

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KOMÜTATİF KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN TEMEL
MATRİSLER İÇİN EULER-DE MOİVRE FORMÜLLERİ VE
RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRMEDEKİ UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tue BİLGİLİ

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	GEOMETRİ
Tez Danışmanı	:	Dr. Öğr. Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL

Ağustos 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Tue BİLGİLİ
10.08.2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma motivasyonu veren, her daim maddi manevi destekleriyle yanımda olan sonsuz fedakarlık gösteren hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında gösterdikleri anlayışla bana büyük destek veren ve beni yüreklendiren sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Komütatif Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri.....	3
2.2. Komütatif Kuaterniyonların Kutupsal Formu	4
2.3. Komütatif Kuaterniyonların Temel Matrisleri	7
BÖLÜM 3.	
KOMÜTATİF KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN TEMEL MATRİSLER İÇİN EULER VE DE MOİVRE FORMÜLLERİ.....	12
3.1. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Kutupsal Formu	12
3.2. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler İçin Euler Formülü	19
3.3. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Kuvvet ve Kök Hesapları İçin Pseudo Kodlar.....	22
3.4. MATLAB Ortamında Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Sınıfının İnşası	23

BÖLÜM 4.

KOMÜTATİF KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN TEMEL MATRİSLER

YARDIMI İLE RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME..... 28

4.1. Renkli Görüntüler..... 29

4.2. Renkli Görüntü İyileştirme..... 31

4.3. Renkli Görüntülerin Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler Yardımı ile İfade Edilmesi 33

4.4. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler ile Örneklenmiş Renkli Görüntüleri İyileştirme Süreçleri 34

4.5. Sonuç.....39

KAYNAKLAR 38

ÖZGEÇMİŞ 40

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde reel matrislerin cümlesi
$\mathbb{K}$	: Reel kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}$	: Komütatif kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde komütatif kuaterniyon matrislerinin cümlesi
CMY	: Camgöbeği, galibarda, sarı renk uzayı
CMYK	: Camgöbeği, galibarda, sarı, siyah renk uzayı
RGB	: Kırmızı, yeşil, mavi renk uzayı
PSF	: Nokta yayılma fonksiyonu (Point Spread Function)
LSI	: Bozulma modeli (Linear Shift Invariant)

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 3.1. Algoritma 1 ile sıradan matris çarpımının süre bakımından karşılaştırılması
- Şekil 3.2. Temel matris sınıfında nesne oluşturma
- Şekil 3.3. Temel matris sınıfında kuvvet alma
- Şekil 3.4. Temel matris sınıfında kök alma
- Şekil 3.5. Temel matris sınıfında alınan hata mesajı
- Şekil 3.6. Temel matris sınıfında kurucu fonksiyon
- Şekil 4.1. RGB renk uzayı
- Şekil 4.2. RGB renk uzayında bir görüntünün $m \times n$ boyutlarındaki matris gösterimi
- Şekil 4.3. Yapay renklendirilmiş görüntüler
- Şekil 4.4. RGB renk uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler
- Şekil 4.5. Görüntü iyileştirme süreci
- Şekil 4.6. Deniz yeşili renginin temel matris gösterimi
- Şekil 4.7. Renkli bir görüntünün blokları temel matrisler olan reel matris ile ifadesi
- Şekil 4.8. Çalışmanın özeti
- Şekil 4.9. Sırası ile orjinal görüntü (a), bozulmuş görüntü (b) ve iyileştirilmiş görüntü (c)
- Şekil 4.10. Değişken λ ve θ değerlerine karşılık elde edilen relatif hatalar

ÖZET

Anahtar kelimeler: Komütatif kuaterniyonlar, komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler, Euler ve De Moivre formülü, RGB renk uzayı, görüntü iyileştirme.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız komütatif kuaterniyonlar ve onların temel matrislerinin temel kavram ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen 4×4 tipindeki temel matrislerin Euler ve De Moivre formülleri elde edilmiştir. Elde edilen bu formüller yardımıyla temel matrislerin n inci mertebeden kökleri ve kuvvetleri hesaplanmıştır. Son olarak da temel matrislerin köklerini ve kuvvetlerini hesaplayan pseudo kodlar ve MATLAB ortamında sınıflar geliştirilmiştir.

Dördüncü bölümde ise renkli bir görüntü komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler yardımıyla örneklenerek bu görüntünün blokları temel matrisler olan filtreler ile bozulma-iyileştirme süreçleri incelenmiştir. Ayrıca görüntünün yeniden inşa sürecindeki relatif hatalar incelenerek yöntemin verimliliği ortaya konmuştur.

EULER-DE MOIVRE FORMULAS FOR FUNDAMENTAL MATRICES CORRESPONDING TO COMMUTATIVE QUATERNIONS AND THEIR APPLICATIONS IN COLOR IMAGE RESTORATION

SUMMARY

Keywords: Commutative quaternions, fundamental matrices corresponding to commutative quaternions, Euler and De Moivre formulas, RGB color space, image restoration.

This study consists of four parts. The first part is an introduction devoted to the literature knowledge.

In the second part of this study the fundamental definitions and theorems related to the commutative quaternions and commutative matrices are given.

In the third part, Euler and De Moivre formulas of real matrices of the 4×4 type corresponding to commutative quaternions are obtained. With the help of these formulas obtained, n . order roots and power of fundamental matrices are calculated. Finally, pseudo codes and classes in the MATLAB environment that calculate the roots and power of matrices corresponding to commutative quaternions have been developed.

In the fourth part chapter, a color image is sampled with the help of fundamental matrices corresponding to commutative quaternions, and the distortion- improvement processes of this image are examined with filters, the blocks of which are the fundamental matrices. In addition, the relative errors in the image reconstruction process are examined and the efficiency of the method is revealed.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Reel kuaterniyonlar 1843 yılında Hamilton tarafından tanımlanmıştır [1]. Reel kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{K} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \text{ ve } i, j, k \notin \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k birimlerinin çarpımı

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (1.2)$$

biçimindedir. Bu çarpım kuralından reel kuaterniyonlar da çarpma işleminin değişme özelliği olmadığı görülmektedir. Reel kuaterniyonlar cümlesi, üzerinde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde ise 4-boyutlu vektör uzayıdır [2].

Reel kuaterniyonların hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, bilgisayar programlama, kuantum mekaniği gibi birçok alanda önemli uygulamaları mevcuttur [3-6]. Fakat reel kuaterniyon cebirinin çarpma işlemine göre değişme özelliğinin olmaması ve kompleks sayılar ile reel sayılar cümlesine giden yapı koruyan dönüşümlerinin karmaşık olması bu uzayda geliştirilen algoritmaların zaman ve bellek karmaşıklarının yüksek olmasına sebep olmaktadır [7].

Hamilton'un buluşundan sonra Segre, 1892 yılında komütatif kuaterniyonlar cümlesini tanımlamıştır [8]. Komütatif kuaterniyonlar da reel kuaterniyonlar gibi kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde ise 4-boyutlu vektör uzayıdır. Reel ve komütatif kuaterniyonları birbirinden ayıran iki temel unsur vardır. Bunlardan birincisi komütatif kuaterniyonlar çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. İkincisi ise komütatif kuaterniyonlar cümlesi sıfır bölen

elemana sahiptir [9]. Bunun yanı sıra komütatif kuaterniyonlar cümlesinde tanımlı çarpma, bölme, kuvvet alma, kök hesaplama vb. birçok cebirsel işlemin algoritmik karmaşıklığı diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre büyük ölçüde düşüktür. Bu durum da bu sistemi diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre daha avantajlı bir hale getirmektedir [7].

Komütatif kuaterniyonların uygulama alanları da oldukça geniştir. Bunlar, hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, sinyal işleme, bilgisayar programlama vb. dir. Scorza-Dragoni [10] ve Morin [11] komütatif kuaterniyon değerli fonksiyonların diferensiyellenebilmesi üzerine çalışmalar yapmışlardır. Pei ve ark. komütatif kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların Fourier dönüşümlerini kullanarak görüntü ve sinyal işleme gibi süreçlerde pek çok uygulama gerçekleştirmiştir [12]. Pei ve ark. komütatif kuaterniyon matrislerinin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı ve pseudo terslerinin hesabına dair algoritmalar geliştirmiştir [7]. Catoni ve ark. komütatif kuaterniyonları n boyutta ifade ederek bu sayı sistemlerinin geometrik anlamlarını çalışmışlardır. Ayrıca komütatif kuaterniyonların holomorfik fonksiyonlarını, kutupsal gösterimlerini ve konformal dönüşümlerini de elde etmişlerdir [13]. Komütatif kuaterniyonları kullanarak Isokawa ve ark. Hopfield sinir ağlarını incelemişlerdir [14]. Kosal ve Tosun komütatif kuaterniyon matrislerinin temel cebirsel özelliklerini komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler yardımıyla incelemişlerdir [15]. Kosal ve ark. komütatif kuaterniyon değerli matrisler üzerinde eşlenik benzerlik bağıntısını tanımlayarak komütatif kuaterniyon değerli matrislerin eşlenik özdeğer ve eşlenik özvektör kavramlarını tanımlamışlardır [16]. Kosal ve Tosun, komütatif kuaterniyonlar ve onların matrisleri üzerinde eşlenik benzerlik, yarı benzerlik ve eşlenik yarı benzerlik gibi denklik bağıntıları elde etmişlerdir. Ayrıca Sylvester-s-Eşlenik komütatif kuaterniyon matris denkleminin çözümünü bu denklik bağıntıları yardımıyla vermişlerdir [17]. Kosal ve Tosun bir başka çalışmalarında komütatif kuaterniyonlar ve onların matrisleri üzerinde evrensel benzerlik eşitliğini elde ederek her iki uzayda da temel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir [18]. Son olarak, Kosal komütatif kuaterniyon matris uzayında $AX = B$ denklemin en küçük kareler çözümünü elde ederek bu teoremin renkli görüntü iyileştirmedeki uygulamalarını çalışmıştır [19].

