

**KOMPLEKS OKTONYONLARLA Bİ-İZOTROPİK
ORTAM İÇİN MAXWELL DENKLEMLERİ VE
ELEKTROMANYETİK ENERJİ**

Mustafa Emre KANSU

Doktora Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Temmuz – 2012

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mustafa Emre Kansu'nun "Kompleks Oktonyonlarla Bi-izotropik Ortam İçin Maxwell Denklemleri ve Elektromanyetik Enerji" başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 10.07.2012 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. MURAT TANIŞLI	
Üye	:	
Üye	:	
Üye	:	
Üye	:	

**Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KOMPLEKS OKTONYONLARLA Bİ-İZOTROPİK ORTAM İÇİN MAXWELL DENKLEMLERİ VE ELEKTROMANYETİK ENERJİ

Mustafa Emre KANSU

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat TANIŞLI

2012, 73 Sayfa

Bu çalışmada yüksek boyutlu sayı sistemlerinden olan oktonyonların reel ve kompleks formda yazılımları ayrıntılı olarak verilmiştir. Fiziğin önemli alt bilim dallarından elektromanyetizmaya ait farklı uygulama alanları kompleks oktonyon cebriyle irdelenmiştir. Öncelikle bi-izotrop kiral ortamlar için Maxwell denklemlerinin farklı bir şekli ortaya konmuş ve oktonyonik Drude-Born-Fedorov yapı denklemlerinin ilk defa tanımlanmasıyla, yeni bir oktonyonik alan denklemi tanıtılmıştır. Yapılan hesaplamalar neticesinde Maxwell denklemlerinin kısa, yararlı, kolay ve zarif şekilde yazılabildiği kompleks oktonyonik kaynak denklemi elde edilmiştir. Bulunan bu denklemin izotrop ortamlardaki kaynak denklemiyle benzerliği vurgulanmıştır. Ardından yük ve akımlardan bağımsız Maxwell denklemleri yardımıyla, elektromanyetizmada enerji korunumunun bir göstergesi olan Poynting teoreminin kompleks oktonyonik temsili yapılmıştır. Sonucun klasik elektromanyetizmayla elde edilen sonuçla uyum içinde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Oktonyon, Bi-izotrop Kiral Ortamlar, Maxwell Denklemleri, Drude-Born-Fedorov Yapı Denklemleri, Poynting Teoremi.

ABSTRACT

PhD Dissertation

MAXWELL EQUATIONS FOR BI-ISOTROPIC MEDIA AND ELECTROMAGNETIC ENERGY WITH COMPLEX OCTONIONS

Mustafa Emre KANSU

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Physics Program

Supervisor: Associate Prof. Dr. Murat TANIŞLI

2012, 73 pages

In this study, the real and complex types of the octonions, which are one of the higher dimensional number systems, are given in detailed form. The different applied field that belongs to electromagnetism, which is the important subfield of physics, has been studied by using complex octonion algebra. First of all, the different form of Maxwell equations for bi-isotrop chiral media are defined, and then by describing the octonionic Drude-Born-Fedorov constitutive equations firstly, a new octonionic field equation has been given. As the result of all calculations, the complex octonionic source equation, which contains Maxwell equations, has been obtained as the compact, useful, easy and elegant manner. Finally, it is pointed that there is a similarity between the isotrop and bi-isotrop media for this octonionic source equation. Later, by means of Maxwell equations that have no charge and current densities, it is made that the complex octonionic representation of the Poynting theorem, which is about to energy conservation in electromagnetism, has been operated. It is seen that this result is compatible with the result of classical electromagnetism.

Keywords: Octonion, Bi-isotrop Chiral Media, Maxwell Equations, Drude-Born-Fedorov Constitutive Equations, Poynting Theorem.

TEŞEKKÜR

Doktora süresi boyunca ve tez çalışmamda bana yol gösteren; bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan; gerektiğinde bir ağabey, gerektiğinde bir hoca olarak manevi desteğini hep yanımda hissettiğim, beni çalışma alanıma kolaylıkla adapte eden ve bu alanı bana sevdiren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Murat TANIŞLI'ya,

Eğitim hayatım boyunca bana maddi ve manevi her türlü imkanı sunan, güven ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem, babam ve kardeşim olmak üzere tüm aileme,

Doktora süresince bana verdiği sonsuz moral, destek ve güven için hayat arkadaşım Işıl KANSU'ya,

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa Emre KANSU

Temmuz, 2012

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. OKTONYON CEBRİ	12
2.1. Reel Oktonyonlar	12
2.1.1. Tanımlar	12
2.1.2. Temel işlemler.....	13
2.1.2.1. Eşitlik	13
2.1.2.2. Toplama ve çıkarma	14
2.1.2.3. Skaler ile çarpma.....	14
2.1.2.4. Reel oktonyonların çarpımı	15
2.1.2.5. Reel oktonyonların eşleniği.....	19
2.1.2.6. Reel oktonyonların skaler çarpımı	19
2.1.2.7. Reel oktonyonların vektörel çarpımı.....	19
2.1.2.8. Reel oktonyonların normu.....	20
2.1.2.9. Ters eleman	20
2.2. Kompleks Oktonyonlar	21
2.2.1. Tanımlar	21
2.2.2. Temel işlemler.....	22
2.2.2.1. Eşitlik	22
2.2.2.2. Toplama ve çıkarma	23
2.2.2.3. Skaler ile çarpma.....	23
2.2.2.4. Kompleks oktonyonların çarpımı.....	24

2.2.2.5. Kompleks oktonyonların eşleniği	24
2.2.2.6. Kompleks oktonyonların normu	26
3. MAXWELL DENKLEMLERİ VE İZOTROP, ANİZOTROP, Bİ-İZOTROP ORTAMLAR	28
3.1. Maxwell Denklemleri.....	28
3.2. Zamansal Harmonik Maxwell Denklemleri.....	32
3.3. İzotropi ve İzotrop Ortamlar	34
3.4. Anizotropi ve Anizotrop Ortamlar	34
3.5. Bi-izotropi ve Bi-izotrop Ortamlar.....	36
4. ELEKTROMANYETİZMADA ENERJİ KORUNUMU	41
4.1. Elektromanyetik Bir Dalga Olarak Işık.....	41
4.2. Poynting Teoremi.....	43
5. Bİ-İZOTROP KİRAL ORTAMLAR İÇİN ELEKTROMANYETİZMANIN KOMPLEKS OKTONYONİK TEMSİLİ	46
5.1. Kompleks Oktonyonik Diferansiyel İşlemci.....	46
5.2. Kompleks Oktonyonik Maxwell ve Yapı Denklemleri	47
6. KOMPLEKS OKTONYONLARLA ELEKTROMANYETİK ENERJİ KORUNUMU	53
6.1. Kompleks Oktonyonik Maxwell ve Alan Denklemleri	53
6.2. Kompleks Oktonyonik Ayar Dönüşümü.....	54
6.3. Kompleks Oktonyonik Poynting Teoremi	55
7. SONUÇLAR	60
KAYNAKLAR	64

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1. Kuaternion bazlarına ait çarpım kuralları	5
2.1. Cayley-Dickson çarpım kurallarının Fano düzlemindeki çevrimi	16
3.1. Kiral bir molekül yapısı	36
3.2. Elektromanyetik bir dalganın sağ eli şeklinde dairesel kutuplanmayla yayılımı	37
4.1. Elektromanyetik dalganın yayılma yönü	42
4.2. Poynting vektörünün yönü	45

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.1. $n = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere Cl_n 'deki birim bazlar ve toplam sayıları	4
2.1. Oktonyon bazları için Cayley-Dickson çarpım kuralları	16
3.1. Maxwell denklemlerinin toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları.....	29
3.2. Maxwell denklemlerinin serbest yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları.....	29
3.3. Maxwell denklemlerinde bulunan sembollerin anlamları ve birimleri	30
3.4. Ortamın izotrop veya bi-izotrop olma durumu	38

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar Kümesi (cebri)
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi (cebri)
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel (oranlı) sayılar kümesi (cebri)
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçel) sayılar kümesi (cebri)
$\mathbb{C}$	: Kompleks (karmaşık) sayılar kümesi (cebri)
$\mathbb{H}$	: Kuaternion cebri
$\mathbb{O}$	: Oktonyon cebri
$\mathbb{O}_C$	: Kompleks oktonyon cebri
$\mathbb{S}$	: Sedenion cebri
$\{0\}$	: Küme elemanı
$\cup$	: Birleşim işareti
∞	: Sonsuz
a, b, x, y	: Reel sayılar
e	: Exponansiyel
π	: Pi sayısı
i	: Sanal birim
$\subset$	: Alt küme işareti
G	: Grup
$\forall$	: Her
$\in$	: Eleman
e	: Birim eleman
$\circ$	: Grup üzerinde çarpma işlemi
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	: Vektör cebrinde birim bazlar
$\times$	: Vektör (cross) çarpımı
$\cdot$	: Nokta (dot) çarpım
Cl_n	: n dereceli Clifford uzayı
e_1, e_2	: Clifford cebrinde vektör
e_{12}	: Clifford cebrinde ikivektör

e_{123}	: Clifford cebirinde üçvektör
e_{1234}	: Clifford cebirinde dörtvektör
$\mathbf{Q}$	: Kuaternion
$e_n, \hat{e}_n$	: Kuaternion ve oktonyon bazları
δ_{ij}	: Kronecker delta
ε_{ijk}	: Levi-Civita tensörü
$S_{\mathbf{Q}}$	: Kuaternionun skaler kısmı
$V_{\mathbf{Q}}$	: Kuaternionun vektörel kısmı
$\mathbf{Q}$	: Vektör kuaternion
i, j, k	: Kuaternion bazlarının farklı bir formu
$\hat{q}$	: Kompleks sayı yapısı
$N(a)$	: Norm işlemi
G_2, F_4, E_6, E_7, E_8	: İstisnai Lie grupları
$\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}$	: Reel oktonyonlar
$S_{\mathbf{A}}$	: Reel oktonyonun skaler kısmı
$V_{\mathbf{A}}$	: Reel oktonyonun vektörel kısmı
$\mathbf{A}$	: Reel vektör oktonyon
λ	: Skaler sayı
$\mathbf{T}$	: Matris
$\bar{\mathbf{A}}$	: Reel oktonyonun oktonyonik eşleniği
$N(\mathbf{A})$	: Reel oktonyonun normu
$\mathbf{A}^{-1}$	: Reel oktonyonun tersi
$\otimes$	: Direkt çarpım
$\mathbb{A}$	: Kompleks oktonyon
$\mathbf{A}_n$	: Kompleks oktonyon bileşeni
$S_{\mathbb{A}}$	: Kompleks oktonyonun skaler kısmı
$V_{\mathbb{A}}$	: Kompleks oktonyonun vektörel kısmı
$\mathbf{A}$	: Kompleks vektör oktonyon

$\bar{A}$	: Kompleks oktonyonun oktonyonik eşleniği
A^*	: Kompleks oktonyonun kompleks eşleniği
$A^\dagger$	: Kompleks oktonyonun hermitik eşleniği
$e_n^\dagger$	: Oktonyon bazının hermitik eşleniği
$N(A)$	: Kompleks oktonyonun normu
Q	: Elektriksel yük
Φ_E	: Elektriksel akı
Φ_B	: Manyetik akı
$\vec{E}$	: Elektrik alan vektörü
$\vec{H}$	: Manyetik alan vektörü
$\vec{D}$	: Elektrik akı yoğunluğu veya elektriksel deplasman vektörü
$\vec{B}$	: Manyetik akı yoğunluğu veya manyetik indüksiyon vektörü
ρ_e	: Elektrik yük yoğunluğu
ρ_m	: Manyetik yük yoğunluğu
$\vec{J}$	: Elektrik akım yoğunluğu
$\vec{J}'$	: Manyetik akım yoğunluğu
E_x, E_y, E_z	: Elektrik alan vektörünün bileşenleri
D_x, D_y, D_z	: Elektrik akı yoğunluğuna ait bileşenler
ϵ_0	: Boş uzayın elektriksel geçirgenlik sabiti
μ_0	: Boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti
ω	: Açısal frekans
$\frac{\partial}{\partial t}$	: Zamana göre türev
V	: Fazör
V_R	: Fazörün reel kısmı
V_I	: Fazörün sanal (imajiner) kısmı
V_0	: Genlik
ϕ	: Faz farkı
$\text{Re}\{ \}$	: Reel kısım

$\text{Im} \{ \}$	: Sanal (imajiner) kısım
$V(t)$	: Zamansal harmonik nicelik
Cos	: Kosinüs
Sin	: Sinüs
$\tilde{\epsilon}$	: Anizotropik tensör gösterimi
x, y, z	: Kartezyen koordinat eksenleri
ξ, ζ	: Ortamın çiftlenim sabitleri
χ	: Karşılıklılık parametresi
κ	: Kiral olma parametresi
β	: DBF denklemleri için kiral parametresi
$\vec{\nabla} \cdot$	: Diverjans
$\vec{\nabla} \times$	: Rotasyonel
c	: Işık hızı
$\vec{S}$	: Poynting vektörü
u	: Elektromanyetik enerji yoğunluğu
$\square$	: Kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci
$\overline{\square}$	: Kompleks oktonyonik diferansiyel işlemcinin eşleniği
∇	: Oktonyonik Nabla operatörü
Δ, ∇^2	: Oktonyonik Laplasyen işlemcisi
$\mathbb{J}$	: Kompleks oktonyonik kaynak ifadesi
$\mathbf{J}$	: Oktonyonik elektrik akım yoğunluğu
$\mathbf{J}'$	: Oktonyonik manyetik akım yoğunluğu
J_x, J_y, J_z	: Oktonyonik elektrik akım yoğunluk bileşenleri
J'_x, J'_y, J'_z	: Oktonyonik manyetik akım yoğunluk bileşenleri
$\mathbf{D}$	: Oktonyonik elektrik akı yoğunluğu
$\mathbf{B}$	: Oktonyonik manyetik akı yoğunluğu
$\mathbf{E}$	: Oktonyonik elektrik alan
$\mathbf{H}$	: Oktonyonik manyetik alan
E_x, E_y, E_z	: Oktonyonik elektrik alan bileşenleri

B_x, B_y, B_z	: Oktanyonik manyetik akı yoğunluk bileşenleri
δ	: Varyasyon sembolü
α	: x ve t'ye bağlı sonsuz küçük sabit
$\mathcal{L}$	: Kompleks oktanyonik Lagrange yoğunluğu
$\mathcal{A}$	: Action terimi
$\mathbf{S}$	: Kompleks oktanyonik elektromanyetik enerji akısı
$\mathbf{u}$	: Kompleks oktanyonik elektromanyetik enerji yoğunluğu

KISALTMALAR

SUSY	: Süpersimetri
M-teori	: Membran Teori
QED	: Kuantum Elektrodinamik
DBF	: Drude-Born-Fedorov
DNA	: Deoksiribonükleik asit
RNA	: Ribonükleik asit

1. GİRİŞ

Herhangi bir çokluğu belirtmek için kullanılan soyut birimlere sayı denir ve sayıları yazılı olarak göstermek için rakamlar kullanılır. Belirtilen çokluğun sınıflandırılması oldukça önemlidir ve bu sınıflandırma kümeler halinde yapılmaktadır. Küme, temelde bir matematik terimidir; somut ve soyut nesneler topluluğunu ifade eder. Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine ise küme elemanları denmektedir. Belli bir sayı kümesinin üzerinde tanımlanan matematiksel yapıyla oluşan sistem bir uzayı belirtir. Cebir ise, matematiğin yapı, bağıntı ve nicelik üzerinde etkili olan bir kolu olup, bilinmeyen değerlerin çeşitli simge, sembol ve harfler tanımlanarak, kurulan denklemlerin sonuçlarının bulunması esasına dayanmaktadır.

Bu bilgiler ışığında sayılar çeşitli kümeler halinde sınıflandırılabilir. Bunlar; doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$), tam sayılar kümesi ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{Q}$), reel (gerçek) sayılar kümesi ($\mathbb{R}$) ve kompleks sayılar kümesi ($\mathbb{C}$) olarak ifade edilebilir. Bu küme elemanlarının her biri kendi içlerinde bir cebir oluştururlar.

Doğal sayılar kümesi, sıfırdan başlayıp sonsuza kadar ilerleyen sayma sayılarını ifade eder ve

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.1)$$

biçiminde gösterilir.

Tam sayılar kümesi ise, sıfır sayısı ile negatif ve pozitif sayıların birleşiminden oluşmakta ve negatif sonsuzdan, pozitif sonsuza kadar ilerleyen sayı kümesini belirtmektedir:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots, +\infty\} \\ \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (1.2)$$

Burada sıfır, ne negatif ne de pozitif bir sayıdır.

Oranlı sayılar olarak da bilinen rasyonel sayılar ise, a ve b gibi tamsayıların kullanıldığı ve bu sayıların a / b şeklinde birbirine oranlanmasıyla elde edilen sayılardır. Bu oranın sıfır sonucunu vermemesi gerekir ve rasyonel sayılar 1/2, -3/5, 8/4, ... gibi örneklenebilir. Oranlı sayılar biçiminde ifade edilemeyen sayılar ise irrasyonel sayılardır. Bu sayılardan en bilinenleri, π , e,

$\sqrt{2}, \dots$ şeklinde sıralanabilir. Bu bağlamda oranlı sayılar oransız sayılara dahil edilmezken, oransız sayılar da oranlı sayılara dahil edilmezler. Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi ise gerçel sayıları oluşturmaktadır.

Tüm cebirsel problemleri çözmek için ise reel sayıların genişletilmesiyle oluşan kompleks veya karmaşık sayı sistemleri elde edilmiştir. Bu sistemde gerçel olmayan sayıların varlığı, reel sayılar kümesinde karşılığı bulunmayan -1 sayısının karekökünden kaynaklanmaktadır. Sanal (imajiner) birim olan bu sayı “i” sembolüyle gösterilir ve $i = \sqrt{-1}$ şartını sağlamaktadır. Kompleks bir sayı ise reel ve sanal kısımlardan oluşup, basit olarak $z = x + iy$ şeklinde ifade edilebilir. z kompleks sayısı için x terimi kompleks sayının reel kısmını, y terimi ise kompleks sayının sanal kısmını oluşturmakta ve bu durum sırasıyla $\text{Re}(z) = x$ ve $\text{Im}(z) = y$ şeklinde gösterilmektedir.

Bu durumda tüm sayı sistemlerinin matematiksel notasyonda sınıflandırılması,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad (1.3)$$

biçiminde yapılmaktadır.

Diğer önemli bir matematik terimi ise gruptur. Grup için matematiksel tanım verirken, sıralanacak koşulları sağlayan tanımlanmış çarpma, toplama vb. gibi bir kural için işlemler topluluğu göz önüne alınmaktadır. G ; $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ gibi elemanlardan oluşmuş bir grup ise, “ $\circ$ ” ile gösterilen çarpma işlemiyle bu grubun aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekmektedir.

$\forall g_n \in G$ ($n = i, j, k, l$) ve “e” birim elemanı g_1 ’ye denk olmak üzere bir grup için;

- a) $g_i \circ g_j \in G$ şeklindeki kapalılık özelliği,
- b) $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ şeklindeki birleşme özelliği,
- c) $g_l \circ g_i = g_i \circ g_l = g_i$ şeklindeki g_l birim eleman özelliği,
- d) $g_k \circ g_l = g_l \circ g_k = g_l$ şeklindeki $g_l \equiv g_k^{-1}$ şeklindeki ters eleman özelliği

tek tek sağlanmalıdır. Grup tanımına ek olarak grup elemanları arasında, $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ gibi sıra değişimli olma (komütatiflik) özelliği sağlanıyorsa, böyle

gruplara Abelyan gruplar denilmektedir [1]. Ancak bu özellik, bir grup oluşturmak için gerek ve yeter şart olmayıp, ek bir koşuldur.

Literatürde birçok fiziksel ve matematiksel çalışmanın, vektör ve tensör cebri kullanarak yapıldığı ve halen yapılmakta olduğu görülmektedir. Sayı sistemlerinin farklılığı ve dolayısıyla bu sistemlerde birçok problemin sonucuna ulaşmak için kullanılan cebirin çokluğu sebebiyle, çeşitli cebirlerin kullanımı artmaktadır.

Vektör cebri, fizik ve matematiksel problemlerin çözümü için kullanılan cebirlerden biridir. Vektörlerle ilgili çalışma yapan kişilerden birisi Gibbs'tir [2]. Düzlemde birbirlerine dik iki birim vektörü $\hat{i}$ ve $\hat{j}$ olarak gösteren Gibbs, bu birim vektörlerle ilgili $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$ ve $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ gibi özellikleri tanımlamıştır. Ardından vektör cebrinde sıklıkla kullanılan vektör çarpımını (cross product) ifade etmiş ve bu çarpımı birim vektörler cinsinden $\hat{i} \times \hat{j}$ biçiminde tanımlayarak çarpım sonucunun, hem $\hat{i}$ 'ye hem de $\hat{j}$ 'ye dik üçüncü bir yönelim olduğunu göstermiştir. Bu anlamda nokta (dot) ve vektör çarpımı sıklıkla kullanılmaya başlanmış ve vektör cebri Heaviside'nin de katkılarıyla daha da geliştirilmiştir [3].

Fizik ve matematikte kullanılan diğer bir cebir ise Clifford cebridir. Tüm $\mathbb{R}^n$ uzaylarını oluşturan birim bazlar, n dereceli Clifford uzayı olarak adlandırılır ve Cl_n şeklinde gösterilir [4]. Gibbs cebrinde düzlemde $\hat{i}$ ve $\hat{j}$ olarak verilen birim bazlar, Clifford cebrinde sırasıyla e_1 ve e_2 şeklinde değişim göstermiştir. Ayrıca bu yeni birim bazlar $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 1$ ve $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$ özelliklerini sağlamaktadırlar. Buradan ise Clifford cebrindeki birim bazların anti-komütatif oldukları kolaylıkla görülmektedir. Derecesi 2 olan iki boyutlu Clifford uzayı Cl_2 şeklinde gösterilir ve bu uzaydaki birim bazlar $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$ ile verilmektedir. Burada 1 skaler iken, e_1 ve e_2 vektör, e_{12} ise ikivektör (bivektör) dür. Cebirdeki birim bazların toplam sayısı, tüm derecelerdeki birim bazların toplamı olarak hesaplanabilir ve bu durum 2^n ile gösterilir [4].

