(X_1, X_2) + bg(X_1, X_3)$

şartlarını sağlayan g dönüşümüne Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine Riemann manifoldu adı verilir [19].

Tanım 2.1.2. *M Riemann manifoldunun metrik tensörü g olsun. Bir $X_p \in T_pM$ tanjant vektörünün uzunluğu,*

$$\|X_p\| = \sqrt{g(X_p, X_p)} \tag{2.1.1}$$

reel sayısı ile hesaplanır [19].

Tanım 2.1.3. *M Riemann manifoldunun metrik tensörü g olsun. Sıfırdan farklı $X_p, Y_p \in T_pM$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı,*

$$g(X_p, Y_p) = \|X_p\|\,\|Y_p\| \cos\theta \tag{2.1.2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada θ açısı $[0, \pi]$ kapalı aralığındadır [20].

Tanım 2.1.4. *M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldları arasında tanımlanan $F: M_1 \to M_2$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in T_pM_1$ için, M_1 de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $\beta = F(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $F_*(X(\alpha(t)))$ vektörünü karşılık getiren dönüşüme F dönüşümünün türev dönüşümü denir ve $F_*: T_xM_1 \to T_{F(x)}M_2$ şeklindedir [1].*

Tanım 2.1.5. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. Her $p \in M_1$ ve $U_p, V_p \in T_pM_1$ için;

$$g_1(U_p, V_p) = g_2(F_*(U_p), F_*(V_p)) \tag{2.1.3}$$

eşitliği sağlanıyor ise F dönüşümüne M_1 den M_2 ye bir izometri denir [21], [22].

Tanım 2.1.6. *M manifoldu üzerinde tanımlı X_1 ve X_2 iki vektör alanı olsun. $\mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ kümesinden seçilmiş bir f fonksiyonu alalım.*

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$[X_1, X_2] f = X_1(X_2 f) - X_2(X_1 f) \tag{2.1.4}$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X_1 ile X_2 nin Lie (parantez) operatörü denir. Bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar [23].

$\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$, $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1. $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$
2. $[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3]$,
3. $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_2]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$, *(Jacobi özdeşliği)*
4. $[fX_1, gX_2] = f[X_1, X_2] + f(X_1 g)X_2 - g(X_2 f)X_1$

   dır.

Tanım 2.1.7. *M bir manifold $\Gamma(TM)$ de bu manifold üzerinde tanımlanan diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,*

$$\bar{\nabla}: \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ile tanımlanan ve

1. $\bar{\nabla}_{X_1+X_2}X_3 = \bar{\nabla}_{X_1}X_3 + \bar{\nabla}_{X_2}X_3,$

2. $\bar{\nabla}_{X_1}(X_2+X_3) = \bar{\nabla}_{X_1}X_2 + \bar{\nabla}_{X_1}X_3,$

3. $\bar{\nabla}_{fX_1}X_2 = f\bar{\nabla}_{X_1}X_2,$

4. $\bar{\nabla}_{X_1}fX_2 = X_1[f]X_2 + f\bar{\nabla}_{X_1}X_2$

şartlarını sağlayan $\bar{\nabla}$ dönüşümüne M üzerinde bir afin konneksiyon (veya lineer konneksiyon) denir ve $\bar{\nabla}_{X_1}$ ifadesine de X_1 vektör alanına göre kovaryant türev denir [23].

Tanım 2.1.8. *M bir manifold, $\overline{\nabla}$ afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketi olsun. Bu durumda $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için,*

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \\ (X_1, X_2) \to T(X_1, X_2) = \overline{\nabla}_{X_1}X_2 - \overline{\nabla}_{X_2}X_1 - [X_1, X_2] \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

tensörüne torsiyon tensörü denir [24].

Tanım 2.1.9. *M bir manifold ve $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için $T(X_1, X_2) = 0$ ise $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna simetrik veya sıfır torsiyonlu (torsiyonsuz) denir [24].*

Tanım 2.1.10. *M bir manifold, g simetrik ve non-singüler bilineer form olsun. Eğer $\bar{\nabla}$ konneksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise bu konneksiyona Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu denir [25].*

$\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ içini[

1. $[X_1, X_2] = \bar{\nabla}_{X_1}X_2 - \bar{\nabla}_{X_2}X_1$

2. $X_1 g(X_2, X_3) = g(\bar{\nabla}_{X_1}X_2, X_3) + g(X_2, \bar{\nabla}_{X_1}X_3)$ *(konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği).*

Tanım 2.1.11. *M üzerindeki bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(TM)$ için,*

$$\begin{aligned} 2(\bar{\nabla}_{X_1}X_2, X_3) = X_1(g(X_2, X_3)) + X_2(g(X_3, X_1)) - X_3(g(X_1, X_2)) \\ - g(X_1, [X_2, X_3]) + g(X_2, [X_3, X_1]) + g(X_3, [X_1, X_2]) \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

eşitliği ile belirlenir. Bu eşitliğe Koszul eşitliği denir [25].

Teorem 2.1.1. *Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır [26], [27].*

Tanım 2.1.12. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve* $\alpha : I \to M$ *bir eğri olsun.* $X \in \Gamma(TM)$ *vektör alanı için* $\dot{\alpha} = \alpha_*(\frac{\partial}{\partial t})$ *olmak üzere* $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} X = 0$ *ise* X *vektör alanına* α *boyunca pareleldir denir [26].*

Tanım 2.1.13. (M,g) *bir Riemann manifoldu olsun.* $\alpha : I \to M$ *eğrisinin teğet vektör alanı* α *boyunca parelel ise* α *eğrisine jeodezik eğri denir [26].*

Tanım 2.1.14. M_1^m *ve* M_2^n *Riemann manifoldları olsun.*

$$F : M_1^m \to M_2^n$$

$\mathbb{C}^\infty$ *dönüşümü için* $boy(F_*(T_pM_1)) = m$ *ise* F *nin* $p \in M_1$ *noktasındaki rankı* m *olup* $rank(F) = m$ *ile gösterilir. Eğer* $boy(M_1) = rank(F)$ *ise* F *ye immersiyon (daldırma) denir. Bu durumda* M_1 *e de* M_2 *nin immersed altmanifoldu denir [20], [28].*

Tanım 2.1.15. *Eğer* F *immersiyonu* $1-1$ *ise* F *ye imbedding (gömme),* M_1 *e de* M_2 *nin (gömülen) altmanifoldu denir [20], [28].*

Tanım 2.1.16. (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve*

$$F : M_1 \to M_2$$

bir immersiyon olsun. $\forall\, X, Y \in \Gamma(T_pM_1)$ *için*

$$g_2(F_*X, F_*Y) = g_1(X,Y) \tag{2.1.7}$$

ise F *dönüşümüne izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) denir [27] .*

Tanım 2.1.17. M *bir manifold* $x \in M$ *olsun. Her* x *noktasına* T_xM *nin bir* D_x *alt uzayını karşılık getiren dönüşüme bir distribüsyon denir.*

$$D : M \to T_xM$$

$$x \to D_x \subset T_xM$$

Her x *noktasında* D_x *i geren* r *tane diferansiyellenebilir vektör alanları varsa* D_x *e diferansiyellenebilir r-boyutlu distribüsyon denir [1], [27].*

Örnek 2.1.1. *Her vektör alanı 1-boyutlu bir distribüsyon tanımlar [1].*

Tanım 2.1.18. *M bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold, M manifoldu üzerinde D; $q-$boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonu ve M nin altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Eğer $\forall x \in \hat{M}$ noktasında $\hat{M}$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile D_x aynı ise $\hat{M}$ manifolduna D nin integral altmanifoldu denir [27]. Yani,*

$$\pi : \hat{M} \to M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in M$ için

$$\pi_x(T_x\hat{M}) = D_x \tag{2.1.8}$$

dir. Eğer D distribüsyonunun M manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa M manifolduna D nin bir maksimal integral manifoldu (leaf) denir [27].

Tanım 2.1.19. *M bir $\mathbb{C}^\infty$-manifold ve M nin altmanifoldu $\hat{M}$ olsun. Eğer $\forall x \in \hat{M}$ için D distribüsyonunun x noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir [22].*

Örnek 2.1.2. *1-boyutlu her distribüsyon integrallenebilirdir [1].*

Tanım 2.1.20. *D bir distribüsyon ve $X,Y \in D$ olsun. Eğer $[X,Y] \in D$ ise distribüsyonu involutivedir denir [1].*

Teorem 2.1.2. *(Frobenius Teoremi) M bir $\mathbb{C}^\infty$-manifold ve D, M üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyonu integrallenebilirdir. Üstelik D distribüsyonun $\forall p \in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur [1].*

Tanım 2.1.21. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki lineer konneksiyon da $\bar{\nabla}$ olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D)$ için*

$$\bar{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonu M de paraleldir denir [22].

Şimdi submersiyon ve Riemann submersiyon kavramları verilecek ve bu Riemann submersiyonlari üzerinde tanımlanan eğrilik tensör alanları incelenecektir.

Tanım 2.1.22. *(M_1^m, g_1) ve (M_2^n, g_2) Riemann manifoldları ve $n < m$ olmak üzere*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

örten $\mathbb{C}^{\infty}$ *dönüşümü için*

$$rankF_{*x} = boyM_2$$

oluyorsa F *ye* $x \in M_1$ *noktasında bir submersiyon denir.* $\forall x \in M_1$ *için* F *bir submersiyon ise* F *ye* M_1 *üzerinde bir submersiyon adı verilir [22], [29].*

Tanım 2.1.23. (M_1^m, g_1) *ve* (M_2^n, g_2) *Riemann manifoldları olmak üzere*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir $\mathbb{C}^{\infty}$ *dönüşümü olsun.* $x \in M_1$ *için*

$$V_x = V_x(F) = çekF_{*x} = \{X \in T_xM_1 : F_{*x}(X) = 0\} \subset T_xM_1$$

ve

$$H_x = V_x^{\perp} \subset T_xM_1$$

olarak tanımlayalım. V_x *uzayına* F *dönüşümünün* x *noktasındaki dikey uzayı denir.* V_x *dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan* H_x *e ise* F *dönüşümünün* x *noktasındaki yatay uzayı denir [21], [22].*

Böylece, M_1 Riemann manifoldu $x \in M_1$ için

$$T_xM_1 = V_x \oplus H_x = V_x \oplus V_x^{\perp} \tag{2.1.9}$$

ortogonal ayrışımı mevcuttur [22].

Tanım 2.1.24. (M_1^m, g_1), (M_2^n, g_2) *Riemann manifoldları olmak üzere*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir $\mathbb{C}^{\infty}$ *dönüşümü olsun.* $x \in M_1$ *noktasına* T_xM_1 *nin sırasıyla* V_x *ve* H_x *alt uzaylarını karşılık getiren*

$$x \to V_x$$

ve

$$x \to H_x$$

dönüşümleri $M_1 \mid C_F$ *üzerinde sırasıyla* $V = V(F)$ *ve* $H = H(F)$ *ile gösterilen* C^{∞} *distribüsyonlarını tanımlar.* $V = V(F)$ *ye* F *nin dikey distribüsyonu veya dikey alt demeti,* $H = H(F)$ *ye ise yatay distribüsyonu veya yatay alt demeti denir [21], [22].*

Tanım 2.1.25. *M_1 üzerindeki herhangi bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise X vektör alanına yatay vektör alanı denir ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^h(M_1)$ ile gösterilir [1].*

Tanım 2.1.26. *M_1 üzerindeki herhangi bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise X vektör alanına dikey vektör alanı denir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^v(M_1)$ ile gösterilir [1].*

Herhangi bir $E \in \Gamma(TM_1)$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.27. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

$\mathbb{C}^\infty$ submersiyonu için her $p \in M_1$ noktasında F_{*p} türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu koruyorsa yani, $U, V \in H_p$, $p \in M_1$ için,

$$g_{1p}(U,V) = g_{2F(p)}(F_{*p}(U), F_{*p}(V)) \tag{2.1.10}$$

ise F dönüşümüne bir Riemann submersiyon denir [22], [29].

Şimdi de Riemann submersiyonlar için B. O'Neill tarafından tanımlanan temel tensörlerin tanımı verilecektir.

Tanım 2.1.28. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli T temel tensör alanı $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ olmak üzere

$$T_X Y = h\nabla_{vX} vY + v\nabla_{vX} hY \tag{2.1.11}$$

ile tanımlanır [6], [22].

T temel tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $X, Y, Z \in \Gamma(TM_1)$ için T_X anti-simetrik ve lineer operatördür. Yani $g(T_X Y, Z) = -g(T_X Z, Y)$ dir.

2. $X \in \Gamma(TM_1)$ için T_X, yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

3. T dikey tensör alanıdır. Yani $X \in \Gamma(TM_1)$ için $T_X = T_{vX}$ dir.

4. T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $X,Y \in \Gamma(V)$ için $T_X Y = T_Y Z$ dir [6], [22].

Tanım 2.1.29. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli A temel tensör alanı $X,Y \in \Gamma(TM_1)$ olmak üzere

$$A_X Y = h\nabla_{hX} vY + v\nabla_{hX} vY \tag{2.1.12}$$

ile tanımlanır [6], [22].

A temel tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $X,Y,Z \in \Gamma(TM_1)$ için A_X anti simetrik ve lineer operatördür. Yani $g(A_X Y, Z) = -g(A_X Z, Y)$ dir.

2. $X \in \Gamma(TM_1)$ için A_X, yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

3. A yatay tensör alanıdır. Yani $X \in \Gamma(TM_1)$ için $A_X = A_{hE}$ dir.

4. A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani $X,Y \in \Gamma(H)$ için $A_X Y = -A_Y X$ dir [6], [22].

Lemma 2.1.1. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında tanımlanan*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü Riemann submersiyon olmak üzere $X,Y \in \chi^h(M_1)$ ve $V,W \in \chi^v(M_1)$ için,

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \tag{2.1.13}$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X, \tag{2.1.14}$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V, \tag{2.1.15}$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y \tag{2.1.16}$$

dir [22], [30].

Tanım 2.1.30. *(M_1,g_1), (M_2,g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. Eğer T tensör alanı sıfır ise F dönüşümünün herhangi bir $F^{-1}(x)$ lifine M_1 manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu denir [22], [29].