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Komütatif Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri

Komütatif kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \text{ ve } i, j, k \notin \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

biçiminde gösterilir. Burada i, j, k kuaterniyonik birimleri arasındaki ilişki

$$i^2 = k^2 = -1, \quad j^2 = 1, \quad ij = ji = k, \quad jk = kj = i, \quad ki = ik = -j \quad (2.2)$$

biçimindedir. Son ifade de birimlerin çarpımından açıktır ki $\mathbb{H}$ cümlesi çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir [20].

$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{H}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k,$$

$$ab = (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 + a_2b_3)i \\ + (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_3b_0 + a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)k$$

ve

$$\lambda a = \lambda(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = \lambda a_0 + \lambda a_1i + \lambda a_2j + \lambda a_3k$$

eşitlikleri ile tanımlanır [20]. $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonunun

3 tip eşleniği mevcuttur. Bunlar

$$\begin{aligned}
{}^1\bar{a} &= a_0 - a_1i + a_2j - a_3k, \\
{}^2\bar{a} &= a_0 + a_1i - a_2j - a_3k, \\
{}^3\bar{a} &= a_0 - a_1i - a_2j + a_3k
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklindedir [20].

$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonun normu

$$\|a\| = \sqrt[4]{a \left({}^1\bar{a}\right) \left({}^2\bar{a}\right) \left({}^3\bar{a}\right)} = \sqrt{[(a_0 + a_2)^2 + (a_1 + a_3)^2][(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2]}$$

eşitliği ile tanımlanır [20].

$\|a\| \neq 0$ olmak üzere a komütatif kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi a^{-1} olmak üzere

$$a^{-1} = \frac{\left({}^1\bar{a}\right) \left({}^2\bar{a}\right) \left({}^3\bar{a}\right)}{\|a\|^4}$$

dir [20].

2.2. Komütatif Kuaterniyonların Kutupsal Formu

$\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonu

$$a = \|a\| (\cos \phi + i \sin \phi) (\cosh \theta + j \sinh \theta) (\cos \psi + k \sin \psi) \tag{2.4}$$

biçiminde yazılabilir. Burada ϕ ve ψ Öklid açısı θ ise hiperbolik açıdır ve

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_1 - a_2 a_3)}{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2} \right) \\
\theta &= \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_2 + a_1 a_3)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right) \\
\psi &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

dir. (2.4) ifadesine a komütatif kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir [20].

$$a = \|a\| (\cos \phi + i \sin \phi) (\cosh \theta + j \sinh \theta) (\cos \psi + k \sin \psi)$$

ve

$$b = \|b\| (\cos \phi' + i \sin \phi') (\cosh \theta' + j \sinh \theta') (\cos \psi' + k \sin \psi')$$

olmak üzere bir komütatif kuaterniyonun tamsayı kuvveti, tersi ve iki komütatif kuaterniyonun çarpımı kutupsal gösterim yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$a^n = \|a\|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) (\cosh n\theta + j \sinh n\theta) (\cos n\psi + k \sin n\psi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$a^{-1} = \|a\|^{-1} (\cos \phi - i \sin \phi) (\cosh \theta - j \sinh \theta) (\cos \psi - k \sin \psi), \quad \|a\| \neq 0$$

ve

$$ab = \|a\| \|b\| \left(\begin{aligned} &(\cos(\phi + \phi') + i \sin(\phi + \phi')) (\cosh(\theta + \theta') + j \sinh(\theta + \theta')) \\ &(\cos(\psi + \psi') + k \sin(\psi + \psi')) \end{aligned} \right).$$

Ayrıca $e^{\phi i}$, $e^{\theta j}$ ve $e^{\psi k}$ ifadelerinin Taylor açılımları

$$\begin{aligned}
e^{\phi i} &= 1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2!} - i\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \\
&= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \cos \phi + i \sin \phi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\theta j} &= 1 + j\theta + \frac{\theta^2}{2!} + j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
&= 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + j\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \\
&= \cosh \theta + j \sinh \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\psi k} &= 1 + k\psi - \frac{\psi^2}{2!} - k\frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^4}{4!} + \dots \\
&= 1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \dots + k\left(\psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \cos \psi + k \sin \psi
\end{aligned}$$

için $a (\|a\| \neq 0)$ komütatif kuaterniyonunun Euler formülü

$$a = \|a\| e^{\phi i + \theta j + \psi k} \quad (2.6)$$

biçimindedir. $a = \|a\| e^{\phi i + \theta j + \psi k}$ ve $b = \|b\| e^{\phi' i + \theta' j + \psi' k}$ olmak üzere bir komütatif kuaterniyonun tamsayı kuvveti, tersi ve iki komütatif kuaterniyonun çarpımı Euler formülü yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır [12].

$$a^n = \|a\|^n e^{n\phi i + n\theta j + n\psi k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$a^{-1} = \|a\|^{-1} e^{-\phi i - \theta j - \psi k}, \quad \|a\| \neq 0,$$

ve

$$ab = \|a\| \|b\| e^{\phi i + \theta j + \psi k} e^{\phi' i + \theta' j + \psi' k} = \|ab\| e^{(\phi + \phi')i + (\theta + \theta')j + (\psi + \psi')k}.$$

2.3. Komütatif Kuaterniyonların Temel Matrisleri

$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$ için $\varphi_a(x) = ax$ şeklinde $\varphi_a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ lineer dönüşümü tanımlansın. φ lineer dönüşümünün $\{1, i, j, k\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\begin{aligned}\varphi_a(1) &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) \\ \varphi_a(i) &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)i = -a_1 + a_0i - a_3j + a_2k \\ \varphi_a(j) &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)j = a_2 + a_3i + a_0j + a_1k \\ \varphi_a(k) &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)k = -a_3 + a_2i - a_1j + a_0k\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

biçimindedir. Bu matris $a \in \mathbb{H}$ nin temel matrisi olarak adlandırılır [9].

Ayrıca $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ matris cümlesi ile $\mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonlar cümlesi arasında bir cebir izomorfizması tanımlanabilir. Bu izomorfizma

$$\tau : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

$$a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \rightarrow \tau(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla

$$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \cong \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

yazılabilir [9].

Yukarıdaki ifadeden yola çıkılarak iki komütatif kuaterniyon $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ve $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ nin çarpımı

$$ab = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \varphi(a)b$$

şeklinde de yazılabilir [9]. φ fonksiyonu için

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla φ bir cebir izomorfizmasıdır. Ayrıca,

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4; \quad \varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1;$$

$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2; \quad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

olduğundan

$$E_1E_1 = -I_4, \quad E_2E_2 = I_4, \quad E_3E_3 = -I_4,$$

$$E_1E_2 = E_2E_1 = E_3, \quad E_2E_3 = E_3E_2 = E_1, \quad E_1E_3 = E_3E_1 = -E_2$$

dır. Sonuç olarak E_1, E_2, E_3 matrisleri ile i, j, k elemanları birbirlerine izomorftur [9].

Teorem 2.3.1. $a, b \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere temel matrisler için aşağıdaki eşitlikler doğrudur [20].

1. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$
2. $\varphi(\varphi(a)b) = \varphi(a)\varphi(b),$
3. $a = b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b),$
4. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$
5. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a),$
6. $iz(\varphi(a)) = a + {}^1\overline{a} + {}^2\overline{a} + {}^3\overline{a},$
7. $\|a\|^4 = \det(\varphi(a)).$

Teorem 2.3.2. $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$P \text{diag}(a, {}^1\overline{a}, {}^2\overline{a}, {}^3\overline{a})P^{-1} = \varphi(a)$$

eşitliği mevcuttur. Burada

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ j & j & -j & -j \\ -k & k & -k & k \end{pmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & j & k \\ 1 & -i & j & -k \\ 1 & -i & -j & k \\ 1 & i & -j & -k \end{pmatrix}$$

dır [18].

$P \text{diag}(a, {}^1\overline{a}, {}^2\overline{a}, {}^3\overline{a}) P^{-1} = \varphi(a)$ ifadesine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu ifade yardımıyla aşağıdaki sonuçları söyleyebiliriz [18].

1. $\mathbb{H}$ cümlesi

$$\mathbb{H}' = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki cebir izomorfizmi

$$\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$$

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \rightarrow \varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

2. Her $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonu

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{H}'$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{H}$ cümlesi üstünde tek bir şekilde köşegenleştirilebilir.



BÖLÜM 3. KOMÜTATİF KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN TEMEL MATRİSLER İÇİN EULER VE DE MOİVRE FORMÜLLERİ

Bu bölümde a ($\|a\| \neq 0$) komütatif kuaterniyonuna karşılık gelen

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

temel matrisin kutupsal formu ile Euler ve De-Moivre formülleri elde edilecektir.

