

**KOMPLEKS POTANSİYELLİ KLEİN – GORDON
DENKLEMİNİN SPEKTRAL
ÖZELLİKLERİ**

Erkan YEŞİLTEPELER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2007
ANKARA**

Erkan YEŞİLTEPELER tarafından hazırlanan KOMPLEKS POTANSİYELLİ
KLEİN – GORDON DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin
YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra KIR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile MATEMATİK Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

Tarih : 07 / 02 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Erkan YEŞİLTEPELER

**KOMPLEKS POTANSİYELLİ KLEİN – GORDON
DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Erkan YEŞİLTEPELER

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2007

ÖZET

Bu tezde $L_2[0,\infty)$ uzayında Bairamov ve Çelebi tarafından Indian J. Pure Appl. Math. (1997)'de yayınlanmış makalede belirtilen Klein Gordon Denklemi göz önüne alınmıştır. Bu denklemin belirli sınır koşullarını sağlayan çözümleri incelenmiştir. Ayrıca denklemden üretilen diferansiyel operatörün resolventi ve sürekli spektrumu çalışılmış, özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin yapısı incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204
**Anahtar Kelimeler : Özdeğer, Özfonksiyon, Wronskian, Spektrum, Spektral
Tekillik, Resolvent**
Sayfa Adedi : 37
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

**SPECTRAL PROPERTIES OF THE KLEIN – GORDON
EQUATION WITH COMPLEX POTENTIAL**

(M. Sc. Thesis)

Erkan YEŞİLTEPELER

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2007**

ABSTRACT

Klein-Gordon Equation determined in the article published by Bayramov and Çelebi in Indian J. Pure Appl. Math. (1997) is considered. The solutions satisfying initial conditions of the equation are investigated. The resolvent and the continuous spectrum of the operator L are studied. The structure of the eigenvalues and spectral singularities are also investigated.

Science Code	: 204
Key Words	: Eigenvalue, eigenfunction, Wronskian, spectrum, spectral singularity, resolvent
Page Number	: 37
Adviser	: Assist. Prof. Esra KIR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaların her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Esra KIR'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana maddi ve manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Giriş.....	3
2.2. $I(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri	7
3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ....	15
3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu.....	15
3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri	22
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
H	Hilbert uzayı
$D(A)$	A operatörünün tanım cümlesi
$R(A)$	A operatörünün değer cümlesi
$W[y_1, y_2]$	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskianı
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$R_\lambda(A)$	A operatörünün resolventi
$\rho(A)$	A operatörünün resolvent cümlesi
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
L^*	L operatörünün adjointi
$\sigma_d(A)$	A operatörünün diskret spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu

1.GİRİŞ

$L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı $l(y) = -y'' + V(x)y$, $x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ diferensiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ koşulu yardımıyla üretilen operatör L ile gösterilsin. Burada V kompleks değerli fonksiyondur. L operatörünün spektral analizinin incelenmesine ilk olarak 1960 yılında Naimark tarafından başlanmıştır [1,2]. Naimark, non-selfadjoint L operatörünün spektrumunun özdeğerler, spektral tekillikler ve sürekli spektrumdan oluştuğunu göstermiştir. Schwartz özdeğer olmayan, sürekli spektrumda yer alan resolventin kutuplarına spektral tekillik adını vermiştir [3]. Ayrıca Naimark spektral tekilliklerin spektral açılımda önemli bir rol oynadığını ve

$$\int_0^{\infty} |V(x)| \exp(\varepsilon x) dx < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

şartının sağlanması durumunda özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin sonlu olduğunu göstermiştir. Lyance, spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların özelliklerini incelemiş ve spektral tekilliklerin spektral açılıma etkisini araştırmıştır [4]. $L_2[0, \infty)$ uzayında,

$$y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

denklemini ve $y(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen operatör $L(\lambda)$ ile gösterilmiştir. Bairamov ve Çelebi 1997 yılındaki çalışmalarında $L(\lambda)$ operatörünün spektrumunu bulup $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$ ve

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{x}) |Q'(x)| \} < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

koşulları altında L 'nin özdeğerlerinin spektral tekilliklerinin ve onların katlarının sonlu olduğunu göstermişlerdir [1].

Bu tez çalışması 3 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci kısmında ise diferensiyel operatör tanımlanmış ve diferensiyel denklemin çözümleri incelenmiştir. Çözümlere ait asimptotik bağıntılar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında operatörün resolventi, parametrelerin değişimi yöntemiyle hesaplanmış, sürekli spektrumu bulunmuştur. Üçüncü bölümün ikinci kısmında L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, Klein–Gordon denkleminin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri incelenecektir.

2.1. Tanım

H Hilbert uzayında herhangi bir $D \subset H$ lineer alt uzay ve $A: D \subset H \rightarrow H$ dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör, D 'ye ise A operatörünün tanım bölgesi denir ve bu küme $D(A)$ ile gösterilir.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi, X topolojik vektör uzayı, $L(X)$ X 'de tanımlı lineer operatör uzayı olsun.

2.2. Tanım

$A \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için $(A - \lambda_0 I)x = 0$ denkleminin $x=0$ aşıkâr çözümünden başka $x \neq 0$ çözümü bulunursa $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise A operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir.

2.3. Tanım

$\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $\forall x, y \in D(A)$ için

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

eşitliği sağlanıyorsa A^* operatörüne A operatörünün adjointi denir. A simetrik operatörü için $A^* = A$ ise A operatörüne selfadjoint operatör denir. Bu şartı sağlamıyorsa operatöre non-selfadjoint operatör adı verilir.

2.4. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün resolvent operatörü denir.

2.5. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\rho(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün resolvent cümlesi denir.

2.6. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_c(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırsız, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün sürekli spektrumu denir.

2.7. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_r(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırsız, } \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H\}$$

cümlesine A operatörünün kalan (rezidü) spektrumu denir.

2.8. Tanım

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

cümlesine A operatörünün spektrumu denir.

2.1. Teorem (Privalov)

g fonksiyonu açık üst düzlemde analitik, E cümlesi g fonksiyonun reel sıfırlarının cümlesi ve μ , E cümlesinin reel Lebesgue ölçüsü olsun.