Çizelge 1.1. $n = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere Cl_n 'deki birim bazlar ve toplam sayıları

Cl_n	Baz elemanlar	Baz elemanları sayısı
Cl_0	$\{1\}$	$2^0 = 1$
Cl_1	$\{1; e_1\}$	$2^1 = 2$
Cl_2	$\{1; e_1, e_2; e_{12}\}$	$2^2 = 4$
Cl_3	$\{1; e_1, e_2, e_3; e_{12}, e_{13}, e_{23}; e_{123}\}$	$2^3 = 8$
Cl_4	$\{1; e_1, e_2, e_3, e_4; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}; e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}; e_{1234}\}$	$2^4 = 16$

İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton 1843 yılında, iki boyutlu kompleks sayılar cebirini üç bileşenli olarak yazmayı denemiş, ancak bunu başaramamıştır. Yaptığı çalışmaların sonucunda kompleks sayıları ancak dört boyuta genelleştirmiş, birçok fiziksel ve matematiksel çalışmanın temelini oluşturmuştur. Kuaternionlar olarak isimlendirilen bu dört boyutlu kompleks sayı cebri, Hamilton'un adına atfen genelde $\mathbb{H}$ ile gösterilmektedir. Bilindiği gibi kuaternionlar, sıra değişimli olmayan ancak birleşimli (asosyatif) cebirsel yapılara sahiptir. Kuaternionlar ayrıca bölüm cebirini oluşturması ve normlanabilme özellikleri bakımından büyük öneme sahiptir. Ele alınan fiziksel sistemlerin tanımları ve farklılıkları nedeniyle kuaternionların reel, bölüntülü (split), hiperbolik, kompleks ve dual formları mevcuttur. Bu çeşitli formlardan dolayı kuaternionların boyut, sıra değişim ve birleşim özellikleri farklılık gösterebilir. $\mathbb{Q}$ bir kuaternion olmak üzere,

$$\mathbb{Q} = \sum_{n=0}^3 q_n e_n = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (1.4)$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada kuaternionun reel bileşenleri q_n ve baz elemanları ise e_n 'ler biçiminde verilir. Ayrıca, bu baz elemanlar reel ve sanal baz elemanlardan oluşur ve sırasıyla $e_0 = 1$ ve e_n ($n=1,2,3$) ile gösterilirler. Bu bazlar arasında,

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\delta_{ij} \mathbf{e}_0 + \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad i, j, k \in (1, 2, 3) \quad (1.5)$$

biçiminde çarpım kuralları mevcuttur. Diğer bir ifadeyle, baz elemanlarıyla ilgili çarpımlar $\mathbf{e}_0^2 = 1$, $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -1$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$ olarak özetlenebilir. Aynı zamanda (1.4) ile gösterilen $\mathbf{Q}$ kuaternionu skaler ve vektörel kısımlardan oluşmakta ve

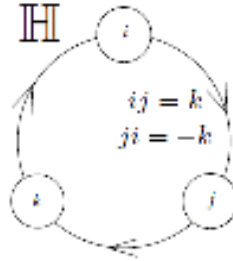
$$S_{\mathbf{Q}} = q_0 \mathbf{e}_0, \quad (1.6)$$

$$V_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

şeklinde ayrı ayrı yazılabilmektedir. O halde $\mathbf{Q}$ kuaternionu skaler ve vektörel kısımlarla,

$$\mathbf{Q} = S_{\mathbf{Q}} + V_{\mathbf{Q}} = q_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{Q} \quad (1.8)$$

olarak da ifade edilebilir [5]. Bir kuaterniona ait $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sanal baz elemanları bazı kaynaklarda sırasıyla i, j, k biçiminde gösterilebilir. Bu elemanlara ait baz çarpımları ise Şekil 1.1'deki gibi verilmektedir:



Şekil 1.1. Kuaternion bazlarına ait çarpım kuralları [6]

Şekil 1.1'den de görülebileceği gibi kuaternionların baz elemanları döngüsel bir permütasyon oluştururlar ve yukarıda tanımlanan grup özelliklerini aynen taşırlar.

Oktonyonlar ise, Hamilton'un kuaternionları keşfinden sonra 1843 yılında arkadaşı John T. Graves tarafından bulunmuştur. Graves'in o yıllarda "oktav" şeklinde isimlendirdiği bu cebirsel yapıları bilimsel bir çalışma halinde yayınlamaması, oktonyonların iki yıl sonra bağımsız olarak Arthur Cayley tarafından bulunup bilimsel bir çalışma haline getirilmesi ve geliştirilmesine yol açmıştır. Bu yüzden oktonyonların ismine bazı kaynaklarda Cayley sayıları ve kullanıldığı cebre ise Cayley cebri denilmektedir [1, 6 – 8]. Oktonyonlar sekiz

bileşenden oluşan çok boyutlu kompleks sayılar (hipercomplex) ailesindendirler. Reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaternionlardan daha fazla bileşene sahip olan oktonyonlar, normu olan ve alternatif bir bölüm cebirine sahip yapılardır. Oktonyonların en belirgin özelliği hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan cebirsel sistemleri oluşturmalarıdır. $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{O}$ cebirleri ikili cebirlerdir [9]. Diğer bir ifadeyle oktonyonlar kuaternionların özel genişletilmiş halini, kuaternionlar kompleks sayıların özel genişletilmiş halini ve kompleks sayılar ise reel sayıların özel genişletilmiş halini ifade etmektedir [10]. Bu bilgiler dahilinde; skalerler bir reel sayıyla temsil edilirken, kompleks sayılar biri reel ve biri sanal olmak üzere iki sayıyla, kuaternionlar biri reel üçü sanal olmak üzere dört sayıyla, oktonyonlar ise biri reel yedisi sanal olmak üzere sekiz sayıyla temsil edilirler [11].

Kompleks sayılar, kuaternionlar ve oktonyonlar $\{x_0, x_p\} \in \mathbb{R}$ olmak üzere en genel olarak,

$$\hat{q} = x_0 e_0 + x_p e_p, \quad (e_0^2 = 1) \quad (1.9)$$

olarak verilmektedir. Bu ifadeye göre, $p=1$ alındığında ve $e_p = i$ olduğunda kompleks sayılar, $p=1,2,3$ değerleri için kuaternionlar ve $p=1,2,...,7$ değerleri için oktonyonlar tanımlanmaktadır. Reel sayılar üzerinden ikili alternatif bölüm cebirleri (reel sayılar, kompleks sayılar, kuaternionlar ve oktonyonlar), $n=0,1,2,3,4...$ değerleri için toplam 2^n boyutuna sahiptirler. Bu durum binom açılımı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} & \quad 2^0 = 1 = 1 \\ \mathbb{C} & \quad 2^1 = 1 + 1 = 2 \\ \mathbb{H} & \quad 2^2 = 1 + 2 + 1 = 4 \\ \mathbb{O} & \quad 2^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 \\ \mathbb{S} & \quad 2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 \end{aligned}$$

Bu ifadedeki $\mathbb{S}$ terimi on altı bileşenden oluşan sedenion cebirini temsil eder ve sedenionlar bölüm cebirini oluşturmazlar [12]. Ayrıca binom açılımında görülen toplam sayılar Çizelge 1.1’de verilen Clifford cebirlerindeki toplam birim bazların sayılarıyla ilişkilendirilebilir. $n \leq 1$ için $xy = yx$ özelliğini sağlayan sıra değişimli olma, $n \leq 2$ için $(xy)z = x(yz)$ özelliğini sağlayan birleşimli olma, $n \leq 3$ için

$(xx)y = x(xy)$ ve $x(yy) = (xy)y$ özelliklerini sağlayan alternatif olma, tüm n değerleri için $x(yx) = (xy)x$ özelliğini sağlayan esnek (flexible) olma durumu söz konusudur [13].

Oktonyonlar, reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaternionlarla birlikte önemli bir özellik olan normlanabilirliği sağlamaktadır. Normlu bir bölüm cebri, $N(ab) = N(a)N(b)$ şeklinde normlanabilen vektör uzayını oluşturan bir cebirdir.

Bu cebirler yalnızca,

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = (z_1^2 + \dots + z_n^2) \quad (1.10)$$

özdeşliğinin sağlandığı $n = 1, 2, 4, 8$ boyutlu yapılarda geçerliliğini korumaktadır. Cayley-Dickson işlemi olarak bilinen bu ikili işlem bölüm cebrinin gidiş yönünü belirtmektedir. Yani,

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{O} \quad (1.11)$$

geçişi sağlanmaktadır [12, 14, 15]. Burada oktonyon cebirlerinden sonra bölüm cebri oluşturulamadığına dikkat etmek gerekir. Ayrıca kompleks sayılardan kuaternionlara gidildikçe sıra değişim özelliğinin, kuaternionlardan oktonyonlara gidildikçe birleşme özelliğinin ortadan kalktığı görülmektedir. Oktonyonlarda birleşme özelliğinin şekli daha düşüktür (power associativity), yani alternatiftir. Diğer bir ifadeyle, herhangi iki elemanla oluşturulan bir alt cebir birleşimlidir. O halde herhangi iki oktonyonla oluşturulan bir alt cebir, birleşimli olan reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaternionlarla izomorftur. Birleşme özelliğinin oktonyonlarda olmaması, kuaternionlardaki gibi matris temsilleriyle ifade edilemeyeceğini göstermektedir [8].

Clifford cebirleri, kompleks sayılar ile kuaternionları kapsamaktadır ve bu yüzden Clifford cebirini oluşturan ailenin hepsi birleşimli cebirsel yapılardır. Oktonyonlar birleşimli olmayan cebirsel yapılara sahip olduklarından, Clifford cebirlerinden değildirler. Bu anlamda oktonyonları daha sistematik bir yolla tanımlamanın bir yolu Cayley-Dickson yapısıyla bağlantılıdır [1, 7, 16]. Sedenionlar, Cayley-Dickson yapısıyla tanımlanan daha yüksek boyutlu cebirlerdir; ancak norm işlemini sağlamazlar. On altı boyutlu konik sedenionlar gibi daha geniş sayı sistemleri katsayılar çarpımına sahiptir. Katsayıları normlarından farklı biçimde tanımlanır ve aynı zamanda sıfır bölen içerirler [8].

Sedenionların bölüm cebri özelliğini sağlamamasından dolayı, oktonyonların bölüm cebrini sağlayan en büyük yapılar olduğu söylenebilir.

Oktonyonlar özellikle istisnai beş kompleks temel Lie cebriyle ilişkili geometrik objelere bağlantı kurmaktadır. Bu istisnai gruplar G_2 , F_4 , E_6 , E_7 ve E_8 olup, boyutları ise sırasıyla 14, 52, 78, 133 ve 248 şeklindedir [1, 7, 17]. G_2 grubunun kısa formu, oktonyon cebrinin otomorfizm grubu olarak tanımlanabilir ve grubun sekiz boyutlu reel spinör gösteriminde seçilen her belli vektörü veren $SO(7)$ alt grubuna izomorftur. G_2 grubu on dört boyutlu gerçel Lie grubu olup, bu grupların en küçüğüdür [1, 8]. Diğer istisnai gruplar Gürsey ve Tze tarafından detaylı olarak incelenmiştir [1]. Aynı zamanda belirtilen tüm istisnai gruplara ait oktonyonik temsillerle çeşitli çalışmalar yapılmıştır [18 – 29].

Oktonyonlar, kompleks sayılar ve kuaternionlar kadar iyi bilinmemesine rağmen, daha geniş biçimde çalışma ve kullanım alanlarına sahiptirler. Oktonyonlar başlıca; matematikte birçok ilginç özelliğe sahip olmasından ve istisnai yapıların sayılarla ilgili olmasından dolayı istisnai Lie gruplarının temsilinde; Maxwell denklemlerinin farklı yapılarda ve ortamlarda kullanımıyla elektromanyetizmada; doğadaki madde ve kuvvetler arasındaki ilişkiyi fizik yasaları kullanarak simetrik bir şekilde ortaya koymaya çalışan süpersimetri (SUSY); normlanabilen, sonlu, sürekli ve tek değerli özelliği olan dalga fonksiyonunun kullanıldığı ve kompleks uzaya sahip, sonsuz elemanı olan kuantum mekaniğinde; rölativistik hızlarda hareket eden ortam ve parçacık sistemleriyle ilgili olarak modern fizik ve görelilikte; her nesnenin belli bir boyut ve zaman altında küçük sicimlerden oluştuğunu varsayan ve on boyutlu sistemlerin temsilini yapan sicim teorisinde; süpersimetri ve sicim teorisinin ötesinde deneysel olarak test edilemeyen, ancak hayal edilerek kurulan ve on bir boyuta kadar genişleyen evrenin varlığı durumundaki membran teorisinde (M-theory); parçacıkların yapıları ve çeşitli özelliklerine göre sınıflandırılan parçacık fiziğinde; elektrik yüklü atom altı parçacıklar arasında elektromanyetik ilişkiyi görelilik çerçevesinde inceleyen kuantum elektrodinamikte (QED) kullanım alanlarına sahiptir.

Oktonyonlar ele alınan fiziksel sistemlerin çeşitliliği ve farklılığı sebebiyle, reel, bölüntülü, hiperbolik ve kompleks olmak üzere farklı temsillere ya

da tanımlamalara sahiptirler. Oktanyonların bu türleriyle ilgili olarak; dalga denkleminin oktonyonik temsili [30, 31], genelleştirilmiş oktonyonik elektrodinamiğin tanımlanması [32], vektörel analizlerin oktonyonik olarak yeniden formüle edilmesi [33], dyonik alanlar için oktonyonik ayar formülasyonunun yapılması [34], kuantum khromodinamikleri ile dyonların abelyan ve abelyan olmayan ayar teorilerinin kuaternion ve oktonyon cebri yardımıyla gösterilmesi [35, 36], grup teori, Dirac denklemi ve kuantum fiziği ile kompleks geometrinin oktonyonlarla incelenmesi [37 – 40]; gravitasyon ve kuantum alanlarının kompleks oktonyonik temsili [41], elektromanyetizmanın kompleks oktonyonlarla yeniden formüle edilmesi [42, 43], elektromanyetizmada Lorenz koşullarının kompleks oktonyon cebri kullanarak ifade edilmesi [44]; Dirac denkleminin hiperbolik oktonyon cebriyle yeniden düzenlenmesi [45], Proca-Maxwell denklemlerinin hiperbolik oktonyonik gösteriminin verilmesi [46], hiperbolik Hilbert uzayında simetrilerin tanımının yapılması [47], dört boyutlu Öklidyen gravitasyonun konik sedenionların alt cebri olan hiperbolik oktonyonlarla gösterilmesi [48], gravitasyon ve elektromanyetizmanın çok boyutlu sayılardan olan hiperbolik oktonyonik ve konik sedenionik tanımının yapılması [49, 50]; genelleştirilmiş SUSY ve M-teorisinin split oktonyonlarla tanımlanması [51], Maxwell denklemlerinin split oktonyonik formülasyonunun yapılması [52], kuantum teorisi ile SUSY-QM'nin birleşimli olmayan split oktonyonlarla temsili [53, 54], dyonların birleştirilmiş split oktonyonlarla tanımlanması [55], elektrodinamiğin split oktonyonlarla ifade edilmesi [56], Dirac denklemi, elektrodinamik ve geometrinin split oktonyonik gösterimi [57 – 59] gibi çalışmalar örneklenebilir.

Bu çalışmalara ek olarak, oktonyonlara ait bazı diğer çalışmalar şu şekilde sıralanabilir: Muses'in çoklu kompleks sayıların fiziksel dünyaya uygulanabilirliği ve fiziksel olarak uygulanabilir çoklu aritmetik ve geometrilerinin çoklu sayı sistemleri ve kuantum alan teorisine uygulaması [60, 61], Carmody'nin döngüsel cebirlerle ilgili yaptığı işlemlerin ileri sonuçları [62, 63], Abdel-Khalek'in on-on üç boyutlu Clifford cebrinin birleştirilmiş oktonyonik temsilini vermesi [64], Tian ve Daboul'un oktonyonların ve uygulamalarının matris gösterimlerinin yapılması [65, 66], Ootsuka ve ark., Lassig ve ark. ile

Waldron ve ark.'nın birleşimli olmayan oktonyon cebri kullanımıyla ayar alanları ve teorileri hakkındaki çalışmaları [67, 68, 69], Bernevig ve ark.'nın kuantum hall etkisini oktonyonlarla incelemesi [70], Hoppe ve ark.'nın süper membran matris teorisini oktonyonlarla tanımlaması [71], Schray ve ark. ile Rocca ve ark.'nın Clifford cebrinin oktonyon cebriyle tanımını yapması [72, 73], Fredsted'in genel göreliliğin oktonyonik gösterimini yapması [74], Dray ve ark.'nın Mobius dönüşümleri ve çeşitli özdeğer problemlerinin oktonyon cebri kullanarak temsilleri [75 – 78], Okubo'nun Clifford, kuaternion, oktonyon cebirleriyle ilgili yapmış olduğu çeşitli çalışmaları [79 – 83], Ludkovsky'nin Cayley-Dickson cebri kullanarak diferansiyellenebilir fonksiyonlar ile Laplace dönüşümlerinin yapıldığı çalışmaları [84 – 86], Weng'in elektromanyetik, gravitasyonel alanlar ve güçlü-zayıf etkileşimlere ait çalışmaları oktonyonlarla formüle etmesi [87 – 89], Dzhunushaliev'in birleşimli olmayan kuantum mekaniğini incelemesi [91], Liao ve ark.'nın oktonyonik analitik fonksiyonların ortonormal bazlarını elde etmeleri [91], Dorofeev'in oktonyonlar üzerinde gravitasyon ve elektro zayıf etkileşimlere ait çalışmaları [92, 93], Smith'in standart model, gravitasyon ve parçacık fiziğindeki çalışmalarının oktonyon temsili [94]. Bunların dışında V. L. Mironov ve S. V. Mironov'un okton şeklinde adlandırdığı, yine sekiz bileşenden oluşan ve sıra değişimli olmayan fakat birleşimli olma özelliği gösteren, bu yüzden Clifford cebrinin bir formu olan yapılarla elektrodinamik ve görelilik kuantum mekaniğindeki çalışmaları mevcuttur [95 – 99].

Bu çalışmanın takip eden kısmında reel ve kompleks oktonyonların cebirsel yapıları daha detaylı olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde ise elektromanyetizmadaki Maxwell denklemleri ile izotrop, anizotrop ve bi-izotrop ortamların tanımları ayrıntılı biçimde ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde elektromanyetik bir dalga olarak ışığın yapısı ve taşımış olduğu enerji yoğunluğunun tanımı yapılarak Poynting teoremi anlatılmıştır. Beşinci bölümde, bi-izotrop kiral ortamlar için elektromanyetik oktonyonik yapı denklemleri tanımlanarak, kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ve alan ifadeleri yardımıyla, Maxwell denklemlerinin tek ve kısa şekilde yazılabildiği kompleks oktonyonik kaynak denklemi elde edilmiştir. Altıncı bölümde ise, kompleks oktonyonik Lagrange yoğunluğu türetilerek, elektromanyetizmadaki enerji

korunum denkleminin kompleks oktonyonik temsili formüle edilmiştir. Yapılan çalışmaya ait önemli noktaların vurgulanması, yapılan çalışmanın amacı ve sağladığı avantajlar ile ileride yapılması planlanan çalışmalara ait öngörüler sonuçlar kısmının bulunduğu son bölümde yer almaktadır.

2. OKTONYON CEBRİ

Oktonyonlar, 1843 yılında John T. Graves tarafından bulunmuş ve iki yıl sonra Arthur Cayley tarafından bağımsız olarak geliştirilmiştir. Oktonyonların en büyük özelliği hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan cebirsel yapılara sahip olmalarıdır. Sekiz boyutlu çoklu kompleks sayılar ailesinden olan oktonyonlar alternatif bölüm cebri oluştururlar. Oktonyonlar iki kuaternionun birleşimi şeklinde ifade edildiğinden ikili cebirlerden biridir. Ele alınan fiziksel sistemin yapısına göre reel, kompleks, bölüntülü ve hiperbolik olmak üzere çeşitli tanımlamalara ve temsillere sahiptir. Oktonyonların, reel, bölüntülü ve hiperbolik tipleri için bileşen sayısı sekiz iken kompleks türü için bileşen sayısı on altı olmaktadır. Ayrıca oktonyonların tüm çeşitleri için hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan özellikleri söz konusudur. Oktonyonlar birleşimli olmadıklarından Clifford cebirlerine dahil edilmezler ve matris gösterimleri mevcut değildir. Reel oktonyonlar, reel kuaternionlar gibi bölüm cebri oluştururken, kompleks oktonyonlar ise, kompleks kuaternionlarda olduğu gibi bölüm cebri oluşturamazlar. Çünkü reel oktonyonların normu sıfırdan farklı bir reel sayıya eşitken, kompleks oktonyonların normu ise “i” sanal biriminin varlığından dolayı sıfıra eşit olabilir [16].

Bu bölümde fizik ve matematikteki problemlerin daha basit ve etkin şekilde gösterilmesini sağlayan oktonyonların sırasıyla reel ve kompleks tipleri tanımlanarak cebirleri hakkında detaylı bilgi verilecektir.

2. 1. Reel Oktonyonlar

2. 1. 1. Tanımlar

Reel bir oktonyon, reel sayıların oktet (8-tuples) olarak da ifade edilen sekizli sayı biçiminde tanımlanabilir. $\mathbf{A}$ bir oktonyonu belirtmek üzere,

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^7 a_n \mathbf{e}_n = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada a_n terimleri oktonyona ait reel sayılar ve e_n 'ler ise baz elemanlardır. Bu baz elemanlardan e_0 , 1'e eşit ($e_0 = 1$) skaler ya da reel baz eleman ve diğer e_n 'ler ise ($n = 1, 2, \dots, 7$) sanal baz elemanları olarak adlandırılır. $\mathbf{A}$ oktonyonu skaler ve vektörel olmak üzere iki ayrı kısımdan oluşmaktadır. Bu kısımlar sırasıyla,

$$S_A = a_0 e_0 \quad (2.2)$$

ve

$$V_A = \mathbf{A} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \quad (2.3)$$

şeklinde belirtilebilir. Böylece (2.1) ile gösterilen bir oktonyon,

$$\mathbf{A} = S_A + V_A = a_0 e_0 + \mathbf{A} \quad (2.4)$$

biçiminde skaler ve vektörel kısımlarla da ifade edilmektedir [1, 7, 16, 42, 43]. Bu şekilde gösterilen bir $\mathbf{A}$ oktonyonunun skaler, vektörel veya hem skaler hem de vektörel kısımlarının olmaması yeniden yapılanmasına neden olmaktadır. Yani reel $\mathbf{A}$ oktonyonu vektörel kısımlardan bağımsızsa, bu oktonyonun skaler bir oktonyon olduğu söylenebilir:

$$\mathbf{A} = S_A = a_0 \quad (2.5)$$

Eğer reel $\mathbf{A}$ oktonyonunun skaler kısmı bulunmuyorsa, bu oktonyonun reel vektör oktonyon olduğu kolaylıkla görülebilir:

$$\mathbf{A} = V_A = \mathbf{A} \quad (2.6)$$

Eğer $\mathbf{A}$ oktonyonunun hem skaler hem de vektörel kısımları yoksa, bu oktonyonun sıfır oktonyon olduğu açıkça anlaşılabılır.