3.1. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Kutupsal Formu

a ($\|a\| \neq 0$) komütatif kuaterniyonu için

$$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k = \|a\| \left[(\cos \phi + i \sin \phi) (\cosh \theta + j \sinh \theta) (\cos \psi + k \sin \psi) \right]$$

idi. Bu eşitlikten

$$\varphi(a) = \sqrt[4]{(\det(\varphi(a)))} (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi) (\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta) (\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi) \quad (3.1)$$

ifadesi elde edilir. Burada I_4 , 4×4 birim matris,

$$\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

ve

$$\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

dır. (3.1) ifadesine $\varphi(a)$ temel matrisinin kutupsal formu denir.

Teorem 3.1.1. $\phi, \theta, \psi \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

1. $(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^n = \cos n\phi I_4 + \varphi(i) \sin n\phi$
2. $(\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta)^n = \cosh n\theta I_4 + \varphi(j) \sinh n\theta$
3. $(\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi)^n = \cos n\psi I_4 + \varphi(k) \sin n\psi$

dir.

İspat. 1. şık için ispatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^2 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} (\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^2 & -2(\sin \phi)(\cos \phi) & 0 & 0 \\ 2(\sin \phi)(\cos \phi) & (\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^2 & -2(\sin \phi)(\cos \phi) \\ 0 & 0 & 2(\sin \phi)(\cos \phi) & (\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 & 0 \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ 0 & 0 & \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} = \cos 2\phi I_4 + \varphi(i) \sin 2\phi
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak **1.** şık ifadesi $n = 2$ için doğrudur.

$n = k$ için $(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^k = \cos k\phi I_4 + \varphi(i) \sin k\phi$ ifadesi doğru olsun ve $n = k + 1$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^{k+1} &= (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^k (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\phi & -\sin k\phi & 0 & 0 \\ \sin k\phi & \cos k\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\phi & -\sin k\phi \\ 0 & 0 & \sin k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\phi & -\sin(k+1)\phi & 0 & 0 \\ \sin(k+1)\phi & \cos(k+1)\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k+1)\phi & -\sin(k+1)\phi \\ 0 & 0 & \sin(k+1)\phi & \cos(k+1)\phi \end{pmatrix} \\
&= \cos(k+1)\phi I_4 + \varphi(i) \sin(k+1)\phi
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak 1. şık ifadesi $n = k + 1$ içinde doğrudur. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için de doğru olur.

Ayrıca $(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^{-1} = \cos \phi I_4 - \varphi(i) \sin \phi = \cos(-\phi) I_4 + \varphi(i) \sin(-\phi)$ olduğundan

$$(\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^{-n} = (\cos n\phi I_4 + \varphi(i) \sin n\phi)^{-1} = \cos(-n\phi) I_4 + \varphi(i) \sin(-n\phi)$$

elde edilir. Sonuç olarak verilen ifade $\forall n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

2. ve 3. şıkların doğrulukları benzer yolla gösterilebilir.

Teorem 3.1.2. (De-Moivre formülü) a ($\|a\| \neq 0$) herhangi komütatif kuaterniyon ve ona karşılık gelen temel matris $\varphi(a)$ olsun. Her n tamsayısı için

$$\varphi(a) = \sqrt[4]{(\det(\varphi(a)))} (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi) (\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta) (\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi)$$

matrisinin n . kuvveti

$$\varphi(a)^n = \sqrt[4]{(\det(\varphi(a)))}^n (\cos n\phi I_4 + \varphi(i) \sin n\phi) (\cosh n\theta I_4 + \varphi(j) \sinh n\theta) (\cos n\psi I_4 + \varphi(k) \sin n\psi) \quad (3.2)$$

dir.

İspat. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(a)^n &= \left(\sqrt[4]{(\det(\varphi(a)))} (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi) (\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta) (\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi) \right)^n \\ &= \sqrt[4]{(\det(\varphi(a)))}^n (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi)^n (\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta)^n (\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi)^n \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 3.1.1.'den

$$\varphi(a)^n = \sqrt[n]{\left(\det(\varphi(a))\right)}^n (\cos n\phi I_4 + \varphi(i) \sin n\phi) (\cosh n\theta I_4 + \varphi(j) \sinh n\theta) (\cos n\psi I_4 + \varphi(k) \sin n\psi)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.3. a herhangi bir komütatif kuaterniyon ve ona karşılık gelen temel matris $\varphi(a)$ olsun. Bu durumda $X^n = \varphi(a)$ denklemi n^2 tane köke sahiptir ve bu kökler

$$\begin{aligned} \varphi(a)^{\frac{1}{n}} = & \det(\varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i))^{\frac{1}{4n}} \varphi\left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi k_1}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + 2\pi k_1}{n}\right)\right) \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) \\ & + \det(\varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i))^{\frac{1}{4n}} \varphi\left(\cos\left(\frac{\phi' + 2\pi k_2}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi' + 2\pi k_2}{n}\right)\right) \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

biçimindedir. Burada $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, n$ dir.

İspat. $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ komütatif kuaterniyonunu aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} a = & (a_0 + a_1i) + (a_2 + a_3i)j \\ = & (a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i)\left(\frac{1+j}{2}\right) + (a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i)\left(\frac{1-j}{2}\right) \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi(a) = & \varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i)\varphi\left(\frac{1+j}{2}\right) + \varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i)\varphi\left(\frac{1-j}{2}\right) \\ = & \left(\det(\varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i))\right)^{\frac{1}{4}} \varphi(\cos \phi + i \sin \phi) \varphi\left(\frac{1+j}{2}\right) \\ & + \left(\det(\varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i))\right)^{\frac{1}{4}} \varphi(\cos \phi' + i \sin \phi') \varphi\left(\frac{1-j}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılabilir. Elde edilen ifade de $\varphi\left(\frac{1+j}{2}\right)$ ve $\varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)$ matrisleri idempotenttir ve

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\varphi\left(\frac{1+j}{2}\right)\right)^n = \left(\varphi\left(\frac{1+j}{2}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\varphi\left(\frac{1+j}{2}\right)\right), \quad \left(\varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)\right)^n = \left(\varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)\right)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} (\varphi(a))^{\frac{1}{n}} &= \left(\det\left(\varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i)\right)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi(\cos \phi + i \sin \phi)^{\frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{1+j}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad + \left(\det\left(\varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i)\right)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi(\cos \phi' + i \sin \phi')^{\frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\det\left(\varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i)\right)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi(\cos \phi + i \sin \phi)^{\frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{1+j}{2}\right) \\ &\quad + \left(\det\left(\varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i)\right)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi(\cos \phi' + i \sin \phi')^{\frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{1-j}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\cos \phi + i \sin \phi)^{\frac{1}{n}}$, $(\cos \phi' + i \sin \phi')^{\frac{1}{n}}$ ifadeleri normları 1 olan kompleks

sayılardır ve her birinin en fazla n tane kökü mevcuttur. Bu durumda $X = \varphi(a)^{\frac{1}{n}}$

denkleminin en fazla n^2 tane kökü mevcuttur ve bu kökler $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} \varphi(a)^{\frac{1}{n}} &= \det\left(\varphi(a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)i)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi\left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi k_1}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + 2\pi k_1}{n}\right)\right) \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) \\ &\quad + \det\left(\varphi(a_0 - a_2 + (a_1 - a_3)i)\right)^{\frac{1}{4n}} \varphi\left(\cos\left(\frac{\phi' + 2\pi k_2}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi' + 2\pi k_2}{n}\right)\right) \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right) \end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla bulunur.

Örnek 3.1.4. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ temel matrisinin karekökünü Teorem

3.1.3.'e göre bulalım.

Çözüm. A temel matrisini aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bu durumda A matrisi

$$A = \varphi(\cos 0 + i \sin 0) \varphi\left(\frac{1+j}{2}\right) + \varphi\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \varphi\left(\frac{1-j}{2}\right)$$

dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} &= \varphi\left(\cos\left(\frac{0+2\pi k_1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\pi k_1}{2}\right)\right) \varphi\left(\frac{1+j}{2}\right) \\ &+ \varphi\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k_2}{2}\right)\right) \varphi\left(\frac{1-j}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k_1, k_2 = 1, 2, \dots$ dır.