Eğer $\mu(E) > 0$ ise bu durumda $g(z) \equiv 0$ olur. [5]

2.2. Teorem (Weierstrass M testi)

$$(a) |f(x, \alpha)| \leq M(x), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad x > \alpha$$

$$(b) \int_a^\infty M(x) dx \quad \text{yakınsak}$$

olacak şekilde bir $M(x) \geq 0$ fonksiyonu bulunabilirse $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ integrali

$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ de düzgün ve mutlak yakınsaktır. [6]

2.3. Teorem (Pavlov)

Kabul edelim ki $g(z)$ fonksiyonu açık kompleks üst düzlemde analitik, tüm basamaktan türevleri kapalı üst düzlemde sürekli olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{d^r}{dz^r} g(z) \right| \leq A_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im } z \geq 0, |z| < 2T$$

ve

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} \frac{\ln|g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty, \quad \left| \int_T^\infty \frac{\ln|g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty$$

sağlanacak şekilde $T > 0$ sayısı vardır. Ayrıca M cümlesi $g(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının cümlesidir.

h keyfi pozitif bir sayı olmak üzere

$$\int_0^h \ln T(s) d\mu(M_s) = -\infty$$

ise bu durumda $g(z) \equiv 0$ 'dır. Burada

$$T_s = \inf_r \frac{A_r s^r}{r!}$$

dir ve $\mu(M_s)$, M cümlesinin s komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür. [7]

2.4. Teorem

Eğer $f(x, \alpha)$ fonksiyonu $x \geq \alpha$ ve $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ için sürekli ve $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$,

$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ için düzgün yakınsak ise $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ de sürekli. Özel

olarak α_0 , $[\alpha_1, \alpha_2]$ aralığında herhangi bir nokta ise

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx$$

Şimdi aşağıdaki sınır değer problemini tanımlayalım.

$$y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \quad (2.1)$$

diferensiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad (2.2)$$

sınır koşulunu göz önüne alalım.

Burada Q kompleks değerli, sınırlı ve $\mathbb{R}_+$ nın her sonlu alt aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, λ kompleks parametredir. [6]

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 sınır değer problemi yardımıyla

$L_2[0, \infty; \mathbb{C}] := \{f : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty\}$ uzayında L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$\forall y \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}]$ diferensiyellenebilen $y(x, \lambda)$ fonksiyonu için

$l(y) := y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y$ diferensiyel ifadesini göz önüne alalım.

$$D(L) = \left\{ y : y \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}) \begin{array}{l} 1. \ y' \text{ var ve } \mathbb{R}_+ \text{ nın her bir sonlu} \\ \text{alt aralığında mutlak sürekli} \\ 2. \ l(y) \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}) \\ 3. \ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\forall y \in D(L)$ için $Ly := l(y)$ şeklinde tanımlayalım [8].

2.2 $l(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri

$$\int_0^\infty x [|Q(x)| + |Q'(x)|] dx < \infty \quad (2.3)$$

şartı altında $l(y) = 0$ denkleminin çözümlerini inceleyelim. β, γ, ω fonksiyonlarını aşağıdaki biçimde tanımlayalım [8]

$$\beta(x) = \int_x^\infty [|Q(t)|^2 + 2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt$$

$$\gamma(x) = \int_x^\infty [t|Q(t)|^2 + 2|Q(t)|] dt \quad (2.4)$$

$$\omega(x) = \int_x^\infty [|Q(t)|^2 + |Q'(t)|] dt$$

Eş. 2.3 koşulları varsayıldığında $l(y) = 0$ denklemi

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x) + i\lambda x} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \quad (2.5)$$

$$f^-(x, \lambda) = e^{-i\alpha(x) - i\lambda x} + \int_x^\infty K^-(x, t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \quad (2.6)$$

çözümlerine sahiptir [8]. $\alpha(x) = \int_x^\infty |Q(t)| dt$ dır.

Ayrıca $K^+(x, t)$ ve $K^-(x, t)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$|K^\pm(x, t)| \leq c\omega \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \{ \gamma(x) \} \quad (2.7)$$

$$|K_{x,t}^\pm(x, t)| \leq c \left[\omega^2 \left(\frac{x+t}{2} \right) + \beta \left(\frac{x+t}{2} \right) \right] \quad (2.8)$$

$f^+(x, \lambda)$ çözümü $\text{Im} \lambda > 0$ düzleminde λ ya göre analitik fonksiyon ve $f^-(x, \lambda)$ çözümü $\text{Im} \lambda < 0$ düzleminde λ ya göre analitik fonksiyondur [8]. Ayrıca Eş. 2.1 denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1$$

şartlarını sağlayan φ çözümü vardır.

2.5 Teorem

$y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y = 0, 0 \leq x < \infty$ denkleminin $f^+(x, \lambda), f^-(x, \lambda)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$(a) \quad f^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, x \rightarrow \infty$$

$$(b) \quad f_x^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)], \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, x \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad f^-(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} [1 + o(1)], \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad x \rightarrow \infty \\
(d) \quad f_x^-(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} [-i\lambda + o(1)], \quad \lambda \in \mathbb{T}_-, \quad x \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{2.10}$$

[3]

İspat

(a) $f^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)]$, $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}_+$, $x \rightarrow \infty$ asimptotik eşitliğinin ispatı ile başlayalım.

(i) $\text{Im}\lambda = 0$ olsun. $|e^{i\lambda t}| = 1$ olduğu açıktır.

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x) + i\lambda x} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\Rightarrow f^+(x, \lambda) \cdot e^{-i\lambda x} = e^{i\alpha(x)} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^{i\lambda(t-x)} dt \text{ olur.}$$

Eş. 2.7 eşitliğinin $0 \leq x < \infty$ için integralini alırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K^+(x_0, t) dt &\leq c \int_0^\infty \omega\left(\frac{x_0 + t}{2}\right) e^{\gamma(x_0)} dt \\
&= c \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{x_0+t}{2}}^\infty [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] ds \right\} e^{\int_{x_0}^\infty [u|Q(u)|^2 + 2|Q(u)|] du} dt \\
&\leq c_1 \int_0^\infty \left\{ \int_{t/2}^\infty [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] ds \right\} dt \\
&= c_1 \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2s} [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] dt \right\} ds \\
&= 2c_1 \int_0^\infty s [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] ds
\end{aligned}$$

$$< \infty$$

elde edilir. O halde $K^+(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ olur. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \int_0^\infty i|Q(t)|dt} = 1$$

olur. Buradan

$$f^+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1 + o(1)$$

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad \text{Im} \lambda \leq 0, \quad x \rightarrow \infty$$

(ii) $\text{Im} \lambda > 0$ olsun. Bu durumda $e^{i\lambda t}$ fonksiyonu azalandır. Bir önceki ifadeden $K^+(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ idi.

$$\int_x^\infty K^+(x, t) e^{i\lambda(t-x)} dt \quad \text{integrali yeteri kadar büyük } x \text{ ler için yakınsak integralin kalan}$$

terimi olduğundan

$$f^+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1 + o(1)$$

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad \text{Im} \lambda \geq 0, \quad x \rightarrow \infty$$

(b) Şimdi $f_x^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} (i\lambda + o(1))$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \rightarrow \infty$ asimptotik eşitliğinin ispatını yapalım.

