

**KOMPLEKS KANTOROVİCH-SCHURER POLİNOMLARI İLE KOMPAKT
DİSKLERDE YAKLAŞIM**

Hacer AĞBULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2012

ANKARA

Hacer AĞBULUT tarafından hazırlanan KOMPLEKS KANTOROVİCH-SCHURER POLİNOMLARI İLE KOMPAKT DİSKLERDE YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı



Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

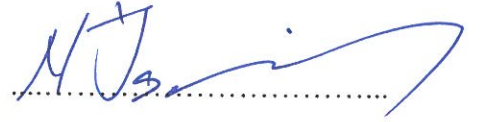
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi



Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi



Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi



Tarih: 18/06/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hacer AĞBULUT

KOMPLEKS KANTOROVİCH-SCHURER POLİNOMLARI İLE KOMPAKT**DİSKLERDE YAKLAŞIM****(Yüksek Lisans Tezi)****Hacer AĞBULUT****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Haziran 2012****ÖZET**

Bu tezde kompakt disklerde analitik fonksiyonlara ilişkin kompleks Bernstein-Schurer ve Kantorovich-Schurer polinomlarının yaklaşım özellikleri incelendi. Bu operatörler için eş anlı yaklaşım mertebesi ve Voronovskaja tip teoremler verildi. Böylelikle Bernstein-Schurer polinomlarının yaklaşım özellikleri reel aralıklardan kompleks düzlemin kompakt disklerine genişletildi.

Bilim Kodu :204.1.095**Anahtar Kelimeler : Kompleks Bernstein-Schurer, kompleks Kantorovich-Schurer , eş anlı yaklaşım, Voronovskaja tip teorem****Sayfa Adedi :69****Tez Yöneticisi :Prof. Dr. Nurhayat İSPİR**

**APPROXIMATION BY COMPLEX KANTOROVICH-SCHURER
POLYNOMIALS IN COMPACT DISKS**

(M. Sc. Thesis)

Hacer AĞBULUT

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2012

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of complex Bernstein-Schurer and Kantorovich-Schurer polynomials attached to analytic functions on compact disks are investigated. The order of simultaneous approximation and the Voronovskaja-type theorems for these operators are given. Hence the approximation properties of Bernstein-Schurer polynomials from real intervals to compact disks in the complex plane are extended.

Science code :204.1.095

Key Words :Complex Bernstein-Schurer, complex Kantorovich-Schurer, simultaneous approximation, the Voronovskaja-type theorem

Page Number :69

Adviser : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sn. Prof. Dr. Nurhayat İSPİR' e ve çalışmalarım süresince beni manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyon Uzayı.....	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörler.....	3
2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı.....	9
2.3.1. Korovkin teoremi.....	10
3. BERNSTEİN VE BERNSTEİN-SCHURER OPERATÖRLERİ.....	13
3.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi.....	13
3.2. Bernstein Polinomları.....	13
3.2.1. Bernstein operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı.....	23
3.2.2. Bernstein operatörü için Voronovskaja asimptotik yaklaşım.....	25
3.2.3. Bernstein operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi.....	29
3.3. Bernstein-Schurer Polinomları.....	32
3.3.1. $B_{n,p}(f)$ operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı.....	36
3.3.2. $B_{n,p}(f)$ operatörü için Voronovskaja asimptotik yaklaşım.....	40

Sayfa

4. KOMPLEKS KANTOROVİCH-SCHURER POLİNOMLARI.....	44
4.1. Kompleks Bernstein-Schurer Polinomları	44
4.2. Kompleks Kantorovich-Schurer Polinomları.....	61
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\langle a, b \rangle$	$\mathbb{R}$ deki sonlu veya sonsuz herhangi bir aralık
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\ f\ _{C[a, b]}$	$C[a, b]$ uzayında tanımlanan norm
$L(f; x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\ L\ _{X \rightarrow Y}$	X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$\omega_f(\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Delta_{\frac{1}{n}}^p(f; \frac{k}{n})$	f fonksiyonunun $\frac{1}{n}$ adımlı p –inci fark operatörü
$[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$	f fonksiyonunun n -yinci bölünmüş farkı
$B_n(f; x)$	Bernstein polinomları
$B_{n,p}(f; x)$	Bernstein-Schurer polinomları
$S_{n,p}(f; z)$	Kompleks Bernstein-Schurer polinomları
$K_n(f; x)$	Bernstein-Kantorovich polinomları
$KS_{n,p}(f; z)$	Kompleks Kantorovich-Schurer polinomları

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde merkezi rol oynayan teoremlerden biri Weierstrass teoremidir. K.Weierstrass 1885 yılında

“Sonlu $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

şartını sağlayan $\{P_n\}$ polinomlar dizisi vardır.” teoremini ispatladı. Ancak Weierstrass bu polinomların ne tür polinomlar olduğu ve polinomların bulunma koşulları hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Daha sonra bazı matematikçiler bu teoremin ispatını sağlayan polinomlar bulmuşlardır. Bu polinomlardan biri 1912 de Bernstein tarafından verilmiştir. Bernstein, $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar için;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

polinomunu tanımlayarak, bu polinomlar dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını ispatlamıştır. Bernstein polinomları $C[0,1]$ den kendisi üzerine bir lineer pozitif operatördür. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım koşulları ise Korovkin tarafından verilmiştir [1,6]. Bernstein polinomları Korovkin teoremini sağlayan operatörlerdir. Bernstein polinomlarının daha genel hali Bernstein-Schurer polinomudur. Bernstein-Schurer polinomu da lineer pozitif operatördür ve Korovkin teoremini sağlar.

Bernstein operatörleri ile süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak uygun olmadığından, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında Korovkin Teoremini incelemek için, Kantorovich ve Durrmeyer ilk toplamsal integral tip operatörleri tanımlamışlardır [1]. Bu operatörler sırası ile

$n \in \mathbb{N}, f \in L_1[0,1], x \in [0,1]$ ve $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \int_{k/n+1}^{k+1/n+1} f(t) dt$$

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \int_0^1 P_{n,k}(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tezdeki amacımız Bernstein ve Kantorovich operatörlerini reel aralıklardan kompleks düzlemin kompakt bölgelerine genişletmektir.

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda reel Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiş ve Weierstrass teoreminin ispatı verilmiştir. İkinci kısımda Bernstein-Schurer operatörleri tanımlanarak Korovkin teoremi, yaklaşım derecesi ve asimptotik yaklaşım derecesine ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde S.G. Gal' in [10] daki makalesi incelenerek birinci kısımda kompakt disklerde analitik olan fonksiyonlarla bağlantılı kompleks Bernstein-Schurer operatörleri dikkate alınarak, yakınsaklık oranı, eş anlı yaklaşım derecesi ve Voronovskaja tip teoremler incelenmiştir. İkinci kısımda ise kompleks Kantorovich-Schurer operatörleri için birinci kısma benzer olarak yakınsaklık özellikleri verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlere temel teşkil edecek bazı tanım, teorem ve özelliklerden bahsedilecektir. Bu kısımda [1, 2, 3] kaynakları kullanılmaktadır.

2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

2.1. Tanım

$[a, b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını $C[a, b]$ ile gösterelim. $f, g \in C[a, b]$, $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$i) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ işlemleri ile bir lineer uzaydır. Bu lineer uzay üzerinde bir norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

2.1. Teorem

A herhangi bir küme, F skaler cisim, $S(A, F) = \{f | f: A \rightarrow F \text{ sınırlı}\}$ lineer uzayında bir norm $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ olsun. $S(A, F)$ lineer uzayında bir (f_n) dizisi ve $f \in S(A, F)$ verilsin. (f_n) nin f ye $\|\cdot\|_{\infty}$ normunda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınmış her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir operatör

tanımlanmıştır denir ve g fonksiyonunun tanım kümesindeki x ler için $g(x) = L(f; x)$ şeklinde gösterilir. t, f fonksiyonunun tanım kümesinin herhangi bir elemanı ise $L(f(t); x), L(f)(x), L(f; x)$ gösterimlerinden biri kullanılır.

2.3. Tanım

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olmak üzere $L : X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. $\forall f_1, f_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için L operatörü

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

2.4. Tanım

X, Y iki lineer uzay, T_f ve T_g sırasıyla f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri olmak üzere, $X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0, \forall t \in T_f\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0, \forall x \in T_g\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L ye pozitif operatör denir. Yani her $t \in T_f$ için $f(t) \geq 0$ olduğunda her $x \in T_g$ için $L(f(t); x) \geq 0$ olur. L pozitif operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

2.1. Önerme

$L : X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

- i) L monotondur.
- ii) $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

i) Her $f_1, f_2 \in X$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için $f_1(t) \leq f_2(t)$ alalım. Bu durumda

$f_1(t) - f_2(t) \leq 0$ olur. Uyarı 2.1 den

$$L(f_1(t) - f_2(t); x) = L(f_1(t); x) - L(f_2(t); x) \leq 0$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan da $t \in \mathbb{R}$ için $L(f_1; x) \leq L(f_2; x)$ elde edilir.

ii) $-|f| \leq f \leq |f|$ eşitsizliğine L operatörünü uygulayalım. L operatörünün monotonluk ve lineerlik özelliklerinden sırasıyla,

$$L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu ise

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.1. Uyarı

L lineer pozitif operatörü her $x \in T_f$ için $f(x) < 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonları yine aynı özelliği sağlayan fonksiyonlara dönüştürür. Gerçekten her $x \in T_f$ için $f(x) < 0$ olduğundan $-f(x) > 0$ olur. L lineer pozitif operatör olduğundan her $x \in T_f$ için $0 < L(-f, x) = -L(f; x)$ eşitsizliği sağlanır. O halde her $x \in T_f$ için $L(f; x) < 0$ elde edilir.

2.5. Tanım

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $L : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $f \in X$ için $\|L(f)\|_Y \leq c\|f\|_X$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $c > 0$ sayısı varsa, L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu c sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ya da $\|L\|$ biçiminde gösterilir.

2.6. Tanım

$\langle a, b \rangle$ ifadesi $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b], (-\infty, \infty), (-\infty, b), (a, \infty)$ aralıklarından birini gösterebilir.

$\omega_f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ fonksiyonu $x, y \in \langle a, b \rangle$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

değerine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [4].

$\omega_f(\delta)$ yerine $\omega(f; \delta)$, $\omega(\delta)$ gösterimleri de kullanılabilir. Şimdi süreklilik modülünün özelliklerini verelim.

2.3. Teorem

f fonksiyonu $\langle a, b \rangle$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun süreklilik modülü,

(i) $\omega_f(\delta)$ fonksiyonu δ nin monoton artan bir fonksiyonudur. Yani $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise

$$\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$$

(ii) f nin $\langle a, b \rangle$ de düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$$

(iii) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega_f(m\delta) \leq m\omega_f(\delta)$

(iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için $\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta)$

v) $|f(t) - f(x)| \leq \omega_f(|t - x|)$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega_f(\delta)$

özelliklerini sağlar [5].