Buradan ise 4 adet kök aşağıdaki gibidir.

$$A^{\frac{1}{2}} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

3.2. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler İçin Euler Formülü

A matrisini $A = \varphi(i)\varphi(j)\varphi(k)$ olacak biçimde seçelim. Burada

$$(\varphi(i))^2 = -I_4, \quad (\varphi(j))^2 = I_4, \quad (\varphi(k))^2 = -I_4$$

dır. $e^{\varphi(i)\phi}$, $e^{\varphi(j)\theta}$ ve $e^{\varphi(k)\psi}$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} e^{\varphi(i)\phi} &= I_4 + \varphi(i)\phi + \frac{(\varphi(i)\phi)^2}{2!} + \frac{(\varphi(i)\phi)^3}{3!} + \frac{(\varphi(i)\phi)^4}{4!} + \dots \\ &= I_4 + \varphi(i)\phi - I_4 \frac{\phi^2}{2!} - \varphi(i) \frac{\phi^3}{3!} + I_4 \frac{\phi^4}{4!} + \dots \\ &= I_4 \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots \right) + \varphi(i) \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\varphi(j)\theta} &= I_4 + \varphi(j)\theta + \frac{(\varphi(j)\theta)^2}{2!} + \frac{(\varphi(j)\theta)^3}{3!} + \frac{(\varphi(j)\theta)^4}{4!} + \dots \\
&= I_4 + \varphi(j)\theta + I_4 \frac{\theta^2}{2!} + \varphi(j) \frac{\theta^3}{3!} + I_4 \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
&= I_4 \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + \varphi(j) \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) \\
&= \cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e^{\varphi(k)\psi} &= I_4 + \varphi(k)\psi + \frac{(\varphi(k)\psi)^2}{2!} + \frac{(\varphi(k)\psi)^3}{3!} + \frac{(\varphi(k)\psi)^4}{4!} + \dots \\
&= I_4 + \varphi(k)\psi - I_4 \frac{\psi^2}{2!} - \varphi(k) \frac{\psi^3}{3!} + I_4 \frac{\psi^4}{4!} + \dots \\
&= I_4 \left(1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \dots \right) + \varphi(k) \left(\psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots \right) \\
&= \cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e^{\varphi(i)\phi + \varphi(j)\theta + \varphi(k)\psi} = (\cos \phi I_4 + \varphi(i) \sin \phi) (\cosh \theta I_4 + \varphi(j) \sinh \theta) (\cos \psi I_4 + \varphi(k) \sin \psi)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & -i \sin \phi & 0 & 0 \\ i \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -i \sin \phi \\ 0 & 0 & i \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & j \sinh \theta & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & j \sinh \theta \\ j \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & j \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & -k \sin \psi \\ 0 & \cos \psi & k \sin \psi & 0 \\ 0 & -k \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ k \sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak a herhangi bir komütatif kuaterniyon ve ona karşılık gelen temel matris $\varphi(a)$ olmak üzere

$$\varphi(a) = \sqrt[4]{\left(\det(\varphi(a))\right)} e^{\varphi(i)\phi + \varphi(j)\theta + \varphi(k)\psi} \quad (3.5)$$

dır. Bu formüle $\varphi(a)$ temel matrisinin Euler formülü denir.

Teorem 3.2.1. $a, b \in \mathbb{H}$ ve $\|a\|, \|b\| \neq 0$ için

$$\varphi(a) = \sqrt[4]{\left(\det(\varphi(a))\right)} e^{\varphi(i)\phi + \varphi(j)\theta + \varphi(k)\psi}, \quad \varphi(b) = \sqrt[4]{\left(\det(\varphi(b))\right)} e^{\varphi(i)\phi' + \varphi(j)\theta' + \varphi(k)\psi'}$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi(a)^n = \sqrt[4]{\left(\det(\varphi(a))\right)}^n e^{\varphi(i)n\phi + \varphi(j)n\theta + \varphi(k)n\psi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi(a)^{-1} = \left(\sqrt[4]{\left(\det(\varphi(a))\right)} \right)^{-1} e^{-\varphi(i)\phi - \varphi(j)\theta - \varphi(k)\psi}, \quad \det(\varphi(a)) \neq 0,$$

$$\varphi(a)\varphi(b) = \sqrt[4]{\det(\varphi(a))\det(\varphi(b))} e^{\varphi(i)(\phi + \phi') + \varphi(j)(\theta + \theta') + \varphi(k)(\psi + \psi')}$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı açıktır.

Örnek 3.2.2. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matrisi için A^{100} matrisini Teorem 3.2.1.'e

göre elde edelim.

Çözüm. A nın bir temel matris olduğu aşîkârdır ve $\det(A) = 1$. Şimdi ise

$A = \sqrt[4]{\det(A)} e^{\varphi(i)\phi + \varphi(j)\theta + \varphi(k)\psi}$ formülündeki ϕ, θ ve ψ açılarını bulalım.

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_1 - a_2 a_3)}{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{0} \right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_2 + a_1 a_3)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right) = \frac{1}{2} \tanh^{-1}(0) = 0$$

ve

$$\psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-1}{0} \right) = \frac{\pi}{4}$$

dır. Bu durumda A matrisinin Euler formülü

$$A = \sqrt[4]{\det(A)} e^{\varphi(i)\phi + \varphi(j)\theta + \varphi(k)\psi} = e^{\varphi(i)\frac{\pi}{4} + \varphi(k)\frac{\pi}{4}}$$

biçimindedir. Teorem 3.2.1'ye göre

$$A^{100} = e^{100\varphi(i)\frac{\pi}{4} + 100\varphi(k)\frac{\pi}{4}} = e^{100\varphi(i)\frac{\pi}{4}} e^{100\varphi(k)\frac{\pi}{4}} = (-I_4)(-I_4) = I_4$$

elde edilir.

3.3. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Kuvvet ve Kök Hesapları İçin Pseudo Kodlar

Verilen bir temel matrisin Teorem 3.1.3. ve Teorem 3.2.1.'e göre istenen bir kuvvetini veya kökünü hesaplayan algoritmanın sözde kodları aşağıdaki gibidir.

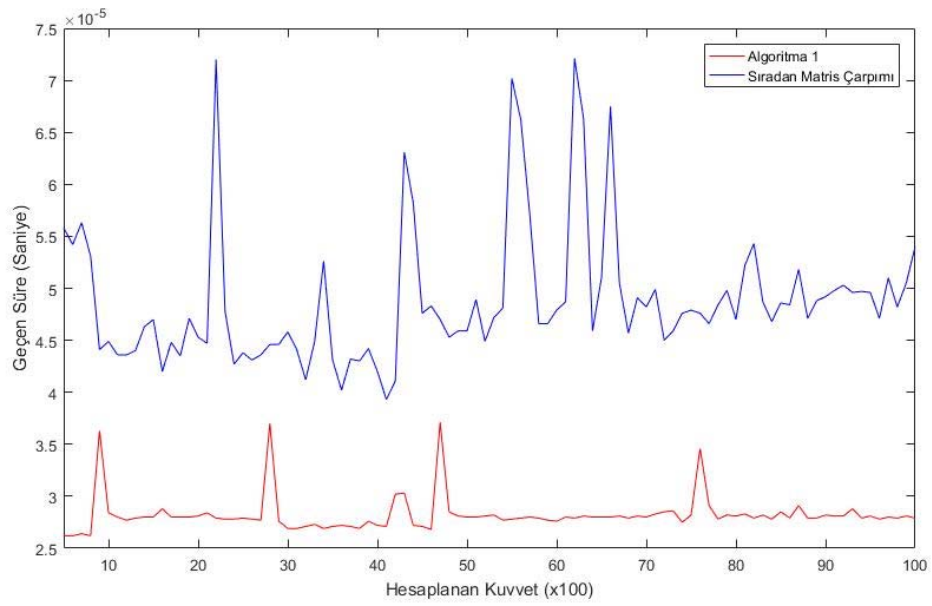
Algoritma 1.

1. Başla
2. Temel matrisi ve temel matrisin hesaplanacak kuvvetini gir
3. Temel matrisin determinantını hesapla
4. Denklem (2.5) e göre ϕ , θ , ψ açılarını hesapla
5. Denklem (3.5) e göre Euler formülünü hesapla
6. Teorem 3.2.1. e göre temel matrisinin kuvvetini hesapla
7. Kuvvet Yaz
8. Dur.

Algoritma 2.

1. Başla
2. Temel matrisi ve temel matrisin hesaplanacak kökünü gir
3. Temel matrisi (3.4) denklemine göre yaz
4. Teorem 3.1.3. e göre temel matrisinin kökünü hesapla
5. Kök veya Kökleri Yaz
6. Dur.

Aşağıdaki grafik rastgele üretilen bir temel matrisin kuvvetini sıradan matris çarpımı ve Algoritma 1 yöntemleri ile MATLAB ortamında hesaplarken geçen süreleri göstermektedir.



Şekil 3.1. Algoritma 1 ile sıradan matris çarpımının süre bakımından karşılaştırılması

Grafikten açıktır ki temel matrisin kuvveti için önerdiğimiz Algoritma 1 sıradan matris çarpmasına göre daha kısa sürede sonuca ulaşıyor.