2. 1. 2. Temel işlemler

2. 1. 2. 1. Eşitlik

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi herhangi iki reel oktonyonun birbirine eşit olabilmesi için aynı baz elemanlara ait karşılıklı bileşenlerinin tamamının birbirine eşit olması gerekmektedir. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{O}$ olmak üzere,

$$\mathbf{A} = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \quad (2.7)$$

ve

$$\mathbf{B} = b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.8)$$

olarak gösterilen iki reel oktonyon için,

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4, a_5 = b_5, a_6 = b_6, a_7 = b_7 \quad (2.9)$$

koşulları tek tek sağlanıyorsa, bu iki oktonyon birbirine eşittir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (2.10)$$

2. 1. 2. 2. Toplama ve çıkarma

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ reel oktonyonlarının toplam ve farkları,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= \sum_{n=0}^7 a_n \mathbf{e}_n \pm \sum_{n=0}^7 b_n \mathbf{e}_n \\ &= (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7) \\ &\quad \pm (b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (2.11)$$

biçiminde yazılmaktadır ve sonuç yine reel bir oktonyondur. Bu denklem, oktonyonun aynı bazları altında yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= \sum_{n=0}^7 (a_n \pm b_n) \mathbf{e}_n = (a_0 \pm b_0) \mathbf{e}_0 + (a_1 \pm b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 \pm b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 \pm b_3) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_4 \pm b_4) \mathbf{e}_4 + (a_5 \pm b_5) \mathbf{e}_5 + (a_6 \pm b_6) \mathbf{e}_6 + (a_7 \pm b_7) \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (2.12)$$

ifadesi elde edilir. İki oktonyonun toplam ya da farkları (2.11) ve (2.12)'den farklı olarak, reel oktonyonun skaler ve vektörel kısımlarıyla da gösterilebilir:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (S_A + S_B) \pm (V_A + V_B) = (a_0 \pm b_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \quad (2.13)$$

2. 1. 2. 3. Skaler ile çarpma

$\lambda \in \mathbb{R}$ özelliğine sahip skaler bir λ ile reel bir oktonyonun çarpımı,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{A} &= \lambda (S_A + V_A) = \lambda (a_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}) \\ &= \lambda a_0 \mathbf{e}_0 + \lambda a_1 \mathbf{e}_1 + \lambda a_2 \mathbf{e}_2 + \lambda a_3 \mathbf{e}_3 + \lambda a_4 \mathbf{e}_4 + \lambda a_5 \mathbf{e}_5 + \lambda a_6 \mathbf{e}_6 + \lambda a_7 \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (2.14)$$

ile tanımlanmaktadır ve sonuç ise λ skaler değeriyle orantılı reel bir oktonyondur. Denklem (2.14)'de λ skalerinin oktonyonun tüm bileşenleri ve hem skaler hem de vektörel kısımlarıyla olan ifadesi yer almaktadır.

2. 1. 2. 4. Reel oktonyonların çarpımı

A ve **B** gibi iki reel oktonyonun toplam ve farkları, daha önce de belirtildiği gibi ilgili baz elemanlardaki reel sayıları toplayarak veya çıkararak elde edilmektedir. Ancak, iki oktonyonun çarpımı oldukça karmaşıktır ve bu çarpım oktonyonlara ait tüm terimlerin birbirleriyle çarpılıp ardından toplanmasıyla hesaplanmaktadır. İki reel oktonyonun çarpımından önce, oktonyonlara ait baz elemanlarının çarpımlarının tanımlanması gerekmektedir [43]. Çünkü daha önce de belirtildiği gibi oktonyonlar hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan cebirsel özellik göstermektedir. Cayley sayıları olarak da bilinen oktonyonlar için, hem Cayley hem de Dickson'ın birbirinden bağımsız olarak elde ettikleri ve isimleriyle belirtilen Cayley-Dickson yöntemi sıklıkla kullanılan çarpım kurallarından biridir.

Oktonyon bazları arasındaki Cayley-Dickson çarpım kuralları aşağıdaki gibi verilmektedir [42 – 44]:

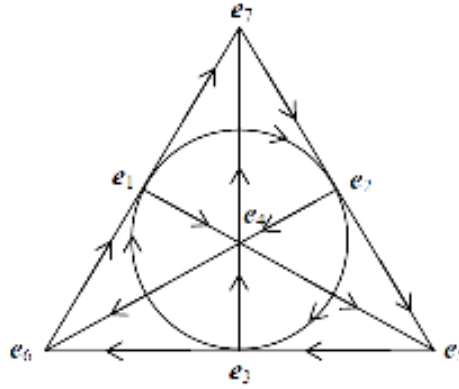
$$\begin{aligned} -e_4 e_i &= e_i e_4 = \hat{e}_i, \quad e_4 \hat{e}_i = -\hat{e}_i e_4 = e_i, \quad e_4 e_4 = -e_0, \\ e_i e_j &= -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k, \quad \hat{e}_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_0 - \varepsilon_{ijk} e_k, \quad i, j, k \in (1, 2, 3), \\ -\hat{e}_j e_i &= e_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_4 - \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bu çarpım kurallarındaki ε_{ijk} terimi anti-simetrik bir tensördür ve bu tensör ijk indislerinin bazı değerleri için +1'e eşittir. Bu indis değerleri, $\varepsilon_{ijk} = 123, 145, 176, 246, 257, 347, 365$ olarak verilebilir. Ayrıca bu indislerin çift permütasyonları için sonuç yine +1 olmaktadır, tek permütasyonları içinse -1 değerine eşit çıkmaktadır. Baz elemanların çarpımları için (2.15)'de belirtilen kurallar Çizelge 2.1'de bir tablo olarak verilmiştir:

Çizelge 2.1. Oktonyon bazları için Cayley-Dickson çarpım kuralları [42 – 44]

$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{I} \end{matrix}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Bu tablodaki çarpım kuralı, öncelikle **I** sütunundaki baz elemanları ile ardından **II** satırında bulunan baz elemanının kesiştiği noktadaki elemanı bulmak olarak özetlenebilir. Örneğin; e_3 bazı ile e_4 bazının çarpımı e_7 bazını verirken, e_4 bazı ile e_3 bazının çarpımı ise $-e_7$ bazını vermektedir. Cayley-Dickson yöntemiyle çarpım kuralının farklı bir gösterimi ise baz elemanlarının Fano düzlemiyle verilen şeklidir. Bu durum Şekil 2.1’de verilmiştir:



Şekil 2.1. Cayley-Dickson çarpım kurallarının Fano düzlemindeki çevrimi [43]

Böylece oktonyonların baz elemanları arasındaki çarpım kuralları, hem denklemlerle, hem tabloyla hem de fano düzlemiyle ifade edilmektedir. Bu 3 tip için de sonuçlarının birbirleriyle aynı olduğu açıkça görülmektedir. Denklem (2.15) ile verilen kurallar gereği oktonyonların çarpımı için tek bir kural olmadığı

ortaya çıkmaktadır. Yukarıda tanımlanan Cayley-Dickson çarpım kuralı literatürde bulunan 480 çarpım kuralından sadece birini oluşturmaktadır. Diğer çarpım kuralları, skaler olmayan baz elemanların farklı kombinasyonlarından meydana gelmektedir. Pratikte özdeş olan bu çarpım kuralları birbirleriyle izomorfturlar [8].

Bu bilgiler dahilinde **A** ve **B** iki reel oktonyonun çarpımı,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & (a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7) \\ & (b_0\mathbf{e}_0 + b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 + b_4\mathbf{e}_4 + b_5\mathbf{e}_5 + b_6\mathbf{e}_6 + b_7\mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (2.16)$$

olmaktadır. Çarpım kuralları kullanarak bu çarpım açık olarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{e}_1 + a_0b_2\mathbf{e}_2 + a_0b_3\mathbf{e}_3 + a_0b_4\mathbf{e}_4 + a_0b_5\mathbf{e}_5 + a_0b_6\mathbf{e}_6 + a_0b_7\mathbf{e}_7 \\ & + a_1b_0\mathbf{e}_1 - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_1b_3\mathbf{e}_2 + a_1b_4\mathbf{e}_5 - a_1b_5\mathbf{e}_4 - a_1b_6\mathbf{e}_7 + a_1b_7\mathbf{e}_6 \\ & + a_2b_0\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_3 - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_2b_4\mathbf{e}_6 + a_2b_5\mathbf{e}_7 - a_2b_6\mathbf{e}_4 - a_2b_7\mathbf{e}_5 \\ & + a_3b_0\mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_3b_2\mathbf{e}_1 - a_3b_3 + a_3b_4\mathbf{e}_7 - a_3b_5\mathbf{e}_6 + a_3b_6\mathbf{e}_5 - a_3b_7\mathbf{e}_4 \\ & + a_4b_0\mathbf{e}_4 - a_4b_1\mathbf{e}_5 - a_4b_2\mathbf{e}_6 - a_4b_3\mathbf{e}_7 - a_4b_4 + a_4b_5\mathbf{e}_1 + a_4b_6\mathbf{e}_2 + a_4b_7\mathbf{e}_3 \\ & + a_5b_0\mathbf{e}_5 + a_5b_1\mathbf{e}_4 - a_5b_2\mathbf{e}_7 + a_5b_3\mathbf{e}_6 - a_5b_4\mathbf{e}_1 - a_5b_5 + a_5b_6\mathbf{e}_3 + a_5b_7\mathbf{e}_2 \\ & + a_6b_0\mathbf{e}_6 + a_6b_1\mathbf{e}_7 + a_6b_2\mathbf{e}_4 - a_6b_3\mathbf{e}_5 - a_6b_4\mathbf{e}_2 + a_6b_5\mathbf{e}_3 - a_6b_6 - a_6b_7\mathbf{e}_1 \\ & + a_7b_0\mathbf{e}_7 - a_7b_1\mathbf{e}_6 + a_7b_2\mathbf{e}_5 + a_7b_3\mathbf{e}_4 - a_7b_4\mathbf{e}_3 - a_7b_5\mathbf{e}_2 + a_7b_6\mathbf{e}_1 - a_7b_7 \end{aligned} \quad (2.17)$$

yazılabilir. Bu ifade daha sade olarak,

$$\mathbf{AB} = a_0b_0 + a_0\mathbf{B} + b_0\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (2.18)$$

biçiminde elde edilmektedir [42 – 44]. Ayrıca **A** ve **B** gibi iki reel oktonyonun çarpımıyla ilgili olan (2.17) ifadesinde, skaler kısımlardan bağımsız oktonyonların vektörel çarpımı aynı bazlar altında toplandığında aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & \mathbf{e}_1 (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_7 + a_7b_6) \\ & + \mathbf{e}_2 (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_6 + a_5b_7 - a_6b_4 - a_7b_5) \\ & + \mathbf{e}_3 (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_5b_6 + a_6b_5 - a_7b_4) \\ & + \mathbf{e}_4 (a_0b_4 + a_4b_0 - a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3) \\ & + \mathbf{e}_5 (a_0b_5 + a_5b_0 + a_1b_4 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_4b_1 - a_6b_3 + a_7b_2) \\ & + \mathbf{e}_6 (a_0b_6 + a_6b_0 + a_1b_7 + a_2b_4 - a_3b_5 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_7b_1) \\ & + \mathbf{e}_7 (a_0b_7 + a_7b_0 - a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Bu çarpım **T** ile gösterilen bir matris olarak **A** ve **B** reel oktonyonlarının elemanları cinsinden

$$\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_3 & 0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

şeklinde ve daha basit olarak,

$$A \times B = \mathbf{T}_A(B) \quad (2.21)$$

biçiminde verilebilir [100]. Denklem (2.20)'de bulunan matris elemanlarının ters işaretli formu ile Çizelge 2.1'de gösterilen baz elemanlarının birbirlerine benzerliği görülmektedir. Denklem (2.21) ise, (2.20)'nin kısa bir gösterimidir. Tian, E_8 sekiz elemanlı ve oktonyon bazlarını içeren tek satırlı bir matrisi $E_8 = [e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7]$ olarak göstermiş ve bu matrisin transpozu ile kendisinin çarpımını,

$$\begin{aligned} E_8^T E_8 &= \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix} [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ e_1 & -1 & e_3 & -e_2 & e_5 & -e_4 & -e_7 & e_6 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 & e_6 & e_7 & -e_4 & -e_5 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -1 & e_7 & -e_6 & e_5 & -e_4 \\ e_4 & -e_5 & -e_6 & -e_7 & -1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_5 & e_4 & -e_7 & e_6 & -e_1 & -1 & -e_3 & e_2 \\ e_6 & e_7 & e_4 & -e_5 & -e_2 & e_3 & -1 & -e_1 \\ e_7 & -e_6 & e_5 & e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

olarak tanımlamıştır [66]. Bu tanımlamadaki matris elemanları ile Çizelge 2.1'deki elemanların sıralama ve yerleşimlerinin benzer olduğu rahatlıkla görülmektedir.

2. 1. 2. 5. Reel oktonyonların eşleniği

Reel $\mathbf{A}$ oktonyonunun oktonyonik eşleniği, sanal baz elemanlarının işaretinin değişmesiyle ya da diğer bir ifadeyle oktonyonun vektörel kısmının işaretinin değişmesiyle elde edilmektedir.

$$\bar{\mathbf{A}} = S_{\mathbf{A}} - V_{\mathbf{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{A} \quad (2.23)$$

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki reel oktonyon için bazı eşlenik özellikleri aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}\right) = \mathbf{A}, \quad \left(\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}}\right) = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}, \quad \left(\overline{\mathbf{AB}}\right) = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}} \quad (2.24)$$

Oktonyonik eşleniğin tanımından yola çıkarak, reel $\mathbf{A}$ oktonyonunun reel ve sanal kısımları için sırasıyla şu tanımlamalar yapılabilir [7, 8, 20, 32]:

$$S_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}}{2} = a_0 \mathbf{e}_0 \quad (2.25)$$

$$V_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}}{2} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.26)$$

2. 1. 2. 6. Reel oktonyonların skaler çarpımı

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ oktonyonlarının skaler çarpımı literatürde,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{A}}] = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{A}] \quad (2.27)$$

olarak verilmektedir [20, 43]. Bu iki oktonyonu sadece vektörel kısımlarından oluşmasıyla elde edilen reel vektör oktonyonun skaler çarpımı ise,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2} [\mathbf{AB} + (\overline{\mathbf{AB}})] \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2. 1. 2. 7. Reel oktonyonların vektörel çarpımı

İki reel oktonyonun skaler çarpımına benzer olarak, oktonyonlarının vektörel çarpımı literatürde,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{A}] \quad (2.29)$$

olarak verilmektedir [20, 43]. Yalnızca vektörel kısımlarından oluşan iki reel vektör oktonyonunun skaler çarpımı,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}\mathbf{B} - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}})] \quad (2.30)$$

biçiminde tanımlanmaktadır [42 – 44].

2. 1. 2. 8. Reel oktonyonların normu

Reel oktonyonların norm işlemi, oktonyonun kendisi ile eşleniğinin oktonyon çarpımıyla elde edilmektedir. Bir $\mathbf{A}$ oktonyonunun normu $N(\mathbf{A})$ ile gösterilir ve norm işleminin sonucu reel bir sayıyı vermektedir.

$$N(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = \sum_{n=0}^7 a_n^2 \quad (2.31)$$

Tek bir $\mathbf{A}$ oktonyonu ile norm işlemi yapılabildiği gibi, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki reel oktonyon için de norm işlemi tanımlanmaktadır. $N(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ile ifade edilen iki oktonyonun çarpımının normu, her bir oktonyonun normlarının çarpımlarıyla verilmektedir:

$$N(\mathbf{A}\mathbf{B}) = N(\mathbf{A})N(\mathbf{B}) \quad (2.32)$$

2. 1. 2. 9. Ters eleman

Oktonyonların alternatif bir bölüm cebri oluşturmalarından dolayı, $\mathbf{A}$ reel oktonyonunun tersinin varlığı söz konusudur. Oktonyonlar için ters eleman işlemi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{A}}}{N(\mathbf{A})} \quad (2.33)$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. Bir oktonyonun ters elemanının tanımlanabilmesi için $\mathbf{A}$ reel oktonyonunun ve bu oktonyonun normunun sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

2. 2. Kompleks Oktonyonlar

2. 2. 1. Tanımlar

Kompleks oktonyonlar, reel oktonyonların kompleks formunu ifade etmektedir. İki reel oktonyon ve bu iki reel oktonyondan birine $i^2 = -1$ şartını sağlayan “i” sanal birimin eklenmesi kombinasyonuyla oluşurlar. Böylece, 8 bileşenli reel oktonyonlardan birine eklenen sanal birim sayesinde toplam bileşen sayısı 16’ya ulaşmaktadır.

Kompleks bir oktonyon, $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{O}$ iki reel oktonyon ve $\mathbb{A} \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}$ kompleks bir oktonyonu belirtmek üzere,

$$\mathbb{A} = \mathbf{A} + i\mathbf{A}' \quad (2.34)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu ifade daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = & (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7) \\ & + i(a'_0 \mathbf{e}_0 + a'_1 \mathbf{e}_1 + a'_2 \mathbf{e}_2 + a'_3 \mathbf{e}_3 + a'_4 \mathbf{e}_4 + a'_5 \mathbf{e}_5 + a'_6 \mathbf{e}_6 + a'_7 \mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = \sum_{n=0}^7 (a_n + ia'_n) \mathbf{e}_n = & (a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 + (a_1 + ia'_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + ia'_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + ia'_3) \mathbf{e}_3 \\ & + (a_4 + ia'_4) \mathbf{e}_4 + (a_5 + ia'_5) \mathbf{e}_5 + (a_6 + ia'_6) \mathbf{e}_6 + (a_7 + ia'_7) \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (2.36)$$

şeklinde yazılmaktadır. Son denklemde aynı baz elemanlar altında yazılan oktonyon bileşenleri kompleks sayılardan oluşmaktadır. Yeni oluşan kompleks bileşenler $\mathbf{A}_n$ sembolüyle gösterilerek $\mathbb{A}$ kompleks oktonyonu daha sade biçimde,

$$\mathbb{A} = \sum_{n=0}^7 \mathbf{A}_n \mathbf{e}_n = \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathbf{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathbf{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathbf{A}_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.37)$$

olarak yazılabilmektedir. Kompleks oktonyonlar da reel oktonyonlardaki gibi skaler ve vektörel kısımlardan oluşmaktadır. Kompleks skaler ve vektör oktonyonlar sırasıyla,

$$S_{\mathbb{A}} = (a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_0 \quad (2.38)$$

ve

$$\begin{aligned}
V_{\mathbb{A}} &= \sum_{n=1}^7 (a_n + ia'_n) \mathbf{e}_n = (a_1 + ia'_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + ia'_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + ia'_3) \mathbf{e}_3 + (a_4 + ia'_4) \mathbf{e}_4 \\
&\quad + (a_5 + ia'_5) \mathbf{e}_5 + (a_6 + ia'_6) \mathbf{e}_6 + (a_7 + ia'_7) \mathbf{e}_7 \\
&= \sum_{n=1}^7 A_n \mathbf{e}_n = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4 + A_5 \mathbf{e}_5 + A_6 \mathbf{e}_6 + A_7 \mathbf{e}_7
\end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklinde ayrı ayrı ifade edilebilir. Sonuç olarak, $\mathbb{A}$ kompleks oktonyonu,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= S_{\mathbb{A}} + V_{\mathbb{A}} = A_0 \mathbf{e}_0 + A \\
&= A_0 \mathbf{e}_0 + A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4 + A_5 \mathbf{e}_5 + A_6 \mathbf{e}_6 + A_7 \mathbf{e}_7
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak yazılabilmekte ve elde edilen ifadenin (2.37) ile aynı olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Reel oktonyonlarda olduğu gibi kompleks oktonyonların da kompleks skaler, kompleks vektör ve kompleks sıfır oktonyon olma durumları söz konusudur. $\mathbb{A}$ kompleks oktonyonu sadece skaler kısımdan oluşuyorsa bu oktonyon kompleks skaler oktonyon,

$$\mathbb{A} = S_{\mathbb{A}} = A_0, \tag{2.41}$$

sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa bu oktonyonun kompleks vektör oktonyon,

$$\mathbb{A} = V_{\mathbb{A}} = A, \tag{2.42}$$

veya hem skaler hem de vektörel kısımlarının olmaması durumunda ise bu oktonyonun kompleks sıfır oktonyon olduğu kolaylıkla anlaşılabılır:

$$\mathbb{A} = 0 \tag{2.43}$$

2. 2. 2. Temel işlemler

2. 2. 2. 1. Eşitlik

$\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ gibi iki kompleks oktonyonun birbirine eşit olabilmesi için aynı baz elemanlara karşılık gelen bileşenlerin her birinin birbirine eşit olması gerekmektedir. Dolayısıyla $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\mathbb{A} = \sum_{n=0}^7 A_n \mathbf{e}_n = A_0 \mathbf{e}_0 + A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4 + A_5 \mathbf{e}_5 + A_6 \mathbf{e}_6 + A_7 \mathbf{e}_7 \tag{2.44}$$

ve

$$\mathbb{B} = \sum_{n=0}^7 \mathbb{B}_n \mathbf{e}_n = \mathbb{B}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbb{B}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbb{B}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbb{B}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbb{B}_4 \mathbf{e}_4 + \mathbb{B}_5 \mathbf{e}_5 + \mathbb{B}_6 \mathbf{e}_6 + \mathbb{B}_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.45)$$

olarak yazılan iki kompleks oktonyon için,

$$\mathbb{A}_0 = \mathbb{B}_0, \mathbb{A}_1 = \mathbb{B}_1, \mathbb{A}_2 = \mathbb{B}_2, \mathbb{A}_3 = \mathbb{B}_3, \mathbb{A}_4 = \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_5 = \mathbb{B}_5, \mathbb{A}_6 = \mathbb{B}_6, \mathbb{A}_7 = \mathbb{B}_7 \quad (2.46)$$

eşitlikleri yazılabiliyorsa, bu iki kompleks oktonyonun birbirine eşit olduğu ortaya çıkmaktadır.