2.7. Tanım

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^p f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{i=0}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f\left(\frac{k+i}{n}\right)$$

ifadesine f fonksiyonunun $\frac{1}{n}$ adımlı p –inci fark operatörü denir.

Buna göre

$$\Delta_{n^{-1}}^0 \left(f; \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\Delta_{n^{-1}}^1 \left(f; \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olup, $p = 2$ ve $p = 3$ için

$$\Delta_{n^{-1}}^2 \left(f; \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Delta_{n^{-1}}^3 \left(f; \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+3}{n}\right) - 3f\left(\frac{k+2}{n}\right) + 3f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2.8. Tanım

f , (a, b) de tanımlı bir fonksiyon ve $x_0, x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ olsun.

$[x_k; f] = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ile gösterelim. f fonksiyonunun 1.bölünmüş farkı,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{[x_0; f] - [x_1; f]}{x_0 - x_1}$$

şeklinde tanımlanır. Yani f nin 1. Bölünmüş farkı,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

dir. Ortalama değeri teoreminden en azından $\xi \in (x_0, x_1)$ vardır öyle ki

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f'(\xi)}{1!}$$

dir. f nin 2. Bölünmüş farkı

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade düzenlendiği zaman, 2. Bölünmüş fark,

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

dir ve

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{f''(\xi)}{2!}, \xi \in (a, b)$$

olur. f nin n -yinci bölünmüş farkı

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

dir [7,8]. Buradan

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in (a, b)$$

olur. Bölünmüş farklarla fonksiyonun p -inci fark operatörü arasında;

$$\Delta_{n-1}^p f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{p!}{n^p} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \dots, \frac{k+p}{n}; f \right]$$

$$= \frac{p!}{n^p} \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} = \frac{f^{(p)}(\xi)}{n^p}, \xi \in (a, b)$$

bağıntısı vardır.

Biliyoruz ki bir fonksiyonun birinci türevinin işareti o fonksiyonun artan ya da azalan olmasını, ikinci türevinin işareti ise fonksiyonun konveks ya da konkav olmasını belirler. Dolayısıyla bölünmüş farklar yardımıyla türevi çok zor hesaplanan fonksiyonların konveks ve konkav olup olmadıkları hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

$\Delta_{n-1}^p f > 0$ ise f fonksiyonuna p -inci basamaktan konveks fonksiyon denir.

$\Delta_{n-1}^p f < 0$ ise f fonksiyonuna p -inci basamaktan konkav fonksiyon denir.

2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı

Bu kısımda (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara yakınsaklık koşulları incelenecektir.

Belirtelim ki, $C[a, b]$ uzayında tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $L_n(f; x)$ dizisine karşılık gelen $L_n(f)$ dizisi anlamındadır.

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohman göstermiştir ki her $x \in [0,1]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(a_{k,n}) P_{k,n}(x) ; P_{k,n}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklindedir. Bu üç koşul $e_k(x) = x^k, k = 0,1,2$ olmak üzere,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[0,1]} = 0$ olarak da gösterilebilir [7,9].

1953 yılında P.P. Korovkin [6], genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman' ın koşulları genel halde gerçekleştirilebilir.

2.3.1. Korovkin teoremi

2.4. Teorem

Her n için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $k = 0,1,2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0; \quad k = 0,1,2$$

koşulları gerçekleşiyorsa $C[a, b]$ uzayında olan, ayrıca a da sağdan b de soldan sürekli bulunan ve tüm reel ekseninde sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır [6].

İspat

f fonksiyonu tüm reel ekseninde sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı vardır ki tüm x ler için $|f(x)| \leq M$ dir.

$f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki

$t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

sağlanır.

$x, t \in [a, b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan Eş. 2.1 sağlanır. $x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ olduğunda ise Eş. 2.1 yine geçerlidir. Çünkü f fonksiyonu a ve b de sırasıyla, sağdan ve soldan süreklidir.

$x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ için $|t - x| \geq \delta$ olduğunda üçgen eşitsizliği ve f nin sınırlılık özelliğinden $|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M$ yazılabilir.

Diğer taraftan $|t - x| \geq \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ dir. Bu durumda $\frac{|t-x|}{\delta} \leq \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$ olup $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ veya $2M \leq 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$ olur.

O halde

$$|t - x| \geq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \leq 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir.

O halde her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

dir.

$$L_n(f(t); x) - f(x) = L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)$$

L_n operatörünün lineerliği ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$L_n(f(t); x) - f(x) = L_n((f(t) - f(x)); x) - f(x)[1 - L_n(1; x)]$$

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)||1 - L_n(1; x)|$$

elde edilir. Önerme 2.1. (ii) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)||1 - L_n(1; x)|$$

yazılır. Operatörün monotonluğu ve f nin sınırlılığından

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M_f |1 - L_n(1; x)|$$

elde edilir. Operatörün lineerliğinden

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) + M_f |1 - L_n(1; x)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - x^2] \\
&\quad + M_f |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \{[L_n(t^2; x) - x^2] - 2x[L_n(t; x) - x] + x^2[L_n(1; x) - 1]\} \\
&\quad + M_f |L_n(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1; x)$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{2M_f}{\delta^2} \{|L_n(t^2; x) - x^2| - 2x|L_n(t; x) - x| + x^2|L_n(1; x) - 1|\} \\
&+ M_f |L_n(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

yazılır. $k = 0, 1, 2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarının kullanılmasıyla $|L_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$ bulunur.

O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

Yaklaşımlar teorisinde Korovkin tipli yaklaşım teoremlerine ilişkin detaylı bilgi için [Altomare-Campiti, 1994] isimli kaynak incelenebilir.

3. BERNSTEİN VE BERNSTEİN-SCHURER OPERATÖRLERİ

3.1. Weierstrass yaklaşım teoremi

Her $\varepsilon > 0$ ve $f \in C[a, b]$ için öyle bir P polinomu vardır ki her $x \in [a, b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle sonlu $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $[a, b]$ aralığında f e düzgün yakınsayan bir (P_n) polinom dizisi vardır [7].

Weierstrass teoremini sağlayan polinomlardan biri Bernstein polinomudur.

3.2. Bernstein Polinomları

3.1. Tanım

$B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun n -inci ($n \in \mathbb{N}$) Bernstein polinomu denir [1,7].

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $[0,1]$ aralığında $P_{n,k}(x) \geq 0$ ve

$$\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = 1$$

olur.

Bernstein polinomu ile Weierstrass yakınsaklık teoreminin ispatını vermeden önce ispat içerisinde kullanılacak bazı sonuçları verelim.

3.1. Lemma

Eş. 3.1 ile tanımlanan Bernstein polinomu için

$$T_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n (k - nx)^r P_{n,k}(x)$$

olmak üzere

$$T_{n,0}(x) = 1, \quad T_{n,1}(x) = 0, \quad T_{n,2}(x) = nx(1-x) \text{ dir.}$$

İspat

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Her $x \in [0,1]$ için

$$T_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n (k - nx)^r P_{n,k}(x)$$

ifadesinde

$r = 0$ için

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = 1$$

$r = 1$ için

$$T_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^n k P_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n nx P_{n,k}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n k P_{n,k}(x) - nx \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} n P_{n,k}(x) - nx \\
&= n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} - nx \\
&= nx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} - nx
\end{aligned}$$

(k yerine $k+1$ yazılarak)

$$\begin{aligned}
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n-k-1} - nx \\
&= nx - nx = 0
\end{aligned}$$

$r = 2$ için

$$\begin{aligned}
T_{n,2}(x) &= \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n (k^2 - 2knx + n^2 x^2) P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n k^2 P_{n,k}(x) - 2nx \sum_{k=0}^n k P_{n,k}(x) + n^2 x^2 \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n k^2 P_{n,k}(x) - 2n^2 x^2 + n^2 x^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{k=0}^n k^2 P_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) P_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n k P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} + nx \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)! (k-2)!} x^k (1-x)^{n-k} + nx
\end{aligned}$$

(k yerine $k+2$ yazılarak)

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2} + nx \\
&= nx + n(n-1)x^2
\end{aligned}$$

olup

$$T_{n,2}(x) = nx + n(n-1)x^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx - nx^2$$

$$T_{n,2}(x) = nx(1-x)$$

bulunur.

3.1. Teorem

$B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

operatörü Weierstrass teoremini sağlar. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

dir. Burada

$$\|B_n(f) - f\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |B_n(f; x) - f(x)|.$$

İspat

$f \in C[0,1]$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $x, t \in [0,1]$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki $|x - t| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca kapalı aralıkta sürekli fonksiyon sınırlı olduğundan her $t \in [0,1]$ için $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$A_n = A_n(x, \delta) = \left\{ k: \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \text{ kümesini tanımlayalım.}$$

f fonksiyonu sürekli olduğundan $k \in A_n$ için $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır.

f fonksiyonu sınırlı olduğundan $k \notin A_n$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \leq M + M = 2M$$

elde edilir. Aynı zamanda $k \notin A_n$ ise $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ dir. Buradan $\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta} \geq 1$ dir.

Sonuç olarak $k \notin A_n$ ise $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \frac{2M \left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta}$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) - f(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{n,k}(x) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \\
&\leq \sum_{k \in A_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x) + \sum_{k \notin A_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A_n} P_{n,k}(x) + \frac{2M}{\delta} \sum_{k \notin A_n} \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) + \frac{2M}{\delta} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{n,k}(x) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 3.2 de ikinci toplam ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa ve lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 P_{n,k}(x) \right]^{1/2} \left[\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \right]^{1/2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 P_{n,k}(x) \right]^{1/2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta} \left[\frac{1}{n^2} T_{n,2}(x) \right]^{1/2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta} \left[\frac{1}{n^2} nx(1-x) \right]^{1/2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta\sqrt{n}} \sqrt{x(1-x)} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığında $x(1-x)$ en büyük değerini $x = \frac{1}{2}$ noktasında alacağından

$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ tür. Bu değer Eş. 3.3 de yerine yazılırsa

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta\sqrt{n}} \frac{1}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\delta\sqrt{n}}$$

elde edilir. Böylece, yeterince büyük n doğal sayısı için

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

dır. Teorem 2.1 den $[0,1]$ aralığı üzerinde $B_n(f)$, $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

3.2. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlı B_n Bernstein polinomu Korovkin teoremini sağlar.

İspat

Öncelikle B_n polinomunun lineer ve pozitif operatör olduğunu gösterelim.