3.4. MATLAB Ortamında Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrislerin Sınıfının İnşası

Aşağıda teorik olarak Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.2.1'e dayanan on yedi adet özelliğe ve biri kurucu fonksiyon olmak üzere toplamda üç adet metoda sahip temel matrislerin sınıfının MATLAB kaynak kodları verilmiştir.

```
classdef class_of_basic_matrix
    properties
        a11=0;
        a12=0;
        a13=0;
        a14=0;
        a21=0;
        a22=0;
        a23=0;
        a24=0;
        a31=0;
        a32=0;
        a33=0;
        a34=0;
        a41=0;
        a42=0;
        a43=0;
        a44=0;
        dett=0;
    end
    methods
        function obj = class_of_basic_matrix(A)
            if size(A,1) ~= 4 || A(1,1)~= A(2,2) || A(2,2)~= A(3,3) || ...
                A(3,3)~= A(4,4) || A(1,2)~= - A(2,1) || A(1,3)~= A(3,1) ...
                || A(1,4)~= - A(4,1) || A(2,3)~= -A(3,2) || A(2,4)~= A(4,2) ...
                || A(3,4)~= -A(4,3)
                error('BasicMatrix:constructor','The matrix entered is...
                    not the basic matrix...')
            else
                obj.a11=A(1,1);
                obj.a12=A(1,2);
                obj.a13=A(1,3);
                obj.a14=A(1,4);
                obj.a21=A(2,1);
                obj.a22=A(2,2);
                obj.a23=A(2,3);
                obj.a24=A(2,4);
                obj.a31=A(3,1);
                obj.a32=A(3,2);
                obj.a33=A(3,3);
                obj.a34=A(3,4);
                obj.a41=A(4,1);
                obj.a42=A(4,2);
                obj.a43=A(4,3);
                obj.a44=A(4,4);
                obj.dett=((A(1,1)+A(3,1))^2+(A(2,1)+A(4,1))^2)...
                    *((A(1,1)-A(3,1))^2+(A(2,1)-A(4,1))^2);
            end
        end
    end
end
```

```

function result=find_power(A,n)
    fi=(0.5)*(atan((2*(A.a11*A.a21-A.a31*A.a41))/(A.a11^2-...
    A.a21^2-A.a31^2+A.a41^2)));
    teta=(0.5)*(atanh((2*(A.a11*A.a31+A.a21*A.a41))/(A.a11^2+...
    A.a21^2+A.a31^2+A.a41^2)));
    psi=(0.5)*(atan((2*(A.a11*A.a41-A.a21*A.a31))/(A.a11^2+...
    A.a21^2-A.a31^2-A.a41^2)));
    A1=[cos((100*n)*fi) -sin((100*n)*fi) 0 0; sin((100*n)*fi)...
    cos((100*n)*fi) 0 0; 0 0 cos((100*n)*fi) -sin((100*n)*fi)...
    ; 0 0 sin((100*n)*fi) cos((100*n)*fi)];
    A2=[cosh((100*n)*teta) 0 sinh((100*n)*teta) 0; 0 ...
    cosh((100*n)*teta) 0 sinh((100*n)*teta);...
    sinh((100*n)*teta) 0 cosh((100*n)*teta) 0; 0 ...
    sinh((100*n)*teta) 0 cosh((100*n)*teta)];
    A3=[cos((100*n)*psi) 0 0 -sin((100*n)*psi); 0 ...
    cos((100*n)*psi) sin((100*n)*psi) 0; 0 -sin((100*n)*psi)...
    cos((100*n)*psi) 0; sin((100*n)*psi) 0 0 ...
    cos((100*n)*psi)];
    result=(A.dett)^(100*n)*A1*A2*A3;

```

```
end
```

```
function find_root(A,n)
```

```

    fi=atan((A.a21+A.a41)/(A.a11+A.a31));
    fis=atan((A.a21-A.a41)/(A.a11-A.a31));
    A1=[A.a11+A.a31 -A.a21-A.a41 0 0; A.a21+A.a41 A.a11+...
    A.a31 0 0; 0 0 A.a11+A.a31 -A.a21-A.a41; 0 0 A.a21+...
    A.a41 A.a11+A.a31];
    A2=[A.a11-A.a31 -A.a21+A.a41 0 0; A.a21-A.a41 A.a11-...
    A.a31 0 0; 0 0 A.a11-A.a31 -A.a21+A.a41; 0 0 A.a21-...
    A.a41 A.a11-A.a31];
    E1=0.5*[1 0 1 0; 0 1 0 1; 1 0 1 0; 0 1 0 1];
    E2=0.5*[1 0 -1 0; 0 1 0 -1; -1 0 1 0; 0 -1 0 1];

```

```

    for i=1:n
        for j=1:n

```

```

            det(A1)^(1/(4*n))*[cos((fi+2*pi*i)/n) -...
            sin((fi+2*pi*i)/n) 0 0; sin((fi+2*pi*i)/n)...
            cos((fi+2*pi*i)/n) 0 0; 0 0 cos((fi+2*pi*i)/n) -...
            sin((fi+2*pi*i)/n); 0 0 sin((fi+2*pi*i)/n)...
            cos((fi+2*pi*i)/n)]*E1+det(A2)^(1/(4*n))...
            *[cos((fis+2*pi*j)/n) -sin((fis+2*pi*j)/n) 0 0;...
            sin((fis+2*pi*j)/n) cos((fis+2*pi*j)/n) 0 0; 0 0...
            cos((fis+2*pi*j)/n) -sin((fis+2*pi*j)/n); 0 0 ...
            sin((fis+2*pi*j)/n) cos((fis+2*pi*j)/n)]*E2

```

```

        end
    end

```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

Bu sınıftan bir nesne

```
Command Window
fx >> class_of_basic_matrix(A);
```

Şekil 3.2. Temel matris sınıfında nesne oluşturma

komutu ile üretilmektedir. Burada A matrisi komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matristir. Bu nesnenin n . kuvveti hesaplanmak istenildiğinde

```
Command Window
fx >> find_power(A,n)
```

Şekil 3.3. Temel matris sınıfında kuvvet alma

fonksiyonu kullanılır. Nesnenin n . dereceden kökü hesaplanmak istenildiğinde ise

```
Command Window
fx >> root_power(A,n)
```

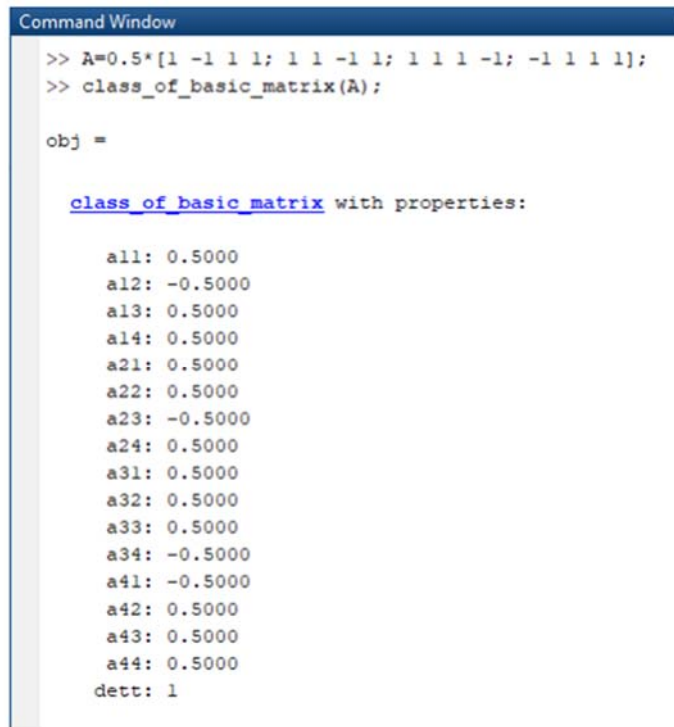
Şekil 3.4. Temel matris sınıfında kök alma

fonksiyonu kullanılır. Burada $n \in \mathbb{Z}$ dir. Sınıf ismi ile aynı isme sahip kurucu fonksiyon ise girilen matrisin temel matris olup olmadığını kontrol ederek temel matris değil ise aşağıdaki hata mesajını vermektedir:

```
Command Window
>> A=ones(4);
>> class_of_basic_matrix(A);
Error using class_of_basic_matrix (line 28)
The matrix entered is not the basic matrix...
```

Şekil 3.5. Temel matris sınıfında alınan hata mesajı

Girilen matris temel matris ise matrisin bileşenlerini ve determinantını nesnenin özelliklerine aktarmaktadır.



```
Command Window

>> A=0.5*[1 -1 1 1; 1 1 -1 1; 1 1 1 -1; -1 1 1 1];
>> class_of_basic_matrix(A);

obj =

class_of_basic_matrix with properties:

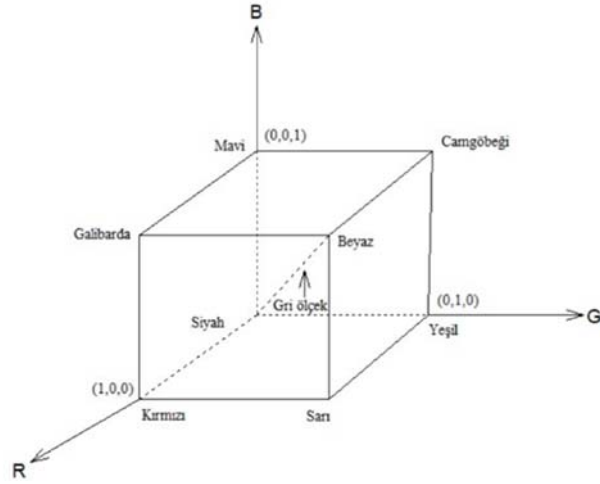
    a11: 0.5000
    a12: -0.5000
    a13: 0.5000
    a14: 0.5000
    a21: 0.5000
    a22: 0.5000
    a23: -0.5000
    a24: 0.5000
    a31: 0.5000
    a32: 0.5000
    a33: 0.5000
    a34: -0.5000
    a41: -0.5000
    a42: 0.5000
    a43: 0.5000
    a44: 0.5000
    dett: 1
```

Şekil 3.6. Temel matris sınıfında kurucu fonksiyon

BÖLÜM 4. KOMÜTATİF KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN TEMEL MATRİSLER YARDIMI İLE RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

Doğada renk çeşitliliğinin fazla olması nedeniyle bu renkleri gruplama ihtiyacı doğmuştur. Renkleri gruplamak ve standartlaştırmak için ise renk uzayı kavramı ortaya çıkmıştır. Bir renk uzayının amacı, genellikle kabul gördüğü biçimde bir takım standartlar ile renk tanımlamalarını kolaylaştırmaktır. Bugün kullanılan pek çok renk uzayı donanım (renkli monitörler veya yazıcılar gibi) ya da renk manipülasyonlarının hedeflendiği uygulamalara (animasyon için renkli grafiklerin üretilmesi gibi) yöneliktir. Sayısal görüntü işleme açısından, pratikte yaygın olarak kullanılan renk uzayları donanım yönelik modeller renkli monitörler ve renkli video kameraların geniş bir sınıfı için RGB (kırmızı, yeşil, mavi), renkli baskı için CMY (camgöbeği, galibarda, sarı) veya CMYK (camgöbeği, galibarda, sarı, siyah), ve insanların rengi tarif ve yorum şekline yakından uyan HSI (renk tonu, doygunluk, yeğlilik) renk uzaylarıdır [21]. İnternet, renkli monitörler ve video kayıt cihazları gibi önemli ve sık kullanılan ortamlarda RGB renk uzayının kullanılması sebebi ile bu çalışma da renk uzayı olarak RGB renk uzayı kullanılacaktır.