Tanım 2.1.31. *$F:M_1\to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerindeki bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ olsun. F boyunca M_2 üzerindeki $\overset{2}{\nabla}{}^F$ konneksiyonuna F boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu (pullback) denir [31].*

Tanım 2.1.32. *(M_1,g_1), (M_2,g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$$

bir dönüşüm olsun. F boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}{}^F$ olmak üzere, $\forall X,Y\in\Gamma(TM_1)$ için

$$\nabla F_*:\Gamma(TM_1)\times\Gamma(TM_1)\to\Gamma_F(TM_2)$$

$$(\nabla F_*)(X,Y)=\overset{2}{\nabla}{}^F_X F_*(Y)-F_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \tag{2.1.17}$$

şeklinde tanımlanan ∇F_* dönüşümüne F dönüşümünün ikinci temel formu denir [1], [31].

Önerme 2.1.1. *$F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\forall X_1,X_2\in\Gamma(TM_1)$ için,*

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2)=(\nabla F_*)(X_2,X_1)$$

dir. Yani ikinci temel form simetriktir [1], [9].

Tanım 2.1.33. *$F:(M_1^m,g_1)\to(M_2^n,g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1,e_2,...,e_m\}$, $\Gamma(TM_1)$ için yerel ortonormal çatı olsun. F dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(F)$, ∇F_* ikinci temel formunun izine eşittir. Yani*

$$\tau(F)=iz(\nabla F_*)=\sum_{i=1}^{m}(\nabla F_*)(e_i,e_i) \tag{2.1.18}$$

dır. Bir $F:(M_1^m,g_1)\to(M_2^n,g_2)$ dönüşümünün tensiyon alanı F boyunca bir vektör alanıdır. Yani $\tau(F)\in\Gamma_F(TM_2)$ dir [1], [9].

Tanım 2.1.34. *Eğer $\tau(F)=0$ ise $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümüne harmonik dönüşüm denir [1], [9].*

Tanım 2.1.35. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : M_1 \to M_2$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M_1$ noktasındaki türev dönüşümü F_{*p} olmak üzere $X \in T_pM_1$ ve $Z \in T_{F(p)}M_2$ için

$$g_2(F_{*p}(X), Z) = g_1(X, F^{*p}(Z)) \tag{2.1.19}$$

ile tanımlı F^{*p} dönüşümüne $p \in M_1$ noktasındaki F_{*p} dönüşümünün adjoint dönüşümü denir [1].

2.2 Kompleks Manifoldlar

Bu alt bölümde kompleks manifoldlar ve kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan çeşitli submersiyon türlerinin tanımı verilecektir.

Tanım 2.2.1. *M_1, bir Hausdorff uzayı ve M_1 de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer $\forall p \in M_1$ için*

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \subset M_1 \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \oslash$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise M_1 e kompleks manifold denir. $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{R}^{2n}$ özdeş olduğundan M_1, $2n-$boyutlu bir reel analitik manifolddur. Burada $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ya da M_1 in holomorfik koordinat komşuluğu denir [32].

Tanım 2.2.2. *M_1, reel $2n-$boyutlu bir manifold ve M_1 üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı J olsun. Buna göre $\forall p \in M_1$ için,*

$$J_p : T_pM_1 \to T_pM_1,\ J_p^2 = -I_{2m}$$

şeklinde tanımlı J endomorfizmi (lineer dönüşümü) varsa J ye M_1 üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. M_1 manifolduna ise J kompleks yapısı ile birlikte hemen hemen kompleks manifold denir [17], [24].

Tanım 2.2.3. *M, hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $V \subset M$ açığı üzerinde*

$$J(\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \frac{\partial}{\partial y^\beta},\ J(\frac{\partial}{\partial y^\beta}) = -\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

olacak şekilde V nin $\left\{x^\beta, y^\beta\right\}$ koordinat sistemi varsa M e bir kompleks manifold denir [24].

Sonuç 2.2.1. *M bir hemen hemen kompleks manifoldu ise* $n = 2m$ *dir. Burada n, M in kompleks boyutu,* $2m$ *ise M in reel boyutudur [33].*

Tanım 2.2.4. *M bir hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere* $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ *için*

$$g(JX_1, JX_2) = g(X_1, X_2) \tag{2.2.1}$$

ise g bilineer dönüşümüne Hermityen metrik denir [24].

Tanım 2.2.5. *M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde bir g Hermityen metriği tanımlı ise M e hemen hemen Hermityen manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M e Hermityen manifold denir . Bu hemen hemen Hermityen manifold* $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ *için,*

$$J^2 = -I \text{ ve } g(X_1, X_2) = g(JX_1, JX_2) \tag{2.2.2}$$

eşitliğini sağlar [24].

Tanım 2.2.6. *M hemen hemen Hermityen manifold, g ve J, M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun.* $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ *için,*

$$\Omega(X_1, X_2) = g(X_1, JX_2) \tag{2.2.3}$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir [24]. Bu manifold üzerinde tanımlı Hermityen metriği g ve hemen hemen kompleks yapısı J olan M hemen hemen Hermityen manifold (M, g, J) *ile gösterilir.*

Tanım 2.2.7. *M bir hemen hemen kompleks manifold ve g, M üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer M üzerinde tanımlanan* Ω *temel 2- formu kapalı ise yani* $d\Omega = 0$ *ise g Hermityen metriğine Kaehler metrik denir [24].*

Tanım 2.2.8. *Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise* (M, g, J) *ye Kaehler manifold denir [24].*

Teorem 2.2.1. (M, g, J) *bir hemen hemen Hermityen manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla J = 0 \tag{2.2.4}$$

olmasıdır [24].

Teorem 2.2.2. (M,g,J) *bir hemen hemen Hermityen manifoldu bir Kaehler manifoldu ise, $\forall X_1, X_2 \in TM$ için,*

$$\nabla_{X_1} JX_2 = (\nabla_{X_1} J)X_2 + J\nabla_{X_1} X_2 \overset{(\nabla_{X_1} J)X_2=0}{\to} \nabla_{X_1} JX_2 = J\nabla_{X_1} X_2 \tag{2.2.5}$$

dır [24].

Şimdi bir kompleks manifold üzerinde tanımlanan submersiyon kavramları verilecek.

Tanım 2.2.9. (M_1^m, g_1, J_1) *ve* (M_2^n, g_2, J_2) $(m > n)$ *olacak şekilde bir hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun.* $F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2, J_2)$ *bir* $\mathbb{C}^\infty$ *submersiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa bu F dönüşümüne bir hemen hemen Hermityen submersiyon veya holomorfik submersiyon denir [24].*

1. *F bir Riemann submersiyon,*
2. *F bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani,*

$$F_* J_1 = J_2 F_* \tag{2.2.6}$$

dır.

Tanım 2.2.10. (M_1, g_1, J_1) *ve* (M_2, g_2, J_2) *hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2, J_2)$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$F_* J_1 = J_2 F_* \tag{2.2.7}$$

ise $p \in M_1$ noktasında F dönüşümüne bir holomorfik Riemann submersiyon denir [18].

Tanım 2.2.11. (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon J_1e göre invaryant ise F dönüşümüne bir invaryant Riemann submersiyon denir. Yani,

$$J_1(çekF_*) = çekF_* \tag{2.2.8}$$

dır [10].

Tanım 2.2.12. (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$$

dönüşümü, $(n < m)$ *şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer* $çekF_*$, J_1 *e göre anti-invaryant ise* F *dönüşümüne bir anti-invaryant Riemann submersiyon denir. Yani,*

$$J_1(çekF_*) \subseteq (çekF_*)^{\perp} \tag{2.2.9}$$

dır [13].

Tanım 2.2.13. (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$$

dönüşümü, $(n < m)$ *şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun.* $D_1 \subseteq çekF_*$ *distribüsyonu var,*

$$çekF_* = D_1 \oplus D_2$$

ve

$$J_1(D_1) = D_1,\ J_1(D_2) \subseteq (çekF_*)^{\perp} \tag{2.2.10}$$

ise F *dönüşümüne yarı-invaryant Riemann submersiyon denir [12]. Burada* D_2, $çekF_*$ *da* D_1 *distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır.*

Tanım 2.2.14. (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$$

dönüşümü, $(n < m)$ *şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer* $p \in M_1$ *noktasında sıfırdan farklı* $X \in çekF_{*p}$ *vektörü için* $çekF_{*p}$ *ve* J_1X *arasındaki* $\theta(X)$ *açısı sabit yani,* $p \in M_1$ *ve* $çekF_{*p}$ *deki* X *tanjant vektörlerinin seçiminden bağımsız ise* F *dönüşümüne slant submersiyon denir [11]. Burada* θ *açısına da slant submersiyonun slant açısı denir.*

2.3 Riemann Dönüşümler

Bu alt bölümde Riemann submersiyonların O'Neill formüllerini ve izometrik immersiyonların Gauss-Weingarten formüllerinin benzer şeklini Riemann dönüşümlere de uygulayarak bunlar için temel formüller geliştirilecektir. Ayrıca Riemann dönüşümlerin tensör alanı ve ikinci temel form arasındaki ilişki kullanılarak kullanışlı sonuçlar elde edilecektir. İlk olarak Riemann dönüşümü tanımlanacaktır.

Tanım 2.3.1. (M_1, g_1), (M_2, g_2) *Riemann manifoldlar olsun.*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $p \in M_1$ *noktasında* F_* *lineer dönüşümünün çekirdek uzayı* $çekF_{*p}$ *ve ortogonal tümleyen uzayının* $H_p = (çekF_{*p})^{\perp}$ *ile gösterelim.* M_1 *in* $p \in M_1$ *noktasındaki tanjant uzayı*

$$T_pM_1 = çekF_{*p} \oplus (çekF_{*p})^{\perp} \tag{2.3.1}$$

ayrışımına sahip olur. $p \in M_1$ *noktasında* F_* *lineer dönüşümünün görüntüsü* $görF_{*p}$ *ve ortogonal tümleyen uzayının da* $(görF_{*p})^{\perp}$ *ile gösterelim. Böylece* M_2 *nin* $T_{F(p)}M_2$ *tanjant uzayı* $p \in M_1$ *noktasında*

$$T_{F(p)}M_2 = görF_{*p} \oplus (görF_{*p})^{\perp} \tag{2.3.2}$$

ayrışımına sahiptir. $p_1 \in M_1$ *noktasında* $p_2 = F(p_1)$ *olmak üzere*

$$((çekF_{*p_1})^{\perp},\ g_1(p_1))\ |_{(çekF_{*p_1})^{\perp}}$$

ve

$$((görF_{*p_1}),\ g_2(p_2))\ |_{(görF_{*p_1}}$$

iç çarpım uzayları arasında

$$F^h_{*p_1} : (çekF_{*p_1})^{\perp} \to (görF_{*p_1}) \tag{2.3.3}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir lineer izometri ise

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $p_1 \in M_1$ *noktasındaki Riemann dönüşümü denir [9].*

Riemann dönüşümler için aşağıdaki aşağıdaki önemli lemmayı verelim.

Lemma 2.3.1. *(M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemann manifoldlar olsun.*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

Riemann dönüşüm olsun. $\forall X_1, X_2, X_3 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ için

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), F_*(X_3)) = 0 \tag{2.3.4}$$

eşitliği vardır [1].

İspat: F bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17) denkleminden,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), F_*(X_3)) = g_2((\nabla^F_{X_1} F_*(X_2), F_*(X_3)) - g_2((F_*(\nabla^{M_1}_{X_1} X_2), F_*(X_3))$$

elde edilir. Burada F nin özelliğinden dolayı

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), F_*(X_3)) = g_2((\nabla^F_{X_1} F_*(X_2), F_*(X_3)) - g_1((\nabla^{M_1}_{X_1} X_2, X_3) \tag{2.3.5}$$

bulunur. Diğer taraftan ∇^{M_1}, M_1 nin bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için, Koszul eşitliğinden;

$$\begin{aligned} 2g_1(\nabla^{M_1}_{X_1} X_2, X_3) &= X_1 g_1(X_2, X_3) + X_2 g_1(X_1, X_3) - X_3 g_1(X_1, X_2) \\ &\quad + g_1([X_1, X_2], X_3) + g_1([X_3, X_1], X_2) - g_1([X_2, X_3], X_1) \end{aligned}$$

yazılır. $F_*([X_1, X_2]) = [F_*(X_1), F_*(X_2)]$ olduğu için, $g_1(X_1, X_2) = g_2(F_*(X_1), F_*(X_2))$ eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} 2g_1(\nabla^{M_1}_{X_1} X_2, X_3) &= X_1 g_2(F_*(X_2), F_*(X_3)) + X_2 g_2(F_*(X_1), F_*(X_3)) - X_3 g_2(F_*(X_1), F_*(X_2)) \\ &\quad + g_2([F_*(X_1), F_*(X_2)], F_*(X_3)) + g_2([F_*(X_3), F_*(X_1)], F_*(X_2)) \\ &\quad - g_2([F_*(X_2), F_*(X_3)], F_*(X_1)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, ∇^{M_2}, M_2 üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için,

$$g_1(\nabla^{M_1}_{X_1} X_2, X_3) = g_2(\nabla^F_{X_1} F_*(X_2), F_*(X_3)) \tag{2.3.6}$$

olur. (2.3.5) ve (2.3.6) eşitlikleri kullanılarak,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), F_*(X_3)) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) \in \Gamma((görF_*)^\perp),\ \forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp) \tag{2.3.7}$$

bulunur.

Şimdi, ileriki bölümlerde teoremlerin ispatında kullanılan Riemann dönüşümleri için Gauss-Weingarten formüllerinin elde edilişi gösterilecektir. Öncelikle altmanifoldlar için Gauss-Weingarten formüllerinin tanımı verilecektir.

Tanım 2.3.2. *M_1 ve M_2 sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. M_2 manifoldunun altmanifoldu M_1 olsun. $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla M_1 ve M_2 manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM_1)$ olmak üzere,*

$$h : \chi(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi^{\perp}(M_1)$$

$$\bar{\nabla}_{X_1} X_2 = \nabla_{X_1} X_2 + h(X_1, X_2) \tag{2.3.8}$$

şeklinde yazılan denkleme Gauss denklemi denir. Burada $\nabla_{X_1} X_2$ ve $h(X_1, X_2)$ sırasıyla $\bar{\nabla}_{X_1} X_2$ nin teğet ve normal bileşenleridir ve h, M_1 nin ikinci temel formudur [27].

Tanım 2.3.3. *(2.3.8) denkleminde $h = 0$ ise M_1 Riemann manifolduna tamamen jeodezik altmanifold denir [27].*

Tanım 2.3.4. *M_1 ve M_2 sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. M_2 manifoldunun altmanifoldu M_1 olsun. M_1 nin normal birim vektör alanı V ve $-A_V X_1$ ve $\nabla^{\perp}_{X_1} V$ sırasıyla $\bar{\nabla}_{X_1} V$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,*

$$A : \chi^{\perp}(M_1) \times \chi(M_1) \to \chi(M_1)$$

$$\bar{\nabla}_{X_1} V = -A_V X_1 + \nabla^{\perp}_{X_1} V \tag{2.3.9}$$

biçiminde yazılan eşitliğe Weingarten denklemi denir. Burada A_V ye, V ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna da M_1 in $T^{\perp}M_1$ normal demetindeki normal konneksiyonu adı verilir [27].