$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere Eş. 3.1 yeniden düzenlenirse

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

Her $f_1, f_2 \in C[0,1]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$B_n(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \sum_{k=0}^n (\alpha f_1 + \beta f_2)\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \left(\alpha f_1 \left(\frac{k}{n} \right) + \beta f_2 \left(\frac{k}{n} \right) \right) P_{n,k}(x) \\
&= \alpha \sum_{k=0}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) P_{n,k}(x) + \beta \sum_{k=0}^n f_2 \left(\frac{k}{n} \right) P_{n,k}(x) \\
&= \alpha B_n(f_1; x) + \beta B_n(f_2; x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece B_n nin lineer olduğu gösterilmiş olur.

Her $t \in [0,1]$ için $f(t) \geq 0$ olsun.

$x \in [0,1]$ olduğundan $(1-x) \in [0,1]$ dir. Dolayısıyla

$$f(t) \geq 0 \Rightarrow B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) P_{n,k}(x) \geq 0$$

dır. Böylece B_n nin pozitif olduğu elde edilir.

Sonuç olarak $B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ lineer pozitif bir operatördür.

$$i) B_n(e_0; x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = (1-x+x)^n = 1.$$

Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(e_0) - e_0\|_{C[0,1]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |B_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |1 - 1| = 0.
\end{aligned}$$

$$ii) B_n(e_1; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

(k yerine $k+1$ yazılarak)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! k!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k x (1-x)^{n-k-1} \frac{1}{n} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(e_1) - e_1\|_{C[0,1]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |B_n(e_1; x) - e_1(x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |x - x| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) B_n(e_2; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k^2}{n^2} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n^2} + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n^2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{n^2}$$

(k yerine $k+2$ yazılarak)

(k yerine $k+1$ yazılarak)

$$= \frac{x^2 n(n-1)}{n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2}$$

$$+ \frac{n}{n^2} x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(e_2) - e_2\|_{C[0,1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |B_n(e_2; x) - e_2(x)|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} \left| x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - x^2 \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x(1-x)}{n} \right|$$

ifadesine ulaşılır. Buradaki maksimum sonlu bir değer olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(e_2) - e_2\|_{C[0,1]} = 0$$

olur.

(i), (ii), (iii) ve Korovkin teoreminden $[0,1]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

dır.

3.2.1. Bernstein operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı

3.1. Önerme

X ve Y birer fonksiyon uzayı $f, g \in X$ ve $L : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun.

L operatörü için Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$L(fg; x) \leq L(f^2; x)^{1/2} L(g^2; x)^{1/2}$$

şeklinde ifade edilir [6].

3.3. Teorem

Eş. 3.1 ile tanımlanan Bernstein operatörü yeterince büyük n ler için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega_f(n^{-1/2})$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat

Süreklilik modülü özelliklerinden (vi) dikkate alınarak

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left(\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega_f(\delta_n) \quad (3.4)$$

yazılır.

$\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = 1$ olduğunu biliyoruz.

$$B_n(f; x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{n,k}(x)$$

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x)$$

Eş. 3.4 dikkate alınarak yazılırsa

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left(\left| \frac{k}{n} - x \right| + 1 \right) \omega_f(\delta_n) P_{n,k}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \omega_f(\delta_n) P_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| \omega_f(\delta_n) P_{n,k}(x) \\ &= \omega_f(\delta_n) \left[\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{n,k}(x) \right] \\ &= \omega_f(\delta_n) \left[B_n(1; x) + \frac{1}{\delta_n} B_n(|t - x|; x) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığında $x(1-x)$ en büyük değerinin $x = \frac{1}{2}$ noktasında alacağı ve dolayısıyla $\max_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_n(|t - x|; x) &\leq \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 P_{n,k}(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \right)^{1/2} \\ &= (B_n((t-x)^2; x))^{1/2} (B_n(1; x))^{1/2} \\ &= \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{4n} \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade Eş. 3.5 de yerine yazılırsa her $x \in [0,1]$ için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{1}{2\sqrt{n}} \right]$$

elde edilir. $\delta_n = n^{-1/2}$ seçilirse her $x \in [0,1]$ için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega_f(n^{-1/2})$$

bulunur. Burada $f \in C[0,1]$ olduğundan $f, [0,1]$ de düzgün süreklidir.

Süreklilik modülünün (ii) özelliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $\delta_n \rightarrow 0$ olup $\omega_f(\delta_n) \rightarrow 0$

dır. Dolayısıyla $B_n(f)$ in f e yaklaşım derecesi $\frac{1}{\sqrt{n}}$ den daha küçüktür.

3.2.2. Bernstein operatörü için Voronovskaja asimptotik yaklaşım

3.2. Tanım

$n \in \mathbb{N}$, (α_n) , (β_n) birer sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

ise (α_n) ve (β_n) sonsuz küçülendir denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{c\beta_n} = 1$$

ise α_n ve $c\beta_n$ in yaklaşım hızları denktir denir. Burada yaklaşım hızı β_n ile belirlenir.

Çünkü c, n e bağlı olmayan bir sabittir.

Operatörlerde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_n(f; x) - f(x)|}{\beta_n} = A(n, x)$$

ise $A(n, x)$ fonksiyonu asimptotik değer, β_n asimptotik hızdır.

$B_n(f)$ operatörü için Voronovskaja Asimptotik Yaklaşım teoremine geçmeden önce merkezi momentleri hesaplamak için aşağıdaki lemmada indirgeme formülünü vereceğiz.

3.2. Lemma

Eş. 3.1 de verilen Bernstein operatörü için

$$T_{n,s}(x) = \sum_{k=0}^n (k - nx)^s P_{n,k}(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere indirgeme formülü

$$T_{n,s+1}(x) = x(1-x)[T'_{n,s}(x) + nsT_{n,s-1}(x)] \quad (3.6)$$

şeklindedir.

İspat

$$\frac{d}{dx} T_{n,s}(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n (k - nx)^s P_{n,k}(x) \right)$$

$$T'_{n,s}(x) = -ns \sum_{k=0}^n (k - nx)^{s-1} P_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n (k - nx)^s \frac{d}{dx} P_{n,k}(x)$$

$$T'_{n,s}(x) = -nsT_{n,s-1}(x) + \sum_{k=0}^n (k - nx)^s \left[\binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} (k - nx) \right]$$

$$T_{n,s}'(x) = -nsT_{n,s-1}(x) + \sum_{k=0}^n (k-nx)^{s+1} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \quad (3.7)$$

Eş. 3.7 de her iki taraf $x(1-x)$ ile çarpılırsa

$$x(1-x)T_{n,s}'(x) = -nsx(1-x)T_{n,s-1}(x) + \sum_{k=0}^n (k-nx)^{s+1} P_{n,k}(x)$$

$$x(1-x)T_{n,s}'(x) = -nsx(1-x)T_{n,s-1}(x) + T_{n,s+1}(x)$$

$$T_{n,s+1}(x) = x(1-x)[T_{n,s}'(x) + nsT_{n,s-1}(x)]$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4. Teorem [8]

$C^{(2)}([0,1], \mathbb{R}) := C^{(2)}[0,1] := \{f|f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ iki kez sürekli türevli fonksiyon}\}$

olmak üzere $f \in C^{(2)}[0,1]$ olsun.

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n(f; x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

İspat

Voronovskaja asimptotik yaklaşım için

$f'' \in C[0,1]$ olduğundan Taylor formülü kullanılarak

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \left[\frac{1}{2} f''(x) + \mu\left(\frac{k}{n} - x\right) \right] \quad (3.8)$$

yazılabilir. Burada $\mu(h)$ her h için sınırlıdır. Yani $M > 0$ olmak üzere $|\mu(h)| \leq M$ ve $h \rightarrow 0$ için $\mu(h) \rightarrow 0$ dır.

Eş. 3.8 de her iki taraf $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ile çarpıldıktan sonra $k = 0$ dan $k = n$ ye kadar toplanıp

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(t; x) = x, \quad B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$$

olduğu da kullanılırsa

$$B_n(f; x) = f(x) + \frac{f''(x)x(1-x)}{2n} + \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \mu\left(\frac{k}{n} - x\right) P_{n,k}(x) \quad (3.9)$$

elde edilir. Eş. 3.9 da

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \mu\left(\frac{k}{n} - x\right) P_{n,k}(x)$$

diyelim. $f \in C[0,1]$ olduğundan düzgün süreklidir her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [0,1]$ için x den bağımsız bir $\delta > 0$ sayısı için $\left|\frac{k}{n} - x\right| = |h| < \delta$ olduğundan $|\mu(h)| < \varepsilon$ dir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} (k-nx)^2 P_{n,k}(x) + M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} (k-nx)^2 P_{n,k}(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{n^2} T_{n,2}(x) + \frac{M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^4 P_{n,k}(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{n^2} nx(1-x) + \frac{\varepsilon}{\delta^2 n^4} T_{n,4}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n} x(1-x) + \frac{M \cdot M_1}{\delta^2 n^4}, \quad \max_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}, \quad M \cdot M_1 = K(\text{sabit}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4n} + \frac{K}{\delta^2 n}, \quad \delta = \sqrt{\frac{K}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4n} + \frac{\varepsilon}{n} \leq c \frac{\varepsilon}{n}$$

bulunur. $\mathcal{A}$, Eş. 3.9 da yerine yazılırsa

$$B_n(f; x) \leq f(x) + \frac{f''(x)x(1-x)}{2n} + c \frac{\varepsilon}{n}$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f''(x)x(1-x) = \frac{1}{2} f''(x)x(1-x)$$

bulunur. Burada $\frac{x(1-x)}{2} f''(x)$ asimptotik değer, $\frac{1}{n}$ asimptotik hızdır.

3.2.3. Bernstein operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi

3.5. Teorem

$\frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n$ noktalarında f fonksiyonunun sonlu farklar ile ifadesi

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(0) x^k$$

biçimindedir [5].

İspat

B_n operatörünü tanımlayan serinin düzgün yakınsak olmasından dolayı seri teri terim türevlenebilirdir.

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ifadesinde x e göre bir kez türev alınırsa

$$\begin{aligned} B'_n(f; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Eş. 3.10 da $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \Delta f\left(\frac{k}{n}\right)$ ile gösterilsin.