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \quad (2.47)$$

Ayrıca, (2.44) ve (2.45) ile tanımlanan kompleks iki oktonyonu oluşturan tüm kompleks bileşenler de,

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n, \mathbf{a}'_n = \mathbf{b}'_n \quad (2.48)$$

$n = (0, 1, 2, \dots, 7)$ şartını sağlamak üzere ayrı ayrı eşit olmak zorundadırlar.

2. 2. 2. 2. Toplama ve çıkarma

İki kompleks oktonyon üzerinde reel oktonyonlarda uygulandığı gibi cebirsel olarak toplama ve çıkarma işlemi uygulanabilmektedir. $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kompleks iki oktonyonu belirtmek üzere toplam ve fark işlemleri,

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \pm \mathbb{B} &= \sum_{n=0}^7 ((\mathbf{a}_n + i\mathbf{a}'_n) \pm (\mathbf{b}_n + i\mathbf{b}'_n)) \mathbf{e}_n = \sum_{n=0}^7 (\mathbf{A}_n \pm \mathbf{B}_n) \mathbf{e}_n \\ &= (\mathbf{A}_0 \pm \mathbf{B}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{A}_1 \pm \mathbf{B}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{A}_2 \pm \mathbf{B}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{A}_3 \pm \mathbf{B}_3) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (\mathbf{A}_4 \pm \mathbf{B}_4) \mathbf{e}_4 + (\mathbf{A}_5 \pm \mathbf{B}_5) \mathbf{e}_5 + (\mathbf{A}_6 \pm \mathbf{B}_6) \mathbf{e}_6 + (\mathbf{A}_7 \pm \mathbf{B}_7) \mathbf{e}_7 \end{aligned} \quad (2.49)$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. Aynı zamanda bu işlem, iki kompleks oktonyonun skaler ve vektörel kısımlarının toplam ve farkları cinsinden de yazılabilir:

$$\mathbb{A} \pm \mathbb{B} = (S_{\mathbb{A}} + S_{\mathbb{B}}) \pm (V_{\mathbb{A}} + V_{\mathbb{B}}) = (\mathbf{A}_0 \pm \mathbf{B}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \quad (2.50)$$

2. 2. 2. 3. Skaler ile çarpma

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{A}$ şeklinde belirtilen kompleks bir oktonyonun λ skaleri ile çarpımı,

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbb{A} &= \lambda (a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 + \lambda \sum_{n=1}^7 (a_n + ia'_n) \mathbf{e}_n \\
&= \lambda (a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 + \lambda (a_1 + ia'_1) \mathbf{e}_1 + \lambda (a_2 + ia'_2) \mathbf{e}_2 + \lambda (a_3 + ia'_3) \mathbf{e}_3 \\
&\quad + \lambda (a_4 + ia'_4) \mathbf{e}_4 + \lambda (a_5 + ia'_5) \mathbf{e}_5 + \lambda (a_6 + ia'_6) \mathbf{e}_6 + \lambda (a_7 + ia'_7) \mathbf{e}_7
\end{aligned} \tag{2.51}$$

veya

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbb{A} &= \lambda (S_{\mathbb{A}} + V_{\mathbb{A}}) = \lambda (\mathbf{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}) \\
&= \lambda \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_0 + \lambda \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{A}_3 \mathbf{e}_3 + \lambda \mathbf{A}_4 \mathbf{e}_4 + \lambda \mathbf{A}_5 \mathbf{e}_5 + \lambda \mathbf{A}_6 \mathbf{e}_6 + \lambda \mathbf{A}_7 \mathbf{e}_7
\end{aligned} \tag{2.52}$$

biçiminde gösterilebilir. Sonuç ise yine λ reel skaleriyle orantılı çıkmaktadır.

2. 2. 2. 4. Kompleks oktonyonların çarpımı

$\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kompleks iki oktonyonu, (2.44) ve (2.45)'deki gibi kompleks sayıları belirten $\mathbf{A}_n$ ve $\mathbf{B}_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 7$) terimleriyle ifade edilebilmektedir. Kompleks iki oktonyonun çarpımı baz elemanlarının çarpımlarının tanımlanmasıyla gerçekleşmektedir. Oktonyonun tipi ne olursa olsun, başta hangi çarpım kuralı tanımlanırsa o yöntem geçerli olacaktır. Burada kullanılan ise Cayley-Dickson çarpım kurallarıdır. Böylece $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kompleks oktonyonlarının çarpımı,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\mathbb{B} &= (\mathbf{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathbf{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathbf{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathbf{A}_7 \mathbf{e}_7) \\
&\quad (\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{B}_4 \mathbf{e}_4 + \mathbf{B}_5 \mathbf{e}_5 + \mathbf{B}_6 \mathbf{e}_6 + \mathbf{B}_7 \mathbf{e}_7)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

ifadesiyle belirtilerek, işlem (2.17)'ye benzer biçimde yapıldığında çarpım sonucu,

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{2.54}$$

olarak elde edilmektedir.

2. 2. 2. 5. Kompleks oktonyonların eşleniği

Reel oktonyonların tanımı yapılırken oktonyonların sadece oktonyonik eşleniği ya da konjugesinin varlığından söz edilmişti. Ancak kompleks oktonyon cebirinde, reel oktonyonlardan birine “i” sanal birimi eklenmesinden dolayı kompleks eşlenikten de bahsetmek gerekir. Şimdi kompleks oktonyonların eşlenik özelliklerini kısaca tanımlayalım:

a) Oktonyonik Eşlenik

Denklem (2.35) ile ifade edilen ve 16 bileşenden oluşan kompleks bir $\mathbb{A}$ oktonyonunun oktonyonik eşleniği, skaler kısmı dışında kalan tüm bazlarının işaretlerinin değişmesiyle gerçekleşir. Bu durum (2.55) ifadesiyle verilmektedir:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{A}} = & (a_0 \mathbf{e}_0 - a_1 \mathbf{e}_1 - a_2 \mathbf{e}_2 - a_3 \mathbf{e}_3 - a_4 \mathbf{e}_4 - a_5 \mathbf{e}_5 - a_6 \mathbf{e}_6 - a_7 \mathbf{e}_7) \\ & + i(a'_0 \mathbf{e}_0 - a'_1 \mathbf{e}_1 - a'_2 \mathbf{e}_2 - a'_3 \mathbf{e}_3 - a'_4 \mathbf{e}_4 - a'_5 \mathbf{e}_5 - a'_6 \mathbf{e}_6 - a'_7 \mathbf{e}_7)\end{aligned}\quad (2.55)$$

Bu denklem reel ve kompleks bileşenlerin aynı baz elemanlar altında toplanmasıyla,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{A}} = & (a_0 + ia'_0) \mathbf{e}_0 - (a_1 + ia'_1) \mathbf{e}_1 - (a_2 + ia'_2) \mathbf{e}_2 - (a_3 + ia'_3) \mathbf{e}_3 \\ & - (a_4 + ia'_4) \mathbf{e}_4 - (a_5 + ia'_5) \mathbf{e}_5 - (a_6 + ia'_6) \mathbf{e}_6 - (a_7 + ia'_7) \mathbf{e}_7\end{aligned}\quad (2.56)$$

şeklinde ve daha kısa biçimde,

$$\bar{\mathbb{A}} = A_0 \mathbf{e}_0 - A_1 \mathbf{e}_1 - A_2 \mathbf{e}_2 - A_3 \mathbf{e}_3 - A_4 \mathbf{e}_4 - A_5 \mathbf{e}_5 - A_6 \mathbf{e}_6 - A_7 \mathbf{e}_7 \quad (2.57)$$

veya

$$\bar{\mathbb{A}} = S_{\mathbb{A}} - V_{\mathbb{A}} = A_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{A} \quad (2.58)$$

olarak kompleks skaler ve vektör oktonyonu cinsinden ifade edilmektedir. $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ gibi kompleks iki oktonyon için oktonyonik eşlenik işlemine ait bazı tanımlamalar ise aşağıda verilmektedir:

$$\left(\overline{\bar{\mathbb{A}}}\right) = \mathbb{A}, \quad \left(\overline{\mathbb{A} + \mathbb{B}}\right) = \bar{\mathbb{A}} + \bar{\mathbb{B}}, \quad \left(\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}}\right) = \bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}} \quad (2.59)$$

b) Kompleks Eşlenik

Denklem (2.35) ile verilen kompleks oktonyonun, kompleks birim elemanın varlığından dolayı kompleks eşleniği mevcuttur. Bu eşlenik ise $\mathbb{A}$ kompleks oktonyonunda “i” terimini içeren tüm elemanlarının işaret değiştirmesiyle elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^* = & (a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7) \\ & - i(a'_0 \mathbf{e}_0 + a'_1 \mathbf{e}_1 + a'_2 \mathbf{e}_2 + a'_3 \mathbf{e}_3 + a'_4 \mathbf{e}_4 + a'_5 \mathbf{e}_5 + a'_6 \mathbf{e}_6 + a'_7 \mathbf{e}_7)\end{aligned}\quad (2.60)$$

Bu ifade daha basit hale getirilecek olursa,

$$\begin{aligned} A^* = & (a_0 - ia'_0)e_0 + (a_1 - ia'_1)e_1 + (a_2 - ia'_2)e_2 + (a_3 - ia'_3)e_3 \\ & + (a_4 - ia'_4)e_4 + (a_5 - ia'_5)e_5 + (a_6 - ia'_6)e_6 + (a_7 - ia'_7)e_7 \end{aligned} \quad (2.61)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Kompleks eşlenik işlemi sonucunda bu ifadenin A_n terimleri altında değil de, farklı bir X_n kompleks terimi şeklinde yazılabileceği açıkça görülmektedir. Ayrıca kompleks eşlenik ifadesiyle bir veya iki kompleks oktonyon için tıpkı oktonyonik eşlenikte olduğu gibi bazı özellikler belirtilebilir:

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (2.62)$$

c) Hermitik Eşlenik

Burada oktonyonların baz elemanlarının hermitik eşlenikleri,

$$e_0^\dagger = e_0, \quad e_j^\dagger = -e_j \quad j = (1, 2, \dots, 7) \quad (2.63)$$

olarak tanımlanmalıdır. Bu tanımlamalar sayesinde oktonyon bazlarının normu ise,

$$N_n = e_0^\dagger e_0 = e_0 e_0^\dagger = e_0 = 1 \quad n = (0, 1, 2, \dots, 7) \quad (2.64)$$

olarak yazılmaktadır. Bir kompleks oktonyonun hermitik eşleniği ise (2.63) ve (2.64) özdeşliklerinden faydalanılarak aşağıdaki gibi yazılmaktadır [43, 65]:

$$A^\dagger = \sum_{n=0}^7 \bar{A}_n e_n^\dagger = \bar{A}_0 e_0 - \sum_{j=1}^7 \bar{A}_j e_j \quad (2.65)$$

2. 2. 2. 6. Kompleks oktonyonların normu

Kompleks oktonyonların normu, reel oktonyonlara benzer olarak kompleks oktonyonun kendisi ile oktonyonik eşleniğinin oktonyon çarpımıyla elde edilmektedir. Bir A oktonyonunun normu $N(A)$ ile gösterilir ve norm işleminin sonucu yine reel bir sayıyı vermektedir.

$$N(A) = A \bar{A} = \bar{A} A = \sum_{n=0}^7 A_n^2 \quad (2.66)$$

Ancak, kompleks oktonyonlarda “i” sanal biriminin varlığından dolayı kompleks bileşenlerden oluşan kompleks oktonyonun norm işleminin sonucu sıfıra eşit

ıkabilir. Bu yüzden kompleks oktonyonlar için reel oktonyonlarda olduğu gibi ters işleminin varlığı ve bölüm cebrini sağlandığı söylenemez [16].

3. MAXWELL DENKLEMLERİ VE İZOTROP, ANİZOTROP, Bİ-İZOTROP ORTAMLAR

Fizik, evrenin varoluşunu, madde ve özelliklerini uzay-zaman kavramları altında inceleyen ve ne, neden, nasıl, ne zaman gibi soruları cevaplayan temel bir bilimdir. Birçok fiziksel problemin teorik ve deneysel olarak ele alınıp bu problemlere cevap verilmesi bu temel bilimdeki yasalarla sağlanabilir. Fizik, problemlere bulunan cevaplar ve gerek teknolojide gerekse bilimsel çalışmalardaki ilerlemeler sayesinde birçok alt bilim dalına ayrılmıştır. Klasik elektromanyetizma, elektromanyetik dalga teorisi ve optik bu dalların en güncel ve önemlilerinden sadece bazılarıdır.

3. 1. Maxwell Denklemleri

1800'lü yılların sonunda James Clerk Maxwell'in maddenin elektrik ve manyetik alanlardaki etkileşimini incelemesi sonucunda, bugün hala geçerliliğini koruyan ve birçok çalışmanın temelini oluşturup kendi adıyla da isimlendirilen vektör gösteriminde dört tane Maxwell denklemi mevcuttur. Bu denklemler o kadar muhteşemdir ki, Lorentz dönüşümleri altında değişmez (invariant) kalırlar.

Elektrik ve manyetik alanlardan türetilen ve elektromanyetizma için büyük önem arzeden Maxwell denklemlerinin gerek serbest veya toplam yük ve akımlar cinsinden, gerek birimsel gösterimleri cinsinden, gerekse ele alınan fiziksel sistemin makroskopik ya da mikroskopik olması yönünden farklı türde integral ve diferansiyel yazılımları mevcuttur.

Maxwell denklemlerinin integral formları ile diferansiyel formlarının tanımlamaları birbirleriyle aynı anlamı taşımaktadır. Diferansiyel formları, integral formlarından yola çıkılarak diverjans ve Stokes teoremlerinin sırasıyla uygulanmasıyla elde edilmektedir. Sonuç olarak Maxwell denklemlerinin diferansiyel şekillerinin daha kısa ve anlaşılır gösterimlerinin olduğu, ancak noktasal veya sürekli yük dağılımlarının ele alındığı sistemler için integral formlarının daha kullanışlı oldukları söylenebilir [101]. Maxwell denklemlerinin

toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları Çizelge 3.1’de özetlenmiştir [101 – 106]:

Çizelge 3.1. Maxwell denklemlerinin toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları

$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ic}}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$	Elektrik Alanları için Gauss Yasası
$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Manyetik Alanlar için Gauss Yasası
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday Yasası
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Ampere-Maxwell Yasası

Serbest yük ve akımlar cinsinden Maxwell denklemlerinin integral ve diferansiyel formları ise, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ile $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ yapı (bünye) denklemleri ve $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ kabulüyle Çizelge 3.2’deki gibi yazılmaktadır [101 – 104]:

Çizelge 3.2. Maxwell denklemlerinin serbest yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları

$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{serbest}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{serbest}$	Elektrik Alanları için Gauss Yasası
$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Manyetik Alanlar için Gauss Yasası
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday Yasası
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{serbest} + \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{serbest} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Ampere-Maxwell Yasası

Maxwell denklemlerinin her iki gösteriminde bulunan terim ve semboller ile bu sembollerin anlam ve birimleri Çizelge 3.3'deki gibi gösterilebilir [104]:

Çizelge 3.3. Maxwell denklemlerinde bulunan sembollerin anlamları ve birimleri

Sembol	Anlam	Birim (SI birim sisteminde)
Q	Elektriksel Yük	C
Φ_E	Elektriksel Akı	$N.m^2 / C$
Φ_B	Manyetik Akı	$T.m^2$ veya Wb
$\vec{E}$	Elektrik Alan Vektörü	V / m veya N / C
$\vec{H}$	Manyetik Alan Vektörü	A / m
$\vec{D}$	Elektrik Akı Yoğunluğu veya Elektriksel Deplasman Vektörü	C / m^2 veya $N / V.m$
$\vec{B}$	Manyetik Akı Yoğunluğu veya Manyetik İndüksiyon Vektörü	T veya Wb / m^2
ρ_e	Elektrik Yük Yoğunluğu	C / m^3
$\vec{J}$	Elektrik Akım Yoğunluğu	A / m^2
ϵ_0	Boş Uzayın Elektriksel Geçirgenlik Sabiti	F / m veya $C / N.m^2$
μ_0	Boş uzayın Manyetik Geçirgenlik Sabiti	H / m veya N / A^2

Şimdi Maxwell denklemlerinin fiziksel sistemler için ne anlama geldiklerini kısaca hatırlatalım [101 – 107]:

Elektrik alanlar için Gauss yasası, herhangi kapalı bir s yüzeyinden geçen toplam elektrik akısının, bu yüzeyin içinde kalan toplam yükün ϵ_0 'a bölümüne eşit olduğunu söylemektedir. Yani, kapalı bir yüzeyin içindeki toplam yük, yüzey içinde kalan elektrik alan çizgilerinin sayısı ile orantılıdır.

Manyetik alanlar için Gauss yasası, herhangi kapalı bir s yüzeyinden geçen net manyetik akının sıfır olduğunu ifade etmektedir. Başka bir deyişle, kapalı s yüzeyiyle çevrelenmiş V hacmine giren manyetik alan çizgilerinin sayısı

hacmi terk eden manyetik alan çizgilerinin sayısına eşittir. Bu durum ise manyetik alan çizgilerinin herhangi bir noktadan başlayıp belli bir noktada son bulmayacağını anlatmaktadır. Bu duruma en önemli örnek ise çubuk mıknatıs ile verilebilir. Yani, N ve S kutbuna sahip çubuk bir mıknatıs, ne kadar ikiye bölünürse bölünsün her zaman yine N ve S kutbu oluşmaktadır; kısacası manyetik tek kutup yoktur.

Faraday yasası, herhangi kapalı bir yol boyunca elektrik alanın çizgi integrali, kapalı yol boyunca çevrelenen herhangi bir yüzey alanından geçen manyetik akının zamanla değişim hızına eşittir. Bu denklemle zamanla değişen manyetik alanların bir elektrik alan ürettiği anlaşılmaktadır.

Ampere-Maxwell yasası (Maxwell'in katkısıyla), elektrik akımlarının ve zamanla değişen elektrik alanlarının bir manyetik alan üreteceğini söylemektedir. Yani, herhangi kapalı bir yol boyunca manyetik alanın çizgi integrali, kapalı yol boyunca geçen elektrik akımının μ_0 ile çarpımı ve kapalı yol boyunca sınırlanmış herhangi bir yüzeyden geçen elektrik akısının $\epsilon_0\mu_0$ ile çarpımının toplamına eşittir.

Maxwell denklemlerinin bulunmasından sonra bu denklemlerin boşlukta ve maddesel ortamlarda tanımları yapılmıştır. Bu tanımlamalar yapılırken ele alınan ortamların izotropluk, anizotropluk ve bi-izotropluk gibi özellikleri de ele alınabilir. $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ile ifade edilen yapı denklemlerinde ortamın elektrik ve manyetik geçirgenlik sabitleri maddesel ortamlarda herhangi ϵ ve μ gibi değerler alırken, boş uzayda ise ϵ_0 ve μ_0 şeklinde sabitler olurlar. O halde herhangi bir ortam en genel Maxwell denklemleri SI birim sisteminde,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\vec{J} + \epsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

şeklinde verilebilir.

3. 2. Zamansal Harmonik Maxwell Denklemleri

Fiziksel nicelikler genel olarak gerçel uzay-zaman değişkenleriyle ve çoğu zaman ise vektörel niceliklerle tanımlanmaktadır. Fiziksel niceliklerin büyük bir kısmı zamanla periyodik şekilde değişir ve zamansal harmonik adını alırlar. Matematiksel hesaplamalarda, zamansal harmonik gerçel nicelikler, kompleks vektörler ile temsil edilirler [108]. $e^{i\omega t}$ terimi için,

$$e^{i\omega t} = \underbrace{\cos\omega t}_{\text{reel}} + i \underbrace{\sin\omega t}_{\text{sanal}} \quad (3.5)$$

eşitliği yazılmaktadır. Burada “i” ifadesi kompleks sayılar için kullanılan ve $i^2 = -1$ şartını sağlayan sanal birimi göstermektedir. Zamansal harmonik vektörler ise bileşenleri harmonik ifadeler olup, vektörlerin zamana bağlılığıyla ilişkilendirilir. Bunlar ise fazör şeklinde gösterilmektedir. Örneğin; kompleks bir nicelik olarak,

$$V = V_0 e^{i(\omega t + \phi)} \quad (3.6)$$

biçiminde V ifadesi bir fazör olarak tanımlansın. Burada, V_0 genlik, ω açısal frekans ve ϕ ise faz farkıdır. Bu fazör ifadesi için,

$$V = V_0 [\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)], \quad (3.7)$$

$$V = V_R + iV_I, \quad (3.8)$$

$$V_R = \text{Re}\{V_0 e^{i(\omega t + \phi)}\} = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (3.9)$$

ve

$$V_I = \text{Im}\{V_0 e^{i(\omega t + \phi)}\} = V_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.10)$$

tanımlamaları yapılabilir. O halde V kompleks niceliğinin gerçel kısmı (3.9) ile gösterilen zamansal harmonik olmaktadır:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.11)$$

Bu ifadenin zamana göre türevi ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t)}{\partial t} &= -\omega V_0 \sin(\omega t + \phi) = \omega V_0 \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \text{Re}\left\{\omega V_0 e^{i\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)}\right\} = \text{Re}\left\{\omega V_0 e^{i\omega t} e^{i\phi} e^{i\frac{\pi}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki $e^{i\frac{\pi}{2}}$ terimi için,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \quad (3.13)$$

eşitliği yazılabilir. O halde $V(t)$ zamansal harmoniğinin zamana göre türevi daha sade biçimde,

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \text{Re}\{i\omega V_0 e^{i(\omega t + \phi)}\} \quad (3.14)$$

ve (3.6) gereği kısaca,

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} \leftrightarrow i\omega V \quad (3.15)$$

elde edilmiş olur. Böylece $i\omega$ terimi, zamansal harmonik niceliklerin kompleks gösterimlerinde $\frac{\partial}{\partial t}$ zamana göre türev ifadelerinde yerine konabilir [108]. Sonuç

olarak, kompleks notasyonda verilen bir niceliğe ait gerçel uzay-zaman ifadesini elde etmek için, kompleks niceliğin öncelikle $e^{i\omega t}$ terimi ile çarpılıp, ardından bu ifadenin gerçel kısmı alınarak bulunacağı anlaşılmaktadır. Bütün alan vektörleri ile tüm akım ve yük yoğunluklarının ω açısal frekansında zamanla kosinüsoidal olarak değiştiği varsayıldığında, elektrik ve manyetik alanların kompleks uzayda,

$$\vec{E}(t) = \text{Re}\{E e^{i\omega t}\} \quad (3.16)$$

ve

$$\vec{H}(t) = \text{Re}\{H e^{i\omega t}\} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edildiği ortaya çıkmaktadır. Çizelge 3.2’de diferansiyel formları verilen Maxwell denklemlerinin, zamansal harmonikler veya açısal frekansa dayalı fazör formları (3.15) gereği,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (3.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad (3.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega \vec{D} \quad (3.21)$$

olarak gösterilir [101, 102, 107, 108].