İkinci temel form ve şekil operatörü arasında

$$g(h(X_1, X_2), V) = g(X_2, A_V X_1) \tag{2.3.10}$$

eşitliği vardır [1].

Altmanifoldlardaki Weingarten denklemini Riemann dönüşümlere uygulanırsa,

$$\nabla^2_{F_* X_1} V = -S_V F_* X_1 + \nabla^{F\perp}_{X_1} V \tag{2.3.11}$$

eşitliğine sahip oluruz. Burada $S_V F_* X_1$, $\nabla^2_{F_* X_1} V$ nin F vektör alanı boyunca teğet bileşenidir. $S_V F_* X_1$, V üzerinde bilineerdir. $X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((görF_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) = \nabla^2_{F_* X_1} F_*(X_2) - F_*(\nabla^{M_1}_{X_1} X_2)$$

dır. Burada $F_* X_2 \in (görF_*)$ olduğu için,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), V) = g_2(F_*(X_2), S_V F_* X_1) \tag{2.3.12}$$

eşitliği vardır. (2.3.12) eşitliği, Riemann dönüşümler için dönüşümün ikinci temel formu ile şekil operatörü arasındaki bağıntıyı verir. (∇F_*) simetrik olduğu için S_V de $(görF_*)$ ın bir simetrik lineer dönüşümüdür [1].

Şimdi (2.1.12), (2.1.11) ve (2.3.11) denklemleri kullanılarak bir Riemann dönüşümün tamamen geodezik olabilmesi için önemli bir tanım verilecektir.

Tanım 2.3.5. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlar ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM_1)$ için $(\nabla F_*)(X_1, X_2) = 0$ ise bu F dönüşümüne tamamen geodezik dönüşüm denir [1].

Teorem 2.3.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlar ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

Riemann dönüşüm olsun. F dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart,

1. *$A_{X_1} X_2 = 0$*
2. *$S_V F_*(X_1) = 0$*
3. *$X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((görF_*)^\perp)$ için lifler tamamen geodeziktir [1].*

İspat: İlk olarak $(M_1, g_1,)$ ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart, $\forall U, U_1, U_2 \in \Gamma(çekF_*)$ ve $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) = 0,\ (\nabla F_*)(X_1, U) = 0 \text{ ve } (\nabla F_*)(U_1, U_2) = 0 \tag{2.3.13}$$

dır. $(\nabla F_*)(X_1, U) \in \Gamma(görF_*)$ olduğu için

$$(\nabla F_*)(X_1, U) = 0$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, U), F_*(X_2)) = 0 \tag{2.3.14}$$

olmasıdır. Burada (2.1.17) eşitliği kullanılarak,

$$(\nabla F_*)(X_1, U) = -F_*(\nabla^{M_1}_{X_1} U)$$

elde edilir. (2.1.15) denklemi kullanılarak,

$$(\nabla F_*)(X_1, U) = -F_*(A_{X_1} U) \tag{2.3.15}$$

elde edilir. (2.3.14) ve (2.3.15) eşitliklerinden yararlanılarak,

$$g_2(F_*(A_{X_1} U), F_*(X_2)) = -g_2((\nabla F_*)(X_1, U), F_*(X_2)) = 0$$

bulunur. F bir Riemann dönüşüm olduğundan,

$$g_1(A_{X_1} U, X_2) = -g_2((\nabla F_*)(X_1, U), F_*(X_2)) = 0 \tag{2.3.16}$$

elde edilir. Buradan,

$$g_1(A_{X_1} U, X_2) = -g_1(U, A_{X_1} X_2) = 0$$

olup

$$A_{X_1} X_2 = 0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $(\nabla F_*)(U, V) \in \Gamma(görF_*)$ için

$$(\nabla F_*)(U, V) = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $X_1 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$g_2((\nabla F_*)(U, V), F_*(X_1)) = 0 \tag{2.3.17}$$

olmasıdır. Burada yine (2.1.17) eşitliğinden yararlanılarak,

$$(\nabla F_*)(U, V) = -F_*(\nabla^{M_1}_{U} V)$$

eşitliği elde edilir. (2.1.13) özelliğinden yararlanılarak,

$$(\nabla F_*)(U, V) = -F_*(T_U V) \tag{2.3.18}$$

elde edilir. (2.3.17) ve (2.3.18) eşitliklerinden,

$$g_2(F_*(T_U V), F_*(X_1)) = -g_2((\nabla F_*)(U,V), F_*(X_1))$$

elde edilir. F bir Riemann dönüşüm olduğundan,

$$g_1(T_U V, X_1) = -g_2((\nabla F_*)(U,V), F_*(X_1)) \tag{2.3.19}$$

elde edilir. Son olarak, $X_1, X_2 \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $V \in \Gamma((g\ddot{o}rF_*)^\perp)$ için

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), V) = 0$$

dır. (2.3.12) eşitliği kullanılarak

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, X_2), V) = g_2(F_*(X_2), S_V F_* X_1) = 0 \tag{2.3.20}$$

elde edilir. Buradan da $S_V F_* X_1 = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. İNVARYANT VE ANTİ-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan invaryant ve anti-invaryant Riemann dönüşümler ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir. Anti-invaryant Riemann dönüşümlerden ortaya çıkan distribüsyonların ayrık geometrisi incelenecek ve ayrışım teoremleri verilecektir. İlk olarak kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna tanımlanan invaryant Riemann dönüşümünün tanımı verilecektir.

3.1 İnvaryant Riemann Dönüşümler

Tanım 3.1.1. *(M_1, g_1, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile (M_2, g_2) Riemann manifoldu arasında tanımlanan*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer

$$J_1(çekF_*) = çekF_* \tag{3.1.1}$$

şartı sağlanıyorsa F dönüşümüne invaryant Riemann dönüşüm denir [10]. (3.1.1) eşitliğinden

$$J_1((çekF_*)^\perp) = (çekF_*)^\perp$$

olduğu da görülür.

Şimdi invaryant Riemann dönüşümü için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.1.

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^4, g_1) &\to (\mathbb{R}^3, g_2) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\to (\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{x_3 - x_4}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen türev dönüşümün matrisi,

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olur. Burada $rankF_* = 2$ olup doğrudan hesaplamalarla yatay ve dikey distribüsyonlar,

$$(çekF_*) = \left\{ X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_2},\ X_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$(\c{c}ekF_*)^{\perp} = \left\{ X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_2},\ X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

şeklindedir. Buradan,

$$g_1(X_3,X_3) = 1 \ \ ve \ \ F_*X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ bulunur.$$

Buradan $g_2(F_*X_3, F_*X_3) = 1$ *elde edilir.*

Benzer şekilde,

$$g_1(X_4,X_4) = 1 \ \ ve \ \ F_*X_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ bulunur.$$

Buradan $g_2(F_*X_4, F_*X_4) = 1$ *elde edilir.*

Son olarak da $g_1(X_3, X_4) = 0$ *ve* $g_2(F_*X_3, F_*X_4) = 0$ *elde edilir. J yapısını,*

$$J(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_3,-x_4,x_1,x_2)$$

şeklinde tanımlayalım. Direk işlemler ile,

$$J(X_1) = J((-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)) = (0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = X_2$$
$$J(X_2) = J((0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})) = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0) = -X_1$$

olup buradan

$$J(\c{c}ekF_*) = \c{c}ekF_*$$

olur. Benzer şekilde

$$J(X_3) = J((\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)) = (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = X_4$$
$$J(X_4) = J((0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})) = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0) = -X_3$$

bulunur. Buradan da

$$J((\c{c}ekF_*)^{\perp}) = (\c{c}ekF_*)^{\perp}$$

ifadesi elde edilir. Bu işlemler ile birlikte F dönüşümü hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan bir invaryant Riemann dönüşümüdür.

Şimdi kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan anti-invaryant Riemann dönüşümünün tanımı verilip, kaynak ve hedef manifoldların geometrisi incelenecektir.

3.2 Anti-İnvaryant Riemann Dönüşümler

Tanım 3.2.1. *(M_1, g_1, J_1) bir hemen hemen Hermityen manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$J_1(çekF_*) \subseteq (çekF_*)^{\perp} \tag{3.2.1}$$

şartı sağlıyorsa F bir anti-invaryant Riemann dönüşümüdür [13]. (3.2.1) eşitliğinden

$$(çekF_*)^{\perp} = J_1(çekF_*) \oplus \mu$$

olduğu görülür. Burada μ, $(çekF_*)^{\perp}$ de $J_1(çekF_*)$ ın ortogonal tamamlayıcı alt demetidir ve μ, J_1 ye göre invaryanttır.

Önerme 3.2.1. *(M_1^{2m}, g_1, J) hemen hemen Hermityen manifold, (M_2^n, g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü $boy(çek\ F_*) = r$ eşitliği ile birlikte bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olsun. O halde

$$boy(\mu) = 2(m - r)$$

dir [13].

İspat: $boy(çekF_*) = r$ ve F bir anti-invaryant Riemann dönüşümü olduğu için

$$boy(J(çekF_*)) = r$$

olur.

$$(çekF_*)^{\perp} = J(çekF_*) \oplus \mu$$

olduğundan

$$2m - r = r + boy(\mu)$$

dir. Buradan

$$boy(\mu) = 2(m-r)$$

elde edilmiş olur.

(M_1^{2m}, g_1, J_1) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M_2^n, g_2) bir Riemann manifoldu olsun.

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü $boy(çekF_*) = r$ eşitliği ile birlikte bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Eğer F,

$$J_1(çekF_*) = (çekF_*)^{\perp} \tag{3.2.2}$$

eşitliğini sağlıyor ise F dönüşümüne M_1 den M_2 ye bir Lagrange Riemann dönüşümü denir. Buradan bir anti-invaryant F Riemann dönşümün bir Lagrange Riemann dönüşümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{boy(M_1)}{2} = boy(çekF_*)$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca bir anti-invaryant Riemann dönüşümü Lagrange dönüşümü olması için gerek ve yeter şart $\mu = \{0\}$ olmasıdır [13].

Lemma 3.2.1. (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *bir Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

bir anti-invaryant Riemann dönüşümü $boy(çekF_*) = r$ *eşitliği ile birlikte Lagrange dönüşümü olması için gerek ve yeter şart*

$$\frac{boy(M_1)}{2} = boy(görF_*)$$

olmasıdır [13].

Önerme 3.2.2. *Her uygun F Riemann dönüşümü (F, ne izometrik immersiyon ne de Riemann submersiyondur),* (M_1, g_1, J_1) *hemen hemen Hermityen manifolddan* (M_2, g_2) *bir Riemann manifolduna bir anti-invaryant Riemann dönüşümü bir anti-invaryant Riemann dönüşümüdür [13].*

Şimdi anti-invaryant Riemann dönüşümü için örnekler verilim.

Örnek 3.2.1. *Bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna her anti-invaryant Riemann submersiyon,*

$$(görF_*)^{\perp} = \{0\}$$

ile birlikte bir anti-invaryant Riemann dönüşümdür.

Örnek 3.2.2. *Bir hemen hemen Hermityen manifoldun her anti-invaryant altmanifoldu,*

$$çekF_* = \{0\}$$

ile birlikte bir anti-invaryant Riemann dönüşümdür.

Örnek 3.2.3.

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^4, g_1) &\to (\mathbb{R}^3, g_2) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\to (\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}}, 0, x_2 \cos\alpha + x_4 \sin\alpha) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen türev dönüşümün matrisi,

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

olur. Burada $rankF_* = 2$ *olup direk işlemlerle yatay ve dikey distribüsyonlar,*

$$(çekF_*) = \left\{ X_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_2 = -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$(çekF_*)^{\perp} = \left\{ X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_4 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

dır. Buradan,

$$g_1(X_3, X_3) = 1 \text{ ve } F_* X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Buradan $g_2(F_* X_3, F_* X_3) = 1$ *elde edilir.*

Benzer şekilde,

$$g_1(X_4, X_4) = 1 \text{ ve } F_* X_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Buradan $g_2(F_* X_4, F_* X_4) = 1$ *elde edilir.*

Son olarak $g_1(X_3,X_4)=0$ *ve* $g_2(F_*X_3,F_*X_4)=0$ *bulunur. J yapısını,*

$$J(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_3,x_4,x_1,-x_2)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$J(X_1)=J((-1,0,-1,0))=(1,0,-1,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}X_2$$

ve

$$J(X_2)=J((0,-\sin\alpha,0,\cos\alpha))=(0,\cos\alpha,0,\sin\alpha)=X_4$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$J(çekF_*)\subseteq(çekF_*)^{\perp}$$

elde edilir. O halde F dönüşümü hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olduğu gösterilmiş olur.

(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) bir Riemann manifoldu olsun.

$$F:(M_1,g_1,J)\to(M_2,g_2)$$

şeklinde tanımlanan anti-invaryant bir Riemann dönüşüm olsun. $\forall X_1\in\Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ için;

$$JX_1=BX_1+CX_1 \tag{3.2.3}$$

yazılır. Burada $BX_1\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $CX_1\in\Gamma(\mu)$ dır.

Şimdi dikey ve yatay distribüsyonlarının geometrisini inceleyelim.

Önerme 3.2.3. *(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) bir Riemann manifold olsun.*

$$F:(M_1,g_1,J)\to(M_2,g_2)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Dikey distribüsyonunun M_1 üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart $X_1,X_2\in\Gamma(çekF_*)$ ve $Z_1\in\Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,BZ_1),F_*(JX_2))=g_2((\nabla F_*)(JX_2,X_1),F_*(CZ_1)) \tag{3.2.4}$$

dır [13].