Eş. 3.10 da x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} B''_n(f; x) &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n-1}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \\ &\quad - n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n-1}{k} x^k (n-k-1) (1-x)^{n-k-2} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k (n-k-1) (1-x)^{n-k-2} \\
& = n \sum_{k=1}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! (k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \\
& -n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2}
\end{aligned}$$

(birinci toplam ifadesinde k yerine $k+1$ yazılırsa)

$$\begin{aligned}
& = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2} \\
& -n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2} \\
& = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n-k-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\Delta_h^v f(x) = \Delta(\Delta_h^{v-1} f(x)) = f(x+vh) - \binom{v}{1} f(x+(v-1)h) + \dots + (-1)^v f(x)$$

olmak üzere $h = \frac{1}{n}$ ve $v = 0, 1, \dots, n$ için $\Delta_h^v f(x) = \Delta^v f(x)$ yazarak

$$\begin{aligned}
B_n^{(v)}(f; x) &= n(n-1) \dots (n-v+1) \sum_{k=0}^{n-v} \Delta^v f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-v}{k} x^k (1-x)^{n-k-v} \\
&= n(n-1) \dots (n-v+1) \left[\Delta^v f(0) (1-x)^{n-v} + \Delta^v f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-v}{1} x (1-x)^{n-1-v} + \dots \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $x = 0$ alınırsa

$$B_n^{(v)}(f; 0) = n(n-1) \dots (n-v+1) \Delta^v f(0)$$

olur. B_n operatörünün Maclaren açılımı ve yukarıda eşitlik birlikte düşünülürse

$$B_n(f; x) = \sum_{v=0}^n \frac{B_n^{(v)}(0)}{v!} x^v = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(0) x^v \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada

$$a_{n,v} = \binom{n}{v} \Delta^v f(0) \text{ denilirse}$$

$$a_{n,v} = \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{v-1}{n}\right) \frac{\Delta^v f(0)}{(\Delta x)^v}, \quad \Delta x = \frac{1}{n}$$

olur. Eğer f türevlenebilir ise $n \rightarrow \infty$ için $a_{n,v}$ ifadesi $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ a yakınsar. Dolayısıyla

Eş. 3.11 in sağ tarafı f fonksiyonunun Maclaren seri açılımının ilk $(n+1)$ terimidir.

3.3. Bernstein-Schurer Polinomları

3.3. Tanım

$p \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$B_{n,p}: C[0,1+p] \rightarrow C[0,1]$$

Her $f \in C[0,1+p]$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için Bernstein-Schurer operatörleri

$$B_{n,p}(f; x) = \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad P_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \quad (3.12)$$

ile tanımlanır.

3.6. Teorem

Eş. 3.12 ile tanımlanan Bernstein-Schurer operatörleri Korovkin teoremini sağlar.

İspat

Öncelikle $B_{n,p}$ in lineer ve pozitif operatör olduğunu gösterelim.

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f_1, f_2 \in C[0, 1+p]$ için

$$\begin{aligned}
 B_{n,p}((\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)); x) &= \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) \alpha f_1(t) + \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) \beta f_2(t) \\
 &= \alpha \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) f_1(t) + \beta \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) f_2(t) \\
 &= \alpha B_{n,p}(f_1(t); x) + \beta B_{n,p}(f_2(t); x)
 \end{aligned}$$

olduğundan $B_{n,p}$ lineer bir operatördür.

$k = 0, 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, 1]$ için $P_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ ise $B_{n,p}(f; x) \geq 0$ dır. O halde $B_{n,p}$ pozitif bir operatördür.

$B_{n,p}$ lineer pozitif operatördür.

$$i) B_{n,p}(e_0; x) = \sum_{k=0}^{n+p} P_{n,k}(x) = 1$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_0) - e_0\|_{C[0,1+p]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} |B_{n,p}(e_0; x) - e_0(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} |1 - 1| = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} ii) B_{n,p}(e_1; x) &= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(k yerine $k+1$ yazılarak)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{(n+p)!}{(n+p-k-1)! k!} x^{k+1} (1-x)^{n+p-k-1} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{(n+p)(n+p-1)!}{(n+p-k-1)! k!} x^k x (1-x)^{n+p-k-1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{n+p}{n} x \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{(n+p-1)!}{(n+p-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k-1} \\ &= x + \frac{p}{n} x \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_1) - e_1\|_{C[0,1+p]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} |B_{n,p}(e_1; x) - e_1(x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} \left| x + \frac{p}{n}x - x \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} \left| \frac{p}{n}x \right|
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Buradaki maksimum sonlu bir değer olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_1) - e_1\|_{C[0,1+p]} = 0$$

olur.

$$\begin{aligned}
iii) B_{n,p}(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{k^2}{n^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{k(k-1)}{n^2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{k}{n^2} \\
&= \sum_{k=2}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! (k-2)!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{1}{n^2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

(birinci toplam ifadesinde k yerine $k+2$, ikinci toplam ifadesinde k yerine $k+1$ yazılırsa)

$$= \frac{x^2(n+p)(n+p-1)}{n^2} \sum_{k=0}^{n+p-2} \frac{(n+p-2)!}{(n+p-k-2)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k-2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n+p}{n^2} x \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{(n+p-1)!}{(n+p-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n+p-k-1} \\
& = x^2 + \frac{n(2p-1) + p(p-1)}{n^2} x^2 + \frac{n+p}{n^2} x
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_2) - e_2\|_{C[0,1+p]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} |B_{n,p}(e_2; x) - e_2(x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} \left| x^2 + \frac{n(2p-1) + p(p-1)}{n^2} x^2 + \frac{n+p}{n^2} x - x^2 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1+p]} \left| \frac{n(2p-1) + p(p-1)}{n^2} x^2 + \frac{n+p}{n^2} x \right|
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Buradaki maksimum sonlu bir değer olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_2) - e_2\|_{C[0,1+p]} = 0$$

olur. (i), (ii), (iii) den ve Korovkin teoreminden $[0,1+p]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0,1+p]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(f) - f\|_{C[0,1+p]} = 0.$$

3.3.1. $B_{n,p}(f)$ operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı

3.7. Teorem [9]

$L_n: C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun.

$x \in [c, d]$ olmak üzere

$\alpha_n^2(x) = L_n((t-x)^2; x)$ alınır, $f \in C[a, b]$ için

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |L_n(1; x) - 1| + \left(L_n(1; x) + (L_n(1; x))^{1/2} \right) \omega_f(\alpha_n(x)) \quad (3.13)$$

İspat

$f \in C[a, b], x \in [c, d], t \in [a, b]$ ve $\delta > \alpha_n(x)$ olsun. Süreklilik modülünün tanımından

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega_f(|t - x|) \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega_f(\delta)$$

$$L_n(f(t); x) - f(x) = L_n((f(t) - f(x)); x) - f(x)[1 - L_n(1; x)]$$

$$|L_n(f; x) - f(x)| = \left| L_n((f(t) - f(x)); x) \right| + |f(x)| |1 - L_n(1; x)|$$

elde edilir. L_n operatörü monoton olduğundan

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |1 - L_n(1; x)| \quad (3.14)$$

yazılır. Eş. 3.14 de

$$\mathcal{A} = L_n(|f(t) - f(x)|; x) \text{ diyelim.}$$

Süreklilik modülünün (vi) özelliği dikkate alınır

$$\mathcal{A} \leq L_n((\delta^{-1}|t - x| + 1)\omega_f(\delta); x)$$

yazılır. Operatörünün lineerliği kullanılırsa

$$= \omega_f(\delta) (L_n(1; x) + \delta^{-1} L_n(|t - x|; x))$$

elde edilir. Bu ifadeye önerme 3.1 uygulanırsa

$$= \omega_f(\delta) \left(L_n(1; x) + \delta^{-1} L_n((t-x)^2; x)^{1/2} L_n(1; x)^{1/2} \right)$$

bulunur.

$\delta^{-1} < \alpha_n^{-1}(x)$ olduğundan

$$\mathcal{A} \leq \omega_f(\delta) \left(L_n(1; x) + \frac{1}{\alpha_n(x)} (L_n(1; x)^{1/2} \alpha_n(x)) \right)$$

bulunur. Bu ifade Eş. 3.14 de yerine yazılırsa

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) \left(L_n(1; x) + \frac{1}{\alpha_n(x)} (L_n(1; x)^{1/2} \alpha_n(x)) \right)$$

$$+ |f(x)| |1 - L_n(1; x)|$$

olur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

3.8. Teorem

Eş. 3.12 ile tanımlanan Bernstein-Schurer operatörü için

$$\alpha_n(x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n} + \frac{px(px-x+1)}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{n}} \text{ olmak üzere}$$

$$|B_{n,p}(f; x) - f(x)| \leq 3\omega_f \left(\sqrt{\frac{A}{n}} \right)$$

dir. Burada A, n den bağımsız sabit bir sayıdır.

İspat

Teorem 3.7 yi dikkate alarak önce $\alpha_n(x) = B_{n,p}((t-x)^2; x)$ ifadesini hesaplayalım.

$B_{n,p}: C[0,1+p] \rightarrow C[0,1]$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned}
 B_{n,p}((t-x)^2; x) &= B_{n,p}(t^2; x) - 2xB_{n,p}(t; x) + x^2 B_{n,p}(1; x) \\
 &= x^2 + \frac{n(2p-1) + p(p-1)}{n^2} x^2 + \frac{n+p}{n^2} x - 2x^2 - 2x^2 \frac{p}{n} + x^2 \\
 &= \frac{2pnx^2 - nx^2 + p^2x^2 - px^2 + nx + px - 2pnx^2}{n^2} \\
 &= \frac{nx(1-x) + px(px-x+1)}{n^2} \\
 &= \frac{x(1-x)}{n} + \frac{px(px-x+1)}{n^2}
 \end{aligned}$$

sonucundan

$$\alpha_n(x) := \delta_n = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n} + \frac{px(px-x+1)}{n^2}},$$

yazılır. $\max_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$ olup

$$\begin{aligned}
 \alpha_n(x) &\leq \sqrt{\frac{1}{4n} + \frac{\frac{p}{2}(\frac{p}{2} - \frac{1}{2} + 1)}{n^2}} \\
 &\leq \sqrt{\frac{1 + p(p+1)}{4n}}, \quad A = 1 + p(p+1) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{n}}
 \end{aligned}$$

dir. Bu sonuç Eş. 3.13 dikkate alınarak $B_{n,p}$ operatörü için yazılırsa

$$\begin{aligned}
 |B_{n,p}(f; x) - f(x)| &\leq |f(x)| |B_{n,p}(1; x) - 1| \\
 &\quad + \left(B_{n,p}(1; x) + \left(B_{n,p}(1; x) \right)^{1/2} \right) \omega_f(\alpha_n(x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\omega_f \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{n}} \right) \\
&\leq 3\omega_f \left(\sqrt{\frac{A}{n}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $f \in C[0, 1+p]$ olduğundan $f, [0, 1+p]$ de düzgün süreklidir.

Süreklilik modülünün (ii) özelliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $\delta_n \rightarrow 0$ olup $\omega_f(\delta_n) \rightarrow 0$

dır. Dolayısıyla $B_{n,p}(f)$ in f e yaklaşım derecesi $\sqrt{\frac{A}{n}}$ den daha küçüktür.

3.3.2. $B_{n,p}(f)$ operatörü için Voronovskaja asimptotik yaklaşım

3.3. Lemma

Bernstein Schurer operatörü için

$$T_{n+p,s}(x) = \sum_{k=0}^{n+p} (k - (n+p)x)^s P_{n,k}(x)$$

olmak üzere indirgeme formülü

$$T_{n+p,s+1}(x) = x(1-x)[T'_{n+p,s}(x) + (n+p)sT_{n+p,s-1}(x)]$$

şeklindedir.