3. 3. İzotropi ve İzotrop Ortamlar

Kelime anlamı olarak bir maddenin tüm özelliklerinin her yerde ve her yönde aynı olduğu anlamına gelen izotropluk, bir malzeme veya ortam için de düşünülebilir. Yani herhangi bir malzeme ya da ortam tüm yönlerde aynı optik karakteri gösteriyorsa bu tür malzemelere izotrop malzeme, bu tür ortamlara ise izotrop ortam adı verilir.

Şu ana kadar (3.1) – (3.4) ifadeleriyle verilen ve $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ile $\vec{B} = \mu \vec{H}$ gibi iki önemli yapı denklemiyle çeşitli yazılımları bulunan Maxwell denklemlerinin, farklı yapıları ve biçimleri olmasına rağmen hepsinin izotrop ortamlarda geçerli olan denklemler olduğu söylenebilir. Bu denklemler, ortamın anizotrop veya bi-izotrop olması halinde farklı forma dönüştürmektedir.

3. 4. Anizotropi ve Anizotrop Ortamlar

Anizotrop ise izotrop ifadesinin tersine, maddelerin özelliklerinin belirli yön ve doğrultulara göre değişen özellikleri olarak ifade edilir. Buna benzer olarak bir malzeme veya ortamın değişik yönlerde değişik optik özelliklere sahip olması durumunda o malzeme ya da ortamın anizotrop olduğu söylenebilir. Anizotropluk ortamın elektriksel, mekaniksel ve optik özelliklerine göre gerçekleşir [107, 109].

Maxwell denklemlerinin ele alınan ortamın anizotrop olması durumunda, ortamda elektrik ve manyetik alan vektörlerinin yöneliminin farklı doğrultularda, farklı değerlerle etkileyecek şekilde değişmesi gerekir. Dolayısıyla elektriksel geçirgenlik katsayısı ϵ ile manyetik geçirgenlik katsayısı μ değerlerinin x, y ve z doğrultularındaki yönelime bağlı olarak ikinci dereceden bir tensör olarak belirtilmeleri gerekir. Bu durumda ise bu katsayıların 3×3 'lük matrisler şeklinde ifade edilmelidir. Örneğin; elektrik alan için ifade edilen $\vec{D} = \tilde{\epsilon} \vec{E}$ ifadesi tensörel formda yazılmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (3.22)$$

olacaktır. Burada $\tilde{\epsilon}$ terimi anizotrop ortamlar için 3×3 'lük elektriksel geçirgenlik tensörü ve $\vec{E}$ ise $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$ biçiminde bileşenlerden oluşan elektrik alan vektörüdür. Bu yazım ile elektriksel deplasman vektörü de denilen $\vec{D}$ ifadesinin her bileşeninin, elektrik alan vektörünün 3 bileşeni ile belirleneceği anlamını taşır. Bu ifade matris formunda;

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

veya daha basit olarak

$$\vec{D}_i = \tilde{\epsilon}_{ij} \vec{E}_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.24)$$

şeklinde de gösterilebilir [107, 109]. Bu durum benzer biçimde manyetik alanlar için, $\vec{B} = \tilde{\mu} \vec{H}$ ifadesiyle düzenlenebilir. Böyle bir durumda manyetik alan vektörü bileşenleriyle, manyetik akı yoğunluğu $\vec{B}$ terimi oluşturulmaktadır. Burada adı geçen $\tilde{\mu}$ manyetik geçirgenlik ifadesi de anizotrop ortamlar için geçerli olup, tensörel formdadır. O halde (3.1) – (3.4) ifadeleriyle verilen Maxwell denklemleri anizotrop ortam için aşağıdaki gibidir:

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\epsilon} \vec{E}) = \rho_e \quad (3.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mu} \vec{H}) = 0 \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\tilde{\mu} \vec{H})}{\partial t} \quad (3.27)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial(\tilde{\epsilon} \vec{E})}{\partial t} \quad (3.28)$$

Burada “ $\tilde{\epsilon}, \tilde{\mu}$ ” gibi terimler ortamın anizotropluk durumuyla ilgilidir ve elektrik deplasman vektörü ile manyetik akı yoğunluğu terimleri sırasıyla elektrik ve manyetik alanların x, y ve z eksenlerindeki yayılımlarından elde edilmiştir [109 – 114].

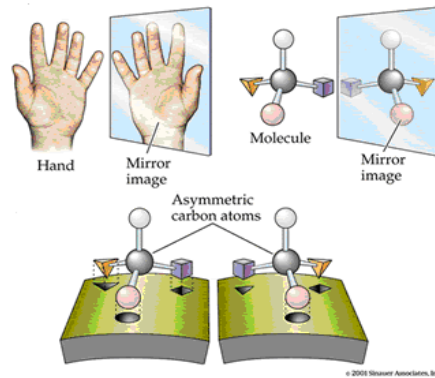
Elektromanyetik dalganın ilerleyişi düşünüldüğünde kristalin diğer ortamlardan en önemli farklılığı kristallerin elektriksel olarak anizotropik özellik gösterebilmesidir; yani farklı yönlerdeki elektriksel özelliği farklı olabilmektedir. Bunun anlamı uygulanan elektrik alan ile kristal için ortamın elektriksel

geçirgenliğinin izotropik kristallerde olduğu gibi skaler bir ϵ ile $\vec{E}$ elektrik alanının çarpımı gibi basit olmamasıdır. Bunun optoelektronikteki en belirgin sonucu ışığın kristal içersindeki ilerleyişi kristalin yönelimine oldukça bağımlı oluşudur [109].

3. 5. Bi-izotropi ve Bi-izotrop Ortamlar

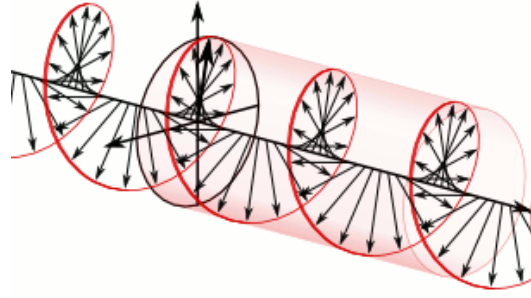
Bi-izotropluk söz konusu olduğunda, ortamın elektrik ve manyetik alanların birleşimi ya da çiftlenimi ile meydana geldiği anlaşılmaktadır. Bilindiği gibi ışık bir elektromanyetik dalgadır. Fizik, mühendislik ve malzeme bilimlerinde karşılaşılan bi-izotrop maddeler, ışığın yansıma ya da geçişinde kutuplanmasını döndürebilecek bazı özel durumlara sahiptirler. Ancak bu durum tüm maddelerin burulma etkisiyle bi-izotrop ortama dönüşeceği anlamını taşımaz. Bi-izotrop maddelerin burulma etkisiyle sınıflandırılması, ortam yapısının kiral olma durumu (chirality) ve karşılıklılık içermeme (non-reciprocity) tanımlamalarıyla gerçekleşir. Adı geçen ortam yapısı elektromanyetik bir dalganın elektrik ve manyetik alanını umulmadık biçimde etkiler [116, 117].

Kiral (chiral) kelimesi diğer bir temel bilim olan kimyada sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Kiral molekül, bir molekülün ayna simetrisi ile kendisinin aynı olmaması durumuna denmektedir. Bu durum daha kolay anlaşılması açısından sağ el ile sol elin birbirine göre durumlarıyla ilişkilendirilir ve bu durum Şekil 3.1’de daha rahat anlaşılabilir:



Şekil 3.1. Kiral bir molekül yapısı [118]

Fizik ve elektromanyetizmada ise kiral kelimesi daha çok ele alınan ortamın sağ eli ya da onun ayna simetrisi sol eli hareketler biçiminde kullanılmaktadır. Bu hareketler Şekil 3.2’de gösterilen spirali çizdiği yönün farklı olması durumunda daha rahatça anlaşılabilir. Dolayısıyla optik ve elektromanyetizmada sıklıkla “kiral ortamlar” şeklinde ifadeler yer verilmektedir. Elli şeklindeki bir elektromanyetik dalganın yayılımı kutuplanabilir ve sarmal şeklinde tanımlanır. Elektromanyetik bir dalganın kutuplanması, elektrik alan vektörünün doğrultu ve büyüklüğünün zamanla değişen yöneliminin özelliğidir. Kutuplanma genel olarak eliptiktir ve dalganın yayılım doğrultusu saat yönünde veya saat yönünün tersi şeklinde gerçekleşir. Eğer elipse ait birincil ve ikincil eksenler birbirlerine eşitse kutuplanmanın dairesel, ikincil eksenin sıfır olması halinde ise kutuplanmanın doğrusal olduğu anlaşılır. Şekil 3.2, sağ eli şekilde ve saat yönünde ilerleyen dairesel kutuplanmış elektromanyetik bir dalgayı göstermektedir [119].



Şekil 3.2. Elektromanyetik bir dalganın sağ eli şekilde dairesel kutuplanmayla yayılımı [119]

Klasik elektromanyetizmada karşılıklılık, bazı kısıtlamalar altında zamandan bağımsız lineer bir ortam için elektromanyetik alanların sonucunda yazılan Maxwell denklemleri ve zamansal harmonik elektriksel akım yoğunluklarının değişimini içeren ilgili teoremlerin bir türünü ifade etmektedir [120].

Bi-izotrop ortam, elektrik ve manyetik alanların çiftlendiği ortamlardır. Dolayısıyla daha önce de bahsedilen $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ile $\vec{B} = \mu \vec{H}$ yapı ifadeleri, zamansal harmonik elektromanyetik dalgaların varlığında bi-izotrop ortam için;

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \xi \vec{H}, \quad (3.29)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \zeta \vec{E} \quad (3.30)$$

şeklinde belirtilir. Burada belirtilen ξ ile ζ sabitleri her bir ortamın kendine has sabitleri olan çiftlenim sabitleridir. Eğer ε , μ , ξ ve ζ ifadeleri madde içinde yönelimlere bağlıysa, bu ifadeler tensörler şeklinde ifade edilirler. O halde böyle bir ortamın bi-anizotrop ortam olduğu söylenir [116, 117, 121 – 126].

Yukarıda belirtilen çiftlenim sabitleri, χ karşılıklılık ve κ kiral olma parametreleri olmak üzere;

$$\zeta = (\chi + i\kappa)\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (3.31)$$

ve

$$\xi = (\chi - i\kappa)\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (3.32)$$

formülleriyle verilirler ve bu sabitler boyutsuzdur. Denklem (3.31) ve (3.32) ile tanımlanan çiftlenim sabitlerinin boyutları ise s / m veya s.m⁻¹ olmaktadır [122]. Bi-izotrop ortamlar için yapı denklemleri (3.31) ve (3.32) çiftlenim sabitleri yardımıyla,

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + (\chi - i\kappa)\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H} \quad (3.33)$$

ve

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + (\chi + i\kappa)\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E} \quad (3.34)$$

şeklinde en geniş halde yapı denklemlerine dönüşmüş olur [116, 121, 122]. Elde edilen bu son ifadeler Çizelge 3.4'teki gibi sınıflandırılabilir:

Çizelge 3.4. Ortamın izotrop veya bi-izotrop olma durumu [116]

	Kiral olmayan ($\kappa = 0$)	Kiral olan ($\kappa \neq 0$)
Karşılıklı olan ($\chi = 0$)	Basit izotrop ortam	Pasteur ortamı
Karşılıklı olmayan ($\chi \neq 0$)	Tellegen ortamı	Genel bi-izotrop ortam

Kiral olma ve karşılıklılık parametrelerinin her ikisinin de $\chi = \kappa = 0$ olarak ele alınması, (3.33) ve (3.34)'ün bilinen yapı denklemleri olduklarını göstermektedir. Bu iki parametrenin $\chi \neq \kappa \neq 0$ olma durumu ise yine aynı ifadelerdeki en genel yapı denklemlerini verir.

Pasteur ortamı, bir çok bitkideki hidrokarbon salgısı olan reçine ve çam sakızı gibi maddelerin içerisinde, tek elli karışık metal spiraller ile yapılabilir. Buradaki amaç izotropiyi korumaktır. Spiraller, özel bir doğrultu olmaksızın, gelişigüzel yönlendirilmelidir. Manyetoelektrik etki, elektromanyetik alana maruz kalan bir spiralın durumundan anlaşılabilir. Spiral geometrisi bir indüktör biçimindedir. Elektromanyetik dalganın manyetik bileşeninin bir tel üzerinde akım indüklemesi ve ardından aynı elektromanyetik dalganın elektrik bileşenini etkilemesi, benzer biçimde biyolojik yapıdaki spirale gelen elektromanyetik dalganın yapıda yaratacağı etkiyle ilişkilendirilebilir. Pasteur ortam için $\chi = 0$ ifadesi ele alınarak yapı denklemi,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - i\kappa \sqrt{\epsilon\mu} \vec{H} \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada $\vec{D}$ alanı, i fazındaki $\vec{H}$ alanından oluşmuştur [116, 117].

Tellegen ortam ise elektromanyetizmada Pasteur ortamın tersi şeklinde oluşur. Diğer bir ifadeyle burada elektrik bileşeni, manyetik bileşeni değiştirmeye yol açacaktır. Manyetik alanla kontrol edilen elektrik dipolleri bu tipte bir ortama örnek gösterilebilir. Dipoller elektromanyetik dalganın elektrik bileşeniyle döndüğünde, manyetik alanlar da değişecektir. Manyetik doğrultunun değişimi de aynı elektromanyetik dalganın manyetik bileşenini değiştirecektir. Tellegen ortam için $\kappa = 0$ alınarak yapı denklemi,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \chi \sqrt{\epsilon\mu} \vec{E} \quad (3.36)$$

haline gelmektedir. Burada $\vec{D}$ alanı, $\vec{H}$ alanından karşılanmıştır [116, 117]. Denklem (3.33) ve (3.34) ile verilen geniş yapı denklemlerinin her ikisi için, kiral olma ve karşılıklılık parametrelerinin ($\chi = 0$) ve ($\kappa \neq 0$) olarak alınmasıyla elektrik ve elektronikte çeşitli çalışmalar yapılmaktadır [127].

En geniş yapı denklemleri matematiksel dönüşümlerle,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \chi \vec{H} - \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.37)$$

ve

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \chi \vec{E} + \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabilir [122, 123]. Bu ifadeler ise ortamın kiral olarak alınmasıyla (dolayısıyla $\chi = 0$)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} - \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.39)$$

ve

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.40)$$

halinde düzenlenebilir. Bu denklemlerdeki zamana göre türevler kiral ortamdaki zamansal harmonik elektromanyetik dalga yayılımının kutuplanmasının dönmesine neden olur. Kiral olma hali simetrisinin doğal bir sonucudur ve birçok doğal madde, içeriğinde DNA ve şeker içeren kiral maddelerden oluşmaktadır [106]. Uygun dönüşümler altında bu denklemler Faraday ve Ampere yasaları cinsinden,

$$\vec{D} = \epsilon (\vec{E} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (3.41)$$

ve

$$\vec{B} = \mu (\vec{H} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (3.42)$$

formuna dönüşür; burada yeni kiral olma parametresi β olmaktadır. Elde edilen bu yapı denklemleri bi-izotrop kiral ortamlar içindir ve literatürde Drude-Born-Fedorov (DBF) yapı denklemleri olarak adlandırılırlar [121, 122, 124]. Bilinen $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu \vec{H}$ yapı ifadeleriyle değişen Maxwell denklemlerinin (3.41) ve (3.42) denklemleriyle verilen DBF yapı denklemleriyle değişeceği de açıktır.

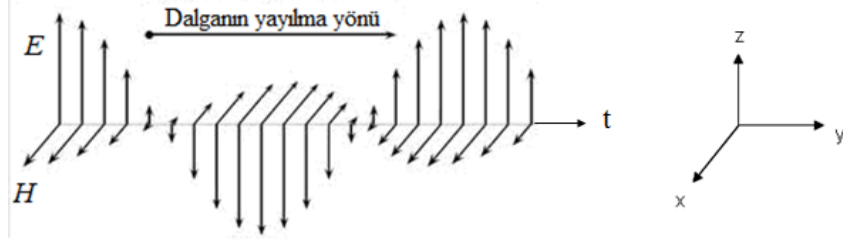
4. ELEKTROMANYETİZMADA ENERJİ KORUNUMU

Bilindiği gibi fizik ve fiziksel uygulamalardaki birçok problemin çözümü gerekli korunum yasalarıyla sağlanmaktadır. Bu korunum yasaları enerjinin korunumu, lineer (çizgisel) momentumun korunumu ve açısal momentumun korunumu şeklinde örneklendirilebilir. Bu üç korunum denkleminin geçerli olduğu sistemler ise Noether Teoremi ⁽¹⁾ altında toplanmaktadır. Fiziğin başta mekanik ve elektromanyetizma gibi alt dallarında enerjinin korunumundan bahsedilir. İş yapabilme yeteneği olan enerji, korunumlu bir kavramdır ve enerjinin ancak bir türden başka bir türüne dönüşümü söz konusu olmaktadır. Bu bölümde elektromanyetizmadaki enerji korunumu vektör notasyonunda ele alınmış ve elektromanyetik enerji akısı ile yoğunluk terimleri türetilmiştir.

4. 1. Elektromanyetik Bir Dalga Olarak Işık

Faraday'ın zamanla değişen manyetik alanların elektrik alan ürettiğini bulmasıyla, Maxwell de zamanla değişen elektrik alanlarla manyetik alanların ortaya çıkabileceğini öne sürmüştür. Maxwell'in bu hipotezi deneysel sonuçlara bağlı olmayıp tamamen simetri düşüncesinden kaynaklanmaktadır. Diğer bir ifadeyle Maxwell, ivmeli olarak hareket eden elektrik yüklerinin boş uzayda sonsuza kadar yayılan birbirine bağlantılı elektrik ve manyetik değişiklikler oluşturduğu hipotezini ileri sürmüştür. Bu hipoteze göre oluşan değişiklikler, uzayda periyodik olarak salınan yüklerden dolayı, elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin hem birbirlerine hem de hareket yönlerine dik dalgalar oldukları sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Bu durum Şekil 4.1'de açık olarak görülmektedir:

⁽¹⁾ Noether teoremi, bir fiziksel sistemde ayırt edilebilir her simetrisinin oluşturacağı etkiye ilişkin bir korunum yasası olduğunu belirtir. Fiziksel bir sistemin etkisi, bir Lagrange fonksiyonunun tümlevi olup buna göre sistemin tutumu en az eylem prensibine göre belirlenebilir. Bu teoreme göre Lagrange; zamandan bağımsızsa bu sistemde enerjinin korunduğu, uzayda yer değişiminden (öteleme) etkilenmiyorsa bu sistemde lineer momentumun korunduğu, uzay içinde dönmeden etkilenmiyorsa bu sistemde açısal momentumun korunduğu ortaya çıkmaktadır. Yeni ufuklar açan bu teoremi Emmy Noether 1915'te kanıtlanmış olup 1918'de yayınlanmıştır [128, 129].



Şekil 4.1. Elektromanyetik dalganın yayılma yönü

Elektromanyetik bir dalganın elektrik ve manyetik bileşenleri zamanla birlikte değişmektedir. Maxwell'in hipotezinin doğru olabilmesi için, elektromanyetik dalgaların bulunması ve sürekli olarak değişen elektrik ve manyetik alanların birbirlerine elektromanyetik indüklemesiyle en başta tanımladığı simetri düşüncesinin varlığı olmalıdır [130]. Maxwell, ϵ_0 boş uzayın elektriksel geçirgenlik sabiti ve μ_0 boş uzayın manyetik geçirgenlik sabitlerini sırasıyla,

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C / N.m}^2 \quad (4.1)$$

ve

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N / A}^2 \quad (4.2)$$

şeklinde kullanarak,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \times 10^8 \text{ m / s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m / s} \quad (4.3)$$

sonucunu bulup, boş uzayda elektromanyetik dalgaların hızının, ışık dalgalarının hızıyla aynı olduğunu göstermiştir. Bu durumun rastlantı olamayacağını düşünen Maxwell, ışığın elektromanyetik bir dalga olduğu kanısına varmıştır [130].

Işık, kompleks uzayda elektrik ve manyetik alanların her ikisinin de var olduğu ortamda ilerlemektedir. Yani, elektromanyetik dalgalar zamansal harmonik alanlardan oluşan periyodik dalgaları ifade etmektedir. Bu durum bir önceki bölümde elektrik ve manyetik alanların kompleks uzaydaki gösterimleri verilerek anlatılmıştı. Ayrıca ışığın boşlukta ya da uzayda nasıl yol alabildiği modern fizik ve görelilik yasalarıyla açıklanmaktadır. Bu anlamda, uzay ve zamanda eylemsiz (ivmesiz) referans sistemlerinin, tüm fizik yasalarının aynı biçimde eşitliklerle ifade edildiği referans sistemleri olduğu söylenebilir [131]. Klasik düşünceden ayrılan Einstein'ın özel görelilik postülalarına göre;

- a) S eylemsiz bir referans sistemi olmak üzere, S'ye göre sabit hızla hareket eden diğer S' referans sisteminin de eylemsiz olduğu,
- b) tüm eylemsiz referans sistemlerinde ışığın boşluktaki hızının her yönde aynı ve $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ değerine eşit olduğu ortaya çıkmaktadır. İkinci postüla, ışığın tüm doğrultularda aynı hızla gidebildiği tek bir referans sisteminin varlığı düşüncesini yıkan Michelson-Morley deneyinin teorik sonucu olup, c ışık hızının evrensel bir sabit oluşunu belirtmesi açısından büyük önem taşımaktadır [131].