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x) + i\lambda x} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$f_x^+(x, \lambda) = (i\alpha'(x) + i\lambda) e^{i\alpha(x) + i\lambda x} + \int_x^\infty K_x^+(x, t) e^{i\lambda t} dt - K^+(x, x) e^{i\lambda x}$$

$$f_x^+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = (i\alpha'(x) + i\lambda) e^{i\alpha(x)} + \int_x^\infty K_x^+(x, t) e^{i\lambda(t-x)} dt - K^+(x, x) \quad \text{olur.}$$

Eş. 2.8 eşitsizliğinin her iki yanının $0 \leq x < \infty$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty |K_x^+(x_0, t)| dt \leq c \int_0^\infty \left[\omega^2 \left(\frac{x_0 + t}{2} \right) + \beta \left(\frac{x_0 + t}{2} \right) \right] dt \\
& = c \int_0^\infty \left\{ \left[\int_{\frac{x_0+t}{2}}^\infty |Q(s)|^2 + |Q'(s)| ds \right]^2 + \int_{\frac{x_0+t}{2}}^\infty [|Q(s)|^2 + 2|Q(s)| + |Q'(s)|] ds \right\} dt \\
& \leq c \left\{ \int_0^\infty \left[\int_{t/2}^\infty |Q(s)|^2 + |Q'(s)| ds \right]^2 dt + \int_0^\infty \int_{t/2}^\infty [|Q(s)|^2 + 2|Q(s)| + |Q'(s)|] ds dt \right\} \\
& = c \left\{ \int_0^\infty \int_0^{2s} [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] dt ds + \int_0^\infty \int_0^{2s} [|Q(s)|^2 + 2|Q(s)| + |Q'(s)|] dt ds \right\} \\
& = c \left\{ 2 \int_0^\infty s [|Q(s)|^2 + |Q'(s)|] ds + 2 \int_0^\infty s [|Q(s)|^2 + 2|Q(s)| + |Q'(s)|] ds \right\} \\
& < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $K_x^+(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$ olur.

(i) $\text{Im} \lambda = 0$ olsun. Bu durumda $|e^{i\lambda x}| = 1$ ve $K^+(x, x) = o(1)$ olur.

$$f_x^+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = [i\lambda + o(1)], \quad \text{Im} \lambda = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f_x^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)], \quad \text{Im} \lambda = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(ii) $\text{Im} \lambda > 0$ olsun. Bu durumda $e^{i\lambda x}$ azalandır. $K^+(x, x)$ sınırlıdır.

$$f_x^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)], \quad \text{Im} \lambda > 0, \quad x \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(i) ve (ii) den $f_x^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + 0(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \rightarrow \infty$

bulunur.

Eş. 2.10 asimptotik eşitlikleri, Eş. 2.9. asimptotik eşitliklerine benzer olarak ispatlanır.

2.6 Teorem

Eş. 2.1 denkleminin $f^+(x, \lambda)$, $f^-(x, \lambda)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$(a) f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x)} e^{i\lambda x} + 0(1) \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

$$(b) f^-(x, \lambda) = e^{-i\alpha(x)} e^{-i\lambda x} + 0(1) \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad [8] \quad (2.11)$$

İspat

(a) $f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x)} e^{i\lambda x} + o(1)$ asimptotik eşitliğinin ispatını yapalım.

$f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ integraline $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir.

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx$ integraline ise, $g(x)$ in ters Fourier dönüşümü adı verilir.

(i) $\text{Im}\lambda = 0$ olsun.

$$\tilde{K}^+(x, t) = \begin{cases} K^+(x, t); & x \leq t < \infty \\ 0 & ; -\infty < t < x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $f^+(x, \lambda)$ çözümü

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\alpha(x)} e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}^+(x, t) e^{i\lambda t} dt \quad \text{olarak yazılır.}$$

$K^+(x,t) \in L_1[0,\infty)$ olduğundan $\tilde{K}^+(x,t) \in L_1[0,\infty)$ olur.

O halde Fourier dönüşümünün özelliklerinden

$$f^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} e^{i\alpha(x)} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda = 0$$

elde edilir.

(ii) $\text{Im}\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $e^{i\lambda t}$ fonksiyonu azalandır. $K^+(x,t) \in L_1[0,\infty)$ şartı sağlandığından

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_0^\infty |K^+(x,t) e^{i\lambda t}| dt = \int_0^\infty \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |K^+(x,t) e^{i\lambda t}| dt$$

$$= o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda > 0$$

elde edilir. O halde $f^+(x,\lambda) = e^{i\alpha(x)} e^{i\lambda x} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda > 0$ olur.

(i) ve (ii) den $f^+(x,\lambda) = e^{i\alpha(x)} e^{i\lambda x} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda \geq 0$ elde edilir.

Benzer şekilde $f^-(x,\lambda) = e^{-i\alpha(x)} e^{-i\lambda x} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda \leq 0$

asimptotik eşitliği de gösterilebilir.

2.7 Teorem

Eş. 2.1 denkleminin $f^+(x,\lambda)$ ve $f^-(x,\lambda)$ çözümleri için

$$W[f^+, f^-] = \lim_{x \rightarrow \infty} W[f^+, f^-] = -2i\lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

dir. [8]

İspat

Teorem 2.5'deki asimptotik eşitlikleri kullanırsak

$$W[f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)] = \begin{vmatrix} f^+(x,\lambda) & f^-(x,\lambda) \\ f_x^+(x,\lambda) & f_x^-(x,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [f^+(x,\lambda) f_x^-(x,\lambda) - f_x^+(x,\lambda) f^-(x,\lambda)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (-i\lambda) - (i\lambda) = -2i\lambda$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{R}^*$ için $f^+(x,\lambda)$ ve $f^-(x,\lambda)$, Eş.2.1. denkleminin temel çözümler sistemidir.

3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ

3.1 L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu

$$f^+(\lambda) := f^+(0, \lambda), \quad f^-(\lambda) := f^-(0, \lambda)$$

$$\rho_1 := \{\lambda \mid \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, \quad f^+(\lambda) \neq 0\}$$

$$\rho_2 := \{\lambda \mid \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}, \quad f^-(\lambda) \neq 0\}$$

ve

$$\rho(L(\lambda)) := \rho_1(\lambda) \cup \rho_2(\lambda)$$

olarak tanımlansın [3].

3.1 Teorem

$\lambda \in \rho(L(\lambda))$ için $L(\lambda)$ integral operatörünün resolventi $h \in L_2(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere

$$R(L(\lambda)) h(t) = \int_0^\infty R(x, t; \lambda) h(t) dt$$

biçimindedir.

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R_1(x, t; \lambda) & , \quad \lambda \in \rho_1(\lambda) \\ R_2(x, t; \lambda) & , \quad \lambda \in \rho_2(\lambda) \end{cases} \quad (3.1)$$

Burada

$$R_1(x, t; \lambda) = \frac{1}{f^+(\lambda)} \begin{cases} -f^+(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) & ; \quad 0 \leq t < x \\ f^+(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) & ; \quad x \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

$$R_2(x, t; \lambda) = \frac{1}{f^-(\lambda)} \begin{cases} -f^-(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) & ; \quad 0 \leq t < x \\ f^-(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) & ; \quad x \leq t < \infty \end{cases} \quad [1]$$

İspat

$\text{Im}\lambda > 0$ için $f^+(\lambda) \neq 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 W[f^+, \varphi] &= \lim_{x \rightarrow 0} [f^+(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - f_x^+(x, \lambda) \varphi(x, \lambda)] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} f^+(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - \lim_{x \rightarrow 0} f_x^+(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) \\
 &= f^+(0, \lambda) \varphi'(0, \lambda) - f_x^+(0, \lambda) \varphi(0, \lambda) \\
 &= f^+(\lambda).1 - f_x^+(0, \lambda).0 = f^+(\lambda) \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\text{Im}\lambda > 0$ için $f^+(\lambda) \neq 0$ koşulunu sağlayan λ lar için Eş. 2.1 denkleminin temel çözümler sistemi $f^+(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ dır.

$$y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y = h(x) \tag{3.4}$$

homogen olmayan denklemi gözönüne alalım. Bunun için parametrelerin değişimi yöntemini kullanacağız.

$$y'' + [\lambda - Q(x)]^2 y = 0$$

homogen denklemin çözümü

$$\tilde{y} = c_1 f^+(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda) \tag{3.5}$$

biçiminde yazılabilir. Genel denklemin çözümünü ise

$$y = c_1(x) f^+(x, \lambda) + c_2(x) \varphi(x, \lambda) \tag{3.6}$$

biçiminde arayalım.

Bu durumda

$$y' = c_1'(x) f^+(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi(x, \lambda) + c_1(x) f_x^+(x, \lambda) + c_2(x) \varphi'(x, \lambda)$$

elde edilir.

Şimdi

$$c_1'(x)f^+(x,\lambda) + c_2'(x)\varphi(x,\lambda) = 0 \quad (3.7)$$

olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$$y' = c_1(x)f_x^+(x,\lambda) + c_2(x)\varphi'(x,\lambda)$$

$$y'' = c_1'(x)f_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)\varphi'(x,\lambda) + c_1(x)f_x^+(x,\lambda) + c_2(x)\varphi''(x,\lambda)$$

olur.

y' ve y'' Eş.3.4 de yerine yazılırsa

$$c_1'(x)f_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)\varphi'(x,\lambda) = h(x) \quad (3.8)$$

elde edilir. Eş.3.7 ve Eş. 3.8 eşitliklerinden aşağıdaki denklem sistemi bulunur.

$$c_1'(x)f^+(x,\lambda) + c_2'(x)\varphi(x,\lambda) = 0$$

$$c_1'(x)f_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)\varphi'(x,\lambda) = h(x) \quad (3.9)$$

Eş. 3.9 sisteminin çözümünden

$$c_1'(x) = \frac{-h(x)\varphi(x,\lambda)}{f^+(\lambda)} \text{ ve } c_2'(x) = \frac{h(x)f^+(x,\lambda)}{f^+(\lambda)}$$

olur. Buradan

$$c_1'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t,\lambda)h(t)}{f^+(\lambda)} dt + c_1(0) \quad (3.10)$$

$$c_2(x) = \int_x^{\infty} \frac{f^+(t, \lambda) h(t)}{f^+(\lambda)} dt + c_2(\infty) \quad (3.11)$$

elde edilir.

$y = c_1(x) f^+(x, \lambda) + c_2(x) \varphi(x, \lambda)$ ile tanımlanan $y(x, \lambda)$ çözümünün $L_2[0, \infty)$ da olması için $c_2(\infty) = 0$ ve sınır koşulunun sağlanması için $c_1(0) = 0$ olmalıdır.

O halde

$$c_1(x) = -\frac{1}{f^+(\lambda)} \int_0^x \varphi(t, \lambda) h(t) dt \quad (3.12)$$

$$c_2(x) = \frac{1}{f^+(\lambda)} \int_x^{\infty} f^+(t, \lambda) h(t) dt$$

şeklini alır.

$$y = -\int_0^x \frac{\varphi(t, \lambda) f^+(x, \lambda)}{f^+(\lambda)} h(t) dt + \int_x^{\infty} \frac{f^+(t, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{f^+(\lambda)} h(t) dt$$

bulunur.

$$R_1(x, t; \lambda) = \frac{1}{f^+(\lambda)} \begin{cases} -\varphi(t, \lambda) f^+(x, \lambda); & 0 \leq t < x \\ \varphi(x, \lambda) f^+(t, \lambda); & x \leq t < \infty \end{cases}$$

Kabul edilirse

$$y = \int_0^{\infty} R_1(x, t; \lambda) h(t) dt$$

olur. Diğer yandan $y = (R_1 h)(x)$ olduğundan

$$(R_1 h)(x) = \int_0^{\infty} R_1(x, t; \lambda) h(t) dt$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$R_2(x,t;\lambda) = \frac{1}{f^-(\lambda)} \begin{cases} -\varphi(t,\lambda)f^-(x,\lambda) & ; \quad 0 \leq t < x \\ \varphi(x,\lambda)f^-(t,\lambda) & ; \quad x \leq t < \infty \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir.

3.2 Teorem

Her bir λ kompleks sayısı için $\text{Im}\lambda > 0$ düzleminde

$$\|R_{1\lambda}\| \geq \frac{C_{1\lambda}}{|f^+(\lambda)|\sqrt{\text{Im}\lambda}} \quad (3.13)$$

olacak şekilde $C_{1\lambda}$ sayısı ve $\text{Im}\lambda < 0$ düzleminde

$$\|R_{2\lambda}\| \geq \frac{C_{2\lambda}}{|f^-(\lambda)|\sqrt{-\text{Im}\lambda}} \quad (3.14)$$

olacak şekilde $C_{2\lambda}$ sayısı vardır. [1]

İspat

Eş.3.13 eşitsizliğini ispatlayalım.

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} \overline{\varphi(t,\lambda)} & ; \quad 0 \leq t < a \\ 0 & ; \quad a \leq t < \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\int_0^\infty |f_1(\lambda)|^2 dt = \int_0^a |\overline{\varphi(t,\lambda)}|^2 dt < \infty$$

olduğundan $f_1(t) \in L_2[0,\infty)$ olur.

$$(R_{1\lambda} f_1)(t) = \int_0^\infty R_1(x,t;\lambda) f_1(x) dx$$

$$= - \int_0^a \frac{f^+(x, \lambda) \varphi(t, \lambda)}{f^+(\lambda)} \overline{\varphi(t, \lambda)} dt$$

$$= - \frac{f^+(x, \lambda)}{f^+(\lambda)} \int_0^a |\varphi(t, \lambda)|^2 dt$$

$$(R_{1\lambda} f_1)(t) = - \frac{f^+(x, \lambda)}{f^+(\lambda)} \|f_1\|^2$$

$$f^+(x, \lambda)(t) = e^{i[\alpha(x) + \lambda x]} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

asimptotik eşitliğinden

$$|f^+(x, \lambda)| = e^{-\text{Im} \lambda x} + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$|f^+(x, \lambda)| > \frac{1}{2} e^{-\text{Im} \lambda x}$$

olduğu açıktır.

$$\int_0^\infty |f^+(x, \lambda)|^2 dx > \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-2 \text{Im} \lambda x} dx = - \frac{1}{8 \text{Im} \lambda} e^{-2x \text{Im} \lambda} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{8 \text{Im} \lambda} \tag{3.15}$$

elde edilir. O halde Eş. 3.15 aşağıdaki eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\|R_{1\lambda} f_1\|^2 = \int_0^\infty |(R_{1\lambda} f_1)(t)|^2 dt = \int_0^\infty |f^+(x, \lambda)|^2 dx \frac{\|f_1\|^4}{|f^+(\lambda)|^2}$$

$$> \frac{1}{8 \text{Im} \lambda} \frac{\|f_1\|^4}{|f^+(\lambda)|^2}$$

eşitsizliğinden

$$\|R_{1\lambda}\| > \frac{C_{1\lambda}}{|f^+(\lambda)|\sqrt{\operatorname{Im}\lambda}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Eş. 3.14 de elde edilir.

3.3 Teorem

λ , L operatörünün resolvent cümlesine ait ve $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ise $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_\lambda\| = \infty$

İspat

Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 eşitsizlikleri ve $\operatorname{Im}\lambda_0 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_\lambda\| = \infty$ elde edilir.

3.4. Teorem

L operatörünün sürekli spektrumu reel eksendir. Yani $\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$ dır. [1]

İspat

$\lambda \in (-\infty, \infty)$ için Teorem 3.2’de $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığı ve Teorem 3.3’de $R_\lambda(L)$ operatörünün sınırsızlığı ispatlandı. Şimdi $R_\lambda(L)$ nin tanım cümlesinin $L_2(0, \infty)$ da yoğun olduğunu gösterelim.

$$L_2[0, \infty) = \overline{D(L - \lambda I)^{-1}} \oplus N(L^* - \lambda I)$$

eşitliğinde $N(L^* - \lambda I)$ cümlesi $L^* - \lambda I$ operatörünün çekirdeğidir. L^* ise L nin adjointidir.

$$L^* = \begin{cases} y'' + [\lambda - \overline{Q(x)}]^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ile gösterilen operatörünün pozitif özdeğeri olmadığından $N(L^* - \lambda I) = \{0\}$

elde edilir. O halde $L_2[0, \infty) = \overline{D(R_\lambda(L))}$ dir.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 den $\sigma_c(L) = (-\infty, +\infty)$ dur.

3.2 L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

3.1 Tanım

L operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutupları olup, özdeğerleri olmayan, sürekli spektrumda yer alan noktalara spektral tekillik denir. L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesini sırasıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterelim. [4]

3.5 Teorem

$$(a) \sigma_d(L(\lambda)) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, f^+(\lambda)=0\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_-, f^-(\lambda)=0\} \quad (3.16)$$

$$(b) \sigma_{ss}(L(\lambda)) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, f^+(\lambda)=0\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, f^-(\lambda)=0\} \quad (3.17)$$

Burada $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [3]

İspat

(a) M_1 ve M_2 ile aşağıdaki cümleleri tanımlayalım.

$$M_1 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, f^+(\lambda)=0\}$$

$$M_2 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_-, f^-(\lambda)=0\}$$

$$M = M_1 \cup M_2$$

cümlesini gösterelim.

L operatörünün özdeğerlerinin tanımı kullanılırsa

$$M \subset \sigma_d(L(\lambda)) \quad (3.18)$$

olduğu açıktır. Eş. 3.16 eşitliğini ispatlamak için $\sigma_d(L(\lambda)) \subset M$ olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda_0 \in \sigma_d(L(\lambda))$ olduğunu kabul edelim.

(1) $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$ olsun. $\lambda_0 \in \sigma_d(L(\lambda))$ olduğundan Eş. 2.1 denkleminin $\lambda = \lambda_0$ için $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan $y(x, \lambda_0) \in L_2[0, \infty)$ çözümü vardır. Wronskian x 'ten bağımsız olduğundan

$$W[y(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_0)] = \lim_{x \rightarrow 0} [y(x, \lambda_0) \varphi'(x, \lambda_0) - y'(x, \lambda_0) \varphi(x, \lambda_0)] = 0$$

dır.

$$c \neq 0 \text{ sabit olmak üzere } y(x, \lambda_0) = c \cdot \varphi(x, \lambda_0)$$

dır.

$$W[f^+(x, \lambda_0), y(x, \lambda_0)] = \lim_{x \rightarrow 0} [f^+(x, \lambda_0) c \cdot \varphi'(x, \lambda_0) - f_x^+(x, \lambda_0) c \cdot \varphi(x, \lambda_0)]$$

$$= c f^+(\lambda_0) \quad (3.19)$$

dır.

$$W[f^+(x, \lambda_0), y(x, \lambda_0)] = \lim_{x \rightarrow 0} [f^+(x, \lambda_0) y'(x, \lambda_0) - f_x^+(x, \lambda_0) y(x, \lambda_0)]$$

$$= 0 \quad (3.20)$$

dır.

Eş. 3.19 ve Eş. 3.20 ifadelerinden, $c \neq 0$ olduğundan $f^+(\lambda_0) = 0$ dır.

(2) $\lambda_0 \in \mathbb{C}_-$ olsun. $f^-(\lambda_0) = 0$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(3) $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eş. 2.12 den

Eş. 2.1 denkleminin keyfi çözümü

$$y(x, \lambda_0) = c_1(x) f^+(x, \lambda_0) + c_2(x) f^-(x, \lambda_0)$$

Eş.2.9 ve Eş. 2.10 dan

$$y(x, \lambda_0) = c_1 e^{i\lambda_0 x} + c_2 e^{-i\lambda_0 x} + o(1), x \rightarrow \infty$$

$$y(\cdot, \lambda_0) \notin L_2[0, \infty)$$

olur. O halde

$$\sigma_d(L(\lambda)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$$

(1), (2) ve (3) den

$$\sigma_d(L(\lambda)) \subset M \tag{3.21}$$

dir.

Eş. 3.18 ve Eş. 3.21 ifadelerinden

$$\sigma_d(L(\lambda)) = \{\lambda | \lambda \in \mathbb{C}_+, f^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda | \lambda \in \mathbb{C}_-, f^-(\lambda) = 0\}$$

elde edilir.

(b) Eş. 3.1 – Eş. 3.2 ve (a) dan $L(\lambda)$ operatörünün spektral tekilliklerinin reel ekseninde f^+ ve f^- nin sıfırları olduğunu elde ederiz.

$$W[f^+(x, \lambda), f^-(x, \lambda)] = f^+(\lambda) f_x^-(0, \lambda) - f^-(\lambda) f_x^+(0, \lambda) = -2i\lambda, \quad x \in \mathbb{R}$$

ifadesinden

$$\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}^*, f^+(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}^*, f^-(\lambda) = 0\} = \emptyset$$

Şimdi L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısını incelemek için sırasıyla $\overline{\mathbb{C}_+}$ ve $\overline{\mathbb{C}_-}$ de f^+ ve f^- fonksiyonlarının sıfırlarının yapısını incelememiz

gerekiyor. Basitlik için $\mathbb{C}_+$ da f^+ fonksiyonunun sıfırlarının yapısını inceleyelim. Benzer olarak, $\mathbb{C}_-$ de f^- fonksiyonunun sıfırlarının yapısı incelenebilir. Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$Q_1 = \{ \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, f^+(\lambda)=0 \}, Q_2 = \{ \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, f^+(\lambda)=0 \}$$

3.6. Teorem

(i) Q_1 kümesi sınırlıdır ve en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir. Ayrıca limit noktaları (varsa) reel eksendedir.

(ii) Q_2 kümesi kompakttır ve lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdır. [3]

İspat

$$(i) f^+(\lambda) = e^{i\alpha(0)} + o(1) \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

bağıntısından

$$f^+(\lambda) \neq 0$$

$f^+(\lambda)$ fonksiyonu $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzleminde analitiktir.

Özdeş olarak sıfırdan farklı analitik bir fonksiyonun sıfırları sınırlı bir bölgededir. O halde Q_1 cümlesi sınırlıdır.

$f^+(\lambda)$ fonksiyonu $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzleminde analitik olduğundan onun analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (yani Q_1 cümlesi) en fazla sayılabilir çokluktur.

Analitik fonksiyonun analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitiklik bölgesinin sınırında olduğundan Q_1 cümlesinin limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığında yer alır.

(ii) Q_2 kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

Bunun için Q_2 den alınan dizinin limit noktasının Q_2 ye ait olduğunu göstermeliyiz.

$(\lambda_n) \in Q_2$, $f^+(\lambda_n) = 0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ herhangi bir dizin olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^+(\lambda_n) = f^+(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) = f^+(\lambda_0)$$

olur. Buradan $\lambda_0 \in Q_2$ elde edilir.

Şimdi $\mu(Q_2) = 0$ olduğunu görmek için Privalov teoremini kullanalım. Q_2 cümlesinin lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdan büyük olsaydı $f^+(\lambda) \equiv 0$ olması gerekirdi. Fakat $f^+(\lambda) \not\equiv 0$ olduğundan $\mu(Q_2) = 0$ olur.

Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 dan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

3.1. Sonuç

$L(\lambda)$ nın özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin cümleleri sınırlıdır ve en fazla sayılabilir çokluktur. Eğer Eş. 2.3 koşulu sağlanırsa limit noktaları sadece reel eksenin sınırlı alt aralığında bulunabilir.

Şimdiye kadar Eş.2.3 koşulunu göz önünde bulundurduk. Bundan sonra aşağıdaki koşulları kullanacağız.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0, \quad |Q'(x)| \leq c \exp(-\varepsilon \sqrt{x}), \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.22)$$

Buradan

$$|Q(x)| \leq c \exp(-\varepsilon \sqrt{x}) \quad (3.23)$$

Eş.2.4, Eş.2.7 ve Eş.3.23 kullanılarak

$$|K^+(x,t)| \leq c \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{x+t}{2}} \right\} \quad (3.24)$$

elde edilir. [3]

3.7. Teorem

$$|f^{+(r)}(\lambda)| \leq M_r \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$M_0 = \exp \left\{ - \int_0^\infty \operatorname{Im} Q(t) dt \right\} + \int_0^\infty |K^+(0, t)| dt \quad (3.26)$$

ve

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c. \int_0^\infty t^r \exp \left(- \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t} \right) dt, \quad r = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlıdır. [3]

İspat:

$r = 0$ için

$$f^+(\lambda) = e^{i\alpha(0)} + \int_0^\infty K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$|f^+(\lambda)| = \left| e^{i\alpha(0)} + \int_0^\infty K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt \right|$$

$$\leq \left| e^{i\alpha(0)} \right| + \int_0^\infty |K^+(0, t) e^{i\lambda t}| |e^{i\lambda t}| dt$$

$$= \left| e^{i \left\{ \int_0^\infty \operatorname{Re} Q(t) + i \operatorname{Im} Q(t) dt \right\}} \right| + \int_0^\infty |K^+(0, t)| \left| e^{-(\operatorname{Im} \lambda) t} \right| dt$$

$$\leq \exp \left\{ - \int_0^\infty \operatorname{Im} Q(t) dt \right\} + \int_0^\infty |K^+(0, t)| dt$$

dır.

$r > 0$ için ispatı yapalım.

$$f^+(\lambda) = e^{i\alpha(0)} + \int_0^\infty K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\frac{d}{d\lambda} f^+(\lambda) = \int_0^\infty (it) K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} f^+(\lambda) = \int_0^\infty (it)^2 K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^r}{d\lambda^r} f^+(\lambda) = \int_0^\infty (it)^r K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} f^+(\lambda) \right| = \left| \int_0^\infty (it)^r K^+(0, t) e^{i\lambda t} dt \right|$$

$$\leq \int_0^\infty |K^+(0, t)| t^r dt$$

$$\leq c \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}} t^r dt$$

$$= c \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{k}} 2^r k^r . 2 dk$$

$$= 2^{r+1} . c \int_0^\infty t^r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}\right) dt \quad r = 1, 2, \dots$$

O halde

$$|f^{+(r)}(\lambda)| \leq M_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Q_1 ve Q_2 nin limit noktalarının cümlesi sırası ile Q_3 ve Q_4 ile ve f^+ nın $\overline{\mathbb{C}_+}$ daki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesini Q_5 ile gösterelim.

3.8. Teorem

$$Q_3 \subset Q_2, Q_4 \subset Q_2, Q_5 \subset Q_2 \quad [3]$$

İspat

$Q_3 \subset Q_2$ olduğunu gösterelim.

$\lambda \in Q_3$ olsun. $\text{Im}\lambda > 0, n \rightarrow \infty, \lambda_n \rightarrow \lambda, f^+(\lambda_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^+(\lambda_n) = 0 \Rightarrow f^+\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\right) = 0$$

$$\Rightarrow f^+(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \in Q_2$$

$Q_4 \subset Q_2$ olduğunu gösterelim.

$\lambda \in Q_4$ olsun. $\text{Im}\lambda = 0, n \rightarrow \infty, \lambda_n \rightarrow \lambda, f^+(\lambda_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^+(\lambda_n) = 0 \Rightarrow f^+\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\right) = 0$$

$$\Rightarrow f^+(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \in Q_2$$

$Q_5 \subset Q_2$ olduğunu gösterelim.

$$Q_5 = \{\lambda \mid \text{Im}\lambda \geq 0, f^+(\lambda) = 0, \lambda \text{ sonsuz katlı sıfır}\}$$

Bir fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer alıyorsa o fonksiyon, o bölgede özdeş olarak sıfırdır. $f^+(\lambda) \neq 0$ olduğundan f^+ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırları reel ekseninde yer alır.

O halde

$$Q_5 \subset Q_2 \text{ dir.}$$

3.1. Lemma

$$Q_3 \subset Q_5, Q_4 \subset Q_5 \text{ [3]}$$

İspat

$Q_3 \subset Q_5$ olduğunu gösterelim.

$Q_3 \not\subset Q_5$ olsun. Yani

$$\exists (\lambda_n) \in Q_1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0 \in Q_3 \text{ var } \exists \lambda_0 \notin Q_5$$

$f^+(\lambda)$ reel eksene kadar sürekli olduğundan $\lambda_0 \in Q_2$ olur ve öyle sonlu pozitif n tamsayısı vardır ki

$$f^+(\lambda) = (\lambda_n - \lambda_0)^n \cdot a(\lambda) \quad , \quad a(\lambda_0) \neq 0$$

$$f^+(\lambda_n) = 0 \text{ ve } \lambda_n \neq \lambda_0 \text{ olduğundan}$$

$$a(\lambda_n) = \frac{f^+(\lambda_n)}{(\lambda_n - \lambda_0)^n} = 0$$

$a(\lambda)$ sürekli fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda_n) = a(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) = a(\lambda_0) = 0$$

Dolayısıyla λ_0 , $f^+(\lambda)$ nın sonlu katlı sıfırı olmaz. Sonsuz katlı sıfırdır.

$Q_4 \subset Q_5$ benzer olarak gösterilir.

3.9. Teorem

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c \cdot \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\frac{c}{2}\sqrt{t}} dt \quad , \quad r = 1, 2, \dots (c > 0)$$

ile tanımlanan M_r sabitleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$M_r \leq B \cdot b^r \cdot r! \quad (3.27)$$

Burada B ve b sabitleri c'ye ve ε 'a bağlı pozitif sabitlerdir. [3]

İspat

$\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t} = u$ dönüşümünü yapalım.

$$\frac{\varepsilon^2}{4} t = u^2 \Rightarrow dt = \frac{8u}{\varepsilon^2} du$$

olur.

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c \cdot \int_0^\infty \left(\frac{2u}{\varepsilon} \right)^{2r} \cdot e^{-u} \frac{8u}{\varepsilon^2} du$$

$$= 2^{r+1} \cdot c \cdot \frac{2^{2r} \cdot 8}{\varepsilon^{2+2r}} \int_0^\infty u^{2r+1} \cdot e^{-u} du$$

elde edilir. Sonuncu integrale 2r kez kısmi integrasyon uygularsak

$$M_r = \frac{16 \cdot c \cdot 8^r}{\varepsilon^{2r+2}} (2r+1)(2r)(2r-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \int_0^\infty u e^{-u} du$$

$$\leq \frac{16 \cdot c \cdot 8^r}{\varepsilon^{2r+2}} \underbrace{(2r+1)(2r+1) \dots (2r+1)}_{2r-\tan e} \int_0^\infty u e^{-u} du$$

$$= \frac{16 \cdot c \cdot 8^r}{\varepsilon^{2r+2}} \cdot (2r+1)^{2r}$$

$$\leq 8^r \cdot B \cdot (2r+1)^{2r}$$

$$= 8^r \cdot B \cdot \left(2r \left(1 + \frac{1}{2r} \right) \right)^{2r}$$

$$8^r \cdot B \cdot (2r)^{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{2r}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{2r} < e \text{ ve } r^r < e^r \cdot r! \text{ eşitsizlikleri kullanılırsa}$$

$$M_r \leq 32^r \cdot e^r \cdot r! \cdot r^r \cdot B$$

$$= B \cdot b^r \cdot r^r \cdot r! \quad (3.28)$$

3.10. Teorem

$f^+(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzlemindeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi boştur. Yani $Q_5 = \emptyset$ dir. [3]

İspat

Teoremi, analitik fonksiyonların birebirlik teoremi olan Pavlov Teoremini kullanarak ispatlayacağız. $f^+(\lambda)$ fonksiyonu açık üst düzlemde analitik, tüm basamaktan türevleri sürekli ve kendisi kapalı üst düzlemde sürekli olduğundan

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} f^+(\lambda) \right| \leq M_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im}\lambda \geq 0, \quad |z| < 2N$$

ve

$$\left| \int_{-\infty}^{-N} \frac{\ln|f^+(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty \quad \left| \int_N^{\infty} \frac{\ln|f^+(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty$$

sağlanır.

$$T(s) = \inf_r \frac{M_r s^r}{r!} \text{ ve } \mu(Q_5, s), \quad Q_5 \text{ cümlesinin}$$

s komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür. h keyfi pozitif bir sayı olmak üzere

Eğer $\int_0^h \ln T(s) d\mu(Q_s, s) = -\infty$ olsaydı Pavlov teoremine göre $f^+(\lambda) \equiv 0$ olmalıydı.

Fakat bilindiği üzere $f^+(\lambda) \neq 0$ olduğundan

$$\int_0^h \ln T(s) d\mu(Q_s, s) > -\infty$$

olur. $T(s)$ aşağıdaki gibi değerlendirilebilir. Eş.3.28'e göre

$$\begin{aligned} T(s) &= \inf_r \frac{M_r s^r}{r!} \leq B \inf_r \left\{ \frac{b^r \cdot r^r \cdot r! s^r}{r!} \right\} \\ &= B \inf_r \{b^r \cdot r^r \cdot s^r\} \\ &\leq B \min_{x \in [0, \infty)} \{b^x \cdot x^x \cdot s^x\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur.

$$f(x) = b^x \cdot s^x \cdot x^x = (bsx)^x$$

olmak üzere $T(s)$ ile ilgili bir değerlendirme elde etmek için $f(x)$ fonksiyonunun minimumu bulunmalıdır.

$$f(x) = (bsx)^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln (bsx)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (bsx) + 1 \text{ ise}$$

$$f'(x) = (bsx)^x [\ln (bsx) + 1] \quad (3.30)$$

Şimdi ekstremum noktalarını inceleyelim.

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = (bsx)^x [\ln (bsx) + 1] = 0$$

ise $\ln(bsx) = -1$ ve $\ln e^{-1} = -1$ olduğundan

$$\ln(bsx) = \ln(e^{-1}) \Rightarrow bsx = e^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{bse}$$

bulunur.

Şimdi $x = b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}$ noktasında yerel minimum olduğunu gösterelim. Eş. 3.30 dan

$$\ln f'(x) = \ln(bsx)^x + \ln[\ln(bsx) + 1]$$

türev alınırsa

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln(bsx) + 1 + \frac{\frac{bs}{bsx}}{\ln(bsx) + 1}$$

$$f''(x) = f'(x) \left[\frac{(\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x}}{\ln(bsx) + 1} \right]$$

$$f''(x) = (bsx)^x \left[(\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

elde edilir.

$$f''(b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}) = (e^{-1})^{b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}} [bse] > 0$$

olduğundan $x = \frac{1}{bse}$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu yerel minimuma sahiptir.

O halde

$$T(s) \leq B \inf_r \{b^r s^r r^r\} \leq B \exp\{-b^{-1} s^{-1} e^{-1}\}$$

olur.

$$\ln T(s) \leq -\frac{1}{bse} < \frac{1}{s}$$

olduğundan Pavlov teoremine göre

$$\int_0^b \frac{1}{s} d\mu(Q_5, s) < \infty$$

bulunur.

Bu integralin yakınsak olması için Q_5 cümlesinin lineer komşuluğunun boş olması gerekir. Bu ise Q_5 in boş olması demektir. Yani $Q_5 = \emptyset$ dir.

$Q_3 \subset Q_5$ ve $Q_4 \subset Q_5$ olduğundan $Q_3 = \emptyset$ ve $Q_4 = \emptyset$ elde edilir.

Bilindiği gibi Q_3 cümlesi Q_1 cümlesinin limit noktalarından oluşur. Ayrıca Q_1 cümlesi 3.6 Teoremine göre sınırlı olduğundan Q_1 cümlesi sonlu sayıda elemana sahiptir. Buradan Q_2 cümlesinin sonlu sayıda elemana sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla $f^+(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im}\lambda \geq 0$ yarı düzlemindeki tüm sıfırları sonlu sayılardır.

Teorem 3.5'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2. Sonuç

$L(\lambda)$ operatörü sonlu sayıda özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir. Her biri Eş.3.22 koşulunu sağlarsa, onların katı da sonludur. [3]

KAYNAKLAR

1. Naimark, M.A. "Linear Differential Operators II", **Ungar**, New York, 300-305 (1968).
2. Naimark, M.A., "Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non.-Selfadjoint Operator of Second Order on a Semi-axis", **Amer. Math Soc. Trans.**, 2(16): 103-193(1960).
3. Schwartz, J.T., "Some Non-Selfadjoint Operators", **Comm. Pure and Appl. Math.**, 13:609-639(1960).
4. Lyance, V.E., "A Differential Operator with Spectral Singularities I", **Amer. Math. Trans.**, 2(60): 185-225 (1967).
5. Privalov, I.I., "The Boundary Properties of Analytic Functions" in "Hochschulbücher für Math.", **VEB Deustseher Verlag**, Berlin, 25:53-57 (1970).
6. Spiegel M.R., "İleri Matematik", **Schaum's Outlines**, 266 (1997).
7. Pavlov, B.S., "The Non-selfadjoint Schrödinger Operator", **Topics in Math. Phys.**, 1:87-110(1967).
8. Bairamov. E., Çelebi, A.O., "Spectral Properties of the Klein-Gordon S-Wave Equation with Complex Potential", **Indian J.Pure Appl. Math.**, 28(6): 813-824 (June 1977).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : YEŞİLTEPELER Erkan
 Uyruğu : T.C
 Doğum Tarihi ve Yeri : 03.02.1981, Ankara
 Medeni Hali :
 Telefon : 0 505 665 56 65
 e-posta : eryesiltp@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lise	K. Mimar Kemal Lisesi	1998
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2004
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2006	Açı Dershaneleri	Öğretmen
2006-2007	Gazi Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Spor yapmak (tenis, basketbol, futbol), kitap okumak