İspat

Bernstein operatörü için verilen ispata benzer olarak yapılır.

3.9. Teorem

$$\begin{aligned} C^{(2)}([0, 1+p], \mathbb{R}) &:= C^{(2)}[0, 1+p] \\ &:= \{f|f: [0, 1+p] \rightarrow \mathbb{R} \text{ iki kez sürekli türevli fonksiyon}\} \end{aligned}$$

olmak üzere $f \in C^{(2)}[0, 1+p]$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+p) \left(B_{n,p}(f; x) - f(x) \right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

sağlanır.

İspat

Voronovskaja asimptotik yaklaşım için Taylor formülünden

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + \left(\frac{k}{n+p} - x\right) f'(x) + \left(\frac{k}{n+p} - x\right)^2 \left[\frac{1}{2} f''(x) + \mu\left(\frac{k}{n+p} - x\right) \right]$$

yazılır. Burada $\mu(h)$ her h için sınırlıdır. Yani $M > 0$ olmak üzere $|\mu(h)| \leq M$ ve $h \rightarrow 0$ için $\mu(h) \rightarrow 0$ dır.

Bu eşitliğin her iki tarafı $\binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$ ile çarpılıp, $k = 0$ dan $k = n+p$ ye kadar toplam alındıktan sonra

$$B_{n,p}(1; x) = 1, \quad B_{n,p}(t; x) = x + \frac{p}{n}x,$$

$$B_{n,p}(t^2; x) = x^2 + \frac{n(2p-1) + p(p-1)}{n^2} x^2 + \frac{n+p}{n^2} x$$

olduğu da göz önünde tutularak

$$\begin{aligned} B_{n,p}(f; x) &= f(x) + \frac{f''(x)x(1-x)}{2(n+p)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n+p} (k - (n+p)x)^2 \mu\left(\frac{k}{n+p} - x\right) P_{n,k}(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. Eş. 3.15 de

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{n+p} (k - (n+p)x)^2 \mu\left(\frac{k}{n+p} - x\right) P_{n,k}(x)$$

diyelim. $\mathcal{A}$ terimi için bir üst sınır bulmak istiyoruz. $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı, $x \in [0,1]$ ve x den bağımsız bir $\delta > 0$ sayısı için $\left|\frac{k}{n+p} - x\right| = |h| < \delta$ olduğunda $|\mu(h)| < \varepsilon$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n+p} - x\right| < \delta} (k - (n+p)x)^2 P_{n,k}(x) + M \sum_{\left|\frac{k}{n+p} - x\right| \geq \delta} (k - (n+p)x)^2 P_{n,k}(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{(n+p)^2} T_{n+p,2}(x) + \frac{M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k}{n+p} - x\right)^4 P_{n,k}(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{(n+p)^2} (n+p)x(1-x) + \frac{\varepsilon}{\delta^2(n+p)^4} T_{n+p,4}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n+p)} x(1-x) + \frac{M \cdot M_1}{\delta^2(n+p)^4}, \quad \max_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}, \quad M \cdot M_1 = K \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4(n+p)} + \frac{K}{\delta^2(n+p)}, \quad \delta = \sqrt{\frac{K}{\varepsilon}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4(n+p)} + \frac{\varepsilon}{(n+p)} \leq c \frac{\varepsilon}{(n+p)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{A}$, Eş. 3.15 de yerine yazılırsa

$$B_{n,p}(f; x) \leq f(x) + \frac{f''(x)x(1-x)}{2(n+p)} + c \frac{\varepsilon}{(n+p)}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+p) [B_{n,p}(f; x) - f(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f''(x)x(1-x) = \frac{1}{2} f''(x)x(1-x)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\frac{x(1-x)}{2} f''(x)$ asimptotik değer, $\frac{1}{n+p}$ asimptotik hızdır.

4. KOMPLEKS KANTOROVİCH-SCHURER POLİNOMLARI

Bu bölümde $\mathbb{R}$ de Bernstein-Schurer operatörleri için yapılan incelemeleri $\mathbb{C}$ ye genişleteceğiz. İlk kısımda $\mathbb{C}$ de bir bölge tanımlayıp bu bölgede analitik olan fonksiyonlar için kompleks Bernstein-Schurer operatörleri yardımı ile yakınsaklık oranı ve Voronovskaja tip asimptotik yaklaşıma ilişkin sonuçlar vereceğiz. İkinci kısımda kompleks Kantorovich-Schurer polinomları tanımlanarak eş anlı yaklaşım ve Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım teoremleri incelenecektir. Bu amaçla S. Gal' in [10] ve [11] eserleri kullanılmıştır.

4.1. Kompleks Bernstein-Schurer Polinomları

4.1. Tanım

$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ ve $A(\mathcal{D}) = \{f|f: \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ analitik fonksiyon}\}$ olmak üzere

her $z \in \mathbb{C}$ ve her $f \in A(\mathcal{D})$ için

$$B_n(f; z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye kompleks Bernstein polinomu denir.

4.1. Teorem

$0 \leq a \leq 1, R \geq a, R \geq 1 - a$ olmak üzere $|z - a| \leq R$ dairesi $[0,1]$ aralığını içersin. Eğer $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$ fonksiyonu $|z - a| \leq R$ de analitik ise, bu durumda $|z - a| \leq R$ de düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; z) = f(z) \text{ dir [4].}$$

Bernstein'in kompleks Bernstein polinomları ile ilgili verdiği yukarıda ki teoremden dikkat edilirse sadece yakınsaklık verilmiş fakat yakınsaklık oranına ilişkin bir sonuç elde edilmemiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda genel olarak kompleks operatör dizilerinin yaklaşım derecesinin bulunması problemi ele alınmaktadır. Yaklaşım derecesi ile ilgili [11] de S. G. Gal'in verdiği teorem şöyledir.

4.2. Teorem

$R > 1$ için $D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ ve $f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ analitik olsun.

i) $1 \leq r < R$ keyfi sabit olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|B_n(f; z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{n} \text{ dır. Burada}$$

$$0 < C_r(f) = \frac{3r(r+1)}{2} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) |c_j| r^{j-2} < \infty$$

şeklindedir.

ii) $1 < r < r_1 < R$ keyfi bir sabit ise, bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|B_n^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{C_{r_1}(f)p!r_1}{n(r_1 - r)^{p+1}}$$

dir. Burada $C_{r_1}(f)$, yukarıda (i) özelliğindeki gibi verilmiştir.

4.2. Tanım

$D_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $\overline{D_1} \subset G$, $G \subset \mathbb{C}$ açık küme $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyon ve $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere

$$S_{n,p}(f; z) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

şeklindeki ifadeye kompleks Bernstein-Schurer polinomu denir.

Özel olarak $p = 0$ için klasik kompleks Bernstein polinomu elde edilir.

4.1. Lemma

Eş. 4.2 ile tanımlanan kompleks Bernstein Schurer polinomu için Δ^j, j . mertebeden sonlu farkı göstermek üzere

$$S_{n,p}(f; z) = \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} \Delta_{1/n}^j f(0) e_j(z).$$

İspat

Teorem 3.5 de verilen reel değişkenli Bernstein polinomuna benzer olarak yapılır.

4.1. Önerme

$0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$1 - \prod_{j=1}^k x_j \leq \sum_{j=1}^k (1 - x_j) \quad (4.3)$$

İspat

$k = 1$ için $1 - x_j \leq 1 - x_j$ dir.

$k = t$ için doğru olsun. Yani

$$1 - \prod_{j=1}^t x_j \leq \sum_{j=1}^t (1 - x_j)$$

eşitsizliği sağlansın.

$k = t + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$1 - \prod_{j=1}^{t+1} x_j = 1 - x_1 \cdot x_2 \dots x_t \cdot x_{t+1} + x_{t+1} - x_{t+1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - x_{t+1} + x_{t+1}(1 - x_1 \cdot x_2 \dots x_t) = 1 - x_{t+1} + x_{t+1} \left(1 - \prod_{j=1}^t x_j \right) \\
&\leq 1 - x_{t+1} + x_{t+1} \sum_{j=1}^t (1 - x_j) \leq \sum_{j=1}^{t+1} (1 - x_j) \quad (0 \leq x_j \leq 1).
\end{aligned}$$

4.3. Teorem

$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $R > p + 1$ olsun. $D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ ve $f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon olsun.

i) $1 \leq r$ ve $r(p + 1) < R$ olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|S_{n,p}(f; z) - f(z)| < M_{2,r,n}^{(p)}(f)$$

sağlanır. Burada

$$0 < M_{2,r,n}^{(p)}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left\{ \frac{2k(k-1)}{n+p} [(p+1)r]^k + \frac{1}{n} [(p+1)r]^k - \frac{r^k}{n} \right\} < \infty$$

dır.

ii) $1 \leq r < r_1 \leq r_1(p + 1) < R$ keyfi bir sabit ise, bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n, j \in \mathbb{N}$ için

$$|[S_{n,p}(f; z)]^{(j)} - f^{(j)}(z)| \leq \frac{M_{2,r_1,n}^{(p)}(f) j! r_1}{(r_1 - r)^{j+1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$i) e_k(z) = z^k$ ile gösterilsin. Böylece f, D_R de analitik olduğundan her $z \in D_R$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z)$$

olup

$$S_{n,p}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{n,p}(e_k; z)$$

yazılır. Buradan

$$|S_{n,p}(f; z) - f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)|$$

dir. $|S_{n,p}(f; z) - f(z)|$ ifadesinde $n \in \mathbb{N}$ olup $0 \leq k \leq n+p$ ve $k > n+p$ olmak üzere iki ayrı durum dikkate alınacaktır.

Lemma 4.1 i dikkate alarak aşağıdaki durumları inceleyelim.

1.durum:

$k = 0$ ise, bu durumda $S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z) = 0$ dır. Dolayısıyla $1 \leq k \leq n+p$ için incelenecektir. Burada

$$C_{n,j,k}^{(p)} = \binom{n+p}{j} \Delta_{1/n}^j e_k(0) \text{ ile gösterilirse}$$

$$C_{n,j,k}^{(p)} = \binom{n+p}{j} \left[e_k; 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{j}{n} \right] \frac{j!}{n^j} \text{ elde edilir.}$$

e_k konveks fonksiyon olduğundan ve Tanım 2.8 dikkate alınırsa

$\Delta_{1/n}^j e_k(0) = \left[e_k; 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{j}{n} \right] \frac{j!}{n^j} > 0$ dir. O halde $C_{n,j,k}^{(p)} \geq 0$ dir.