4. 2. Poynting Teoremi

Denklem (3.1) – (3.4) ile tanımlanan Maxwell denklemleriyle, elektromanyetizmadaki enerji korunumu birçok çalışmada sıklıkla ele alınmıştır [132 – 136]. Elektrik ve manyetik alanlar ile bu alanlara ait akı yoğunluklarının birbirleri arasındaki dönüşümlerden daha önce bahsedilmişti. Kinsler ve arkadaşları bu vektörel büyüklüklere ait farklı gösterimler ve isimlendirmelerle literatüre değişik bir katkıda bulunmuştur [135]. Bu çalışmaya göre Maxwell denklemlerinden yola çıkılarak, Poynting teoremi ve süreklilik denklemine ait farklı gösterimler ileri sürülmüştür. Poynting teoreminin, elektrik ve manyetik alan vektörleriyle oluşturulan ve $\vec{E} \times \vec{H}$ ile gösterilen Abraham formuyla ifadesi; elektrik alan ve manyetik akı yoğunluk vektörleriyle oluşturulan ve $\vec{E} \times \vec{B}$ ile gösterilen elektriksel akım formu ifadesi; elektrik akı yoğunluğu ve manyetik alan vektörleriyle oluşturulan ve $\vec{D} \times \vec{H}$ ile gösterilen manyetik akım formu ifadesi; elektrik ve manyetik akı yoğunluk vektörleriyle verilen ve $\vec{D} \times \vec{B}$ ile gösterilen Minkowski formu irdelenmiştir. Bu bölümde Poynting vektörü ve teoremine ait sıklıkla kullanılan elektriksel akım formu ele alınmıştır. Denklem (3.1) – (3.4) ile tanımlanan Maxwell denklemlerinin Gauss veya CGS birim sistemindeki halleri genel anlamda,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_e \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.7)$$

ile verilmektedir. Özel bir koşul altında $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ biçiminde alınmasıyla bu denklemler,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.11)$$

haline dönüşmektedir. Elektrik yük yoğunluğu ile elektriksel akım yoğunluğu yokluğunda ise bu denklemler boyutsuz formda,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.14)$$

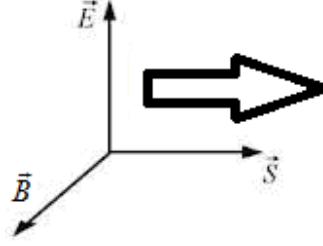
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.15)$$

olarak yazılabilirler. Bu denklemlerdeki Faraday ve Ampere-Maxwell yasaları üzerinde gerekli matematiksel işlemlerle elektromanyetizmada enerji korunum denklemini ulaşılabildiği görülmektedir. Denklem (4.12) – (4.15) ile tanımlanan sistem göz önüne alındığında, Faraday yasasını gösteren (4.14) ifadesini soldan $\vec{B}$ manyetik akı yoğunluğu ve Ampere-Maxwell yasasını ifade eden (4.15) ifadesini ise yine soldan $\vec{E}$ elektrik alan vektörleriyle çarpıp sonuç taraf tarafa çıkartıldığında,

$$-\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.16)$$

ifadesi elde edilmektedir. Daha önce de değinildiği gibi birbirlerine dik elektrik ve manyetik alan vektörleri elektromanyetik dalganın ilerleme yönüne de diktir. Şekil 4.1 ile gösterilen elektromanyetik dalganın ilerleme yönü aynı zamanda dalgaya ait enerji akısı olan $\vec{S}$ vektörünün de yönüdür. Yani, ışık elektromanyetik

enerji taşıyan dalga paketlerinden oluşmaktadır. Şekil 4.2 Poynting vektörünün yönünü göstermektedir:



Şekil 4.2. Poynting vektörünün yönü

$\vec{S}$ vektörü elektromanyetik enerji akışını ifade eden Poynting vektörünü ve u terimi ise elektromanyetik enerji yoğunluğunu göstermek üzere bu terimler aşağıdaki şekilde gösterilebilirler:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) \quad (4.18)$$

Denklem (4.16),

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (4.19)$$

vektör özdeşliği kullanılarak (4.17) ve (4.18) ifadeleri yardımıyla,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (4.20)$$

biçiminde yazılabilir. Elektrodinamikte iş-enerji teoreminin karşılığı olarak bilinen Poynting teoreminden yola çıkarak elde edilen bu ifade, elektromanyetik enerji korunum denklemi olarak adlandırılır.

5. Bİ-İZOTROP KİRAL ORTAMLAR İÇİN ELEKTROMANYETİZMA-NIN KOMPLEKS OKTONYONİK TEMSİLİ

Bu bölümde, elektrik ve manyetik alanların bi-izotrop kiral ortamlar için bir alan denklemi şeklinde tanımlanıp tanımlanamayacağı ve bunun sonucunda ise Maxwell denklemlerinin yine aynı ortam için tek ve kısa bir kaynak denklemi altında yazılıp yazılamayacağı araştırılmıştır. Bu işlem için en belirleyici etkenlerden birisi elektromanyetizmada sıklıkla kullanılan yapı denklemleridir. Ancak, kullanılacak yapı denklemlerinin bi-izotrop kiral ortamlar için DBF yapı denklemleri biçiminde ele alınması gerektiği unutulmaması gereken önemli bir husustur. Burada izotrop ortamlar için geçerli olan yapı denklemleriyle elde edilen sonucun, elektrik ve manyetik alanların çiftlenmesiyle oluşan bi-izotrop ortamlar için yazılan yapı denklemleriyle bulunan sonucun karşılaştırılmasının yapılması amaçlanmıştır.

5. 1. Kompleks Oktonyonik Diferansiyel İşlemci

Kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ve bu işlemcinin oktonyonik eşleniği Cayley-Dickson notasyonunda sırasıyla,

$$\square = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \frac{\partial}{\partial x} e_5 + \frac{\partial}{\partial y} e_6 + \frac{\partial}{\partial z} e_7 = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \nabla \quad (5.1)$$

ve

$$\bar{\square} = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_0 - \frac{\partial}{\partial x} e_5 - \frac{\partial}{\partial y} e_6 - \frac{\partial}{\partial z} e_7 = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_0 - \nabla \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu operatörün kendisi ile oktonyonik eşleniğinin çarpımı sıra değişimli özelliği sağlar ve sonuç ise,

$$\square \bar{\square} = \bar{\square} \square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

biçiminde 3-boyutlu kartezyen koordinatlarda laplasyen işlemcisi ve zamana göre 2. türev operatörü cinsinden çıkmaktadır [42 – 44].

5. 2. Kompleks Oktanyonik Maxwell ve Yapı Denklemleri

İzotrop ortamlar için yapılan önceki çalışmalarda, $\mathbb{J}$ kompleks oktanyonik kaynak denklemini göstermek üzere,

$$\mathbb{J} = \frac{4\pi}{c} \left(-c\rho_e e_0 + J_x' e_1 + J_y' e_2 + J_z' e_3 + ic\rho_m e_4 - iJ_x e_5 - iJ_y e_6 - iJ_z e_7 \right) \quad (5.4)$$

olarak tanımlanmıştır [42, 43]. Burada ρ_e terimi oktanyonik elektrik yük yoğunluğunu ve ρ_m terimi de manyetik tek kutup (monopol) için oktanyonik manyetik yük yoğunluğunu belirtmektedir. Oktanyonik elektriksel akım yoğunluğu ile manyetik tek kutup için oktanyonik manyetik akım yoğunlukları ise sırasıyla,

$$\mathbf{J} = J_x e_5 + J_y e_6 + J_z e_7 \quad (5.5)$$

ve

$$\mathbf{J}' = J_x' e_1 + J_y' e_2 + J_z' e_3 \quad (5.6)$$

olarak tanımlanmaktadır. Manyetik tek kutup halen deneysel olarak gözlemlenmediği halde, yapılan birçok teorik çalışmada Maxwell denklemleri tanımlanırken hesaba katılmaktadır. Maxwell denklemlerinin çeşitli birim sistemlerinde ve ortamlarda farklı biçimde gösterilebileceği önceki bölümlerde ele alınmıştı. Manyetik yük ve akımların olması durumunda Maxwell denklemleri,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_e \quad (5.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m \quad (5.8)$$

$$\varepsilon \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}' \quad (5.9)$$

$$\mu \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = +\frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanmış olsunlar. Buradaki amaç bi-izotrop kiral ortamlar için yapı denklemlerini kullanarak (5.7) – (5.10) ifadeleriyle verilen Maxwell denklemlerinin tek, etkin ve kısa bir kaynak denklemi altında kompleks oktanyon cebri kullanarak elde edilip edilemeyeceğini araştırmak olacaktır. Bunun için (3.41) ve (3.42) eşitlikleriyle verilen DBF yapı denklemlerinden faydalanmak gerekir. Bu denklemler oktanyonik formda,

$$\mathbf{D} = (\mathbf{e}_0)\varepsilon\mathbf{E} + (-\mathbf{e}_4)\varepsilon\beta(\nabla \times \mathbf{E}) \quad (5.11)$$

ve

$$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_0)\mu\mathbf{H} + (\mathbf{e}_4)\mu\beta(\nabla \times \mathbf{H}) \quad (5.12)$$

biçiminde oktonyon bazları cinsinden gösterilsinler. Bu iki yapı denklemi aşağıdaki gibi $\mathbb{F}$ kompleks oktonyonik alan ifadesi,

$$\mathbb{F} = \mathbf{D} + i\mathbf{B} \quad (5.13)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu alan denklemi,

$$\mathbb{F} = [(\mathbf{e}_0)\varepsilon\mathbf{E} + (-\mathbf{e}_4)\varepsilon\beta(\nabla \times \mathbf{E})] + i[(\mathbf{e}_0)\mu\mathbf{H} + (\mathbf{e}_4)\mu\beta(\nabla \times \mathbf{H})] \quad (5.14)$$

olarak yazılmaktadır. Burada elektrik alan vektörü ile manyetik alan vektörünün oktonyonik bazlarla sırasıyla,

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_5 + E_y\mathbf{e}_6 + E_z\mathbf{e}_7 \quad (5.15)$$

ve

$$\mathbf{H} = H_x\mathbf{e}_1 + H_y\mathbf{e}_2 + H_z\mathbf{e}_3 \quad (5.16)$$

temsili yapılmaktadır. Denklem (5.14) ifadesi daha açık biçimde yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = & \varepsilon \left[(E_x(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_5) + E_y(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_6) + E_z(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_7)) \right. \\ & + \beta \left(\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3) \right) \Big] \\ & + i\mu \left[(H_x(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1) + H_y(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2) + H_z(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3)) \right. \\ & + \beta \left(\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5) + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6) + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_7) \right) \Big] \end{aligned} \quad (5.17)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = & \varepsilon \left[(E_x(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_5) + E_y(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_6) + E_z(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_7)) \right. \\ & + \beta \left((\nabla \times \mathbf{E})_x (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1) + (\nabla \times \mathbf{E})_y (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2) + (\nabla \times \mathbf{E})_z (-\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3) \right) \Big] \\ & + i\mu \left[(H_x(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1) + H_y(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2) + H_z(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3)) \right. \\ & + \beta \left((\nabla \times \mathbf{H})_x (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5) + (\nabla \times \mathbf{H})_y (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6) + (\nabla \times \mathbf{H})_z (\mathbf{e}_4\mathbf{e}_7) \right) \Big] \end{aligned} \quad (5.18)$$

elde edilmiş olur. Denklem (5.18) ile verilen oktonyonik alan denkleminde baz elemanların çarpımı Cayley-Dickson kurallarına göre yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = & \varepsilon \left[(E_x e_5 + E_y e_6 + E_z e_7) + \beta \left((\nabla \times \mathbf{E})_x e_5 + (\nabla \times \mathbf{E})_y e_6 + (\nabla \times \mathbf{E})_z e_7 \right) \right] \\ & + i\mu \left[(H_x e_1 + H_y e_2 + H_z e_3) + \beta \left((\nabla \times \mathbf{H})_x e_1 + (\nabla \times \mathbf{H})_y e_2 + (\nabla \times \mathbf{H})_z e_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

ifadesine ulaşılır. Bir fiziksel sistemde herhangi bir vektör alanı ile o vektör alanının rotasyonelinin birbirine dik olma koşulundan veya diğer bir deyişle rotasyonel işleminin bir vektör alanını devamlı olarak kıvrıp spiral hareketi yaptırmasından dolayı, DBF yapı denklemleri oktonyonik formda (5.11) ve (5.12) ile belirtilmiştir. Bu ifadelerdeki (e_4) bazı, farklı bazlarda tanımlanan bu vektör alanlarını daha sonradan aynı düzleme getirmek için eklenmiştir. Denklem (5.1) ile verilen kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ile (5.19) şeklinde verilen alan ifadesinin oktonyonik çarpımı yapıldığında,

$$\begin{aligned} \square \mathbb{F} = & \mathbb{J} \\ & = \frac{4\pi}{c} \left(-c\rho_e e_0 + J_x' e_1 + J_y' e_2 + J_z' e_3 + ic\rho_m e_4 - iJ_x e_5 - iJ_y e_6 - iJ_z e_7 \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

eşitliğinin sağlanması beklenmektedir. Burada $\mathbb{J}$ teriminin, (5.4) ifadesiyle tanımlanan kompleks oktonyonik kaynak denklemi olduğu açıktır. $\square \mathbb{F}$ ifadesi daha açık bir formda düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \square \mathbb{F} = & e_0 \left[-\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} \right) \right] \\ & + e_1 \left[-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \mu \beta \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y} \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} \right) \right] \\ & + e_2 \left[-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \mu \beta \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial t \partial z} \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} \right) + \varepsilon \beta \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{e}_3 \left[-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + \varepsilon\beta \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} \right) + \varepsilon\beta \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \right) \right] \\
& + i\mathbf{e}_4 \left[\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial x} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial y} \right) \right] \\
& + i\mathbf{e}_5 \left[\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon\beta \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial z} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} \right) \right] \\
& + i\mathbf{e}_6 \left[\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon\beta \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} \right) \right] \\
& + i\mathbf{e}_7 \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \varepsilon\beta \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} \right) + \mu\beta \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \right) \right] \tag{5.21}
\end{aligned}$$

olarak yazılabildiği gibi daha kısa şekilde yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\Box \mathbb{F} = & \mathbf{e}_0 \left[-\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{E})_x - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{E})_y - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{E})_z \right] \\
& + \mathbf{e}_1 \left[-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mu\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})_x - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_x - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{E})_z + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{E})_y \right] \\
& + \mathbf{e}_2 \left[-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mu\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})_y - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_y + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{E})_z - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{E})_x \right] \\
& + \mathbf{e}_3 \left[-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})_z - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_z - \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{E})_y + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{E})_x \right] \\
& + i\mathbf{e}_4 \left[\mu \nabla \cdot \mathbf{H} + \mu\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{H})_x + \mu\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{H})_y + \mu\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{H})_z \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +ie_5 \left[\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})_x - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_x - \mu\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{H})_z + \mu\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{H})_y \right] \\
& +ie_6 \left[\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})_y - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_y + \mu\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{H})_z - \mu\beta \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{H})_x \right] \\
& +ie_7 \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})_z - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_z - \mu\beta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{H})_y + \mu\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{H})_x \right]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

biçiminde elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki ifade sırasıyla kompleks oktonyonun reel ve kompleks bazları altında sırasıyla (e_0) , (e_1, e_2, e_3) , $i(e_4)$ ve $i(e_5, e_6, e_7)$ şeklinde toplanıp yazıldığında ise,

$$\begin{aligned}
\Box F = & \left[-\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} - \varepsilon\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right] \\
& + \left[-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) - \varepsilon \nabla \times \mathbf{E} - \varepsilon\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right] \\
& + i \left[\mu \nabla \cdot \mathbf{H} + \mu\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \right] \\
& + i \left[\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) - \mu \nabla \times \mathbf{H} - \mu\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mu\beta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

olarak kısaltılabilir. Denklem (3.41) ve (3.42) ile verilen DBF yapı denklemlerinin diverjansları ve zamana göre türevleri alındığında sırasıyla,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{E}) = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \varepsilon\beta \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}), \tag{5.24}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + \mu\beta \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \tag{5.25}$$

ve

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{E}) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\beta \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}), \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\beta \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \tag{5.27}$$

ifadeleri elde edilmektedir. Denklem (5.23), bu diverjans ve zamana göre türev ifadeleriyle birlikte $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ vektör özdeşliği göz önüne alınarak,

$$\Box F = (-\nabla \cdot \mathbf{D}) + \left[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E}) \right] + i (\nabla \cdot \mathbf{B}) + i \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mu (\nabla \times \mathbf{H}) \right] \tag{5.28}$$

biçiminde kısaca yazılabildiği gibi, kompleks oktonyon bazlarının ayrı ayrı yeniden yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\Box \mathbf{F} &= \mathbf{J} \\
&= \mathbf{e}_0 (-\nabla \cdot \mathbf{D}) \\
&+ \mathbf{e}_1 \left[-\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_x \right] + \mathbf{e}_2 \left[-\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_y \right] + \mathbf{e}_3 \left[-\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} - \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E})_z \right] \\
&+ i \mathbf{e}_4 (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\
&+ i \mathbf{e}_5 \left[\frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial t} - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_x \right] + i \mathbf{e}_6 \left[\frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial t} - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_y \right] + i \mathbf{e}_7 \left[\frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial t} - \mu (\nabla \times \mathbf{H})_z \right] \\
&= \frac{4\pi}{c} \left(-c\rho_e \mathbf{e}_0 + \mathbf{J}_x' \mathbf{e}_1 + \mathbf{J}_y' \mathbf{e}_2 + \mathbf{J}_z' \mathbf{e}_3 + ic\rho_m \mathbf{e}_4 - i\mathbf{J}_x \mathbf{e}_5 - i\mathbf{J}_y \mathbf{e}_6 - i\mathbf{J}_z \mathbf{e}_7 \right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

şeklinde bulunmaktadır. Elde edilen son ifadenin sağ tarafı ile (5.7) – (5.10) ile tanımlanan Maxwell denklemlerinin eşit olduğu görülmektedir. O halde, bi-izotrop kiral ortamlar için DBF yapı denklemlerinden yararlanarak kompleks oktonyonik alan denkleminin ve sonuçta Maxwell denklemlerini içeren kompleks oktonyonik kaynak denkleminin tanımlandığı görülmüştür. Bulunan oktonyonik kaynak denkleminin izotrop ortamlarda bulunan ifadeyle aynı olduğu da açıktır. Yani özel bir durum altında (5.23) ifadesi için, β kiral olma parametresinin $\beta = 0$ ve ortamın elektriksel ve manyetik geçirgenlik sabitlerinin $\varepsilon = \mu = 1$ olması halinde bi-izotrop ortamların izotrop ortamlara indirgendiği gözlemlenen diğer bir sonuçtur. Kompleks oktonyonik alan denkleminde (3.33) ve (3.34) ifadelerinin kullanılmamasının nedeni ise kompleks oktonyonik kaynak denklemine ulaşamadığı içindir. Benzer olarak, (3.37) ve (3.38) ele alınarak Maxwell denklemlerinin oktonyonik temsili tek ve kısa bir kaynak denklemi altında yazılamamaktadır.

6. KOMPLEKS OKTONYONLARLA ELEKTROMANYETİK ENERJİ KORUNUMU

Bu bölümde elektromanyetizmadaki enerji korunumunu elde edebilmek için, birleşimsiz özellik gösteren kompleks oktonyon cebri kullanılmış ve buna bağlı yeni tanımlamalar verilmiştir.

6. 1. Kompleks Oktonyonik Maxwell ve Alan Denklemleri

Elektromanyetizmada enerji korunumu oktonyon cebriyle incelemek için (4.12) – (4.15) ifadeleriyle verilen yük ve akım yoğunluklarından bağımsız Maxwell denklemleri boyutsuz formda tanımlansınlar. Burada, elektromanyetik yapı denklemlerinin $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ile $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ şeklinde ifade edildiği ve ortamın elektriksel ve manyetik geçirgenlik sabitlerinin $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ olarak seçildiği gözden kaçırılmamalıdır. Elektrik alan ve manyetik akı yoğunluğunu gösteren ifadeler oktonyonik olarak sırasıyla,

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_5 + E_y \mathbf{e}_6 + E_z \mathbf{e}_7 \quad (6.1)$$

ve

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_1 + B_y \mathbf{e}_2 + B_z \mathbf{e}_3 \quad (6.2)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. İzotrop bir ortam için $\mathbb{F}$ kompleks oktonyonik alan ifadesi ise (6.1) ve (6.2) cinsinden,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \mathbf{E} + i\mathbf{B} \\ &= (E_x \mathbf{e}_5 + E_y \mathbf{e}_6 + E_z \mathbf{e}_7) + i(B_x \mathbf{e}_1 + B_y \mathbf{e}_2 + B_z \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (6.3)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, uzay-zaman terimlerini kapsayan diferansiyel işlemci kompleks oktonyonik formda (5.1) ile verilmektedir. Bu işlemcide, hesaplamaların kolay olması açısından ışık hızını gösteren ifadenin $c=1$ olarak alınmasıyla,

$$\square = i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_5 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_6 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_7 = i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 + \nabla \quad (6.4)$$

operatörü elde edilmektedir. Kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ile alan denkleminin oktonyon çarpımının sonucunun (4.12) – (4.15) ile verilen Maxwell denklemleriyle,

$$\square F = 0 \quad (6.5)$$

olduğu kolaylıkla bulunabilir. Diğer bir ifadeyle (6.4)'teki işlemci, (6.3)'e etkiğinde ele alınan Maxwell denklemlerinin akım ve yük yoğunluklarını içermemelerinden dolayı, (6.5) elde edilmektedir.

6. 2. Kompleks Oktonyonik Ayar Dönüşümü

Denklem (6.5),

$$\mathbb{L} = F^* \cdot (\square F) \quad (6.6)$$

şeklindeki oktonyonik Lagrange yoğunluğundan türetilir [137, 138]. Böylece varyasyon prensibi,

$$\delta \mathcal{A} = \delta \int dt \int d^3x \mathbb{L} = 0 \quad (6.7)$$

olmaktadır [137, 139]. Denklem (6.6)'daki kompleks oktonyonik alan ifadesi ile bu alanın kompleks eşleniği olan F ve F^* terimleri varyasyon hesabında bağımsız değişkenler olarak ele alınmaktadır. Elektromanyetik alanlar için enerji korunum denklemi kompleks oktonyonik dönüşümle,

$$F \rightarrow F' = e^{i\alpha} F \approx [(1 + \alpha) e_0 F] \quad (6.8)$$

ifadesiyle belirlenebilir. Burada α sabiti, x ve t değişkenlerine bağlı sonsuz küçük sabittir. Bu dönüşüm birinci mertebeden oktonyonik ayar dönüşümü olarak adlandırılabilir ve bu durum aynı zamanda kuaternionik ve kompleks kuaternionik sistemler için de geçerlidir [133, 136]. Bu çalışmada α niceliğinin özellikleri ele alınmamıştır. Denklem (6.8) ile tanımlanan kompleks oktonyonik dönüşüm (6.6)'ya uygulandığında,

$$\mathbb{L}'(F') = \mathbb{L}[F + (1 + \alpha) e_0 F] = \mathbb{L} + \delta \mathbb{L} \quad (6.9)$$

biçiminde kompleks oktonyonik Lagrange yoğunluğu biçiminde türetim yapılabilir. Burada $\delta \mathbb{L}$ terimi,

$$\delta \mathbb{L} = F^* \cdot [\square(\alpha e_0 F)] \quad (6.10)$$

şeklinde olup, bu ifadenin daha açık yazılımı,

$$\delta \mathcal{L} = F^* \cdot [\square(\alpha)] F + (\alpha)(\square F) \quad (6.11)$$

biçiminde elde edilmektedir. Denklem (6.5)'den dolayı (6.11)'in sağ tarafındaki ikinci terimden katkı gelmez. Böylece, (6.7)'deki $\mathcal{A}$ action teriminin varyasyonu,

$$\delta \mathcal{A} = - \int dt \int dx [F^* \cdot (\square(\alpha) F)] = 0 \quad (6.12)$$

haline gelmektedir. Bu ifadedeki uzaysal ve zamansal terimlerin integrasyonu ve α keyfi sabiti ortadan kaldırıldığında kompleks oktonyonik denklem,

$$F^* \cdot (\square F) = 0 \quad (6.13)$$

şeklinde olacaktır [133, 136].

6. 3. Kompleks Oktonyonik Poynting Teoremi

Denklem (4.12) – (4.15) ile verilen Maxwell denklemleriyle (6.5) eşitliğinin sağlandığı belirtilmişti. Bu durum aşağıdaki gibi açık olarak gösterilebilir:

$$\square F = \left(i \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \nabla \right) (E + iB) \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \square F &= \left(i \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \frac{\partial}{\partial x} e_5 + \frac{\partial}{\partial y} e_6 + \frac{\partial}{\partial z} e_7 \right) \\ &\quad \left[(E_x e_5 + E_y e_6 + E_z e_7) + i (B_x e_1 + B_y e_2 + B_z e_3) \right] \\ &= e_0 \left(-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + e_1 \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + e_2 \left(-\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + e_3 \left(-\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ &\quad + i e_4 \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + i e_5 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + i e_6 \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + i e_7 \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}
\Box F &= e_0 (-\nabla \cdot \mathbf{E}) \\
&+ e_1 \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E})_x \right) + e_2 \left(-\frac{\partial B_y}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E})_y \right) + e_3 \left(-\frac{\partial B_z}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E})_z \right) \\
&+ i e_4 (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\
&+ i e_5 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{B})_x \right) + i e_6 \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{B})_y \right) + i e_7 \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{B})_z \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Denklem (6.16)'dan da görülebileceği gibi $\Box F = 0$ eşitliğinin sağlanması, tanımlanan Maxwell denklemlerinde yük ve akımların olmamasından kaynaklanmaktadır. Kompleks oktonyonik Lagrange yoğunluğu (6.13) ile verilmektedir. Bu ifade daha açık biçimde,

$$\begin{aligned}
F^* \cdot (\Box F) &= (\mathbf{E} - i\mathbf{B}) \cdot \left\{ \left(i \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \nabla \right) (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \right\} \\
&= [E_x e_5 + E_y e_6 + E_z e_7 - iB_x e_1 - iB_y e_2 - iB_z e_3] \cdot \\
&\cdot \left\{ \left(i \frac{\partial}{\partial t} e_0 + \frac{\partial}{\partial x} e_5 + \frac{\partial}{\partial y} e_6 + \frac{\partial}{\partial z} e_7 \right) \right. \\
&\left. [E_x e_5 + E_y e_6 + E_z e_7 + iB_x e_1 + iB_y e_2 + iB_z e_3] \right\}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

olarak yazılabilir. Burada F^* terimi (6.3) ile verilen kompleks oktonyonik alan denkleminin kompleks eşleniğini ve “.” sembolü ise nokta çarpımı ifade etmektedir. Bu denklemin doğruluğu, (6.5) ve (6.16)'nın sonucundan kaynaklı doğrulanabilir. F^* oktonyonu ile $\Box F$ oktonyonunun nokta çarpımının (2.28) özdeşliği yardımıyla,

$$F^* \cdot (\Box F) = -\frac{1}{2} [F^* (\Box F) + \overline{F^* (\Box F)}] = 0 \tag{6.18}$$

olması gerektiği görülmektedir. O halde öncelikle $F^* (\Box F)$ ile $\overline{F^* (\Box F)}$ terimlerinin oktonyonik çarpımları yapılmalıdır. Bu çarpımlar açık olarak sırasıyla,

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{e}_0 \left[-\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - B_x (\nabla \times \mathbf{E})_x - B_y (\nabla \times \mathbf{E})_y - B_z (\nabla \times \mathbf{E})_z \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{B})_x + E_y (\nabla \times \mathbf{B})_y + E_z (\nabla \times \mathbf{B})_z \right] \\
& + i\mathbf{e}_1 \left[B_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) + B_y \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_y (\nabla \times \mathbf{E})_z - B_z \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_z (\nabla \times \mathbf{E})_y \right. \\
& \quad \left. - E_x (\nabla \cdot \mathbf{B}) - E_y \frac{\partial E_z}{\partial t} + E_y (\nabla \times \mathbf{B})_z + E_z \frac{\partial E_y}{\partial t} - E_z (\nabla \times \mathbf{B})_y \right] \\
& + i\mathbf{e}_2 \left[-B_x (\nabla \times \mathbf{E})_z - B_x \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_y (\nabla \cdot \mathbf{E}) + B_z \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_z (\nabla \times \mathbf{E})_x \right. \\
& \quad \left. + E_x \frac{\partial E_z}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{B})_z - E_y (\nabla \cdot \mathbf{B}) - E_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + E_z (\nabla \times \mathbf{B})_x \right] \\
& + i\mathbf{e}_3 \left[B_x \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{E})_y - B_y \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_y (\nabla \times \mathbf{E})_x + B_z (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right. \\
& \quad \left. - E_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{B})_y + E_y \frac{\partial E_x}{\partial t} - E_y (\nabla \times \mathbf{B})_x - E_z (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] \\
& + \mathbf{e}_4 \left[-\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{B})_x + B_y (\nabla \times \mathbf{B})_y + B_z (\nabla \times \mathbf{B})_z \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{E})_x - E_y (\nabla \times \mathbf{E})_y - E_z (\nabla \times \mathbf{E})_z \right] \\
& + \mathbf{e}_5 \left[B_x (\nabla \cdot \mathbf{B}) - B_y \frac{\partial E_z}{\partial t} + B_y (\nabla \times \mathbf{B})_z + B_z \frac{\partial E_y}{\partial t} - B_z (\nabla \times \mathbf{B})_y \right. \\
& \quad \left. - E_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) + E_y \frac{\partial B_z}{\partial t} + E_y (\nabla \times \mathbf{E})_z - E_z \frac{\partial B_y}{\partial t} - E_z (\nabla \times \mathbf{E})_y \right] \\
& + \mathbf{e}_6 \left[B_x \frac{\partial E_z}{\partial t} - B_x (\nabla \times \mathbf{B})_z + B_y (\nabla \cdot \mathbf{B}) - B_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + B_z (\nabla \times \mathbf{B})_x \right. \\
& \quad \left. - E_x \frac{\partial B_z}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{E})_z - E_y (\nabla \cdot \mathbf{E}) + E_z \frac{\partial B_x}{\partial t} + E_z (\nabla \times \mathbf{E})_x \right] \\
& + \mathbf{e}_7 \left[-B_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{B})_y + B_y \frac{\partial E_x}{\partial t} - B_y (\nabla \times \mathbf{B})_x + B_z (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right. \\
& \quad \left. + E_x \frac{\partial B_y}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{E})_y - E_y \frac{\partial B_x}{\partial t} - E_y (\nabla \times \mathbf{E})_x - E_z (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \tag{6.19}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{e}_0 \left[-\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - B_x (\nabla \times \mathbf{E})_x - B_y (\nabla \times \mathbf{E})_y - B_z (\nabla \times \mathbf{E})_z \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{B})_x + E_y (\nabla \times \mathbf{B})_y + E_z (\nabla \times \mathbf{B})_z \right] \\
& -i\mathbf{e}_1 \left[B_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) + B_y \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_y (\nabla \times \mathbf{E})_z - B_z \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_z (\nabla \times \mathbf{E})_y \right. \\
& \quad \left. - E_x (\nabla \cdot \mathbf{B}) - E_y \frac{\partial E_z}{\partial t} + E_y (\nabla \times \mathbf{B})_z + E_z \frac{\partial E_y}{\partial t} - E_z (\nabla \times \mathbf{B})_y \right] \\
& -i\mathbf{e}_2 \left[-B_x (\nabla \times \mathbf{E})_z - B_x \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_y (\nabla \cdot \mathbf{E}) + B_z \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_z (\nabla \times \mathbf{E})_x \right. \\
& \quad \left. + E_x \frac{\partial E_z}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{B})_z - E_y (\nabla \cdot \mathbf{B}) - E_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + E_z (\nabla \times \mathbf{B})_x \right] \\
& -i\mathbf{e}_3 \left[B_x \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{E})_y - B_y \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_y (\nabla \times \mathbf{E})_x + B_z (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right. \\
& \quad \left. - E_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{B})_y + E_y \frac{\partial E_x}{\partial t} - E_y (\nabla \times \mathbf{B})_x - E_z (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] \\
& -\mathbf{e}_4 \left[-\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{B})_x + B_y (\nabla \times \mathbf{B})_y + B_z (\nabla \times \mathbf{B})_z \right. \\
& \quad \left. - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{E})_x - E_y (\nabla \times \mathbf{E})_y - E_z (\nabla \times \mathbf{E})_z \right] \\
& -\mathbf{e}_5 \left[B_x (\nabla \cdot \mathbf{B}) - B_y \frac{\partial E_z}{\partial t} + B_y (\nabla \times \mathbf{B})_z + B_z \frac{\partial E_y}{\partial t} - B_z (\nabla \times \mathbf{B})_y \right. \\
& \quad \left. - E_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) + E_y \frac{\partial B_z}{\partial t} + E_y (\nabla \times \mathbf{E})_z - E_z \frac{\partial B_y}{\partial t} - E_z (\nabla \times \mathbf{E})_y \right] \\
& -\mathbf{e}_6 \left[B_x \frac{\partial E_z}{\partial t} - B_x (\nabla \times \mathbf{B})_z + B_y (\nabla \cdot \mathbf{B}) - B_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + B_z (\nabla \times \mathbf{B})_x \right. \\
& \quad \left. - E_x \frac{\partial B_z}{\partial t} - E_x (\nabla \times \mathbf{E})_z - E_y (\nabla \cdot \mathbf{E}) + E_z \frac{\partial B_x}{\partial t} + E_z (\nabla \times \mathbf{E})_x \right] \\
& -\mathbf{e}_7 \left[-B_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + B_x (\nabla \times \mathbf{B})_y + B_y \frac{\partial E_x}{\partial t} - B_y (\nabla \times \mathbf{B})_x + B_z (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right. \\
& \quad \left. + E_x \frac{\partial B_y}{\partial t} + E_x (\nabla \times \mathbf{E})_y - E_y \frac{\partial B_x}{\partial t} - E_y (\nabla \times \mathbf{E})_x - E_z (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \quad (6.20)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\overline{\mathbb{F}^*(\square\mathbb{F})}$ terimine ait çarpım sonucunun, (6.19)'un $\mathbf{e}_0$ bazı dışındaki bazlarının işaretlerinin tersi olduğu görülmektedir. Denklem (6.18)'in sonucu bu çarpımlar neticesinde,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^* \cdot (\square \mathbb{F}) &= i\epsilon_0 \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) \\
&\quad - i\epsilon_0 \left(E_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right) \\
&\quad + i\epsilon_0 \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \\
&\quad + i\epsilon_0 \left(B_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\mathbb{F}^* (\square \mathbb{F}) + \overline{\mathbb{F}^* (\square \mathbb{F})} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.21}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade daha basit anlamda,

$$\mathbb{F}^* \cdot (\square \mathbb{F}) = i\epsilon_0 \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + i\epsilon_0 (\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) = 0 \tag{6.22}$$

yazılabilir. Denklem (6.22) elektromanyetizmada enerji korunumunun kompleks oktonyonik formunu ifade etmektedir. Bu denklemin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimler sırasıyla,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \tag{6.23}$$

ve

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{6.24}$$

şeklindedir. Denklem (6.23) ve (6.24) sayesinde elektromanyetizmada kompleks oktonyonik enerji korunumu kısa biçimde,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{6.25}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{u}$ kompleks oktonyonik elektromanyetik enerji yoğunluğu ve $\mathbf{S}$ kompleks oktonyonik elektromanyetik enerji akısını belirtmektedir.

7. SONUÇLAR

Yüksek boyutlu çoklu kompleks sayılar ailesinden olan oktonyonlar sekiz bileşene sahiptir ve alternatif bir bölüm cebri oluştururlar. Oktonyonların en büyük özelliği hem sıra değişimli hem de birleşimli olmayan cebirsel yapılara sahip olmalarıdır. Oktonyonlar en büyük çalışma alanını elektromanyetizma, kuantum mekaniği, grup teori, parçacık fiziği gibi alanlarda sergilemektedir. Son yıllarda bilimsel ve teknolojik ilerlemelere paralel olarak yüksek boyutlu sayıların matematik ve fiziksel birçok uygulamada kullanılabilir olması, başta kuaternionlar olmak üzere oktonyon, sedenion gibi cebirsel yapıların ortaya çıkıp çeşitlilik kazanmasına yol açmıştır. Daha önce de bahsedildiği gibi oktonyonların ele alınan fiziksel sistemlerin yapısına göre reel, bölüntülü, hiperbolik ve kompleks şeklinde farklı türde tanımlamaları ve temsilleri mevcuttur. Bu tiplere ait birçok çalışma yapılmış ve halen yapılmaktadır.

Bu çalışma, fizik ve fiziksel uygulamalarda ön plana çıkan ve günlük hayatta sıklıkla karşılaşılan elektromanyetizmayı temel almaktadır. Elektromanyetizma, fiziğin önemli alanlarından sadece birisini oluştururken, elektrodinamik, elektromanyetik dalga teorisi, optik gibi alt dallara ayrılması bakımından büyük öneme sahiptir.

Elektrik ve manyetik alanlardan türetilen ve Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalan Maxwell denklemleri, elektromanyetizmanın temel yapıtaşını oluşturmaktadır. Bu denklemlere ait geçmişten günümüze hem deneysel hem de teorik olarak birçok çalışma yapılmış ve halen yapılmaya devam etmektedir. Maxwell denklemlerinin mükemmelliği ve halen geçerliliğini koruması, bilinmeyen birçok problemin çözümünün geçmiş bilgilerle desteklenerek yapılması, elektromanyetizmanın popüler olmasını ön plana çıkarmıştır. Bilim ve teknoloji çağının yaşanmasından dolayı, elektromanyetizmanın günlük yaşantıda uygulama alanlarını bulması bu popülerliği daha da kaçınılmaz hale getirmiştir. Örneğin; cep telefonu, telsiz, radyo, televizyon, radar, anten gibi cihazların çalışma sistemlerinde, belli bir dalga boyu ve frekansa sahip elektromanyetik dalgaların kullanımıyla iletişimde büyük çığır açılmıştır. Bu elektronik cihazların kullanımlarının artmasıyla, adı geçen elektromanyetik dalgaların biyolojik yapı üzerinde belirli bir doz ve zamandan sonra hücrelerin zarar görmesi ve hatta hücre

ölümlerinin gerçekleşmesi söz konusudur. Bu anlamda temel bilimlerden olan biyoloji ile fiziğin, biyofizik, radyasyon fiziği ve nükleer fizik gibi alt bilim dalları yoluyla disiplinler arası bir bilim olması sonucu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca DNA, aminoasit, protein, şeker gibi birçok biyolojik örnek sarmal yapıya sahiptir. Elektrik ve manyetik alanların sürekliliği durumunda sarmal bir şekilde ilerleme yapan elektromanyetik dalga, tıpkı DNA, RNA moleküllerindeki gibi spiral halde yoluna devam eder. Biyolojik bir yapıya etki eden elektromanyetik bir dalganın, daha önce de değinilen Pasteur ve Tellegen ortamlardaki etkileri, bu yapılardaki elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin değişiklik kazanmasıyla sonuçlanmaktadır. Bundan dolayı, elektrik ve manyetik alanların çiftlenim gösterdiği bi-izotrop ortamlarda elektromanyetizmanın incelenmesi biyoloji ile desteklenebilir olduğunu ifade eden diğer bir göstergedir.

Bu bilgilere ek olarak, yine elektromanyetik bir dalga olan ışığın kırınım, yansıma gibi özelliklerinin incelenmesi optik gibi yeni bir bilim dalının çıkmasına ve hızla gelişimine yol açmıştır.

Bu çalışmada öncelikle elektrik ve manyetik alanların birleşimi ile belli bir yön ve doğrultuda ilerleyen elektromanyetik dalganın bi-izotrop kiral ortamlardaki özellikleri ele alınmıştır. Bu elektromanyetik dalganın başta DNA, RNA, protein, aminoasit, şeker gibi sarmal yapıyı içeren birçok biyolojik yapıyla ilişkilendirilmesi yapılmış ve DBF yapı denklemleriyle elektromanyetizmadaki yapısı ön plana çıkarılmıştır. Sonra, uzay ve zaman bileşenlerini içeren kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ile bu işlemciye ait bazı özellikler verilmiştir. Ardından, literatürde daha önce elde edilen kompleks oktonyonik kaynak denklemi verilerek, Maxwell denklemlerinin manyetik yük ve akımları da içeren farklı bir yazılımı ve oktonyonik DBF yapı denklemleri ileri sürülmüştür. Tanımlanan yeni DBF yapı denklemleriyle yeni bir kompleks oktonyonik alan denklemi yazılmış ve kompleks oktonyonik diferansiyel işlemcinin bu alan denklemine uygulanmasıyla Maxwell denklemlerinin tek, kısa ve etkin bir halde yazılabileceği oktonyonik kaynak denklemi elde edilmiştir. Elde edilen kaynak denkleminin, daha önce türetilen ve izotrop ortamlarda geçerli olan kaynak denklemi olduğu görülmüştür. Özel bir koşul altında oktonyonik DBF yapı denklemlerindeki β kiral olma parametresinin $\beta = 0$ ve ortamın elektrik ve

manyetik geçirgenlik sabitlerinin $\varepsilon = \mu = 1$ biçiminde alınmasıyla, sonucun izotrop ortamlardaki verilere indirgendiği gözlenmiştir. Bu anlamda elektromanyetizmada ortamın bi-izotropluğu ile izotropluğu arasında bir ilişkinin varlığı gösterilmiştir.

Ardından elektromanyetik bir dalga olan ışığın, sürekli elektrik ve manyetik alanların varlığı durumunda, belli bir doğrultuda ilerlemesi ve enerji taşımaya ilişkin olarak Poynting vektörü ve teoremi tanıtılmıştır. Daha sonra, elektromanyetizmadaki enerji korunumunun bir göstergesi olan Poynting teoremi, kompleks oktonyon cebri yardımıyla ele alınmıştır. Bunun için öncelikle, daha önceden Cayley-Dickson notasyonunda tanımlanan kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ile elektrik ve manyetik alanın farklı yönelimlerdeki bileşenleri oktonyon formunda tanımlanmıştır. Bu sayede yeni bir alan denklemi ortaya çıkmış ve bu alan denkleminin kompleks oktonyonik diferansiyel işlemci ile ilişkisi irdelenmiştir. Ayrıca, bu işlemler yapılırken Maxwell denklemlerinin akım ve yük yoğunluklarından bağımsız, boyutsuz şekilde tanımlamaları ele alınmıştır. Bu esnada literatürdeki bazı çalışmaların yardımıyla kompleks oktonyonik Lagrange yoğunluğuna varyasyon prensibiyle geçiş yapılmıştır. Bu bilgiler ışığında, tanımlanan alan denklemi ile kompleks oktonyonik Lagrange yoğunluğundan, kompleks oktonyonik elektromanyetik enerji akısı ve yoğunluk terimleri de türetilerek, elektromanyetizmada genelleştirilmiş oktonyonik enerji korunum denkleminin kısa ve basit gösterimi elde edilmiştir. Bulunan sonucun klasik elektromanyetizmadaki sonuçla uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir.

Yapılan tüm hesaplamalar, oktonyonların baz elemanları arasında Cayley-Dickson çarpım kuralları kullanılarak yapılmıştır. Literatürde 480 farklı tip çarpım kuralının varlığı göz önünde bulundurulursa, seçilen diferansiyel işlemci ve vektör alanlarına ait sanal baz elemanların farklılık kazanmasıyla benzer sonuçların farklı çarpımlarla da elde edilebileceği açıktır. Bu çalışmada elektromanyetizmayla ilgili yapılan tüm hesaplamaların, çok boyuttan oluşan ve birleşimsiz cebirsel özellik gösteren oktonyon cebri kullanarak, tek, kısa ve uygun gösterimlerle temsillerinin yapıldığı unutulmamalıdır.

Bundan sonraki aşamalarda ise, yine başta elektromanyetizma olmak üzere, parçacık fiziği, kuantum fiziği ve grup teoriyle ilgili çalışmaların farklı türde cebirlerle çalışılması planlanmaktadır. Özellikle elektromanyetizmada

kuaternion, oktonyon ve sedenion cebirlerinin farklı tip ve tanımlamalarıyla bi-izotrop ortamların ele alınması ve yine belirtilen bi-izotrop ortamlar için elektromanyetik enerji korunum denklemlerinin türetilmesi amaçlanmaktadır. Aynı zamanda, fiziksel sistemlerde Noether teoremi altında birleşen enerji korunum denklemlerinin yanı sıra, çizgisel momentum ve açısal momentum korunum denklemlerinin de bu farklı cebirlerle temsillerinin yapılabileceği çalışılması düşünülen diğer bir konudur. Ayrıca, Maxwell denklemlerini kullanarak, bu denklemlerin Lorentz dönüşümleriyle değişmez kalmasının farklı cebirlerle tanımlanabilmesi ve bu anlamda yeni bir alan ve kaynak denkleminin elde edilmesi düşünülmektedir. Bu çalışmalara ek olarak, başta Mathematica olmak üzere bazı bilgisayar programlarını kullanarak, gerek zamandan kazanma gerekse işlem karmaşıklığından kurtulma açısından birçok problemin hesaplanabilirliği ve yeni kodların türetilerek literatüre katkı sağlanması ön görülmektedir. Ayrıca yüksek enerji fiziği ve parçacık fiziğinde Standart Modele ait parçacıkların kuaternionik, oktonyonik ya da sedenionik temsillerinin çalışılması planlanan diğer bir konudur.