RGB renk uzayında her renk, onun kırmızı, yeşil ve mavi ana spektral bileşenleri şeklinde görülür. Bu renk uzayı kartezyen koordinat sistemini baz alır. RGB renk uzayı Şekil 4.1.'de gösterilen küptür. Burada RGB ana renk değerleri küpün üç köşesinde; ara renkler camgöbeği, galibarda ve sarı diğer üç köşesinde; siyah orijinde; beyaz da orijinden en uzaktaki köşesinde yer alır. Bu uzayda gri ölçek, siyahtan beyaza doğru bu iki nokta arasını birleştiren doğru boyunca yer alır. Bu uzayda farklı renkler küp üzerinde veya içerisindeki noktalardır ve bu noktalar orijinden uzanan vektörler ile tanımlanırlar. Kolaylık için tüm renk değerlerinin normalize edildiği varsayılır, bu nedenle Şekil 4.1.'deki küp birim küptür. Yani tüm R , G ve B değerlerinin $[0,1]$ aralığında olduğu kabul edilir [21].



Şekil 4.1. RGB renk uzayı

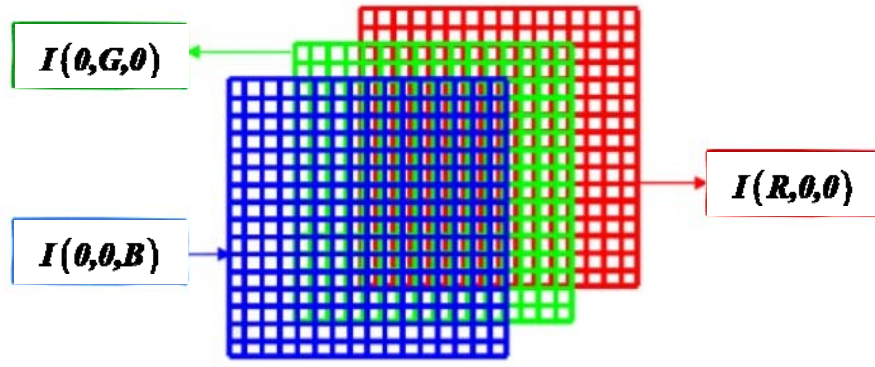
4.1. Renkli Görüntüler

Renkli görüntüler RGB renk uzayında R(Kırmızı), G(Yeşil), B(Mavi) ile ifade edilmiş aynı cisme ait üç adet gri düzeyli görüntünün üst üste ekranda gösterilmesi ile oluşur. Üç renk tonunun kombinasyonları ile renkli görüntüler elde etmek mümkündür. Renkli görüntüyü oluşturan bu üç renk bant olarak da isimlendirilir [21].

Renkli bir görüntünün kırmızı, yeşil ve mavi tonları matris olarak da ifade edilebilir. Matris anlamında düşünüldüğünde doğal renkli 2 boyutlu bir RGB görüntü, her biri $m \times n$ boyutunda üç matrisin bileşiminden oluşur ve

$$\{I(R, G, B) \mid R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

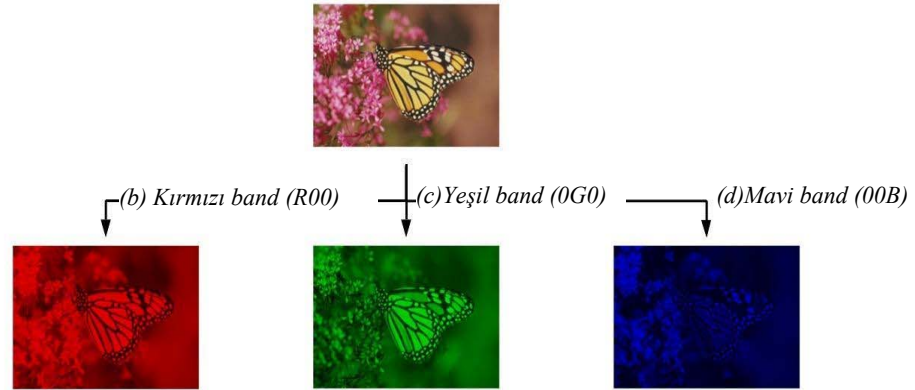
biçiminde ifade edilir. Burada R , G ve B matrislerinin her birinin elemanları 0 ile 1 arasında değerler alır.



Şekil 4.2. RGB renk uzayında bir görüntünün $m \times n$ boyutlarındaki matris gösterimi (Gonzales, Woods)

Renkli görüntünün yeşil ve mavi bantlarına ilişkin görüntülerin sıfır alınmasıyla sadece kırmızı bandın görüntüsü elde edilir. Böylece, RGB gösterimi kırmızı yapay renklendirilmiş görüntüsüne ulaşır. Bu durumda kodlama $RGB = R00$ şeklinde olacaktır. Benzer şekilde, yeşil ve mavi yapay renklendirilmiş görüntüler de sırasıyla $RGB = 0G0$ ve $RGB = 00B$ olacaktır. Bu şekilde oluşan yapay renklendirme görüntüleri aşağıdaki gibi olacaktır [22].

(a) Doğal renkli görüntü



Şekil 4.3. Yapay renklendirilmiş görüntüler

RGB formatında doğal renklerden oluşmuş renkli bir görüntü için bantların doğru birleşimi 1-2-3 (Red, Green, Blue) sırasıyla olmalıdır. Eğer RGB gösterimde bant birleşimlerinin yerleri değiştirilecek olursa renkler de değişecektir. Bu şekilde oluşan görüntülere yapay renkli görüntüler adı verilir [22]. Aşağıdaki resimler bununla ilgili örnekleri göstermektedir.

Doğal renkli görüntü;

Bant birleşimi (R,G,B)



Yapay renkli görüntü;

Bant birleşimi (G,R,B)



Yapay renkli görüntü;

Bant birleşimi (G,B,R)



Yapay renkli görüntü;

Bant birleşimi (R,B,G)



Şekil 4.4. RGB renk uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler

4.2. Renkli Görüntü İyileştirme

Birçok görüntüleme uygulamasında gözlenen görüntü, orijinal görüntünün bozulmuş bir tasviridir. Bu bozulmaların sebebi gürültü, piksel değeri hataları, sensör bulanıklığı, kamera sarsıntıları veya sahnedeki nesnelerin hareketlerinden kaynaklanan görüntü bulanıklığı olabilir. Dijital görüntü iyileştirme modelleri, görüntülerin elde edilmesi sırasında meydana gelen bozulmaların ortadan kaldırılmasını veya azaltılmasını amaçlar. Görüntü iyileştirme teknikleri, çoğu zaman gerçek görüntü hakkında önceden bilgi sahibi olarak bozulmuş görüntüden istenen özelliklere sahip bir çözüm elde etmek için kullanılır [23].

Genel olarak bir görüntünün bozulma süreci doğrusal değildir ve uzayda değişkendir. Fakat uygulamalı bilimlerde görüntünün bozulma süreci doğrusal ve uzayda değişmez kabul edilerek LSI (Linear Shift Invariant) bozulma modeliyle incelenir. Bir LSI sistem için $f(x,y)$ orijinal görüntü, $g(x,y)$ gözlemlenen görüntü, $h(x,y)$ görüntüleme sisteminin PSF (Point Spread Function) nokta yayılma fonksiyonu ve

$n(x, y)$ ilave gürültü olmak üzere görüntünün bozulma süreci aşağıdaki formül ile ifade edilir:

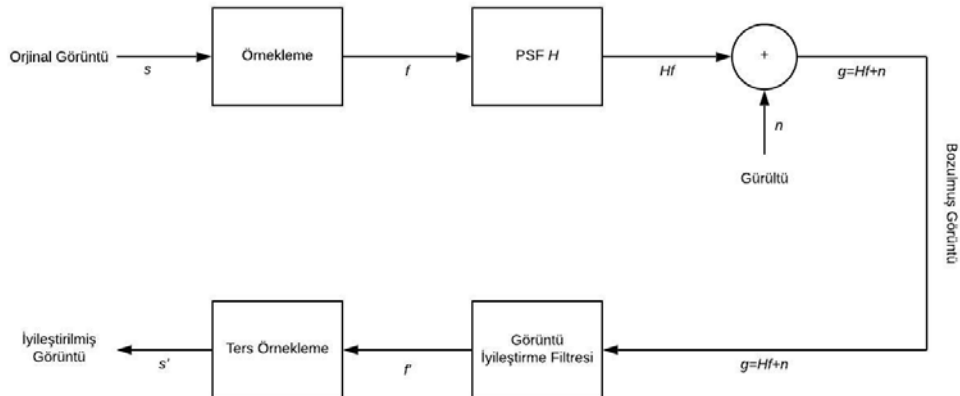
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y) \quad (4.1)$$

Burada "*" işlemi konvolüsyon işlemini ifade etmektedir. Ayrıca, görüntü iyileştirme formülasyonu matris-vektör formu veya Fourier serileri ile de ifade edilebilir. g , f ve n sırasıyla $g(x, y)$, $f(x, y)$ ve $n(x, y)$ fonksiyonlarının matris (veya vektör) gösterimleri olmak üzere (4.1) denkleminin matris-vektör formülasyonu $g = Hf + n$ biçimindedir. Burada H , elemanları $h(x, y)$ 'den alınan iki boyutlu seyrek matristir. Öte yandan, görüntüleme modelinin Fourier-dönüşümü versiyonu

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

biçimindedir. Burada $G(u, v)$, $H(u, v)$, $F(u, v)$ ve $N(u, v)$ dönüşümleri sırasıyla $g(x, y)$, $h(x, y)$, $f(x, y)$ ve $n(x, y)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleridir [19].

Bir görüntü iyileştirme sürecinde görüntüye etki eden bozulma modellenir ve bu modellemenin tersi görüntüye uygulanarak iyileştirilmiş görüntü elde edilir (Şekil 4.5.) [24].



Şekil 4.5. Görüntü iyileştirme süreci

4.3. Renkli Görüntülerin Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler Yardımı ile İfade Edilmesi

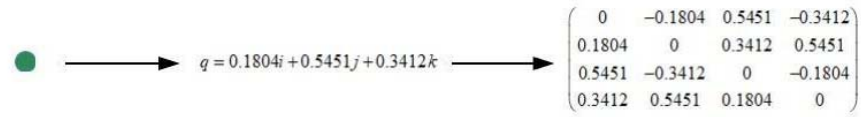
Komütatif kuaterniyonların bir reel ve üç imajiner kısmı mevcuttur. RGB uzayında ifade edilmiş renkli bir görüntünün ise her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç temel renk bileşeni içerdiği daha önce söylenmişti. Bu bilgilerden yola çıkılarak renkli bir görüntünün her bir pikseli bir pür imajiner komütatif kuaterniyon ile ifade edilebilir. Renkli görüntülerin komütatif kuaterniyon modeli ilk kez Pei tarafından 2004 yılında verilmiştir [12]. Bu gösterime göre renkli görüntülerin her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenleri pür imajiner komütatif kuaterniyonların i, j ve k bileşenlerine karşılık getirilir. Dolayısıyla $m \times n$ piksel çözünürlüğe sahip renkli bir görüntü

$$Q = Ri + Gj + Bk$$

biçiminde komütatif kuaterniyon matrisi olarak ifade edilebilir. Burada $R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisleri renkli görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşen matrisleridir.

Her bir komütatif kuaterniyona 4×4 tipinde bir reel matris karşılık geldiğinden her bir renkli piksel aynı zamanda 4×4 tipinde bir reel matris yardımıyla da ifade edilebilir.

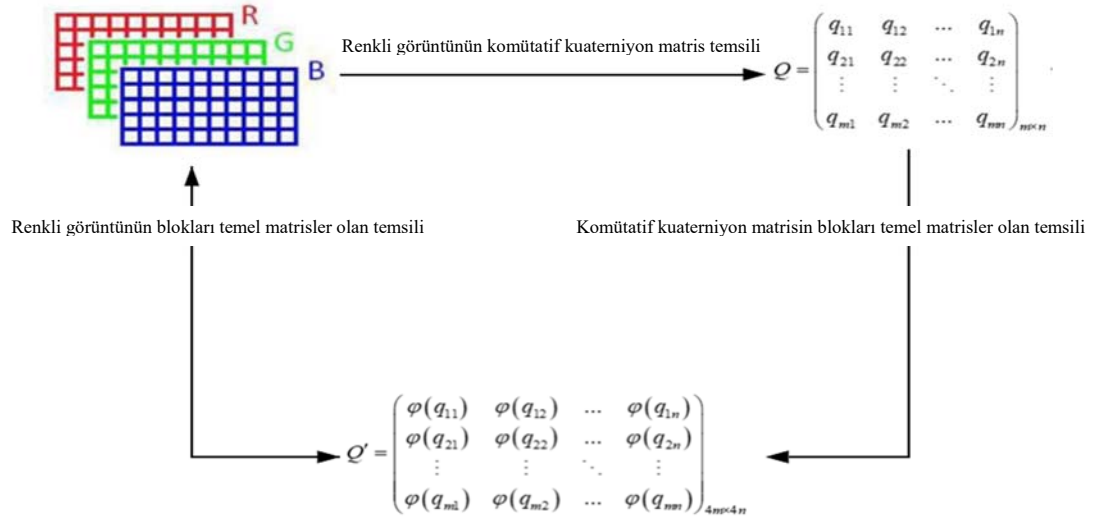
Örneğin deniz yeşili rengine sahip bir pikselin komütatif kuaterniyon ve temel matris gösterimleri Şekil 4.6.'de verilmiştir.



$$q = 0.1804i + 0.5451j + 0.3412k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0.1804 & 0.5451 & -0.3412 \\ 0.1804 & 0 & 0.3412 & 0.5451 \\ 0.5451 & -0.3412 & 0 & -0.1804 \\ 0.3412 & 0.5451 & 0.1804 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 4.6. Deniz yeşili renginin temel matris gösterimi

Sonuç olarak $m \times n$ çözünürlüğe sahip üç kanallı renkli bir görüntü tek kanallı olarak $4m \times 4n$ boyutunda blokları komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler olan reel matrisler ile ifade edilebilirler (Şekil 4.7.).



Şekil 4.7. Renkli bir görüntünün blokları temel matrisler olan reel matris ile ifadesi

4.4. Komütatif Kuaterniyonlara Karşılık Gelen Temel Matrisler ile Örneklenmiş Renkli Görüntüleri İyileştirme Süreçleri

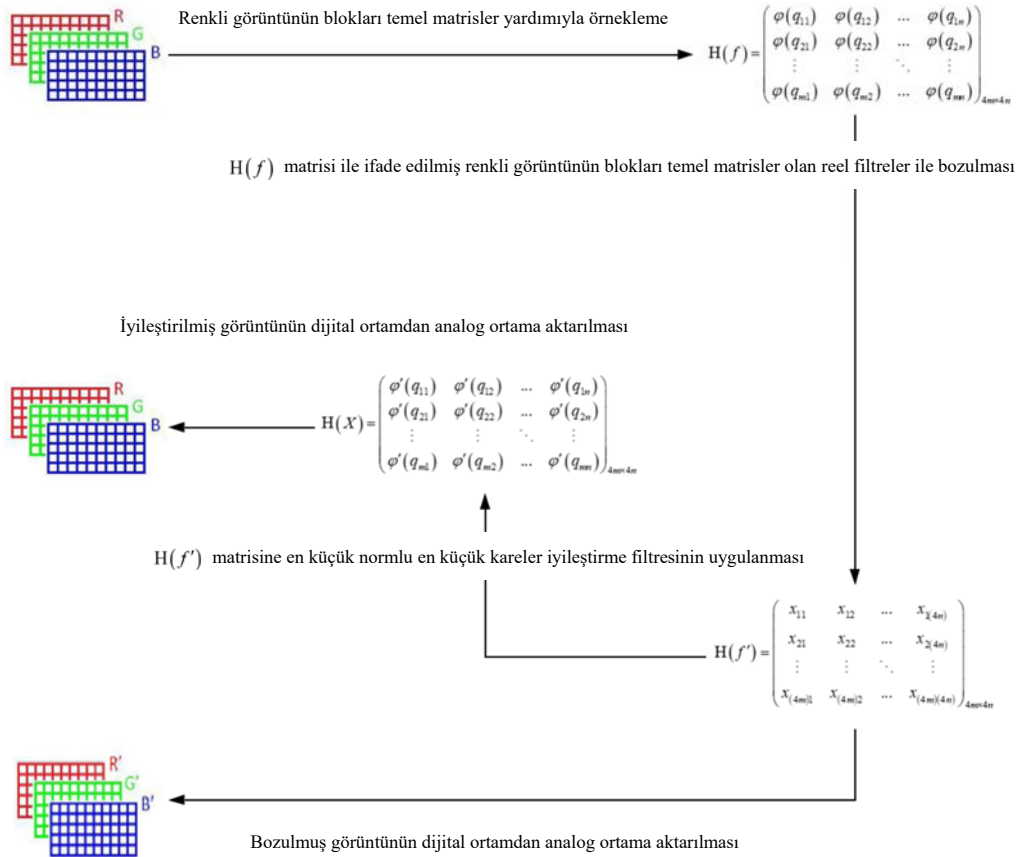
Bu bölümde 512×768 piksel çözünürlüğe sahip monarch.ppm (Şekil 4.3.-(a)) adlı renkli görüntü öncelikle komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler ile örnekleneyecektir. Sonrasında blokları temel matrisler olan reel filtreler yardımı ile bozulacak ve en küçük normlu en küçük kareler iyileştirme filtresi yardımı ile bu bozulmuş görüntüden iyileştirilmiş görüntü elde edilecektir. Sonuç olarak

$$\|H(K)H(f) - H(f')\| = \min \quad (4.2)$$

biçiminde en küçük kareler problemi elde edilecektir. Burada f test görüntüsü olan monarch.ppm'yi, $H(f)$ bu test görüntüsünün blokları temel matrislerden oluşan reel temsilini f' bozulmuş görüntüyü, $H(f')$ ise bozulmuş görüntünün blokları temel matrislerden oluşan reel temsilini ifade etmektedir.

Sürecin bir sonraki aşamasında (4.2) ifadesindeki en küçük kareler problemi MATLAB yardımıyla çözümlenerek yeniden inşa edilmiş görüntünün blokları temel

matrislerden oluşan matris temsili elde edilecektir. Sonrasında ise bu yeniden inşa sürecindeki relatif hatalar incelenecek ve yöntemin verimliliği araştırılacaktır. Bu çalışmanın özeti Şekil 4.8.'de verilmiştir.



Şekil 4.8. Çalışmanın özeti

Renkli görüntünün kırmızı bileşen matrisi R olmak üzere $f_{special}('motion', len = 15, theta = 30^\circ)$, 2 boyutlu filtre ile R matrisini çarparak R' matrisini elde edelim. $K = R'R$ için $H(K)H(f)$ bozulmuş görüntüsünü elde ederiz. Bu görüntüye f' der isek

$$H(K)H(f) = H(f')$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik MATLAB'ta en küçük kareler yöntemi ile çözüldüğünde

$$H(X) = (H(K))^{-1} H(f')$$

elde edilir. Bu denklemden elde edilen görüntüler Şekil 4.9.'da verilmiştir. Burada $\|H(K)H(X) - H(f')\| = 2.2054 \times 10^{-10}$ dir. Relatif hata ise

$$\text{Relatif Hata} = \frac{\|H(f) - H(X)\|}{\|H(f)\|} = 3.4476 \times 10^{-12}$$

dir.

Ayrıca giriş görüntüsü $len = 9$, $0^\circ < theta < 90^\circ$ ve $1 < len < 200$, $theta = 30^\circ$ değerleri için orijinal görüntü bozulursa elde edilen iyileştirilmiş görüntünün relatif hatalarının grafikleri Şekil 4.10.'da verilmiştir.



(a)

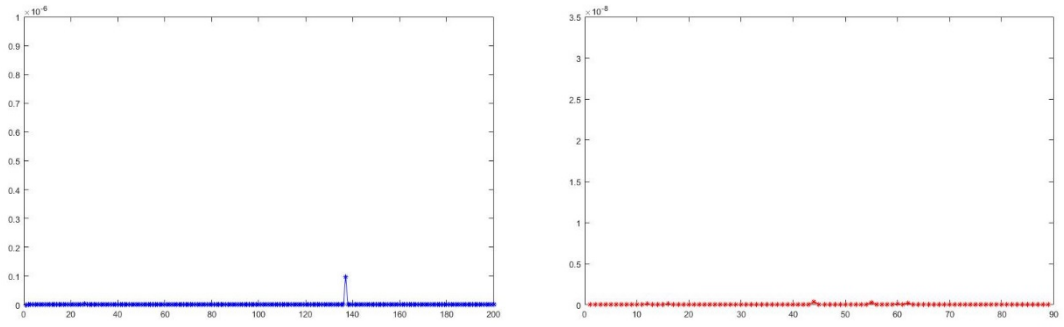


(b)



(c)

Şekil 4.9. Sırası ile orijinal görüntü (a), bozulmuş görüntü (b) ve iyileştirilmiş görüntü (c)



Şekil 4.10. Değişken len ve Theta değerlerine karşılık elde edilen relatif hatalar

4.5. Sonuç

Bu çalışmada RGB renk uzayında temsil edilen renkli bir görüntü blokları komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler ile ifade edilerek bu matrisler yardımı ile görüntü iyileştirme süreçleri araştırılmıştır. Renkli bir görüntüyü 3 bant görüntüsüne ayırmadan yapılan bu işlem görüntü iyileştirme sürecinin algoritmik karmaşıklığını ciddi oranda azaltmıştır. Ayrıca farklı ötelemeler ve dönme değerlerine karşı bulunan relatif hatanın çok küçük ve neredeyse değişmez olması ifade ettiğimiz yöntemin geçerliliğini ve verimliliğini kanıtlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Hamilton WR., Lectures on quaternions. İçinde: Lecture III. 1. Baskı, Hodges and Smith, Dublin, 74-129, 1853.
- [2] Jafari, M., Mortazaasl, H., Yaylı, Y., De-Moivre's formula for matrices of quaternions. JP J. Algebra Number Theory Appl., 21(1), 57-67, 2011.
- [3] Tian Y., Universal factorization equalities for quaternion matrices and their applications. Math. J. Okoyama Univ., 41, 45-62, 1999.
- [4] Adler SL., Quaternionic quantum mechanic and quantum fields. İçinde: General Framework of Quaternionic Quantum Mechanics. 1. Baskı, Oxford U. P., New York, 19-49, 1994.
- [5] Jack CKC., Quaternion kinematic and dynamic differential equations. IEEE Trans Robotics and Automation. 8, 53-64, 1992.
- [6] Salamon S., Differential geometry of quaternionic manifolds. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris. 54, 19-31, 1986.
- [7] Pei S., Chang J., Ding J., Chen M., Eigenvalues and singular value decompositions of reduced biquaternion matrices. IEEE Trans. Circ. Syst. I., 55(9), 1549-8328, 2008.
- [8] Segre, C., The real representations of complex elements and extension to bicomplex. Systems. Math. Ann., 40, 413, 1892.
- [9] Catoni, F., Cannata, R., Zampetti, P., An introduction to commutative quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras, 16, 1-28, 2006.
- [10] Scorza-Dragoni, G., The analytic functions of a bicomplex variable. Memorie Accademia d'Italia, 5, 597, 1934.
- [11] Morin, U., Bicomplex algebra. Memorie Accademia d'Italia, 6, 1241, 1935.
- [12] Pei, S. C., Chang, J. H., Ding, J. J., Commutative reduced biquaternions and their fourier transform for signal and image processing applications. IEEE Trans. on Signal Proces., 52(7), 2012-2031, 2004.

- [13] Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P., *N*-dimensional geometries generated by hypercomplex numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 15(1), 1-26, 2005.
- [14] Isokawa, T., Nishimura, H., Matsui, N., Commutative quaternion and multistate hopfield neural networks. In *Proc. Int. Joint Conf. Neural Netw.*, Barcelona, Spain, 1281–1286, 2010.
- [15] Kosal, H. H., Tosun, M., Commutative quaternion matrices. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 24(3), 769-779, 2014.
- [16] Kosal H. H., Akyigit M., Tosun M., Consimilarity of commutative quaternion matrices. *Miskolc Math. Notes*, 16(2), 965-977, 2015.
- [17] Kosal H. H., Tosun M., Some equivalence relations and results over the commutative quaternions and their matrices. *An. S,t. Univ. Ovidius Constanta*, 25(3), 125-142, 2017.
- [18] Kosal H. H., Tosun M., Universal similarity factorization equalities for commutative quaternions and their matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 67(5), 926-938, 2019.
- [19] Kosal H. H., Least-squares solutions of the reduced biquaternion matrix equation $AX = B$ and their applications in colour image restoration. *J. Modern Opt.*, 66(18), 1802–1810, 2019.
- [20] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., Zampetti, P., *The mathematics of minkowski space-time with an introduction to commutative hypercomplex numbers*. Birkhauser Verlag AG, Berlin, 2008.
- [21] Gonzales, R. C., Woods, R. E., *Digital Image Processing*. İçinde: *Color Image Processing*. 3. Baskı, Pearson Education Inc. Publishing Prentice Hall, USA, 402-406, 2008.
- [22] http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/GoruntuIsleme/Goruntu_Isleme_Ders_Notlari-1.Hafta.pdf, Erişim Tarihi: 11.03.2020.
- [23] Li, X., *Image Restoration Fundamentals And Advances*. İçinde: *Image Denoising: Past, Present, and Future*. 1. Baskı, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 1-24, 2013.
- [24] Gunturk, B. G., *Image Restoration Fundamentals And Advances*. İçinde: *Fundamentals of Image Restoration*. 1. Baskı, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 25-61, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Tue BİLGİLİ, 19.02.1995’da İstanbul’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 2013 yılında Şair Abay Konanbay Anadolu Lisesi’nden mezun oldu. 2013 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 2017 yılında birincilikle bitirdi. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı zamanda 2018 yılında IPERA firmasında İş Analisti pozisyonunda çalışmaya başlayıp halen devam etmektedir.