$S_{n,p}(f; 1)$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} S_{n,p}(f; z) &= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= z^0 (1-z)^{n+p} f(0) + (n+p) z^1 (1-z)^{n+p-1} f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \binom{n+p}{n+p} z^{n+p} (1-z)^0 f\left(\frac{n+p}{n}\right) \\ S_{n,p}(f; 1) &= f\left(\frac{n+p}{n}\right) = f\left(1 + \frac{p}{n}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $S_{n,p}(e_k)(1) = e_k\left(\frac{n+p}{n}\right)$ yazılabilir. Ayrıca

$$S_{n,p}(e_k; 1) = \sum_{j=0}^{n+p} \underbrace{\binom{n+p}{j} \Delta_{1/n}^j e_k(0)}_{C_{n,j,k}^{(p)}} = \left(\frac{n+p}{n}\right)^k$$

dir. Bu ifade dikkate alınır

$$\sum_{j=0}^{n+p} C_{n,j,k}^{(p)} = \sum_{j=0}^k C_{n,j,k}^{(p)} = \left(\frac{n+p}{n}\right)^k$$

olduğu görülür.

$1 \leq r \leq r(p+1) < R$ olmak üzere her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned} |S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| &= \left| \sum_{j=0}^k C_{n,j,k}^{(p)} e_j(z) - e_k(z) \right| \\ |S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| &= \left| \left[C_{n,k,k}^{(p)} - 1 \right] e_k(z) + \sum_{j=0}^{k-1} C_{n,j,k}^{(p)} e_j(z) \right| \end{aligned} \tag{4.4}$$

yazılabilir. Eş. 4.4 de üçgen eşitsizliği uygulanırsa;

$$|S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| \leq \left| \left[C_{n,k,k}^{(p)} - 1 \right] e_k(z) \right| + \left| \sum_{j=0}^k c_{n,j,k}^{(p)} e_j(z) - C_{n,k,k}^{(p)} e_k(z) \right| \quad (4.5)$$

$$\leq \left| C_{n,k,k}^{(p)} - 1 \right| r^k + \left| \sum_{j=0}^k c_{n,j,k}^{(p)} - C_{n,k,k}^{(p)} \right| r^k \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$C_{n,k,k}^{(p)} = \binom{n+p}{k} \left[e_k; 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n} \right] \frac{k!}{n^k}$$

dır. $e_k(\xi) = \xi^k$, $e_k^{(k)}(\xi) = k!$ olduğu ve Tanım 2.8 kullanılarak

$$\begin{aligned} C_{n,k,k}^{(p)} &= \frac{(n+p)!}{(n+p-k)! k!} \cdot \frac{e_k^{(k)}(\xi)}{k!} \cdot \frac{k!}{n^k} \\ &= \frac{(n+p-k)! (n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{(n+p-k)! n^k} \\ &= \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Eş. 4.7, Eş. 4.6 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| &\leq \left| \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} - 1 \right| r^k \\ &\quad + \left| \frac{(n+p)^k}{n^k} - \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} \right| r^k \\ &\leq 2 \left| \frac{(n+p)^k}{n^k} - \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} \right| r^k \\ &\quad + \left| \frac{(n+p)^k}{n^k} - 1 \right| r^k \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. Eş. 4.8 deki

$$\left| \frac{(n+p)^k}{n^k} - \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} \right|$$

ifadesinde önerme 4.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{(n+p)^k}{n^k} - \frac{(n+p-k+1)(n+p-k+2) \dots (n+p)}{n^k} \right] \\
 &= \frac{(n+p)^k}{n^k} \left[1 - \prod_{j=1}^k \frac{n+p-k+j}{n+p} \right] \\
 &\leq \frac{(n+p)^k}{n^k} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{n+p-k+j}{n+p} \right) = \frac{(n+p)^k}{n^k} \sum_{j=1}^k \frac{k-j}{n+p} \\
 &= \frac{(n+p)^k}{n^k} \frac{k^2 - \frac{k(k+1)}{2}}{n+p} \\
 &= \frac{k(k-1)}{2(n+p)} \frac{(n+p)^k}{n^k} = \frac{k(k-1)}{2(n+p)} \left(1 + \frac{p}{n} \right)^k \leq \frac{k(k-1)}{2(n+p)} (p+1)^k
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan doğrudan doğruya

$$\begin{aligned}
 \frac{(n+p)^k}{n^k} - 1 &= \frac{n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} p^1 + \binom{k}{2} n^{k-2} p^2 + \dots + p^k - n^k}{n^k} \\
 &= \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j p^{k-j}}{n^k} \leq \frac{n^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} p^{k-j}}{n^k} = \frac{1}{n} [(p+1)^k - 1]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Eş. 4.9 ve Eş. 4.10, Eş 4.8 de yerine yazılırsa

$$|S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| \leq \frac{k(k-1)}{2(n+p)} [(p+1)r]^k + \frac{1}{n} [(p+1)r]^k - \frac{r^k}{n} \tag{4.11}$$

sonucuna ulaşılır.

2.durum:

$1 \leq r \leq r(p+1) < R$ olmak üzere $k > n+p \geq 1$ ve $|z| \leq r$ için

$$|S_{n,p}(e_k; z) - e_k(z)| \leq |S_{n,p}(e_k)(z)| + |e_k(z)| \leq |S_{n,p}(e_k)(z)| + r^k$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{n+p}{n}\right)^k r^{n+p} + r^k \leq \left(\frac{n+p}{n}\right)^k r^k + \left(\frac{n+p}{n}\right)^k r^k = 2 \left(\frac{n+p}{n}\right)^k r^k \\
&= 2 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^k r^k \leq 2[(p+1)r]^k \leq \frac{2(k-1)}{n+p} [(p+1)r]^k. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

1.durum ve 2.durum birlikte düşünülürse Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 kullanılarak istenilen eşitsizliğe ulaşılmış olur.

ii) $\Gamma, r_1 > r$ yarıçaplı O merkezli bir daire, $|z| \leq r$ ve $v \in \Gamma$ olmak üzere

$|v - z| \geq r_1 - r$ olsun. Cauchy türev formülünden her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|[S_{n,p}(f; z)]^{(j)} - f^{(j)}(z)| &= \left| \frac{j!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S_{n,p}(f; v) - f(v)}{(v - z)^{j+1}} dv \right| \\
&\leq \frac{j!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|S_{n,p}(f; v) - f(v)|}{|v - z|^{j+1}} |dv| \leq \frac{j!}{2\pi} M_{2,r_1,n}^{(p)}(f) \frac{1}{(r_1 - r)^{j+1}} 2\pi r_1 = \frac{M_{2,r_1,n}^{(p)}(f) j! r_1}{(r_1 - r)^{j+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipoteze göre

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$|z| \leq r(p+1) < R$ de mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan $M_{2,r,n}^{(p)}(f) < \infty$ olduğu açıktır.

4.2. Lemma

Kompleks Bernstein Schurer polinomları için indirgeme formülü her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\pi_{k+1,n,p}(z) = \frac{z(1-z)}{n} \pi'_{k,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n} \pi_{k,n,p}(z)$$

şeklindedir.

İspat

$$s_{k,n,p}(z) = \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (1-z)^{n+p-j} j^k$$

ifadesinde z ye göre bir kez türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{ds_{k,n,p}(z)}{dz} &= \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} j z^{j-1} (1-z)^{n+p-j} j^k \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (n+p-j) (1-z)^{n+p-j-1} j^k \\ &= \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^{j-1} (1-z)^{n+p-j} j^{k+1} - \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (n+p) (1-z)^{n+p-j-1} j^k \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (1-z)^{n+p-j-1} j^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadedeki her bir toplam n^{k+1} e bölünürse

$$\begin{aligned} \frac{\pi'_{k,n,p}(z)}{n} &= \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^{j-1} (1-z)^{n+p-j} \left(\frac{j}{n}\right)^{k+1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (1-z)^{n+p-j-1} \left(\frac{j}{n}\right)^{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (n+p) (1-z)^{n+p-j-1} \frac{j^k}{n^{k+1}} \end{aligned}$$

bulunur. İfadenin her iki tarafı $z(1-z)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
z(1-z) \frac{\pi'_{k,n,p}(z)}{n} &= \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (1-z)^{n+p-j+1} \left(\frac{j}{n}\right)^{k+1} \\
&+ \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^{j+1} (1-z)^{n+p-j} \left(\frac{j}{n}\right)^{k+1} \\
&- \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^{j+1} (n+p) (1-z)^{n+p-j} \frac{j^k}{n^{k+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $z \in \mathbb{C}$ için

$$z(1-z) \frac{\pi'_{k,n,p}}{n} = (1-z)\pi_{k+1,n,p}(z) + z\pi_{k+1,n,p}(z) - \frac{(n+p)z}{n} \pi_{k,n,p}(z)$$

$$\frac{z(1-z)}{n} \pi'_{k,n,p}(z) = \pi_{k+1,n,p}(z) - \frac{(n+p)z}{n} \pi_{k,n,p}(z)$$

$$\pi_{k+1,n,p}(z) = \frac{z(1-z)}{n} \pi'_{k,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n} \pi_{k,n,p}(z)$$

sonucuna ulaşılır.

Kompleks Bernstein Schurer polinomları için Voronovskaja tip yaklaşımı inceleyelim.

4.4. Teorem

$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $R > p + 1$ olmak üzere $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ve $f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyon olsun. bu durumda her $|z| \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| S_{n,p}(f; z) - f(z) - \frac{p}{n} z f'(z) - \frac{z(1-z)}{2n} f''(z) \right| \leq \frac{M_p(f)}{n^2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$0 < M_p(f) = \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| [(k-1)A_k(p+1)^{k-1} + (k-1)B_{k,p}(p+1)^{k-2}] < \infty,$$

$$A_k = (k-1)[4(k-1)(k-2) + 2] \text{ ve}$$

$$B_{k,p} = (k-1)[p(5k-4) + p^2 + k(4k-7)] \text{ [10].}$$

İspat

$e_k(z) = z^k$ ve $\pi_{k,n,p}(z) = S_{n,p}(e_k; z)$ gösterimleri kullanılacaktır. $k = 1$ için

$$\begin{aligned} \pi_{1,n,p}(z) &= S_{n,p}(e_1; z) = \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p}{j} z^j (1-z)^{n+p-j} \frac{j}{n} \\ &= \sum_{j=0}^{n+p} \frac{(n+p)!}{(n+p-j)!j!} z^j (1-z)^{n+p-j} \frac{j}{n} \\ &= \frac{n+p}{n} z \sum_{j=0}^{n+p} \binom{n+p-1}{j} z^j (1-z)^{n+p-j-1} = z + \frac{p}{n} z = e_1(z) + \frac{pz}{n} \end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &\left| S_{n,p}(f; z) - f(z) - \frac{p}{n} z f'(z) - \frac{z(1-z)}{2n} f''(z) \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \left| \pi_{k,n,p}(z) - e_k(z) - \frac{pk}{n} e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)k(k-1)}{2n} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.2 den

$$\pi_{k+1,n,p}(z) = \frac{z(1-z)}{n} \pi'_{k,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n} \pi_{k,n,p}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$E_{k,n,p}(z) = \pi_{k,n,p}(z) - e_k(z) - \frac{pk}{n}e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)k(k-1)}{2n} \quad (4.13)$$