KAYNAKLAR

- [1] Gürsey, F. ve Tze, C. H., *On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [2] Wheeler, L. P., *Josiah Willard Gibbs, The History of a Great Mind*, Ox Bow, Woodbridge, 1979.
- [3] Nahin, P. J., *Oliver Heaviside: Sage in Solitude*, IEEE Press, New York, A.B.D., 1988.
- [4] Kılıç, A., *Platonik Katıların ve Moleküler Simetrisinin Clifford Cebriyle İncelenmesi*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2004.
- [5] Demir, S., *Kompleks ve Dual Kuaternionların Fiziksel Uygulamaları*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.
- [6] <http://francisworldinsideout.wordpress.com/2011/04/30/baez-huerta-in-scientific-american-the-strangest-numbers-in-string-theory/>, 2012.
- [7] Baez, J. C., “The Octonions”, *Bull. Am. Math. Soc.*, **39**, 145 – 205, 2002.
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/Octonion>, 2012.
- [9] Tian, Y., “Similarity and Consimilarity of Elements in Real Cayley-Dickson Algebras”, *arXiv:math-ph/0003031v1*, 2000.
- [10] <http://homepages.wmich.edu/~drichter/octonions.htm>, 2012.
- [11] <http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/octonion/index.htm>, 2012.
- [12] Volkov, G., “On the complexifications of the Euclidean R^n spaces and the n -dimensional generalization of Pithagore theorem”, *arXiv:1006.5630v1*, 2010.
- [13] Moreno, G., “The zero divisors of the Cayley-Dickson algebras over the real numbers”, *arXiv:q-alg/9710013v1*, 1997.
- [14] Dubrovski, A. ve Volkov, G., “Ternary Numbers and Algebras. Reflexive Numbers and Berger Graphs”, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **17(2)**, 159 – 181, 2007.
- [15] Samoylenko, V. ve Volkov, G., “The GUT of the LIGHT: On the Abelian complexifications of the Euclidean R^n spaces”, *arXiv:0912.2037v1*, 2009.

- [16] Okubo, S., *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [17] <http://www.aimath.org/E8/liegroup.html>, 2012.
- [18] Altschuler, E. L. ve Pérez-Garrido, A., “A Very Intuitive Geometric Picture of the 24-cell, E_8 and Λ_{16} Lattices Given by Using the Hopf Maps”, *arXiv:math/0612728v1*, 2006.
- [19] Boya, L. J., “Composition algebras and the two faces of G_2 ”, *arXiv:0911.3387v1*, 2009.
- [20] Catto, S., “Exceptional Projective Geometries and Internal Symmetries”, *arXiv:hep-th/0302079v1*, 2003.
- [21] Toppan, F., “Exceptional Structures in Mathematics and Physics and the Role of the Octonions”, *arXiv:hep-th/0312023v1*, 2003.
- [22] Smith, F. D. Jr., “From Sets to Quarks”, *arXiv:hep-ph/9708379v2*, 1998.
- [23] Bernardoni, F., Cacciatori, S. L., Cerchiai, B. L. ve Scotti, A., “Mapping the geometry of E_6 group”, *J. Math. Phys.*, **49(1)**, 012107, 2008.
- [24] Dixon, G., “Octonion X-product and Octonion E_8 Lattices”, *arXiv:hep-th/9411063v1*, 1994.
- [25] Dray, T. ve Manogue, C. A., “Octonionic Cayley Spinors and E_6 ”, *arXiv:0911.2255v1*, 2009.
- [26] Abdel-Khalek, K., “Octonions and Super Lie Algebra”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **13**, 223 – 232, 1998.
- [27] Manogue, C. A. ve Dray, T., “Octonions, E_6 and Particle Physics”, *J. Phys. Conf. Ser.*, **254**, 012005, 2010.
- [28] Landsberg, J. M. ve Manivel, L., “The Sextonions and $E_{7\frac{1}{2}}$ ”, *arXiv:math/0402157v2*, 2005.
- [29] Wanfberg, A. D., *The Structure of E_6* , Doctor of Philosophy Thesis, Oregon State University, 2007, *arXiv:0711.3447v2*.
- [30] Bisht, P. S., Pandey, B. ve Negi, O. P. S., “Interpretations of octonion wave equations”, *Fizika B*, **17**, 405 – 428, 2008.
- [31] Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Octonion wave equation and tachyon electrodynamics”, *Pramana – Journal of Physics*, **73(3)**, 605 – 613, 2009.

- [32] Chanyal, B. C., Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Generalized Octonion Electrodynamics”, *Int. J. Theor. Phys.*, **49**, 1333 – 1343, 2010.
- [33] Bhupendra, C. S., Chauhan, B. C. S., Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Octonionic Reformulation of Vector Analysis”, *arXiv:1011.3951v1*, 2010.
- [34] Dangwal, S., Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Octonionic Gauge Formulation for Dyonic Fields”, *arXiv:hep-th/0608061v1*, 2006.
- [35] Pushpa, Bisht, P. S., Li, T. ve Negi, O. P. S., “Quaternion Octonion Reformulation of Quantum Chromodynamics”, *Int. J. Theor. Phys.*, **50**, 594 – 606, 2011.
- [36] Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Quaternion-Octonion Analyticity for Abelian and Non-Abelian Gauge Theories of Dyons”, *Int. J. Theor. Phys.*, **47**, 1497 – 1511, 2008.
- [37] Leo, S. D., “Hypercomplex Group Theory”, *arXiv:physics/9703033v1*, 1997.
- [38] Leo, S. D. ve Abdel-Khalek, K., “Octonionic Dirac Equation”, *Prog. Theor. Phys.*, **96**, 833 – 846, 1996.
- [39] Leo, S. D. ve Abdel-Khalek, K., “Octonionic Representations of $GL(8, \mathbb{R})$ and $GL(4, \mathbb{C})$ ”, *J. Math. Phys.*, **38**, 582 – 598, 1997.
- [40] Leo, S. D. ve Abdel-Khalek, K., “Octonionic Quantum Mechanics and Complex Geometry”, *Prog. Theor. Phys.*, **96**, 823 – 832, 1996.
- [41] Köpflinger, J., “Quantum of area from gravitation on complex octonions”, *arXiv:0812.0212v1*, 2008.
- [42] Tolan, T., Özdaş, K. ve Tanışlı, M., “Reformulation of electromagnetism with octonions”, *Il Nuovo Cimento B*, **121(1)**, 43 – 55, 2006.
- [43] Tolan, T., *Maxwell Denklemleri ve Dirac Denkleminin Oktonyonik Temsili*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2006.
- [44] Tanışlı, M. ve Jancewicz, B., “Octonionic Lorenz-like condition”, *Pramana – Journal of Physics*, **78(2)**, 165 – 174, 2012.
- [45] Köpflinger, J., “Dirac equation on hyperbolic octonions”, *Appl. Math. and Comp.*, **182**, 443 – 446, 2006.

- [46] Candemir, N., Tanışlı, M., Özdaş, K. ve Demir, S., “Hyperbolic Octonionic Proca-Maxwell Equations”, *Z. Naturforsch.*, **63a**, 15 – 18, 2008.
- [47] Ulrych, S., “Symmetries in the hyperbolic Hilbert space”, *Physics Letters B*, **618**, 233 – 236, 2005.
- [48] Köplinger, J., “Remarks on four dimensional Euclidean gravity without Wick rotation”, *arXiv:hep-th/0605233v3*, 2006.
- [49] Köplinger, J., “Gravity and electromagnetism on conic sedenions”, *Appl. Math. and Comp.*, **188**, 948 – 953, 2007.
- [50] Köplinger, J., “Signature of gravity in conic sedenions”, *Appl. Math. and Comp.*, **188**, 942 – 947, 2007.
- [51] Toppan, F., “(Split-)Octonions, Generalized Supersymmetries and M-Theory”, *26th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, New York, 2006.
- [52] Nurowski, P., “Split Octonions and Maxwell Equations”, *Acta Physica Polonica A*, **116(6)**, 992 – 993, 2009.
- [53] Dzhunushaliev, V., “Hidden nonassociative structure in supersymmetric quantum mechanics”, *Annalen Phys.*, **19**, 382 – 388, 2010.
- [54] Köplinger, J., Dzhunushaliev, V., “Nonassociative Quantum Theory, Emergent Probability, and Coquasigroup Symmetry”, *arXiv:0910.3347v1*, 2009.
- [55] Bisht, P. S., Dangwal, S. ve Negi, O. P. S., “Unified Split Octonion Formulation of Dyons”, *Int. J. Theor. Phys.*, **47**, 2297 – 2313, 2008.
- [56] Chanyal, B. C., Bisht, P. S. ve Negi, O. P. S., “Generalized Split-Octonion Electrodynamics”, *Int. J. Theor. Phys.*, **50**, 1919 – 1926, 2011.
- [57] Gogberashvili, M., “Octonionic Electrodynamics”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **39 (22)**, 7099 – 7104, 2005.
- [58] Gogberashvili, M., “Octonionic Geometry”, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **15(1)**, 55 – 66, 2005.
- [59] Gogberashvili, M., “Octonionic Version of Dirac Equations”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **21**, 3513 – 3524, 2006.

- [60] Musès, C., “Hypernumbers Applied or How They Interface with the Physical World”, *Appl. Math. and Comp.*, **60**, 25 – 36, 1994.
- [61] Musès, C., “Hypernumbers and Quantum Field Theory with a Summary of Physically Applicable Hypemumber Arithmetics and their Geometries”, *Appl. Math. and Comp.*, **6**, 63 – 94, 1980.
- [62] Carmody, K., “Circular and Hyperbolic Quaternions, Octonions, and Sedenions - Further Results”, *Appl. Math. and Comp.*, **84**, 27 – 47, 1997.
- [63] Carmody, K., “Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions”, *Appl. Math. and Comp.*, **28**, 47 – 72, 1988.
- [64] Abdel-Khalek, K., “Unified Octonionic Representation of the 10-13 Dimensional Clifford Algebra”, *arXiv:physics/9702033v1*, 1997.
- [65] Daboul, J. ve Delbourgo, R., “Matrix Representation of Octonions and Generalizations”, *J. Math. Phys.*, **40**, 4134 – 4150, 1999.
- [66] Tian, Y., “Matrix Representations of Octonions and Their Applications”, *Adv. Appl. Clifford Algebra*, **10(1)**, 61 – 90, 2000.
- [67] Ootsuka, T., Tanaka, E. ve Loginov, E., “Non-associative Gauge Theory”, *arXiv:hep-th/0512349v2*, 2005.
- [68] Lassig, C. C. ve Joshi, G. C., “An Octonionic Gauge Theory”, *Chaos Solitons Fractals*, **7**, 769 – 775, 1996.
- [69] Waldron, A. K. ve Joshi, G. C., “Gauging the octonion algebra”, *arXiv:hep-th/9211123v1*, 1992.
- [70] Bernevig, B. A., Hu, J., Toumbas, N. ve Zhang, S. C., “The Eight Dimensional Quantum Hall Effect and the Octonions”, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 236803, 2003.
- [71] Hoppe, J., Lundholm, D. ve Trzetrzelewski, M., “Octonionic Twists for Supermembrane Matrix Models”, *Ann. Henri Poincaré*, **10**, 339 – 356, 2009.
- [72] Schray, J. ve Manogue, C. A., “Octonionic representations of Clifford algebras and triality”, *Found. Phys.*, **26**, 17 – 70, 1996.
- [73] Rocha, R. ve Vaz, J. V., “Clifford algebra-parametrized octonions and generalizations”, *J. Algebra*, **301**, 459 – 473, 2006.

- [74] Fredsted, J., “Natural octonionic generalization of general relativity”, *arXiv:0707.0554v1*, 2007.
- [75] Gillow-Wiles, H. ve Dray, T., “Finding 3×3 Hermitian Matrices over the Octonions with Imaginary Eigenvalues”, *Adv. Appl. Clifford Alg.*, **20**, 247 – 254, 2010.
- [76] Manogue, C. A. ve Dray, T., “Octonionic Möbius Transformations”, *Mod. Phys. Lett. A*, **14**, 1243 – 1256, 1999.
- [77] Dray, T., Janesky, J. ve Manogue, C. A., “Some Properties of 3×3 Octonionic Hermitian Martices with Non-real Eigenvalues”, *arXiv:math/0010255v1*, 2000.
- [78] Dray, T. ve Manogue, C. A., “The Octonionic Eigenvalue Problem”, *Adv. Appl. Clifford Alg.*, **8**, 341 – 364, 1998.
- [79] Okubo, S., “Angular Momentum, Quaternion, Octonion, and Lie-Super Algebra $OSP(1,2)$ ”, *arXiv:physics/9710038v1*, 1997.
- [80] Okubo, S., “Representations of Clifford Algebras and its Applications”, *Math. Jap.*, **41**, 59 – 79, 1995.
- [81] Okubo, S., “Super Triple Systems and Applications to Para-Statistics and Yang-Baxter Equation”, *arXiv:hep-th/9306160v1*, 1993.
- [82] Okubo, S., “Triple Products and Yang–Baxter Equation(I): Octonionic and Quaternionic Triple Sysytems”, *J. Math. Phys.*, **34**, 3273 – 3291, 1993.
- [83] Okubo, S., “Triple Products and Yang–Baxter Equation(II): Orthogonal and Symplectic Ternary Systems, *J. Math. Phys.*, **34**, 3292 – 3315, 1993.
- [84] Ludkovsky, S. V., “Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers”, *J. Math. Science*, **141(3)**, 1231 – 1298, 2004.
- [85] Ludkovsky, S. V., “Multidimensional Laplace transforms over Cayley-Dickson algebras and partial differential equations”, *arXiv:1004.4355v1*, 2010.
- [86] Ludkovsky, S. V., “The two-sided Laplace transformation over the Cayley-Dickson algebras and its applications”, *J. Math. Science*, **151(5)**, 3372 – 3430, 2008.
- [87] Weng, Z., “Field equations of electromagnetic and gravitational fields”, *PIERS Proceedings*, Xian CHINA, 1349 – 1353, 2010.

- [88] Weng, Z., “Octonionic Strong and Weak Interactions and Their Quantum Equations”, *arXiv:physics/0702054v3*, 2007.
- [89] Weng, Z., “Octonionic electromagnetic and gravitational interactions and dark matter”, *arXiv:physics/0612102v8*, 2009.
- [90] Dzhunushaliev, V., “Toy models of a non-associative quantum mechanics”, *Advances in High Energy Physics*, **2007**, Article ID 12387, 10 pages, 2007.
- [91] Liao, J. Q., Li, X. M. ve Wang, J. X., “ Orthonormal basis of the octonionic analytic functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **366**, 335 – 344, 2010.
- [92] Dorofeev, V., “Generalization of Lagrangian of electro-weak interaction to the octonionic algebra”, *Russian Mathematics*, **55(11)**, 1 – 8, 2011.
- [93] Dorofeev, V., “Gravity on the octonion algebra”, *arXiv:gr-qc/0604024v1*, 2006.
- [94] Smith, F. D., “Standard Model plus Gravity from Octonion Creators and Annihilators”, *arXiv:quant-ph/9503009v1*, 1995.
- [95] Mironov, V. L., Mironov ve S. V., “Octonic Electrodynamics”, *arXiv:0802.2435v1*, 2008.
- [96] Mironov, V. L. ve Mironov, S. V., “Octonic First-Order Equations of Relativistic Quantum Mechanics”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **24(22)**, 4157 – 4167, 2009.
- [97] Mironov, V. L. ve Mironov, S. V., “Octonic Relativistic Quantum Mechanics”, *arXiv:0803.0375v2*, 2008.
- [98] Mironov, V. L. ve Mironov, S. V., “Octonic representation of electromagnetic field equations”, *J. Math. Phys.*, **50**, 012901-1-10, 2009.
- [99] Mironov, V. L. ve Mironov, S. V., “Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics”, *J. Math. Phys.*, **50**, 012302-1-13, 2009.
- [100] http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Dickson_construction, 2012.
- [101] Griffiths, D. J., *Elektromagnetic Teori* (Çev. Ed. Karaoğlu, B.), 2. Baskı, Arte Yayıncılık, İstanbul, 1996.
- [102] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, A.B.D., 1999.

- [103] Cheng, D. K., *Dalga ve Alan Elektromanyetizması* (Çev. Ed. Armağan, N. ve Can, N.), Akademi Yayıncılık, Ankara, 2003.
- [104] Serway, R. A. ve Beichner, R. J., *Fen ve Mühendislik için Fizik 2* (Çev. Ed. Çolakoğlu, K.), Palme Yayıncılık, Ankara, 2007.
- [105] Kong, J. A., *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley & Sons Inc., A.B.D., 1986.
- [106] Rothwell, E. J. ve Cloud, M. J., *Electromagnetics*, CRC Press, A.B.D., 2001.
- [107] Goca, N., *Optik* (Çev. Ed. Çakır, C.), Aktif Yayınevi, Erzurum, 2000.
- [108] Shen, L. C. ve Kong, J. A., *Applied Electromagnetism*, Wadsworth Inc., A.B.D., 1983.
- [109] <http://www.belgeler.com/blg/2ct3/elektro-optik>, 2012.
- [110] Landau, L. D. ve Lifshitz, E. M., *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, Canada, 1984.
- [111] Guenther, R. D., *Modern Optics*, John Wiley & Sons, Canada, 1990.
- [112] Banerjee, P. P. ve Poon, T. C., *Principles of Applied Optics*, Irwin Inc., Boston, 1991.
- [113] Lewandowski, S. J., “Electromagnetic field equations for anisotropic media”, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **4(2)**, 197 - 205, 1971.
- [114] Li, S. ve Yamamoto, M., “An Inverse Source Problem for Maxwell’s Equations in Anisotropic Media”, *Applicable Analysis*, **84(10)**, 1051–1067, 2005.
- [115] Garcia, S. G., Hung-Bao, T. M., Martin, R. G. ve Olmedo, B. G., “On the Application of Finite Methods in Time Domain to Anisotropic Dielectric Waveguides”, *IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques*, **44(12)**, 2195 – 2206, 1996.
- [116] http://en.wikipedia.org/wiki/Bi-isotropic_material, 2012.
- [117] Lindell, I. V., Sihvola, A. H., Tretyakov, S. A. ve Vitanen, A. J., *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* (Norwood: Artech House), Boston, 1994.
- [118] http://www.imb-jena.de/~rake/Bioinformatics_WEB/basics_amino_acids.html, 2012.

- [119] [http://en.wikipedia.org/wiki/Chirality_\(electromagnetism\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Chirality_(electromagnetism)), 2012.
- [120] [http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocity_\(electromagnetism\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocity_(electromagnetism)), 2012.
- [121] Athanasiadis, C. ve Stratis, J. G., “A Transmission Problem for Bi-isotropic Media”, *Applicable Analysis*, **77(3-4)**, 195 – 209, 2001.
- [122] Ougier, S., Chenierie, I., Sihvola, A. ve Priou, A., “Propagation in Bi-isotropic Media: Effect of Different Formalisms on the Propagation Analysis”, *Progress in Electromagnetic Research (PIER)*, **9**, 19 – 30, 1994.
- [123] Barba, I., Grande, A., Cabeceira, A. C. L. ve Represa, J., “Time Domain Modeling of Electromagnetic Wave Propagation in Tellegen Media”, *Microwave and Optical Technology Letters*, **38**, 167 – 168, 2003.
- [124] Athanasiadis, C. ve Stratis, I. G., “Electromagnetic scattering by a chiral obstacle”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **58**, 83 – 91, 1997.
- [125] Li, S., “An Inverse Problem for Maxwell’s Equations in Bi-Isotropic Media”, *Siam J. Math. Anal.*, **37(4)**, 1027–1043, 2005.
- [126] Sjöberg, D., “Simple Wave Solutions for the Maxwell Equations in Bianisotropic Nonlinear Media, with Application to Oblique Incidence”, *Wave Motion*, **32**, 217–232, 2000.
- [127] Shorokhova, E. A., “Radiation of Elementary Sources in a Chiral Medium”, *Journal of Communications Technology and Electronics*, **54(6)**, 646–654, 2009.
- [128] http://tr.wikipedia.org/wiki/Noether_teoremi, 2012.
- [129] Noether, E. ve Tavel, M. A., “Invariant Variation Problems”, *Gott. Nachr.* 1918, 235 – 257, 1918; *Transp. Theory Statist. Phys.*, **1**, 186 – 207, 1971.
- [130] Beiser, A., *Modern Fiziğin Kavramları* (Çev. Ed. Önengüt, G.), Akademi Yayınları, İstanbul, 1997.
- [131] Taylor, J. R. ve Zafaritos, C. D., *Fizik ve Mühendislikte Modern Fizik* (Çev. Ed. Karaoğlu, B.), Arte Yayıncılık, İstanbul, 1996.
- [132] Poynting, J. H., “On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **175**, 343 – 361, 1884.
- [133] Tanışlı, M., “Gauge Transformation and Electromagnetism with Biquaternions”, *Europhysics Letters*, **74(4)**, 569 – 573, 2006.

- [134] Richter, F., Florian, M. ve Henneberger, K., *arXiv:0710.0515v3*, 2007.
- [135] Kinsler, P., Favaro, A. ve McCall, M. W., “Four Poynting Theorems”, *Eur. J. Phys.*, **30(5)**, 983 – 990, 2009.
- [136] Tanışlı, M., “The Quaternionic Energy Conservation Equation for Acoustics”, *Acta Physica Slovaca*, **53(3)**, 253 – 258, 2003.
- [137] Sun-Sheng, S., Nagem, R. J., Rebbi, C. ve Sandri, G., “Gauge transformations and local conservation equations for linear acoustics and for Maxwell's equations”, *Nuovo Cimento B*, **113**, 1509 – 1518, 1998.
- [138] Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, Toronto University Press, Toronto, 1970.
- [139] Gsponer, A. ve Hurni, J. P., “Lanczos’s functional theory of electrodynamics: A commentary on Lanczos’s PhD dissertation”, *arXiv:math-ph/0402012v2*, 2004.