İspat: Tanım (2.2.2) ve (3.2.3) eşitliklerini kullanarak, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $Z_1 \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, BZ_1) + g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, CZ_1)$$

bulunur. Buradan direk işlemler ile,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = -X_1 g_1(JX_2, BZ_1) + g_1(JX_2, \nabla^1_{X_1} BZ_1) + g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, CZ_1)$$

yazılır. (2.1.17) denkleminden,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = -g_1(JX_2, H\nabla^1_{X_1} BZ_1) - g_1(JX_2, V\nabla^1_{X_1} BZ_1) + g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, CZ_1)$$

olup direk işlemlerle,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = -g_1(JX_2, \nabla^1_{X_1} BZ_1) + g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, CZ_1)$$

bulunur. F bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olduğundan,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = -g_2(F_*(JX_2), F_*(\nabla^1_{X_1} BZ_1)) + g_2(F_*(\nabla^1_{X_1} JX_2), F_*(CZ_1))$$

eşitliği yazılarak dönüşümün ikinci temel formundan,

$$\begin{aligned} g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = &-g_2(F_*(JX_2), ((\nabla^F_{X_1} F_* BZ_1) - (\nabla F_*)(X_1, BZ_1))) + g_2((\nabla^F_{X_1} F_*(JX_2) \\ &- (\nabla F_*)(X_1, JX_2)), F_*(CZ_1)) \end{aligned}$$

yazılır. Direk işlemler ile

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, Z_1) = g_2(F_*(JX_2), (\nabla F_*)(X_1, BZ_1)) - g_2((\nabla F_*)(X_1, JX_2), F_*(CZ_1))$$

elde edilir. Son olarak dikey distribüsyonunun M_1 üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart

$$g_2((\nabla F_*)(X_1, BZ_1), F_*(JX_2)) = g_2((\nabla F_*)(JX_2, X_1), F_*(CZ_1))$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu şekilde teorem ispatlanmış olur.

Yatay distribüsyon için aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 3.2.4. *(M_1, g_1, J) bir Kaehler manifoldd ve (M_2, g_2) bir Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Yatay distribüsyonun M_1 üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $\forall X_1 \in \Gamma(çekF_*)$ için,

$$g_2((\nabla F_*)(Z_1, BZ_2), F_*(JX_1)) = -g_2((\nabla^F_{Z_1} F_*(JX_1), F_*(CZ_2)) \tag{3.2.5}$$

dır [13].

İspat: Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği ve (3.2.3) denkleminden $Z_1, Z_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $X_1 \in \Gamma(çekF_*)$ için,

$$g_1(\nabla^1_{Z_1} Z_2, X_1) = -g_1(JZ_2, \nabla^1_{Z_1} JX_1)$$

bulunur. (3.2.3) denkleminden

$$g_1(\nabla^1_{Z_1} Z_2, X_1) = -g_1(BZ_2, \nabla^1_{Z_1} JX_1) - g_1(CZ_2, \nabla^1_{Z_1} JX_1)$$

elde edilir. F bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olduğundan

$$g_1(\nabla^1_{Z_1} Z_2, X_1) = g_2(F_*(BZ_2), F_*(\nabla^1_{Z_1} JX_1)) - g_2(F_*(\nabla^1_{Z_1} JX_1), F_*(CZ_2))$$

yazılır. (2.1.17) ve (2.2.1) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g_1(\nabla^1_{Z_1} Z_2, X_1) = & -g_2(F_*(JX_1), (\nabla F_*)(Z_1, BZ_2)) + g_2((\nabla F_*)(Z_1, JX_1), F_*(CZ_2)) \\ & - g_2(\nabla^F_{Z_1} F_*(JX_1), F_*(CZ_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Direk işlemlerle

$$g_1(\nabla^1_{Z_1} Z_2, X_1) = -g_2(F_*(BZ_2), F_*(\nabla^1_{Z_1} JX_1)) - g_2(F_*(\nabla^1_{Z_1} JX_1), F_*(CZ_2))$$

bulunur. Buradan da yatay distribüsyonunun M_1 üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart

$$g_2(F_*(JX_1), (\nabla F_*)(Z_1, BZ_2)) = -g_2(\nabla^F_{Z_1} F_*(JX_1), F_*(CZ_2))$$

dır. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Önerme (3.2.3) ve (3.2.4) den aşağıdaki genel bir teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1. *(M_1, g_1, J) bir Kaehler manifold ve (M_2, g_2) bir Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir anti-invaryant Riemann dönüşüm olsun. M_1, $M_{(çekF_*)} \times M_{(çekF_*)^\perp}$ şeklinde yerel çarpım Riemann manifoldun üreteci olması için gerek ve yeter şart (3.2.4) ve (3.2.5) eşitliklerini sağlamalıdır. Burada $M_{(çekF_*)}$ ve $M_{(çekF_*)^\perp}$, $(çekF_*)$ ve $(çekF_*)^\perp$ in integral manifoldlarıdır [13].

3.3 Tamamen Geodezik Anti-İnvaryant Riemann Dönüşümler

Bu başlık altında ilk olarak Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invaryant Riemann dönüşümlerin tamamen geodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar verilecektir. Daha sonra tamamen umbilik lifler ile bir anti-invaryant Riemann dönüşümün tamamen geodezik dikey distribüsyonuna sahip ve her pluriharmonik anti-invaryant Riemann dönüşümünün total geodezik olduğu gösterilecektir. Ayrıca bir anti-invaryant Riemann dönüşümün kaynak manifoldu için bir ayrışım teoremi verilecektir.

Lemma 3.3.1. *(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlar ve*

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann dönüşüm olsun ve $\forall p_1 \in M_1$ için $F(p_1) = p_2$ olsun. Kabul edelim ki ∇^2, (M_2, g_2) üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM_1)$ ve $\forall V \in \Gamma(TM_2)$ için

$$\nabla_X^{F^2}(V \circ F) = \nabla^2_{F_* X} V \tag{3.3.1}$$

eşitliği sağlanır [13].

Burada ∇^{F^2}, ∇^2 nin pullback konneksiyonudur. Bundan sonra kolaylık olması için (M_2, g_2) nin Levi-Civita konneksiyonu hem de F boyunca pullback konneksiyonunu ∇^2 ile göstereceğiz [34].

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

Riemann dönüşümü, $\forall p_1 \in M_1$ için $F(p_1) = p_2 \in M_2$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. F_* türev dönüşümünün ${}^*F_*$ adjoint dönüşümü $X \in T_{p_1}M_1$, $Y \in T_{F(p_1)}M_2$ ve $p_1 \in M_1$ için $g_1(X, {}^*F_{*p_1}Y) = g_2(F_{*p_1}X, Y)$ tarafından karakterize edilir.

$$F^h_{*p_1} : ((çekF_*)^\perp(p_1), g_{1_{p_1((çekF_*)^\perp(p_1))}}) \to (görF_*(p_2), g_{2_{p_2((görF_*)(p_2))}})$$

lineer dönüşümünün adjoint dönüşümü${}^*F^h_{*p_1}$,

$$({}^*F_{*p_1})^h : görF_*(p_2) \to (cekF_*)^\perp(p_1)$$

$({}^*F_{*p_1})^h y = {}^* F_{*p_1} y$ ile tanımlanır. Burada $y \in \Gamma(görF_{*p_1})$, $F(p_1) = p_2$, bir izomorfizmdir ve

$$(F^h_{*p_1})^{-1} = ({}^*F_{*p_1})^h = {}^*(F^h_{*p_1}) \tag{3.3.2}$$

dır [13].

Şimdi hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna bir anti-invaryant Rieman dönüşümünün tamamen geodezik olabilmesi durumu incelenecektir. Öncelikle aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.3.1. *F, (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifoldları arasında bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $\forall\, X_1,X_2 \in \Gamma(TM_1)$ için*

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2) = 0 \tag{3.3.3}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu diferansiyellenebilir dönüşüme tamamen geodezik dönüşüm denir [13].

Teorem 3.3.1. *(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) bir Riemann manifold olsun.*

$$F:(M_1,g_1,J)\to(M_2,g_2)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1,X_2 \in \Gamma(çekF_*)$, $\forall \bar{Z}_1,\bar{Z}_1 \in \Gamma(\mu)$, $\forall Z_2,Z_3 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $\forall V \in ((görF_*)^{\perp})$ için,

$$^{*}F_*(A_V F_*(JX_1)) \in \Gamma(\mu), \tag{3.3.4}$$

$$^{*}F_*(A_V F_*(\bar{Z}_1)) \in \Gamma(J(çekF_*)), \tag{3.3.5}$$

$$g_2(F_*(JX_2),(\nabla F_*)(X_1,BZ_2)) = g_2((\nabla F_*)(X_1,JX_2),F_*(CZ_2)) \tag{3.3.6}$$

ve

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,BZ_3) &= g_2((\nabla F_*)(X_1,BZ_2)+(\nabla F_*)(X_1,CZ_2),F_*(CZ_3)) \\ &\quad - g_2(F_*(CZ_2),(\nabla F_*)(X_1,BZ_3)) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

dır [13].

İspat: F bir Riemann dönüşüm olduğundan ve (2.1.17) denkleminden $\forall X_1 \in (çekF_*)$, ve $\forall Z_2,Z_3 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için;

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_3)) = -g_2(F_*(\nabla_{X_1}X_2),F_*(Z_3))$$

bulunur. (2.2.1) ve (3.2.3) eşitliklerinden,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_3)) = -g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,BZ_3) - g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,CZ_3) - g_1(\nabla_{X_1}CZ_2,BZ_3) - g_1(\nabla_{X_1}CZ_1,CZ_3)$$

yazılır. (2.1.7) denkleminden,

$$\begin{aligned} g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_3)) &= -g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,BZ_3) - g_2(F_*(\nabla_{X_1}BZ_2),F_*(CZ_3)) \\ &\quad - g_1(\nabla_{X_1}CZ_2,BZ_3) - g_2(F_*(\nabla_{X_1}CZ_2),F_*(CZ_3)) \end{aligned}$$

elde edilir. Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliğinden,

$$\begin{aligned} g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_3)) &= -g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,BZ_3) - g_2(F_*(\nabla_{X_1}BZ_2),F_*(CZ_3)) \\ &\quad + g_1(CZ_2,\nabla_{X_1}BZ_3) - g_2(F_*(\nabla_{X_1}CZ_2),F_*(CZ_3)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.17) denkleminden,

$$\begin{aligned} g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_3)) &= -g_1(\nabla_{X_1}BZ_2,BZ_3) + g_2((\nabla F_*)(X_1,BZ_2),F_*(CZ_3)) \\ &\quad - g_2(F_*(CZ_2),F_*(\nabla_{X_1}BZ_3)) + g_2(((\nabla F_*)(X_1,CZ_2)),F_*(CZ_3)) \end{aligned}$$

bulunur. Yine benzer şekilde $\forall X_1,\, X_2 \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $\forall Z_1 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,X_2),F_*(Z_2)) = -g_2(F_*(JX_2),(\nabla F_*)(X_1,BZ_2)) + g_2((\nabla F_*)(X_1,JX_2),F_*(CZ_2))$$

elde edilir. Diğer bir taraftan, F bir Riemann dönüşüm ve (2.1.17) denkleminden, $\forall \bar{Z}_1,\bar{Z}_2 \in \Gamma(\mu)$ ve $\forall U \in ((\text{gör}F_*)^\perp)$ için,

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = g_2((\nabla^F_{\bar{Z}_1}F_*(\bar{Z}_2) - F_*(\nabla_{\bar{Z}_1}\bar{Z}_2),U)$$

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = g_2((\nabla^F_{\bar{Z}_1}F_*(\bar{Z}_2),U)$$

yazılır. Dolayısıyla buradan,

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = -g_2(F_*(\bar{Z}_2),\nabla^F_{\bar{Z}_1}U)$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\nabla^F_{\bar{Z}_1}U = \nabla^2_{F_*(\bar{Z}_1)}U$$

olduğundan

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = -g_2(F_*(\bar{Z}_2),\nabla^2_{F_*(\bar{Z}_1)}U)$$

olur. Daha sonra (2.3.15) denklemi kullanılarak;

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = g_2(F_*(\bar{Z}_2),A_V F_*(\bar{Z}_1))$$

elde edilir. Böylece (3.3.2) ifadesinden,

$$g_2((\nabla F_*)(\bar{Z}_1,\bar{Z}_2),U) = g_1(\bar{Z}_2,\ {}^*F_*(A_V F_*(\bar{Z}_1)))$$

olur. Benzer şekilde $\forall X_1,X_2 \in \Gamma(çekF_*)$ ve $\forall U \in ((görF_*)^{\perp})$ için

$$g_2((\nabla F_*)(J\bar{Z}_1,J\bar{Z}_2),U) = g_1(J\bar{Z}_2,\ {}^*F_*(A_V F_*(J\bar{Z}_1)))$$

eşitliği de elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.2. *(M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer $X_1,X_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$h_2(X_1,X_2) = g_1(X_1,X_2)H \tag{3.3.8}$$

eşitliği sağlanıyorsa tamamen umbilik lifler ile birlikte bir Riemann dönüşümdür. Burada h_2 ve H, dikey distribüsyonunun ortalama eğrilik vektör alanı ve ikinci temel formdur ve bir anti-invaryant Riemann dönüşümü, dikey distribüsyonunun geometrisi üzerinde bazı kısıtlamalar koyar [13].

Teorem 3.3.2. *(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) bir Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1,g_1,J) \to (M_2,g_2)$$

Dönüşümü tamamen umbilik lifler ile birlikte bir Lagrange Riemann dönüşümü olsun. $p \in M_1$ için boy$(çekF_{*p}) > 1$ ise dikey distribüsyonu M_1 üzerinde pareleldir [13].

İspat: F bir Lagrange dönüşümü olduğundan, $\forall X_1,X_2 \in \Gamma(çekF_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için (3.3.8) denkleminden,

$$g_1(\nabla^1_{X_1}X_2,Z) = g_1(X_1,X_2)g_1(H,Z)$$

yazılır. (2.2.2) eşitliği kullanılırsa,

$$g_1(\nabla^1_{X_1}JX_2,JZ) = g_1(X_1,X_2)g_1(H,Z)$$

bulunur. Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliğinden,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} JX_2, JZ) = -g_1(JX_2, \nabla_{X_1} JZ)$$

bulunur. (3.3.8) denkleminden,

$$-g_1(X_1, JZ)g_1(H, JX_2) = g_1(X_1, X_2)g_1(H, Z)$$

elde edilir. Buradan,

$$g_1(H, JX_2)JX_1 = g_1(X_1, X_2)H$$

eşitliğine sahip oluruz. (2.2.2) denkleminden

$$g_1(H, JX_2)g_1(X_1, X_1) = g_1(X_1, X_2)g_1(H, JX)$$

sonucuna varırız. $boy(çekF_{*p}) > 1$ olduğu için, X_1 ve X_2 birim vektör alanlarını $g_1(X_1, X_2) = 0$ şeklinde seçebiliriz. Böylece

$$g_1(H, JX_2)g_1(X_1, X_1) = 0 \tag{3.3.9}$$

eşitliği bulunur. F bir Lagrange dönüşümü olduğu için, (3.3.9) eşitliğinde $H = 0$ olup buradan dikey distribüsyonun M_1 üzerinde parelel olduğu sonucuna varılır.

Tanım 3.3.2. *(M_1, g_1, J) bir Kaehler manifold ve (M_2, g_2) bir Riemann manifoldu olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

diferansiyellenebilir dönüşümünün ikinci temel formu olan ∇F_*, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(TM_1)$ için,

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) + (\nabla F_*)(JX_1, JX_2) = 0 \tag{3.3.10}$$

ise bu dönüşüme pluriharmonik dönüşümü denir [35]. (M_1, g_1, J_1) ve (M_2, g_2, J_2) Kaehler manifoldlar ve

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2, J_2)$$

dönüşümü bir holomorfik dönüşüm ise, F pluriharmoniktir. Her pluriharmonik dönüşüm aynı zamanda bir harmonik dönüşüm olduğu için, bir holomorfik dönüşüm Kaehler manifoldları arasında bir harmonik dönüşümdür [35].

Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan Lagrange Riemann dönüşümler için aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 3.3.3. *(M_1, g_1, J) bir Kaehler manifold ve (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve*

$$F : (M_1, g_1, J) \rightarrow (M_2, g_2)$$

dönüşümü Lagrange Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümü pluriharmonik ise total geodeziktir [13].

İspat: F bir pluriharmonik Lagrange Riemann dönüşümü olsun. $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için (3.3.10) denkleminden

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) + (\nabla F_*)(JX_1, JX_2) = 0$$

yazılır. Diğer taraftan

$$(\nabla F_*)(JX_1, JX_2) \in \Gamma((görF_*)^{\perp}),\ \ (\nabla F_*)(X_1, X_2) \in \Gamma(görF_*)$$

dir.

$$TM_2 = (görF_*) \oplus (görF_*)^{\perp}$$

şeklinde olduğundan,

$$(\nabla F_*)(JX_1, JX_2) = 0$$

ve

$$(\nabla F_*)(X_1, X_2) = 0$$

olur. Ayrıca varsayımız $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için $(\nabla F_*)(X_1, JX_2) = 0$ olduğudur. Kabul edelim ki F bir pluriharmonik dönüşüm ve $(\nabla F_*)(X_1, JX_2) \neq 0$ olsun. Fakat burada F bir pluriharmonik dönüşüm olduğu için,

$$(\nabla F_*)(X_1, JX_2) - (\nabla F_*)(JX_1, X_2) = 0$$

eşitliği elde edilir. (2.1.17) denkleminden

$$(\nabla F_*)(X_1, JX_2) = -F_*(\nabla^1_{X_1} JX_2)$$

ve

$$(\nabla F_*)(X_2, JX_1) = -F_*(\nabla^1_{X_2} JX_1)$$

bulunur. Buradan

$$-F_*(\nabla^1_{X_1} JX_2) + F_*(\nabla^1_{X_2} JX_1) = 0$$

olur. M_1 bir Kaehler manifold olduğundan dolayı bu eşitlik,

$$-F_*(J\nabla^1_{X_1} X_2) + F_*(J\nabla^1_{X_2} X_1) = 0$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla,

$$F_*(J[X_1,X_2]) = -F_*(J\nabla^1_{X_1}X_2) + F_*(J\nabla^1_{X_2}X_1)$$

olduğundan

$$F_*(J[X_1,X_2]) = 0$$

elde edilir. Buradan da $J[X_1,X_2] \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $[X_1,X_2] \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ elde edilir. Bu sonuç ile birlikte dikey distribüsyon integrallenemez ve rank teoremi ile çelişir. F bir alt immersiyon olduğu için F in rankı M_1 üzerinde sabittir. Bu da fonksiyonlar için rank teoreminin yani; $(\text{ç}ekF_*)$, (TM_1) in bir integrallenebilir alt demeti olduğunu gösterir [36]. Bu yüzden, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$(\nabla F_*)(X_1, JX_2) = 0 \tag{3.3.11}$$

dır [36].

4. YARI-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLER

4.1 Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümler

Bu bölümde kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan yarı-invaryant Riemann dönüşümler ile ilgili tanım, teorem ve örnekler verilecektir. Bu dönüşüm yardımıyla kaynak manifoldun geometrisi incelenecek ve ayrışım teoremleri elde edilecektir.

Tanım 4.1.1. *(M_1, g_1, J_1) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M_2, g_2) bir Riemann manifoldu olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

şeklinde tanımlanan F Riemann dönüşüm olmak üzere, $D_1 \subseteq$çekF_* distribüsyonu var,

$$JD_1 = D_1$$

ve burada D_2, çekF_* da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısı olup

$$J_1(D_2) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne yarı-invaryant Riemann dönüşüm denir [12]. Burada çek$F_* = D_1 \oplus D_2$ dir ve μ, $(\text{çek}F_*)^\perp$ de $J_1(D_2)$ distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır ve J_1 e göre invaryanttır.

Şimdi yarı-invarnt Riemann dönüşümler için bazı örnekler verelim.

Örnek 4.1.1. *Hemen hemen Hermityen manifoldlar arasındaki her holomorfik submersiyon, $D_1 =$çekF_* ve $(\text{gör}F_*)^\perp = \{0\}$ olan bir yarı-invaryant Riemann dönüşümdür [12].*

Örnek 4.1.2. *Hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna her anti-invaryant Riemann submersiyon, $D_2 =$çekF_* ve $(\text{gör}F_*)^\perp = \{0\}$ olan bir yarı-invaryant Riemann dönüşümdür [12].*

Örnek 4.1.3. *Hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna her yarı-invaryant Riemann submersiyon, $(\text{gör}F_*)^\perp = \{0\}$ olan bir yarı-invaryant Riemann dönüşümdür [12].*

$\mathbb{R}^{2m}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks J yapısı

$$J(a^1, ..., a^{2m}) = (-a^2, a^1, ..., -a^{2m}, a^{2m-1})$$

olsun. Eğer $D_1 \neq \{0\}$, $D_2 \neq \{0\}$ ve $\mu \neq \{0\}$ ise yarı-invaryant Riemann dönüşüme has yarı-invaryant Riemann dönüşümü denir [12].

Şimdi has yarı-invaryant Riemann dönüşümü için bir örnek verelim.

Örnek 4.1.4.

$$F : (\mathbb{R}^8, g_1) \to (\mathbb{R}^5, g_2)$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) \to (\frac{x_1-x_5}{\sqrt{2}}, x_2\cos\alpha + x_6\sin\alpha, \frac{x_3+x_7}{\sqrt{2}}, x_4\cos\alpha - x_8\sin\alpha, 0)$$

dönüşümü verilsin. Burada rankF_* = 4 olup direk işlemler ile yatay ve dikey distribüsyonları,

$$(\c{c}ekF_*) = \left\{ \begin{array}{c} X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}, X_2 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_6}, \\ X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_7}, X_4 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_4} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_8} \end{array} \right\}$$

ve

$$(\c{c}ekF_*)^\perp = \left\{ \begin{array}{c} X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_5}, X_6 = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_6}, \\ X_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_7}, X_8 = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_4} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_8} \end{array} \right\}$$

şeklindedir. Buradan,

$$g_1(X_5,X_5) = 1 \text{ } ve \text{ } g_2(F_*X_5, F_*X_5) = 1$$

bulunur. Benzer şekilde, yatay distribüsyonun diğer elemanları için bu eşitlik gösterilebilir. J yapısını

$$J(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = (-x_5,x_4,x_7,-x_2,x_1,-x_8,-x_3,x_6)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$J(X_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}X_5$$
$$J(X_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}X_7$$

için

$$J(\c{c}ekF_*) \subseteq (\c{c}ekF_*)^\perp$$

ve benzer şekilde,

$$J(X_2) = -X_4$$
$$J(X_4) = X_2$$

elde edilir. Buradan,

$$J(\c{c}ekF_*) \subseteq (\c{c}ekF_*)$$

olacağından, F dönüşümü hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü olur.

(M_1, g_1, J) bir hemen hemen Hermityen manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. $\forall U_1 \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$JU_1 = \phi U_1 + wU_1 \tag{4.1.1}$$

yazılır. Burada $\phi U_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $wU_1 \in \Gamma(D_2)$ dir. Ayrıca $\forall X_1 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için,

$$JX_1 = BX_1 + CX_1 \tag{4.1.2}$$

yazılır. Burada da $BX_1 \in \Gamma(D_2)$ ve $CX_1 \in \Gamma(\mu)$ dir [12].

Şimdi yatay distribüsyonunun integrallenebilirliğini, yatay ve dikey distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz. İlk olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.1. *(M, g_M, J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$\begin{aligned} g_M(BX_2, A_{X_1}wU) - g_M(B_{X1}, A_{X_2}wU) = {} & g_M(\nabla_{X_1}BX_2 - \nabla_{X_2}BX_1, \phi U) + g_N((\nabla F_*)(X_1, \phi U) \\ & - \nabla^F_{X_1}F_*(wU), F_*(CX_2)) - g_N((\nabla F_*)(X_2, \phi U) \\ & - \nabla^F_{X_2}F_*(wU), F_*(CX_1)) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

eşitliğinin var olmasıdır [12].

İspat: İlk olarak tanım (2.1.4) den $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$g_M([X_1, X_2], U) = -g_M(X_2, \nabla_{X_1}U) + g_M(X_1, \nabla_{X_2}U)$$

eşitliği yazılır. (2.2.2) denkleminden

$$g_M([X_1, X_2], U) = -g_M(JX_2, \nabla_{X_1}JU) + g_M(JX_1, \nabla_{X_2}JU) \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) denklemine (4.1.1), (4.1.2) ve (2.1.16) eşitlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} g_M([X_1, X_2], U) = {} & -g_M(BX_2, \nabla_{X_1}\phi U) - g_M(CX_2, \nabla_{X_1}\phi U) - g_M(BX_2, \nabla_{X_1}wU) \\ & - g_M(CX_2, \nabla_{X_2}wU) + g_M(BX_1, \nabla_{X_2}\phi U) + g_M(CX_1, \nabla_{X_2}\phi U) \\ & + g_M(BX_1, \nabla_{X_2}wU) + g_M(CX_1, \nabla_{X_2}wU) \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki denklemde (2.3.7), (2.1.16), (2.1.17) ve (2.1.15) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} g_M(BX_2, A_{X_1}wU) - g_M(B_{X1}, A_{X_2}wU) &= g_M(\nabla_{X_1}BX_2 - \nabla_{X_2}BX_1, \phi U) + g_N((\nabla F_*)(X_1, \phi U) \\ &\quad - \nabla^F_{X_1}F_*(wU), F_*(CX_2)) - g_N((\nabla F_*)(X_2, \phi U) \\ &\quad - \nabla^F_{X_2}F_*(wU), F_*(CX_1)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Yatay distribüsyonunun liflerinin geometrisi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.2. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Yatay distribüsyonunun parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(çekF_*)$ için,

$$g_N(\nabla^F_{X_1}F_*(CX_2), F_*(wU)) = g_M(A_{X_1}\phi U, CX_2) + g_M(A_{X_1}BX_2, wU) - g_M(\nabla_{X_1}BX_2, \phi U) \quad (4.1.5)$$

dır [12].

İspat: F bir Riemann dönüşümü olduğu için $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$g_M(\nabla_{X_1}X_2, U) = 0$$

yazılır. Direk işlemler ile (2.2.2), (4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_1}X_2, U) &= g_M(\nabla_{X_1}BX_2, \phi U) + g_M(\nabla_{X_1}BX_2, wU) + g_M(\nabla_{X_1}CX_2, \phi U) \\ &\quad + g_M(\nabla_{X_1}CX_2, wU) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak F bir Riemann dönüşüm olduğu için (2.1.15), (2.1.16), (2.1.17) ve (2.3.7) denklemlerinden,

$$g_N(\nabla^F_{X_1}F_*(CX_2), F_*(wU)) = -g_M(\nabla_{X_1}BX_2, \phi U) + g_M(A_{X_1}BX_2, wU) + g_M(A_{X_1}\phi U, CX_2)$$

bulunur. Böylece yatay distribüsyonunun parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$g_N(\nabla^F_{X_1}F_*(CX_2), F_*(wU)) = -g_M(\nabla_{X_1}BX_2, \phi U) + g_M(A_{X_1}BX_2, wU) + g_M(A_{X_1}\phi U, CX_2)$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır.

Dikey distribüsyonunun liflerinin geometrisi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.3. (M, g_M, J) *bir Kaehler manifold ve* (N, g_N) *Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

şelinde tanımlanan F dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Dikey distribüsyonunun parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in \Gamma(çekF_*)$ *ve* $\forall X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ *için,*

$$g_N((\nabla F_*)(U, wV), F_*(CX)) = g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, BX) + g_M(T_U \phi V, CX) - g_M(wV, T_U BX) \quad (4.1.6)$$

olmasıdır [12].

İspat: Dikey distribüsyonunun parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için,

$$(\nabla_U V, X) = 0$$

dır. Burada, (4.1.1) denkleminden

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(T_U V + \hat{\nabla}_U V, X) \quad (4.1.7)$$

yazılır. Burada (4.1.7) denklemine (2.1.13) ve (4.1.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, X) &= g_M(T_U \phi V, BX) + g_M(T_U \phi V, CX) + g_M(T_U wV, BX) + g_M(T_U wV, CX) \\ &+ g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, BX) + g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, CX) + g_M(\hat{\nabla}_U wV, BX) + g_M(\hat{\nabla}_U wV, CX) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olduğu için,

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, BX) + g_M(T_U \phi V, BX) + g_M(T_U wV, BX) + g_M(\hat{\nabla}_U wV, CX)$$

olur. Diğer taraftan (2.1.13), (2.1.17), (4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerinden,

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, BX) + g_M(T_U \phi V, BX) - g_M(wV, T_U BX) - g_N((\nabla F_*)(U, wV), F_*(CX))$$

elde edilir. Böylece dikey distribüsyonunun parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için

$$g_N((\nabla F_*)(U, wV), F_*(CX)) = g_M(\hat{\nabla}_U \phi V, BX) + g_M(T_U \phi V, CX) - g_M(wV, T_U BX)$$

dır. Buradan ispat tamamlanır.

(4.1.3) ve (4.1.2) teoremlerinin sonucu olarak aşağıdaki ayrışım teoremi elde edilir.

Teorem 4.1.4. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. M Riemann manifoldların yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\nabla^F_{X_1} F_*(CX_2), F_*(wU_1)) &= -g_M(\nabla_{X_1} BX_2, \phi U_1) - g_M(A_{X_1} BX_2, wU_1) \\ &\quad + g_M(A_{X_1} \phi U_1, CX_2) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

ve

$$\begin{aligned} g_N((\nabla F_*)(U, wU_2), F_*(CX_1)) &= g_M(\hat{\nabla}_{U_1} \phi U_2, BX_1) + g_M(T_{U_1} \phi U_2, CX_1) \\ &\quad - g_M(wU_2, T_{U_1} BX_1) \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

dır [12].

(M, g_M, J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M, g_N) Riemann manifold olsun.

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü ve

$$(çekF_*)^{\perp} = J(D_2) \oplus \mu$$

olduğu için, $X \in \Gamma(D_2)$ ve $Y \in \Gamma(\mu)$ için,

$$g_N(F_*(JX), F_*(Y)) = g_M(JX, Y) = 0 \tag{4.1.10}$$

olur. Bu eşitlik ile birlikte $F_*(JD_2)$ ve $F_*(\mu)$ distribüsyonlarının ortogonal olduğu görülür. $\bar{D}_2 = F_*(JD_2)$ ve $\bar{\mu} = F_*(\mu)$ alınırsa $(görF_*)$ için,

$$(görF_*) = \bar{D}_2 \oplus \bar{\mu} \tag{4.1.11}$$

yazılır [12].

Şimdi D_1 ve D_2 distribüsyonların ayrık geometrisini inceleyelim.

Teorem 4.1.5. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. D_1 distribüsyonunun M üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1)$, $\forall X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla F_*)(X_1, JY_1) \in \Gamma(\bar{\mu}) \tag{4.1.12}$$

ve

$$g_M(\hat{\nabla}_{X_1} JY_1, BX) = g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*(CX)) \tag{4.1.13}$$

eşitliklerin sağlanması gerekir [12].

İspat: Yarı-invaryant Riemann dönüşümün tanımından, D_1 distribüsyonu M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1)$, $\forall X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için,

$$g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X_2) = 0 \text{ ve } g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X) = 0$$

olmasıdır. F bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17) ve (2.2.2) eşitliklerinden,

$$g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X_2) = -g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*(JX_2)) \tag{4.1.14}$$

yazılır. Diğer bir taraftan, (4.1.2) eşitliğinden,

$$g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X) = g_M(\nabla_{X_1} JY_1, BX) + g_M(\nabla_{X_1} JY_1, CX)$$

olur. F bir Riemann dönüşümü olduğundan (2.1.17) ve (2.1.13) denklemlerinden,

$$g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X) = g_M(\hat{\nabla}_{X_1} JY_1, BX) - g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*(CX)) \tag{4.1.15}$$

elde edilir. Son olarak (4.1.11) ve (4.1.15) denklemlerinden,

$$g_M(\hat{\nabla}_{X_1} JY_1, BX) = g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*(CX))$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

D_2 distribüsyonu için aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.1.6. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. D_2 distribüsyonunun M üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart, $\forall X_1 \in \Gamma(D_1)$, $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X_2, JY_1) \in \Gamma(\bar{\mu}) \tag{4.1.16}$$

ve

$$g_M(T_{X_2}BX, JY_2) = -g_N((\nabla F_*)(X_2, JY_2), F_*(CX)) \tag{4.1.17}$$

dır [12].

İspat: Yarı-invaryant Riemann dönüşümün tanımından, D_2 distribüsyonu M üzerinde parelel olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1 \in \Gamma(D_1)$, $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için,

$$g_M(\nabla_{X_2} Y_2, X_1) = 0 \text{ ve } g_M(\nabla_{X_2} Y_2, X) = 0$$

olmasıdır. Metrikle bağdaşabilme özelliğinden,

$$g_M(\nabla_{X_2} Y_2, X_1) = -g_M(\nabla_{X_2} X_1, Y_2)$$

olur. (2.2.2) ve (2.1.17) denklemlerinden,

$$g_M(\nabla_{X_2} Y_2, X_1) = g_N((\nabla F_*)(X_2, JX_1), F_*(JY_2)) \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.1.2) denklemini kullanılarak,

$$g_M(\nabla_{X_2} Y_2, X) = -g_M(JY_2, \nabla_{X_2} BX) + g_M(\nabla_{X_2} JY_2, CX)$$

elde edilir. F bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17) ve (2.1.13) eşitliklerinden,

$$g_M(\nabla_{X_1} Y_1, X) = -g_M(JY_2, T_{X_2}BX) - g_N((\nabla F_*)(X_2, JY_2), F_*(CX)) \tag{4.1.19}$$

bulunur. Son olarak (4.1.18) ve (4.1.19) denklemleri kullanılırsa,

$$g_M(T_{X_2}BX, JY_2) = -g_N((\nabla F_*)(X_2, JY_2), F_*(CX)) \tag{4.1.20}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

(4.1.14) ve (4.1.18) ifadelerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Liflerin Riemann manifoldunun yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart; $U \in \Gamma(çekF_*)$ ve $Y_1 \in \Gamma(D_1)$ için

$$(\nabla F_*)(U, JY_1) \in \Gamma(\mu) \tag{4.1.21}$$

olmasıdır.

Bu bölümde son olarak yarı-invaryant Riemann dönüşümlerin tamamen geodezik olması ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.7. *(M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. F dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall Z, Z_1, Z_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$, $\forall X, Y \in \Gamma(çekF_*)$, $\forall U \in \Gamma(D_2)$, $\forall Z_3 \in \Gamma(\mu)$ ve $\forall V \in \Gamma((görF_*)^{\perp})$ için

$$g_M(\hat{\nabla}_X BZ_1, BZ_2) = g_M(X, A_{CZ_1} CZ_2) - g_M(T_X BZ_1, CZ_2) - g_M(T_X CZ_1, BZ_2), \tag{4.1.22}$$

$$g_M(\hat{\nabla}_X BZ, \phi Y) = -\{g_M(\phi Y, T_X CZ) + g_M(wY, T_X BZ) + g_M(A_{wY} CZ, X)\} \tag{4.1.23}$$

ve

$$^*F_*(S_V F_*(JU)) = 0, \ \ ^*F_*(S_V F_*(Z_3)) \in \Gamma(J(D_2)) \tag{4.1.24}$$

dır [12].

İspat: F yarı-invaryant Riemann dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve Z, $Z_1, Z_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla F_*)(X, Y) = 0, (\nabla F_*)(X, Z) = 0 \text{ ve } (\nabla F_*)(Z_1, Z_2) = 0$$

olmasıdır. Yukarıdaki ifadelerden, $\forall X, Y \in \Gamma(\text{çek}F_*)$, $\forall Z$, Z_1, $Z_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$, $\forall U \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall Z_3, Z_4 \in \Gamma(\mu)$ için,

$$g_N((\nabla F_*)(X, Z_1), F_*(Z_2)) = 0, \ \ g_N((\nabla F_*)(X, Y), F_*(Z)) = 0$$

ve

$$g_N((\nabla F_*)(JU, Z), V) = 0, \ \ g_N((\nabla F_*)(Z_3, Z_4), V) = 0$$

dır. F bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17), (2.2.2), (2.2.4) ve (4.1.2) denklemleri kullanılırsa,

$$g_N((\nabla F_*)(X,Z_1),F_*(Z_2)) = -g_M(\nabla_X BZ_1,BZ_2) - g_M(\nabla_X CZ_1,BZ_2) - g_M(\nabla_X BZ_1,CZ_2) - g_M(\nabla_X CZ_1,CZ_2) \quad (4.1.25)$$

bulunur. (4.1.25) denkleminde (2.1.13), (2.1.14) ve (2.1.17) denklemleri kullanılırsa,

$$g_N((\nabla F_*)(X,Z_1),F_*(Z_2)) = -g_M(\hat{\nabla}_X BZ_1,BZ_2) - g_M(T_X CZ_1,BZ_2) - g_M(T_X BZ_1,CZ_2) + g_N((\nabla F_*)(X,CZ_1),F_*(CZ_2)) \quad (4.1.26)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, ikinci temel form simetrik olduğu için ve (2.1.17) eşitliğinden,

$$g_N((\nabla F_*)(X,CZ_1),F_*(CZ_2)) = g_M(X,\nabla_{CZ_1}CZ_2)$$

dır. Burada (2.1.16) denkleminden,

$$g_N((\nabla F_*)(X,CZ_1),F_*(CZ_2)) = g_M(X,A_{CZ_1}CZ_2) \quad (4.1.27)$$

elde edilir. (4.1.27) ve (4.1.26) denklemlerini kullanarak,

$$g_N((\nabla F_*)(X,Z_1),F_*(Z_2)) = -g_M(\hat{\nabla}_X BZ_1,BZ_2) - g_M(T_X CZ_1,BZ_2) - g_M(T_X BZ_1,CZ_2) + g_M(X,A_{CZ_1}CZ_2) \quad (4.1.28)$$

bulunur. Benzer şekilde, $\forall X,Y \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için,

$$g_N((\nabla F_*)(X,Y),F_*(Z)) = g_M(\nabla_X BZ,\phi Y) + g_M(\nabla_X BZ,wY) + g_M(\nabla_X CZ,\phi Y) + g_M(\nabla_X CZ,wY) \quad (4.1.29)$$

yazılır. Diğer taraftan (2.3.12) denkleminden,

$$g_N((\nabla F_*)(JU,Z),V) = g_N(F_*(Z),S_V F_*(JU))$$

olup buradan (2.1.19) denkleminden,

$$g_N((\nabla F_*)(JU,Z),V) = g_M(Z,{}^*F_*S_V F_*(JU)) \quad (4.1.30)$$

elde edilir. Son olarak,

$$g_N((\nabla F_*)(Z_3,Z_4),V) = g_M(Z_4,{}^*F_*S_V F_*(Z_3)) \quad (4.1.31)$$

yazılır. (4.1.28) ve (4.1.31) denklemleri kullanılarak,

$$g_N((\nabla F_*)(X,Y),F_*(Z)) = g_M(\hat{\nabla}_X BZ,\phi Y) + g_M(T_X BZ,wY) + g_M(T_X CZ,\phi Y) + g_M(A_{wY}CZ,X)$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

4.2 Tamamen Umbilik Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümler

Bu alt bölümde yarı-invaryant Riemann dönüşümlerin tamamen umbilik olması için bir karekterizasyon elde edilecektir. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.2.1. *(M,g_M,J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N,g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\forall U,V\in\Gamma(çekF_*)$ için

$$T_U V = g_M(U,V)H \qquad (4.2.1)$$

eşitliği sağlıyor ise bu dönüşüme tamamen umbilik yarı-invaryant Rieman dönüşümü denir. Burada H, dikey distribüsyonun ortalama eğrilik vektör alanıdır [12].

Lemma 4.2.1. *(M,g_M,J) bir Kaehler manifold ve (N,g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$$

dönüşümü tamamen göbek lifleri ile birlikte bir yarı-invaryant Riemann dönüşüm olsun. O halde $H\in\Gamma(JD_2)$ dir [12].

İspat: M bir Kaehler manifold olduğu için, $\forall X_1,X_2\in\Gamma(D_1)$ için

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y$$

dır. Direk işlemler ile, $W\in\Gamma(\mu)$ için

$$g_M(X_1,JX_2)g_M(H,W) = -g_M(X_1,X_2)g_M(H,JW) \qquad (4.2.2)$$

elde edilir. X_1 ve X_2 nin rollerini değiştirilir ise,

$$g_M(X_2,JX_1)g_M(H,W) = -g_M(X_1,X_2)g_M(H,JW) \qquad (4.2.3)$$

bulunur. (4.2.2) ve (4.2.3) denklemlerinden,

$$2g_M(JX_2,X_1)g_M(H,W)=0$$

elde edilir. Buradan da $H\in\Gamma(JD_2)$ olup ispat biter.

Teorem 4.2.1. *(M,g_M,J) bir Kaehler manifold ve (N,g_N) Riemann manifold olsun.*

$$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$$

dönüşümü tamamen umbilik liflere sahip bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Burada ya D_2 bir boyutludur ya da lifler tamamen geodeziktir [12].

İspat: Lifler tamamen umbilik olduğundan, $\forall U_1,U_2\in\Gamma(JD_2)$ için

$$g_M(T_{U_2}U_1,JU_2)=g_M(H,JU_2)g_M(U_1,U_2)$$

eşitliği yazılır. (2.1.13) denkleminden,

$$g_M(T_{U_2}U_1,JU_2)=-g_M(U_1,\nabla U_2JU_2)$$

$$-g_M(U_1,\nabla_{U_2}JU_2)=g_M(H,JU_2)g_M(U_1,U_2)$$

bulunur. Buradan,

$$g_M(JU_1,\nabla_{U_2}U_2)=g_M(H,JU_2)g_M(U_1,U_2)$$

elde edilir. (2.1.13) ve (4.2.1) denklemleri kullanılarak,

$$g_M(U_2,U_2)g_M(H,JU_1)=g_M(U_1,U_2)g_M(H,JU_2) \tag{4.2.4}$$

yazılır. U_1 ve U_2 nin rolleri değiştirilir ise,

$$g_M(U_1,U_1)g_M(H,JU_2)=g_M(U_1,U_2)g_M(H,JU_1) \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.4) ve (4.2.5) denklemlerinden,

$$g_M(H,JU_2)=\frac{g_M(U_1,U_2)^2}{g_M(U_1,U_1)g_M(U_2,U_2)}g(H,JU_2) \tag{4.2.6}$$

bulunur. U_1 ve U_2 lineer bağımlı veya $H=0$ olup buradan lifler tamamen geodeziktir. Buradan ispat biter.

5. SLANT-RİEMANN DÖNÜŞÜMLER

5.1 Slant-Riemann Dönüşümler

Bu bölümde hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifolduna slant-Riemann dönüşümler tanıtılacaktır ve bu dönüşümün varlığı ile ilgili örneklere ve teoremlere yer verilecektir. Burada slant-Riemann dönüşümlerin var olma koşulları incelenecek ve bu tür dönüşümlerin harmoniği araştırılacaktır. Ayrıca slant-Riemann dönüşümlerin tamamen geodezik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar incelenecek ve kaynak manifoldlar için ayrışım teoremi verilecektir.

Tanım 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) *bir hemen hemen Hermityen manifold ve* (M_2, g_2) *bir Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer sıfırdan farklı $X \in \Gamma(çekF_*)$ *vektörü için,* J_1X *ve* $çekF_*$ *distribüsyonu arasındaki* $\theta(X)$ *açısı sabit ise, yani;* $p \in M_1$ *ve dikey distribisyonu içindeki* X *tanjant vektörlerinin seçiminden bağımsız ise* F *dönüşümüne bir slant-Riemann dönüşüm denir [11]. Bu durumda* θ *açısına da slant-Riemann dönüşümün slant açısı denir.*

$\mathbb{R}^{2m}$ üzerinde J_1 bir uyumlu hemen hemen kompleks yapısı

$$J_1(x_1, x_2, ..., x_{2m}) = (-x_{m+1}, -x_{m+2}, ..., -x_{2m}, x_1, x_2, ..., x_m)$$

dır [11].

Aşağıda slant-Riemann dönüşümler için örnekler verilmektedir.

Örnek 5.1.1. *Bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir hemen hemen Hermityen manifoldu üzerine her Hermityen submersiyon,* $\theta = 0$ *ve* $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ *olan bir slant-Riemann dönüşümdür [11].*

Örnek 5.1.2. *Bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifoldu üzerine her anti-invaryant Riemann submersiyon,* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *ve* $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ *olan bir slant-Riemann dönüşümdür [11].*

Örnek 5.1.3. θ *slant açısı ile beraber her has slant submersiyon,* $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ *olan bir slant-Riemann dönüşümdür [11].*

Şimdi has slant-Riemann dönüşümü için bir örnek verelim.

Örnek 5.1.4.

$$F : (\mathbb{R}^4, g_1) \to (\mathbb{R}^4, g_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1, c, \frac{x_2 \sin\alpha + x_4 \cos\alpha}{\sqrt{2}}, 0)$$

dönüşümü verilsin. Burada rank$F_* = 2$ *olup direk işlemler ile yatay ve dikey distribüsyonları,*

$$(çekF_*) = \left\{ X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_2 = \frac{-\cos\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$(çekF_*)^{\perp} = \left\{ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_4 = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

dır. Buradan,

$$g_1(X_3, X_3) = g_2(F_* X_3, F_* X_3) = 1$$

ve

$$g_1(X_4, X_4) = g_2(F_* X_4, F_* X_4) = 1$$

elde edilir. J yapısını,

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

şeklinde alalım.

$$JX_1 = (0, -1, 0, 0)$$

olur.

$$\cos\theta = \frac{g_1(JX_1, X_2)}{\|JX_1\| \, \|X_2\|}$$
$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ için } \theta = \frac{\pi}{3},\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

bulunur. O halde F dönüşümü bir slant-Riemann dönüşümdür.

F, (M_1, g_1, J) bir Kaehler manifolddan (M_2, g_2) Riemann manifolduna bir Riemann dönüşüm olsun. $X_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$JX_1 = \phi X_1 + wX_1 \tag{5.1.1}$$

yazılır. Burada $\phi X_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $wX_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$dır Ayrıca $Z_1 \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ için,

$$JZ_1 = BZ_1 + CZ_1 \tag{5.1.2}$$

eşitliği de yazılır [11]. Burada $BZ_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $CZ_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ dır. (2.1.13), (2.1.14), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılarak $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$

$$(\nabla_{X_1} w)X_2 = CT_{X_1}Y - T_{X_1}\phi X_2 \tag{5.1.3}$$

ve

$$(\nabla_{X_1}\phi)X_2 = BT_{X_1}X_2 - T_{X_1}wX_2 \tag{5.1.4}$$

elde edilir. Son olarak ∇, M_1 üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olduğundan $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$(\nabla_{X_1} w)X_2 = H\nabla_{X_1} wX_2 - w\hat{\nabla}_{X_1}X_2 \tag{5.1.5}$$

ve

$$(\nabla_{X_1}\phi)X_2 = \hat{\nabla}_{X_1}\phi X_2 - \phi\hat{\nabla}_{X_1}X_2 \tag{5.1.6}$$

dır. $F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$ bir slant-Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için, $(\nabla^{M_1}_{X_1} w)X_2 = 0$ ise w ye $\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ üzerinde ∇^{M_1} Levi-Civita konneksiyonuna göre pareleldir denir. Bu durumda

$$\nabla^{M_1}_{X_1} wX_2 = w\nabla^{M_1}_{X_1} X_2$$

dır [11].

Teorem 5.1.1. *(M_1, g_1, J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M_2, g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

dönüşümü bir Riemann dönüşüm olsun. F dönüşümü bir slant-Riemann dönüşümü olması için gerek ve yeter şart $h \in [-1, 0]$ olmak üzere $X_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$\phi^2 X_1 = hX_1 \tag{5.1.7}$$

dir ve F bir slant-Riemann dönüşüm ise

$$h = -\cos^2\theta \tag{5.1.8}$$

dır [11].

İspat: F bir slant-Riemann dönüşüm olduğu için $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$\cos\theta = \frac{\|\phi X_1\|}{\|JX_1\|}$$

dir. Buradan,

$$g_1(\phi^2X_1,X_1) = -g_1(\phi X_1,\phi X_1) = -\cos^2\theta g_1(JX_1,JX_1) = -\cos^2\theta g_1(X_1,X_1) \tag{5.1.9}$$

yazılır. (5.1.9) denklemi kullanılarak,

$$g_1(\phi^2X_1,X_2) = -\cos^2\theta g_1(X_1,X_2)$$

bulunur. Buradan, $\phi^2X_1 = hX_1$ elde edilir.

Tersini kabul edelim. $h \in [-1,0]$ ve $\phi^2X_1 = hX_1$ olsun. $X_1 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için, JX_1 ve ϕX_1 ifadelerinin arasındaki açı (2.1.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{g(JX_1,\phi X_1)}{\|JX_1\|\cdot\|\phi X_1\|} = -\frac{g(X_1,J\phi X_1)}{\|JX_1\|\cdot\|\phi X_1\|} = -\frac{g(X_1,\phi^2X_1)}{\|JX_1\|\cdot\|\phi X_1\|}\\ &= -\frac{hg(X_1,X_1)}{\|JX_1\|\cdot\|\phi X_1\|}\\ &= -\frac{hg(JX_1,JX_1)}{\|JX_1\|\cdot\|\phi X_1\|}\\ &= \frac{h\|JX_1\|}{\|\phi X_1\|}\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

bulunur. $\cos\theta = \frac{\|\phi X_1\|}{\|JX_1\|}$ olduğundan (5.1.10) denkleminden $h = -\cos^2\theta$ elde edilir. Bu durumda θ sabit ve F dönüşümü bir slant-Riemann dönüşümdür.

Şimdi yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.1.1. *(M_1,g_1,J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M_2,g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1,g_1,J) \to (M_2,g_2)$$

dönüşümü bir slant-Riemann dönüşüm olsun. $\forall\, X_1,X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$g_1(\phi X_1,\phi X_2) = \cos^2\theta g_1(X_1,X_2) \tag{5.1.11}$$

ve

$$g_1(wX_1,wX_2) = \sin^2\theta g_1(X_1,X_2) \tag{5.1.12}$$

dır [11].

İspat: Direk işlemlerle $X_1,X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$g_1(\phi X_1,X_2) = -g_1(X_1,\phi X_2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada X_2 yerine ϕX_2 yazılır ve (5.1.8) denklemi kullanılarak,

$$g_1(\phi X_1, \phi X_2) = \cos^2\theta g_1(X_1, X_2)$$

elde edilir. (5.1.1) ve (2.2.2) eşitliklerinden,

$$g_1(X_1, X_2) = g_1(JX_1, JX_2) = \cos^2\theta g_1(X_1, X_2) + g_1(wX_1, wX_2)$$

yazılır. Buradan da,

$$g_1(X_1, X_2) = \cos^2\theta g_1(X_1, X_2) + \sin^2\theta g_1(X_1, X_2)$$

elde edilir. Yani,

$$g_1(\phi X_1, \phi X_2) = \cos^2\theta g_1(X_1, X_2)$$

ve

$$g_1(wX_1, wX_2) = \sin^2\theta g_1(X_1, X_2)$$

bulunur.

Benzer şekilde (5.1.11) denklemi kullanılarak,

$$g_1(e_1, e_1) = g_1(\sec\theta\phi e_1, \sec\theta\phi e_1) = 1$$

elde edilir. Buradan,

$$\{e_1, \sec\theta\phi e_1, e_2, \sec\theta\phi e_2, ..., e_n, \sec\theta\phi e_n\}$$

$\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için ortonormal bir baz olduğu görülür ve (5.1.12) denklemi kullanılarak da,

$$\{\csc\theta we_1, \csc\theta we_2, ..., \csc\theta we_n\}$$

$\Gamma(w(\text{ç}ekF_*))$ için ortonormal bir baz olduğu görülür. Slant immersiyonlarda olduğu gibi,

$$\{e_1, \sec\theta\phi e_1, e_2, \sec\theta\phi e_2, ..., e_n, \sec\theta\phi e_n, \csc\theta we_1, \csc\theta we_2, ..., \csc\theta we_n\}$$

slant-Riemann dönüşümler için bir bazdır [11].

Dikey distribüsyon integrallenebilir olduğundan ve $X_1, X_2 \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için,

$$T_{X_1}X_2 = T_{X_2}X_1 \tag{5.1.13}$$

eşitliği yazılır [11]. Bu eşitlik ile birlikte teorem (5.1.1) kullanarak aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 5.1.2. *Bir Kaehler manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan F dönüşümü bir slant-Riemann dönüşüm olsun. w, çekF_* üzerinde ∇ ya göre paralel ise $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,*

$$T_{\phi X_1}\phi X_1 = -\cos^2\theta T_{X_1}X_1 \tag{5.1.14}$$

eşitliği sağlanır [11].

Şimdi F dönüşümünün harmonik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir.

Teorem 5.1.2. *(M_1, g_1, J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M_2, g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F : (M_1, g_1, J) \to (M_2, g_2)$$

biçiminde tanımlanan F dönüşümü bir slant-Riemann dönüşüm olsun. F dönüşümünün harmonik olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$T_{\phi e_i}\phi e_i = -\cos^2\theta T_{e_i}e_i, \tag{5.1.15}$$

$$iz\,|_{w(\text{çek}F_*)}\ {}^*F_*(S_{E_i}F_*(.)) \in \Gamma(\mu) \tag{5.1.16}$$

ve

$$iz\,|_{u}\ {}^*F_*(S_{E_i}F_*(.)) \in \Gamma(w(\text{çek}F_*)) \tag{5.1.17}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Burada,

$\{e_1, \sec\theta\phi e_1, e_2, \sec\theta\phi e_2, ..., e_n, \sec\theta\phi e_n, \csc\theta w e_1, \csc\theta w e_2, ..., \csc\theta w e_n\}$, $\Gamma(\text{çek}F_*)$ *için ve* $\{E_k\}$, $\Gamma((\text{gör}F_*)^\perp)$ *için ortonormal bir bazdır [11].*

İspat: İlk olarak,

$$TM_1 = \text{çek}F_* \oplus w(\text{çek}F_*) \oplus \mu$$

olduğundan sırasıyla $\{e_1, \sec\theta\phi e_1, e_2, \sec\theta\phi e_2, ..., e_p, \sec\theta\phi e_p\}$, $\Gamma(\text{çek}F_*)$ ın ortonormal bazı, $\{\csc\theta w e_1, \csc\theta w e_2, ..., \csc\theta w e_{2p}\}$, $\Gamma(w(\text{çek}F_*))$ ın ortonormal bazı ve $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$, $\Gamma(\mu)$ nun ortonormal bazı olduğu için biz $\{e_1, \sec\theta\phi e_1, e_2, \sec\theta\phi e_2, ..., e_p, \sec\theta\phi e_p, \csc\theta w e_1, \csc\theta w e_2, ..., \csc\theta w e_{2p}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ bir kanonik ortonormal yapısını seçebiliriz. Burada θ slant açıdır. O zaman F dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{p}(\nabla F_*)(e_i, e_i) + \sec^2\theta(\nabla F_*)(\phi e_i, \phi e_i) + \csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}(\nabla F_*)(we_i, we_i) + \sum_{j=1}^{n}(\nabla F_*)(\bar{e}_j, \bar{e}_j) = 0 \tag{5.1.18}$$

olmasıdır. (2.1.17) ve (2.1.13) denklemleri kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{p}(\nabla F_*)(e_i,e_i)+\sec^2\theta(\nabla F_*)(\phi e_i,\phi e_i)=-F_*(T_{e_i}e_i)-\sec^2\theta F_*(T_{\phi e_i}\phi e_i)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{p}(\nabla F_*)(e_i,e_i)+\sec^2\theta(\nabla F_*)(\phi e_i,\phi e_i)=-F_*(T_{e_i}e_i+\sec^2\theta T_{\phi e_i}\phi e_i) \tag{5.1.19}$$

olup lemma (2.3.1) kullanılarak,

$$\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}(\nabla F_*)(we_i,we_i)+\sum_{j=1}^{n}(\nabla F_*)(\bar{e}_j,\bar{e}_j)\in\Gamma((g\ddot{o}rF_*)^{\perp})$$

bulunur ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ kümesi V iç çarpım uzayının ortonormal bir tabanı ise, $\forall u\in V$ için,

$$u=\sum_{i=1}^{n}(u,e_i)e_i \tag{5.1.20}$$

dır [1] eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}(\nabla F_*)(we_i,we_i)+\sum_{j=1}^{n}(\nabla F_*)(\bar{e}_j,\bar{e}_j)&=\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}\sum_{k=1}^{s}g_2((\nabla F_*)(we_i,we_i),E_k)E_k\\&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}g_2((\nabla F_*)(\bar{e}_j,\bar{e}_j),E_k)E_k)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{E_k\}$, $\Gamma((g\ddot{o}rF_*)^{\perp})$ ın ortonormal bir bazdır. İşlemin devamında (2.3.12) eşitliği kullanılır ise,

$$\begin{aligned}\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}(\nabla F_*)(we_i,we_i)+\sum_{j=1}^{n}(\nabla F_*)(\bar{e}_j,\bar{e}_j)&=\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}\sum_{k=1}^{s}g_2(S_{E_k}F_*(we_i),F_*(we_i))E_k\\&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}g_2(S_{E_k}F_*(\bar{e}_j),F_*(\bar{e}_j))E_k\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.19) denkleminden,

$$\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}\sum_{k=1}^{s}g_2(S_{E_k}F_*(we_i),F_*(we_i))E_k=\csc^2\theta\sum_{i=1}^{2p}\sum_{k=1}^{s}g_1(F^*S_{E_k}F_*(we_i),we_i)E_k$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}g_2(S_{E_k}F_*(\bar{e}_j),F_*(\bar{e}_j))E_k=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}g_1(F^*S_{E_k}F_*(\bar{e}_j),\bar{e}_j)E_k$$

elde edilir. (2.1.18) denkleminden,

$$\tau(F_*)=iz(\nabla F_*)=\sum_{i=1}^{m}(\nabla F_*)(e_i,e_i)$$

olup,

$$iz\,|^{*}_{w(çekF_*)}\, F_*(S_{E_i}F_*(.)) \in \Gamma(\mu) \tag{5.1.22}$$

ve

$$iz\,|^{*}_{\mu}\, F_*(S_{E_i}F_*(.)) \in \Gamma(w(çekF_*)) \tag{5.1.23}$$

ifadeleri elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Lemma 5.1.3. *(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F:(M_1,g_1,J)\to(M_2,g_2)$$

dönüşümü bir slant-Riemann dönüşüm olsun. Eğer w paralel ise (5.1.15) eşitliği sağlanmalıdır [11].

Şimdi bir F slant-Riemann dönüşümün tamamen geodezik olma durumu incelenecektir.

Tanım 5.1.2. *(M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifold olsun.*

$$F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$$

Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm eğer $\forall X_1,X_2\in\Gamma(TM_1)$ için

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2)=0$$

ise bu dönüşüme tamamen geodezik dönüşüm denir [11].

Teorem 5.1.3. *(M_1,g_1,J) bir Kaehler manifold ve (M_2,g_2) Riemann manifoldu olsun.*

$$F:(M_1,g_1,J)\to(M_2,g_2)$$

dönüşümü bir slant-Riemann dönüşüm olsun. F dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1,X_2\in\Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1,U_2\in\Gamma(çekF_*)$ için,

$$g_1(T_{U_1}wU_2,BX_1)=-g_2((\nabla F_*)(U_1,w\phi U_2),F_*(X_1))+g_2((\nabla F_*)(U_1,wV),F_*(CX_1)), \tag{5.1.24}$$

$$g_1(A_{X_1}wU_1,BX_2)=g_2(\nabla^F_{X_1}F_*(w\phi U_1),F_*(X_2))-g_2(\nabla^F_{X}F_*(wU_1),F_*(CX_2)) \tag{5.1.25}$$

ve

$$\nabla^F_{X_1}F_*(X_2)+F_*(C(A_{X_1}BX_2+H\nabla^1_{X_1}CX_2)+w(V\nabla^1_{X_1}BX_2+A_{X_1}CX_2))\in\Gamma(görF_*) \tag{5.1.26}$$

dır. Burada ∇^1, M_1 in Levi-Civita konneksiyonudur [11].

İspat: F slant-Riemann dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için,

$$g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) = 0,\ g_2((\nabla F_*)(X_1,U_1),F_*(X_2)) = 0 \text{ ve } (\nabla F_*)(X_1,X_2) = 0$$

dır. F bir Riemann dönüşüm olduğu için, (2.1.17) denkleminden,

$$g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) = g_1(U_2,\nabla^1_{U_1}X_1)$$

elde edilir. M_1 bir Kaehler manifold olduğu için (5.1.1) ve (5.1.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) = &-\cos^2\theta g_1(\nabla^1_{U_1}U_2,X_1) + g_1(\nabla^1_{U_1}w\phi U_2,X_1) - g_1(\nabla^1_{U_1}wU_2,BX_1) \\ &- g_1(\nabla^1_{U_1}wU_2,CX_1) \end{aligned}$$

bulunur. F bir Riemann dönüşüm olduğu için (2.1.17) ve (2.1.14) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) = &\cos^2\theta g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) - g_2((\nabla F_*)(U_1,w\phi U_2)),F_*(X_1)) \\ &+ g_2((\nabla F_*)(U_1,wU_2),F_*(CX_1)) - g_1(T_{U_1}wU_2,BX_1) \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

yazılır. (5.1.27) eşitliğinde $\cos^2\theta g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1))$ ifadesini sol tarafa atılıp eşitlik düzenlenir ise,

$$g_2((\nabla F_*)(U_1,U_2),F_*(X_1)) = \sec^2\theta \left\{ \begin{array}{c} -g_2((\nabla F_*)(U_1,w\phi U_2)),F_*(X_1)) - g_1(T_{U_1}wU_2,BX_1) \\ +g_2((\nabla F_*)(U_1,wU_2),F_*(CX_1)) \end{array} \right\} \tag{5.1.28}$$

eşitliği elde edilir. Benzer bir yolla,

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,U_1),F_*(X_2)) = \sec^2\theta \left\{ \begin{array}{c} -g_2(\nabla^F_{X_1}F_*(wU_1)),F_*(CX_2)) - g_1(A_{X_1}wU_1,BX_2) \\ +g_2(\nabla^F_{X_1}F_*(w\phi U_1),F_*(X_2)) \end{array} \right\} \tag{5.1.29}$$

elde edilir. Diğer bir taraftan, (2.1.17) ve (2.2.4) denklemlerinden, $X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için,

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2) = \nabla^F_{X_1}F_*X_2 + F_*(J(A_{X_1}BX_2 + V\nabla^1_{X_1}BX_2 + A_{X_1}CX_2 + H\nabla^1_{X_1}CX_2)$$

yazılır. Buradan (4.1.5), (4.1.8), (5.1.1) ve (5.1.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(X_1,X_2) = &\nabla^F_{X_1}F_*X_2 + F_*(BA_{X_1}BX_2 + CA_{X_1}BX_2 + \phi V\nabla^1_{X_1}BX_2 + wV\nabla^1_{X_1}BX_2 \\ &+ \phi A_{X_1}CX_2 + wA_{X_1}CX_2 + BH\nabla^1_{X_1}CX_2 + CH\nabla^1_{X_1}CX_2) \end{aligned}$$

olur. Direk işlemler ile,

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2) = \nabla^F_{X_1}F_*X_2 + F_*(CA_{X_1}BX_2 + wV\nabla^1_{X_1}BX_2 + wA_{X_1}CX_2 + CH\nabla^1_{X_1}CX_2) \tag{5.1.30}$$

elde edilir. Bu eşitlik ile birlikte $(\nabla F_*)(X_1,X_2) \in \Gamma(görF_*)$ olduğundan

$$\nabla^F_{X_1} F_* X_2 + F_*(CA_{X_1}BX_2 + wV\nabla^1_{X_1}BX_2 + wA_{X_1}CX_2 + CH\nabla^1_{X_1}CX_2) \in \Gamma(görF_*)$$

elde edilir. Bu şekilde ispatlanmış tamamlanmış olur.

Uyarı 5.1.1. *Bir slant-Riemann dönüşümün tamamen geodezik olabilmesi için gereken koşullar, bir slant submersiyonun tamamen geodezik olabilmesi için gereken koşullardan farklıdır [11]. Bir Riemann submersiyon için, ikinci temel formu* $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çek)^{\perp})$ *için*

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2) = 0 \tag{5.1.31}$$

eşitliğini sağlar. Fakat bir slant-Riemann dönüşüm için, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ *için*

$$(\nabla F_*)(X_1,X_2) = 0$$

eşitliği garanti değildir [11]. Lemma (2.3.1) den, $(\nabla F_*)(X_1,X_2)$ *ifadesi* $\Gamma((görF_*)^{\perp})$ *için önemlidir. Yukarıdaki sonuçtan görüleceği üzere slant-Riemann dönüşümlerin geometrisini incelemek için ekstra geometrik koşullar kullanmak gereklidir.*

Son olarak aşağıdaki ayrışım teoremini verelim.

Teorem 5.1.4. (M_1,g_1,J) *bir Kaehler manifold ve* (M_2,g_2) *Riemann manifold olsun. F,*

$$F : (M_1,g_1,J) \to (M_2,g_2)$$

şeklinde tanımlanan bir slant-Riemann dönüşüm olsun. (M_1,g_1) *bir yerel çarpım Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart,* $X_1,X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ *ve* $U_1,U_2 \in \Gamma(çekF_*)$ *için,*

$$g_1(T_{U_1}wU_2, BX_1) = -g_2((\nabla F_*)(U_1, w\phi U_2), F_*(X_1)) + g_2((\nabla F_*)(U_1, wU_2), F_*(CX_1)) \tag{5.1.32}$$

ve

$$g_2((\nabla F_*)(X_1,BX_2), F_*(wU_1)) = g_2(F_*(X_2), \nabla^F_{X_1} F_*(w\phi U_1)) - g_2(F_*(CX_2), \nabla^F_{X_1} F_*(wU_1)) \tag{5.1.33}$$

şartlarının sağlanması gerekir [11].

İspat: Öncelikle, $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U_1,U_2 \in \Gamma(çekF_*)$ için, (2.1.16), (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.1) denklemlerinden,

$$g_1(\nabla^1_{X_1}X_2, U_1) = g_1(X_2, \nabla_{X_1}J\phi U_1) - g_1(BX_2, \nabla_{X_1}wU_1) - g_1(CX_2, \nabla_{X_1}wU_1)$$

elde edilir. Burada,

$$J\phi U_1 = \phi\phi U_1 + w\phi U_1 = \phi^2 U_1 + w\phi U_1$$

olduğundan,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, U_1) = g_1(X_2, \nabla_{X_1}\phi^2 U_1) + g_1(X_2, \nabla_{X_1} w\phi U_1) - g_1(BX_2, \nabla_{X_1} wU_1) - g_1(CX_2, \nabla_{X_1} wU_1)$$

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, U_1) = -\cos^2\theta g_1(X_2, \nabla_{X_1} U_1) + g_1(X_2, \nabla_{X_1} w\phi U_1) + g_1(\nabla_{X_1} BX_2, wU_1)$$
$$- g_1(CX_2, \nabla_{X_1} wU_1)$$

bulunur. F bir Riemann dönüşüm olduğu için (2.1.17) denkleminden,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, U_1) = \sec^2\theta \left\{ \begin{array}{c} -g_2(F_*(X_2), (\nabla F_*)(X_1, w\phi U_1)) + g_2(F_*(X_2), \nabla^F_{X_1} F_*(w\phi U_1)) \\ -g_2((\nabla F_*)(X_1, BX_2), F_*(wU_1))) + g_2((\nabla^F_{X_1} F_*(BX_2), F_*(wU_1))) \\ -g_2(F_*(CX_2), \nabla^F_{X_1} F_*(wU_1)) + g_2(F_*(CX_2), (\nabla F_*)(X_1, wU_1)) \end{array} \right\}$$

elde edilir. Lemma (2.3.1) den,

$$g_1(\nabla^1_{X_1} X_2, U_1) = \sec^2\theta (g_2(F_*(X_2), \nabla^F_{X_1} F_*(w\phi U_1)) - g_2((\nabla F_*)(X_1, BX_2), F_*(wU_1)))$$
$$- g_2(F_*(CX_2), \nabla^F_{X_1} F_*(wU_1))) \qquad (5.1.34)$$

bulunur. Son olarak (5.1.28) ve (5.1.34) denklemlerinden teorem ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi.

[2] **Lerner, D. ve Sommers, P.** (1980). Complex Manifold Techniques in Theoretical Physics, *Pitman Advanced Publishing*.

[3] **Candelas, P., Horowitz, G., Strominger, A. ve Witten, E.** (1985). Vacuum configurations for superstrings, *Nuclear Phys. B*, *258*, 46–74.

[4] **Tromba, A.J.** (2012). *Teichmuller Theory in Riemannian Geometry*, Birkhauser Verlag, Boston.

[5] **Penrose, R.** (1983). Physical space-time and nonrealizable CR-structures, *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8.3*(3), 427–449.

[6] **O'Neill, B.** (1966). The fundamental equations of a submersion., *Michigan Mathematical Journal*, *13.6*(4), 459–469.

[7] **Gray, A.** (1967). Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions, J. Math. Mech., *Journal of Mathematics and Mechanics*, *16.7*, 715–737.

[8] **Watson, B.** (1976). Almost Hermitian submersion, *Journal of Differential Geometry*, *11.1*, 147–165.

[9] **Fischer, A.E.** (1992). Riemannian maps between Riemannian manifolds, *Contemp. Math*, *132*, 331–366.

[10] **Şahin, B.** (2013). Riemannian Submeraions From Almost Hermitian Manifolds, *Taiwanese Journal of Mathematics*, *17.2*(2), 629–659.

[11] **Şahin, B.** (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, *54(102), 93-105*, no:1, no:3.

[12] **Şahin, B.** (2013). Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds, *Canadian Mathematical Bulletin*, *56.1*(1), 173–183.

[13] **Şahin, B.** (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Central European Journal of Mathematics*, *8.3*(3), 437–447.

[14] **Akyol, M.A. ve Şahin, B.** (2018). Conformal anti-invariant Riemannian maps to Kaehler manifolds,, *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys*, *80*, 187–198.

[15] **Akyol, M.A. ve Şahin, B.** (2017). Conformal semi-invariant submersions, *Communications in Contemporary Mathematics*, *19*(02), 1650011.

[16] **Akyol, M.A. ve Şahin, B.** (2019). Conformal Slant Riemannian Maps to Kaehler Manifolds, *Tokyo Journal of Mathematics*, *42.1*(1), 225–237.

[17] **Şahin, B.** (1996). *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Master's thesis.

[18] **Şahin, B.** (2014). Holomorphic Riemannian maps, *Inonu University, Faculty of Science and Art, Department of Mathematics 44280*.

[19] **Gundmundsson, S.** (2006). An Introduction to Riemannian Geometry, *Lectures Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science*, *9*, 1–235.

[20] **Hacısalihoğlu, H.H.** (2003). *Diferensiyel Geometri*.

[21] **Baird, P. ve Wood, J.C.** (2003). *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Oxford University Press.

[22] **Gündüzalp, Y.** (2007). Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine, *Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye*.

[23] **Carmo, M.P.D.** (2003). *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag GmbH.

[24] **Yano, K. ve Kon, M.** (1984). *Structures on Manifolds*, cilt 3, World Scientific.

[25] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press.

[26] **Boothby, W.M.** (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, cilt120.

[27] **Chen, B.Y.** (1973). *Geometry of Submanifolds*, Dover Pubn Inc.

[28] **Hacısalihoğlu, H.H.** (1982). *Diferensiyel Geometri*.

[29] **Falcitelli, M.**, **Ianus, M. ve Pastore, A.** (2004). *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific.

[30] **Şahin, B.** (2008). Conformal Riemannian Maps between Riemannian Manifolds, Their Harmonicity and Decomposition Theorems, *Acta Applicandae Mathematicae*, *109*(3), 829–847.

[31] **Garcia-Rio, E. ve Kupeli, D.N.** (1999). *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Springer Netherlands.

[32] **Matsushima, Y.** (1972). *Differentiable Manifolds*, Marcell Dekker Inc, New York.

[33] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963). *Foundations of Differential Geometry*, cilt 1, New York, London.

[34] **Nore, T.** (1987). Second fundamental form of a map, *Ann. Mat. Pura Appl*, *146.1*, 281–310.

[35] **Ohnita, Y.** (1987). On Pluriharmonicity of Stable Harmonic Maps, *Journal of the London Mathematical Society*, *2.3*(3), 563–568.

[36] **Abraham, R.**, **Marsden, J.E. ve Ratiu, T.** (2012). *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer New York.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Ramazan DEMİR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2015, Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2021, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Geometri

MESLEKİ DENEYİMLER:

- (2021-Halen), İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi.

YÜKSEK LİSANS VEYA DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR
(Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)