$E_{k,n,p}(z)$ polinomunun derecesi $\leq k$ dır.

$$E_{0,n,p}(z) = \pi_{0,n,p}(z) - e_0(z) = 1 - 1 = 0$$

$$E_{1,n,p}(z) = \pi_{1,n,p}(z) - e_1(z) - \frac{p}{n}e_1(z) = e_1(z) + \frac{p}{n}e_1(z) - e_1(z) - \frac{p}{n}e_1(z) = 0$$

Lemma 4.2 indirgeme formülünden yararlanılarak

$$E_{k,n,p}(z) = \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k-1,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n}\pi_{k-1,n,p}(z) - z^k - \frac{pk}{n}z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)k(k-1)}{2n} \quad (4.14)$$

$$E_{k-1,n,p}(z) = \pi_{k-1,n,p}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{p(k-1)}{n}e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n} \quad (4.15)$$

$$E'_{k-1,n,p}(z) = \pi'_{k-1,n,p}(z) - (k-1)z^{k-2} - \frac{p(k-1)^2z^{k-2}}{n} - \frac{(k-1)(k-2)^2z^{k-3}(1-z)}{2n} + \frac{(k-1)(k-2)z^{k-2}}{2n} \quad (4.16)$$

yazılır. Eş. 4.14, Eş. 4.15, Eş. 4.16 ve Eş. 4.13 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E_{k,n,p}(z) &= E'_{k-1,n,p}(z) \frac{z(1-z)}{n} + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + \frac{p(k-1)^2(1-z)z^{k-1}}{n^2} \\ &\quad + \frac{(k-1)(k-2)^2z^{k-2}(1-z)^2}{2n^2} - \frac{(k-1)(k-2)z^{k-1}(1-z)}{2n^2} \\ &\quad + \frac{(n+p)z}{n}E_{k-1,n,p}(z) + \frac{(n+p)}{n}z^k + \frac{p(k-1)(n+p)}{n^2}z^k \\ &\quad + \frac{(n+p)(k-1)(k-2)^2z^{k-1}(1-z)}{2n^2} - z^k - \frac{pk}{n}z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z(1-z)}{n} E'_{k-1,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n} E_{k-1,n,p}(z) \\
&\quad + \frac{(k-1)(k-2)z^{k-2}(1-z)}{2n^2} [(k-2)(1-z) - z + pz] \\
&\quad + \frac{p^2(k-1)}{n^2} z^k + \frac{p(k-1)^2(1-z)z^{k-1}}{n^2} + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} \\
&\quad + z^k + \frac{p}{n} z^k + \frac{pk}{n} z^k - \frac{p}{n} z^k + \frac{(k-1)(k-2)z^{k-1}(1-z)}{2n} - z^k \\
&\quad - \frac{pk}{n} z^k - \frac{k(k-1)z^{k-1}(1-z)}{2n} \\
&= \frac{z(1-z)}{n} E'_{k-1,n,p}(z) + \frac{(n+p)z}{n} E_{k-1,n,p}(z) \\
&\quad + \frac{(k-1)(k-2)z^{k-2}(1-z)}{2n^2} [(k-2) - z(k-p-1)] \\
&\quad + \frac{p^2(k-1)z^k}{n^2} + \frac{p(k-1)^2(1-z)z^{k-1}}{n^2},
\end{aligned}$$

$k \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ve $z \in \overline{D_1}$ elde edilir.

$\|E'_{k-1,n,p}(z)\| \leq (k-1)\|E_{k-1,n,p}(z)\|$ ve $\frac{(n+p)}{n} \leq p+1$ eşitsizliği dikkate alınarak her $|z| \leq 1, k \geq 2, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|E_{k,n,p}(z)| &\leq \frac{|z|(1+|z|)}{n} [\|E'_{k-1,n,p}(z)\|] + (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| \\
&\quad + \frac{|z|^{k-2}(1+|z|)(k-1)(k-2)(2k+p-1)}{2n^2} + \frac{p^2(k-1)|z|^k}{n^2} \\
&\quad + \frac{p|z|^{k-1}(1+|z|)(k-1)^2}{n^2} \\
&\leq (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| + \frac{2\|E'_{k-1,n,p}(z)\|}{n} \\
&\quad + \frac{k-1}{n^2} [(k-2)(2k+p-1) + p^2 + 2p(k-1)]
\end{aligned}$$

$$\leq (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| + \frac{2(k-1)\|E_{k-1,n,p}(z)\|}{n} \\ + \frac{k-1}{n^2} [(k-2)(2k+p-1) + p^2 + 2p(k-1)]$$

Burada $\|\cdot\|$, $C(\bar{D}_1)$ deki supremum normu göstermektedir. Teorem ispatında $r = 1$ alınırsa

$$\|\pi_{k-1,n,p}(z) - e_{k-1}(z)\| \leq \frac{2(k-1)(k-2)(p+1)^{k-1}}{n+p} + \frac{(p+1)^{k-1}}{n} - \frac{1}{n} \\ \leq \frac{2(k-1)(k-2)(p+1)^{k-1}}{n} + \frac{(p+1)^{k-1}}{n} - \frac{1}{n}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|E_{k,n,p}(z)| \leq (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| \\ + \frac{2(k-1)}{n} \left(\frac{2(k-1)(k-2)(p+1)^{k-1}}{n} + \frac{(p+1)^{k-1}}{n} - \frac{1}{n} + \frac{pk}{n} + \frac{k(k-1)}{n} \right) \\ + \frac{k-1}{n^2} [(k-2)(2k+p-1) + p^2 + 2p(k-1)] \\ = (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| \\ + \frac{k-1}{n^2} [(4(k-1)(k-2) + 2)(p+1)^{k-1} + p(5k-4) + p^2 + k(4k-7)] \\ := (p+1)|E_{k-1,n,p}(z)| + \frac{A_k}{n^2} (p+1)^{k-1} + \frac{B_{k,p}}{n^2} \quad (4.17)$$

burada

$$A_k = (k-1)[4(k-1)(k-2) + 2] \text{ ve}$$

$$B_{k,p} = (k-1)[p(5k-4) + p^2 + k(4k-7)].$$

Her $z \in \mathbb{C}$ için $E_{0,n,p}(z) = E_{1,n,p}(z) = 0$ ve $A_k, B_{k,p}$ k nın artan fonksiyonu olmak üzere Eş. 4.16 $k = 2, 3, \dots$ için yazılırsa;

$k = 2$ için

$$|E_{2,n,p}(z)| = (p+1)|E_{1,n,p}(z)| + \frac{A_2}{n^2}(p+1) + \frac{B_{2,p}}{n^2} = \frac{A_2}{n^2}(p+1) + \frac{B_{2,p}}{n^2}$$

$k = 3$ için

$$\begin{aligned} |E_{3,n,p}(z)| &= (p+1)|E_{2,n,p}(z)| + \frac{A_3}{n^2}(p+1)^2 + \frac{B_{3,p}}{n^2} \\ &= (p+1)\left[\frac{A_2}{n^2}(p+1) + \frac{B_{2,p}}{n^2}\right] + \frac{A_3}{n^2}(p+1)^2 + \frac{B_{3,p}}{n^2} \\ &= \frac{(p+1)^2}{n^2}(A_2 + A_3) + \frac{p+1}{n^2}B_{2,p} + \frac{B_{3,p}}{n^2} \end{aligned}$$

$k = 4$ için

$$|E_{4,n,p}(z)| = \frac{(p+1)^3}{n^2}(A_2 + A_3 + A_4) + \frac{(p+1)^2}{n^2}B_{2,p} + \frac{p+1}{n^2}B_{3,p} + B_{4,p}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} |E_{k,n,p}(z)| &= \frac{(p+1)^{k-1}}{n^2}(A_2 + A_3 + \dots + A_k) + \frac{(p+1)^{k-2}}{n^2}B_{2,p} + \frac{(p+1)^{k-3}}{n^2}B_{3,p} \\ &\quad + \dots + B_{k,p} \\ &\leq \frac{(p+1)^{k-1}}{n^2}\left(\sum_{j=2}^k A_j\right) + \frac{(p+1)^{k-2}}{n^2}\left(\sum_{j=2}^k B_{j,p}\right) \\ &\leq \frac{(p+1)^{k-1}}{n^2}(k-1)A_k + \frac{(p+1)^{k-2}}{n^2}(k-1) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

$$f^{(4)}(z) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2)(k-3)z^{k-4}$$

serisi $|z| \leq p+1 < R$ de yakınsaktır ve bu ifadedeki sabitler sınırlıdır. Bu ispatı tamamlar.

4.1. Uyarı

(1) Teorem 4.4 de $p = 0$ alınırsa kompleks Bernstein polinomu için Voronovskaja tip yaklaşım elde edilir.

Gerçekten;

$$\left| n(B_n(f; z) - f(z)) - \frac{z(1-z)}{2} f''(z) \right| \leq \frac{M_0(f)}{n^2},$$

$$M_0(f) = \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| [(k-1)A_k + (k-1)B_{k,0}],$$

$$B_{k,0} = (k-1)k(4k-7).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n(B_n(f; z) - f(z)) - \frac{z(1-z)}{2} f''(z) \right| = 0.$$

(2) Teorem 4.4 nin hipotezinde $1 \leq r$ ile $r(p+1) < R$ dikkate alınırsa benzer düşünce ile

$$\left| S_{n,p}(f; z) - f(z) - \frac{p}{n} z f'(z) - \frac{z(1-z)}{2n} f''(z) \right| \leq \frac{M_{r,p}(f)}{n^2}$$

ifadesi her $|z| \leq r, n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için geçerlidir.

Burada $M_{r,p}(f) > 0$ n ve z den bağımsız bir sabit sayıdır.

4.2. Kompleks Kantorovich-Schurer polinomu

Bu kısımda Kantorovich'in integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için tanımladığı Kantorovich polinomlarına benzer olarak [4] de verilen kompleks Kantorovich-Schurer polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenecektir.

4.4. Tanım

$n \in \mathbb{N}, f \in L_1[0,1], x \in [0,1]$ ve $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \int_{k/n+1}^{(k+1)/n+1} f(t) dt \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye n . Bernstein-Kantorovich polinomu denir.

Sonlu aralıklarda tanımlı bu polinomlar için, Korovkin Teoremi sağlanmaktadır [1].

4.5. Tanım

$S_{n,p}(f; z)$ Eş. 4.2 ile tanımlı kompleks Bernstein-Schurer polinomu ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$KS_{n,p}(f; z) = (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_{k/n+1}^{(k+1)/n+1} f(t) dt \quad (4.19)$$

şeklindeki ifadeye kompleks Kantorovich-Schurer polinomu denir.

4.1. Teorem

$$F(z) = \int_0^z f(t) dt$$

olmak üzere $z \in \mathbb{C}$ için

$$KS_{n,p}(f; z) = S'_{n+1,p}(F; z) \quad [10].$$

İspat

Eş. 4.2 de n yerine $n + 1$, f yerine F yazılıp $F(z) = \int_0^z f(t)dt$ olduğu kullanılırsa

$$S_{n+1,p}(F; z) = \sum_{k=0}^{n+p+1} \binom{n+p+1}{k} z^k (1-z)^{n+p+1-k} \int_0^{k/n+1} f(t)dt \quad (4.20)$$

bulunur. Eş. 4.20 de z ye göre bir kez türev alınırsa

$$\begin{aligned} S'_{n+1,p}(F; z) &= \sum_{k=1}^{n+p+1} \binom{n+p+1}{k} k z^{k-1} (1-z)^{n+p+1-k} \int_0^{k/n+1} f(t)dt \\ &- \sum_{k=0}^{n+p+1} \binom{n+p+1}{k} z^k (n+p+1-k) (1-z)^{n+p-k} \int_0^{k/n+1} f(t)dt \\ &:= S_1 - S_2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \binom{n+p+1}{k} k &= \frac{(n+p+1)!}{(n+p+1-k)! k!} k = \frac{(n+p+1)!}{(n+p+1-k)! (k-1)!} \\ &= (n+p+1) \binom{n+p}{k-1} \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} S_1 &= (n+p+1) \sum_{k=1}^{n+p+1} \binom{n+p}{k-1} z^{k-1} (1-z)^{n+p+1-k} \int_0^{k/n+1} f(t)dt \\ &(k \text{ yerine } k+1 \text{ yazılarak}) \\ &= (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_0^{(k+1)/n+1} f(t)dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \binom{n+p+1}{k} (n+p+1-k) &= \frac{(n+p+1)!}{(n+p+1-k)! k!} (n+p+1-k) \\ &= \frac{(n+p+1)!}{(n+p-k)! k!} = (n+p+1) \binom{n+p}{k} \end{aligned}$$

kullanılarak

$$S_2 = (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_0^{k/n+1} f(t) dt \quad (4.23)$$

elde edilir. Eş. 4.22 ve Eş. 4.23, Eş. 4.21 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S'_{n+1,p}(F; z) &= (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_0^{k+1/n+1} f(t) dt \\ &\quad - (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_0^{k/n+1} f(t) dt \\ S'_{n+1,p}(F; z) &= (n+p+1) \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} z^k (1-z)^{n+p-k} \int_{k/n+1}^{k+1/n+1} f(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de kompleks Kantorovich-Schurer polinomu için yaklaşım özellikleri incelenecektir.

4.6. Teorem

$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $R > p+1$ alalım. $D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ olmak üzere $f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ analitik yani her $z \in D_R$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

olsun. $1 \leq r < r_1 \leq (r_1 + 1)p < R$ alalım.

i) Her $|z| \leq r$ ve $n, j \in \mathbb{N}$ için

$$\left| KS_{n,p}^{(j)}(f; z) - f^{(j)}(z) \right| \leq \frac{C_{2,r_1,n}^{(p)}(f)(j+1)! r_1}{(r_1 - r)^{j+2}}$$

burada

$$0 < C_{2,r_1,n}^{(p)}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{k-1}|}{k} \left\{ \frac{2k(k-1)}{n+p} [(p+1)r_1]^k + \frac{1}{n} [(p+1)r_1]^k - \frac{r_1^k}{n} \right\} < \infty.$$

ii) Her $|z| \leq 1$ ve $n, j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \left| KS_{n,p}(f; z) - f(z) \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) - f'(z) \left[\frac{pz}{n+1} + \frac{1-2z}{2(n+1)} \right] - f''(z) \frac{z(1-z)}{2(n+1)} \right| \\ & \leq \frac{C_p^*(f)}{(n+1)^2} \cdot \frac{r_1}{(r_1-r)^2} \end{aligned}$$

burada

$$0 < C_p^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{k-1}|}{k} [(k-1)A_k(p+1)^{k-1} + (k-1)B_{k,p}(p+1)^{k-2}] < \infty,$$

$$A_k = (k-1)[4(k-1)(k-2) + 2] \text{ ve}$$

$$B_{k,p} = (k-1)[p(5k-4) + p^2 + k(4k-7)].$$

İspat

i) Teorem 4.5 den

$$\left| KS_{n,p}^{(j)}(f; z) - f^{(j)}(z) \right| = \left| S_{n+1,p}^{(j+1)}(F; z) - F^{(j+1)}(z) \right|$$

yazılır. Teorem 4.3 dikkate alındığında

$$\left| KS_{n,p}^{(j)}(f; z) - f^{(j)}(z) \right| \leq \frac{M_{2,r_1,n}^{(p)}(F)(j+1)! r_1}{(r_1-r)^{j+2}} \quad (4.24)$$

elde edilir. Burada $M_{2,r_1,n}^{(p)}(F)$ Teorem 4.3 dekinde benzerdir ve

$$0 < M_{2,r_1,n}^{(p)}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \left\{ \frac{2k(k-1)}{n+p} [(p+1)r_1]^k + \frac{1}{n} [(p+1)r_1]^k - \frac{r_1^k}{n} \right\} < \infty$$

şeklindedir.

$F(z)$, D_R de analitik fonksiyon olduğundan her $z \in D_R$ için

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \quad (4.25)$$

yazılır.

$$F(z) = \int_0^z f(t) dt$$

ve

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^z \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \right] dt = \int_0^z [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots] dt \\ &= \int_0^z c_0 dt + \int_0^z c_1 t dt + \int_0^z c_2 t^2 dt + \int_0^z c_3 t^3 dt + \dots \\ &= c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \frac{c_2}{3} z^3 + \frac{c_3}{4} z^4 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} z^k \end{aligned} \quad (4.26)$$

dir. Eş. 4.25 göz önünde bulundurularak $C_k = \frac{c_{k-1}}{k}$ elde edilir. Bu değer $M_{2,r_1,n}^{(p)}(F)$ de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

ii) Teorem 4.4 de n yerine $n+1$ ve f yerine F yazılırsa her $|z| \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| S_{n+1,p}(F; z) - F(z) - \frac{p}{n+1} z F'(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+1)} F''(z) \right| \leq \frac{M_p(F)}{(n+1)^2} \quad (4.27)$$

elde edilir. Burada $0 < M_p(F)$ Teorem 4.4 de ifade edilmiştir. $z \in D_R$ için $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ dir. Eş. 4.13 de $C_k = \frac{c_{k-1}}{k}$ elde edilmişti. Bu değer $M_p(F)$ de yerine yazılırsa f fonksiyonuna bağlı bir formül elde edilir. Elde edilen bu formül yerine karışıklık olmaması için $M_p(F) := C_p^*(f)$ gösterimi kullanılacaktır.

$\Gamma, r_1 > 1$ yarıçaplı 0 merkezli bir çember olsun.

$$E_n(F; z) = S_{n+1,p}(F; z) - F(z) - \frac{p}{n+1} z F'(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+1)} F''(z)$$

gösterimini kullanılırsa Eş. 4.27 dan

$$|E_n(F; z)| \leq \frac{M_p(F)}{(n+1)^2} = \frac{C_p^*(f)}{(n+1)^2} \quad (4.28)$$

yazılır. $|z| \leq 1$ ve $v \in \Gamma$ olmak üzere $|v - z| \geq r_1 - 1$ olsun. Cauchy türev formülü ve Eş. 4.28 dikkate alınarak her $|z| \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |E'_n(F; z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{E_n(F)(z)}{(v-z)^2} dv \right| \leq \frac{C_p^*(f)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r_1}{(r_1-1)^2} \\ &= \frac{C_p^*(f)}{(n+1)^2} \cdot \frac{r_1}{(r_1-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_n(F; z) &= S'_{n+1,p}(F; z) - F'(z) - \frac{p}{n+1} F'(z) - \frac{p}{n+1} z F''(z) - \frac{(1-z)}{2(n+1)} F''(z) \\ &\quad + \frac{z}{2(n+1)} F''(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+1)} F'''(z) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$F(z) = \int_0^z f(t) dt$$

olduğundan $F'(z) = f(z)$ dir. Bu ifade Eş. 4.29 da kullanılırsa

$$\begin{aligned} E'_n(F; z) &= K S_{n,p}(f; z) - f(z) \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) - f'(z) \left[\frac{pz}{n+1} + \frac{1-2z}{2(n+1)} \right] \\ &\quad - f''(z) \frac{z(1-z)}{2(n+1)} \leq \frac{C_p^*(f)}{(n+1)^2} \cdot \frac{r_1}{(r_1-1)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] Altomare, F., and Campiti, M., “Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications”, **Walter de Gryter**, Berlin, Newyork, 265-373 (1994).
- [2] Hacısalihoğlu, H. H., ve Hacıyev, A., “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı”, **Ankara Üniv. Basımevi**, Ankara, 1-100 (1995).
- [3] Natanson, I. P., “Constructive Function Theory”, Volume I, **Frederick Ungar Publishing Co., Inc.**, New York, 1-200 (1964).
- [4] Lorentz, G.G., “Bernstein Polynomials”, **University of Toronto Press**, Toronto, 87-89 (1953).
- [5] Davis, P.J., “Interpolation and Approximation”, **Blaisdell Publishing Company**, 393 (1963).
- [6] Korovkin, P. P., “Linear Operators and Approximation Theory”, **Hindistan Publishing Corp. (India)**, Delhi, 1-63 (1960).
- [7] Weierstrass, K., “Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen”, **Sitzungsberichte der Königlich Preuischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, 633-639 and 89-805 (1885).
- [8] Voronovskaja, E., “Determination de la forme asymptotique d’approximation des fonctions par les polynomes de M.Bernstein”, **C.R.Acad.Sci.URSS**, 79-85 (1932).
- [9] De Vore, R.A., “The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators”, **Springer-Verlag**, Berlin, 293 (1972).
- [10] Gal, S. G., Anastassiou, G. A., “Approximation by Complex Bernstein-Schurer and Kantorovich-Schurer Polynomials in Compact Disks”, **Computers and Mathematics with Applications**, 58:734-743 (2009).
- [11] Gal, S.G., “Aproximation by Complex Bernstein and Convolution type Operators”, **World Scientific Publishing Co.**, Romania, 6-12 (2009).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AĞBULUT, Hacer
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 08.05.1987 Sarıkamış
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (530) 2633801
e-mail : hacer_agbulut_2005@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2009
Lise	Sincan Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce