

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYON MATRİS DENKLEM
ÇÖZÜMLERİ VE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Arzu SÜREKÇİ

Matematik Anabilim Dalı

EYLÜL 2023

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYON MATRİS DENKLEM
ÇÖZÜMLERİ VE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Arzu SÜREKÇİ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

EYLÜL 2023

Arzu Sürekçi tarafından hazırlanan “Komütatif Eliptik Oktonyon Matris Denklem Çözümleri ve Görüntü İyileştirme Uygulamaları” adlı tez çalışması 16.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Unvan Adı SOYADI**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
(Gerekliyse) Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
(Gerekliyse) Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYON MATRİS DENKLEM ÇÖZÜMLERİ VE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(...../...../20.....).

(imza)

Arzu Sürekçi



Her zaman yanımda olan ailem, eşim ve bana yol gösteren tüm hocalarıma ithafen



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp, engin bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren, aynı zamanda tez çalışmamı her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, gelecekteki mesleki hayatımda bana verdiği değerli bilgilerinden faydalanacağımı düşündüğüm ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren çok değerli ve kıymetli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali Güngör'e en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım. Eğitim hayatım süresince yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana yardımcı olup yol gösteren kıymetli hocam Doç. Dr. Hidayet Hüda Kösal'a ve Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi ve minnetimi sunarım.

Teşekkürlerimin az kalacağını bildiğim, her zaman yanımda olan, hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, beni bu günlere sevgi, saygı ve ahlak kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren, bu hayattaki en büyük şansım olan annem Derya Cihan, babam Ergin Cihan ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında maddi ve manevi desteğini gördüğüm, bu süreçte sabır, anlayış ve sevgiyle yanımda olan eşim Özgür Sürekçi'ye sonsuz teşekkürlerimi iletmek istiyorum. Hayatım boyunca bana manevi desteklerini esirgemeyen tüm dostlarıma da özel bir teşekkür borçluyum.

Yükseköğretim Kurulu tarafından desteklenen YÖK 100/2000 Öncelikli Alanlar Doktora Burs Programına ve TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları destekler için teşekkür ederim.

Arzu SÜREKÇİ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
TEŞEKKÜR.....	ix
İÇİNDEKİLER.....	xi
KISALTMALAR.....	xiii
SİMGELER.....	xv
TABLO LİSTESİ.....	xvii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xix
SUMMARY.....	xxiii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Literatür Özeti	1
1.2. Tezin Amacı	4
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Eliptik Kuaterniyon Cebri ve Temel Özellikleri	7
2.1.1. Eliptik kuaterniyonların reel ve eliptik matris temsilleri	9
2.2. Eliptik Kuaterniyon Değerli Matrisler	13
2.2.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin reel gösterimleri	14
2.2.1.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin bazı lineer denklem çözümleri	16
2.2.2. Eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik matris gösterimleri	21
2.2.2.1. $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümleri	23
2.2.2.2. Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler yöntemi ile renkli görüntü iyileştirme	25
3. KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYONLAR.....	31
3.1. Komütatif Eliptik Oktonyonların Cebirsel Özellikleri	31
3.1.1. Komütatif eliptik oktonyonların temel matrisleri	35
3.2. Komütatif Eliptik Oktonyon Değerli Matrisler ve Denklem Çözümleri	39
3.2.1. Komütatif eliptik oktonyon matrislerin reel temsilleri	41
3.2.2. Komütatif eliptik oktonyon matrislerin eliptik kuaterniyonik matris gösterimleri	60
3.3. $AX = B$ Komütatif Eliptik Oktonyon Matris Denkleminin En Küçük Kareler Çözümleri ve Çözümüne Dair Algoritma	65
4. KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYONİK EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME.....	71
4.1. Renkli Görüntüler ve Renkli Görüntü İyileştirme	71
4.2. Renkli Görüntünün Komütatif Eliptik Oktonyon Matrisleri ile İfade Edilmesi	75
4.3. Komütatif Eliptik Oktonyonik En Küçük Kareler İyileştirme Filtresi Tasarımı	77
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	85
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	93



KISALTMALAR

CMYK	: Camgöbeği, galibarda, sarı, siyah renk uzayı
ELSI	: Eliptik bozulma modeli
ELSM	: Eliptik en küçük kareler methodu
EOLSM	: Komütatif eliptik oktonyonik en küçük kareler methodu
HSI	: Renk tonu, doygunluk, yeğınlik renk uzayı
OELSI	: Komütatif eliptik oktonyonik bozulma modeli
PSF	: Nokta yayılma fonksiyonu (Point Spread Function)
RGB	: Kırmızı, yeşil, mavi renk uzayı



SİMGELER

$\mathbb{H}_p^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu eliptik kuaterniyon matris cümlesi
$\mathbb{C}_p^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu eliptik matris cümlesi
$\mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$	: $m \times n$ boyutlu komütatif eliptik oktonyon matris cümlesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matris cümlesi
$\mathbb{H}_p$	: Eliptik kuaterniyon cümlesi
$\otimes$	: Eliptik kuaterniyonik çarpım
$\vec{q}_\kappa$	: q eliptik kuaterniyonunun eliptik sütun matrisi
$\check{\psi}(q)$	: q eliptik kuaterniyonunun eliptik temel matrisi
$\phi(Q)$	: Q eliptik kuaterniyon matrisin eliptik temel matrisi
$\vec{q}_\tau$	: q eliptik kuaterniyonunun reel sütun matrisi
$\check{\varphi}(q)$	: q eliptik kuaterniyonunun reel temel matrisi
$\mathbb{C}_p$	: Eliptik sayılar cümlesi
$\ \cdot \ _F$	: Frobenius norm
$\Phi(A)$	: A komütatif eliptik oktonyon matrisin eliptik kuaterniyonik temel matrisi
$\Phi(\Phi(A))$	: A komütatif eliptik oktonyon matrisin eliptik temel matrisi
ϕ_A	: A komütatif eliptik oktonyon matrisin reel temel matrisi
$\vec{a}_\psi$	: a komütatif eliptik oktonyonun reel sütun matrisi
$\varphi(a)$	: a komütatif eliptik oktonyonun reel temel matrisi
$\mathbb{CO}_p$	: Komütatif eliptik oktonyon cümlesi
$\times$	: Komütatif eliptik oktonyonik çarpım
A^*	: A matrisinin eşlenik taranspozu
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi



TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Eliptik kuaterniyon bazları arasındaki çarpım tablosu.	8
Tablo 3.1. Komütatif eliptik oktonyon bazları arasındaki çarpım tablosu.	32
Tablo 4.1. OELSI ve ELSI yöntemlerinin PSNR ve MSE ölçütlerine göre metrik değerler tablosu.	83





ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. RGB uzayı.	26
Şekil 2.2. ELSI görüntü iyileştirme modeli.	28
Şekil 2.3. Orijinal görüntüler.	28
Şekil 2.4. Bozulmuş görüntüler.	29
Şekil 2.5. İyileştirilmiş çıkış görüntüleri.	29
Şekil 4.1. Orijinal görüntü.	73
Şekil 4.2. Orijinal görüntünün R , G , B ve parlaklık bantaları görüntüsü.	73
Şekil 4.3. Orijinal görüntü.	76
Şekil 4.4. Orijinal görüntünün, A komütatif eliptik oktonyon matris elemanlarıyla temsili.	76
Şekil 4.5. Orijinal görüntünün, A komütatif eliptik oktonyon matrinden elde edilen görüntüsü.	77
Şekil 4.6. OELSI görüntü iyileştirme modeli.	78
Şekil 4.7. Orijinal giriş görüntüleri.	78
Şekil 4.8. Bozulmuş görüntüler.	80
Şekil 4.9. İyileştirilmiş görüntüler.	82



KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYON MATRİS DENKLEM ÇÖZÜMLERİ VE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME UYGULAMALARI

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ilk alt başlık literatür incelemelerine odaklanmaktadır. Tezin temelini oluşturarak mevcut bilgileri derinlemesine incelemeyi amaçlamaktadır. Literatürdeki çalışmaların kapsamlı bir analizi yapılarak, konunun önceki araştırmalardaki yeri ve önemi vurgulanmaktadır. İkinci alt başlıkta ise bu tezin amacı belirtilmektedir.

İkinci bölümde, eliptik kuaterniyon cebri ve temel özellikleri incelenmektedir. Eliptik kuaterniyon matris yapısı, denklem çözümleri için kullanılmakta ve bu alanda etkili algoritmalar sunulmaktadır. Ayrıca, renkli görüntü iyileştirme çalışmaları da eliptik kuaterniyonlar temelinde gerçekleştirilmektedir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmının ilk bölümü oluşturmaktadır ve bu bölümde komütatif eliptik oktonyon cebri tanımlanmaktadır. Bu tanımlamalar, komütatif eliptik oktonyonların eliptik ve eliptik kuaterniyon temel matrislerini ifade etmek için matris cebri ile izomorfizmalar aracılığıyla ilişkilendirilir. Ayrıca, komütatif eliptik oktonyon matrisleri kapsamlı bir şekilde ele alınır. Bu matris yapısı, Kalman Yakubovich s-eşlenik, Sylvester s-eşlenik ve $AX = B$ denklemlerinin çözümlerini elde etmek için kullanılır.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmının ikinci bölümünü oluşturmaktadır. Bu bölümde, bir görüntünün kırmızı (R), yeşil (G) ve mavi (B) kanallarında nasıl temsil edildiği ayrıntılı bir şekilde açıklanır ve görüntü iyileştirme süreci detaylarıyla ele alınır. Bu aşamada, görüntülerin komütatif eliptik oktonyon temsil matrisiyle nasıl ilişkilendirildiği incelenir ve görüntülerin komütatif eliptik oktonyonik olarak nasıl ifade edildiği ortaya konur. Bu yöntemle, görüntülerin daha karmaşık ve zengin bir temsilini elde etmek mümkün olur. Son olarak, komütatif eliptik oktonyonik görüntü üzerinde çeşitli görüntü iyileştirme teknikleri uygulanır ve bu tekniklerin sonuçları görsel olarak değerlendirilir. Bu bölüm, komütatif eliptik oktonyonların görüntü işleme alanındaki potansiyelini vurgular ve daha etkili görüntü iyileştirme yöntemlerinin geliştirilmesine katkı sağlar.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar kapsamlı bir şekilde değerlendirilmiştir ve gelecekte yapılacak araştırmalar için öneriler sunulmuştur. Bu değerlendirme, komütatif eliptik oktonyon cebri alanında sağlanan ilerlemeleri vurgular ve bu alanda daha fazla keşif yapılması gerektiğini belirtir. Ayrıca, görüntü işleme uygulamalarında komütatif eliptik oktonyonların potansiyelini daha da araştırmak için öneriler sunulur. Bu bölüm, tezin önemli katkılarını özetler ve gelecekteki çalışmalara ilham verir.



COMMUTATIVE ELLIPTIC OCTONION MATRIX EQUATION SOLUTIONS AND IMAGE ENHANCEMENT APPLICATIONS

SUMMARY

The thesis consists of five comprehensive chapters, each covering important topics that form the fundamental basis of the research inquiry.

The first chapter serves as the introduction, providing an initial overview of the study. Its first subsection focuses on the crucial aspect of the literature review. By conducting an extensive analysis of existing knowledge, the literature review aims to establish a solid foundation for the thesis. This section critically examines previous research related to the topic, highlighting the significance and relevance of the subject in earlier studies. Through synthesizing and integrating the existing scientific works, the literature review explains the rationale and importance of the research. Additionally, this section identifies unresolved or contradictory points in the literature and discusses the reasons for focusing the research on these aspects. The literature review also demonstrates how the research integrates with the existing knowledge and emphasizes the originality of the study. Overall, this subsection elaborates on the purpose of the thesis and provides a detailed explanation of the general objective and specific research goals, enabling readers to better understand the significance and potential contributions of the study.

The second subsection comprehensively explores the topic of elliptic quaternion algebra, providing a detailed examination of its matrix structure and equation solutions. In this section, important tools in the field of elliptic quaternion algebra, such as the Kalman Yakubovich's conjugate and Sylvester equation solutions, are also discussed. The focus on matrix structure and equation solutions highlights the fundamental properties of the elliptic quaternion matrix structure and emphasizes its effective utilization in the field of image processing. Furthermore, this section delves into the applications of elliptic quaternion algebra and matrix structure in color image enhancement. The combination of elliptic quaternion algebra and matrix structure with Kalman Yakubovich's conjugate and Sylvester equation solutions further underscores their significance in both mathematical and practical applications. This section aims to highlight advancements in elliptic quaternion algebra, serving as a foundation for future research and encouraging further exploration, innovation, and progress in the field.

The third chapter constitutes the original part of the thesis. It defines commutative elliptic octonion algebra, which represents elliptic and elliptic quaternion fundamental matrices through isomorphisms associated with matrix algebra. Furthermore, it extensively covers commutative elliptic octonion matrix structures. This matrix structure serves as an effective tool to obtain solutions for Kalman-Yakubovich's equation, Sylvester's equation, and other equations. This chapter highlights the original contributions of the thesis, showcasing how commutative elliptic octonion algebra and matrix structures provide advantages in solving equations. By establishing a connection between commutative elliptic octonion algebra and general matrix algebra

principles, this approach demonstrates the utilization of matrices in various equation-solving problems. In this context, important equations such as Kalman-Yakubovich's equation and Sylvester's equation can be solved using commutative elliptic octonion matrix structures. This new approach enables faster and more accurate results in the equation-solving process.

The fourth chapter represents the second original part of the thesis and signifies a significant step in the field of image processing. In this chapter, a detailed explanation is provided on how an image is represented in the red (R), green (G), and blue (B) channels. The process of image enhancement is systematically addressed, examining various image enhancement techniques and algorithms and demonstrating their application. Moreover, this chapter showcases the utilization of the commutative elliptic octonion matrix structure, enabling the attainment of more complex and rich representations of images. Commutative elliptic octonions are employed as a tool to reproduce images in higher quality and realism. This matrix structure facilitates the application of diverse image enhancement techniques to images. The effectiveness of these enhancements is evaluated visually through analysis. By emphasizing the potential of commutative elliptic octonions in the field of image processing, this chapter contributes to the development of more efficient image enhancement methods. Consequently, utilizing advanced and robust tools in the domain of image processing enables the attainment of higher quality results.

The fifth chapter is an important stage where the results of the thesis are thoroughly evaluated, and recommendations for future research are presented. In this stage, the results obtained by the thesis are examined comprehensively, and the significance of these findings is emphasized. The analysis includes a detailed evaluation of the effectiveness of the commutative elliptic octonion algebra and matrix structures in solving equations and enhancing images. The implications of the research findings are discussed, highlighting their contributions to the field of commutative elliptic octonion algebra and image processing. Additionally, recommendations are provided for further research, emphasizing the importance of conducting more exploration in the field of commutative elliptic octonion algebra. Specifically, suggestions are made to further investigate the potential of commutative elliptic octonions in image processing applications. These recommendations underscore the belief that commutative elliptic octonions could offer a broader range of utility in the field of image processing and contribute to the development of more effective image enhancement techniques.

The conclusions of this thesis demonstrate the necessity of advancing further research in the field of commutative elliptic octonion algebra and image processing, introducing a new perspective for future studies. The research conducted in this thesis, focusing on the utilization of commutative elliptic octonions and matrix structures, highlights the progress made in these areas. It is believed that in the future, commutative elliptic octonions could find a wider range of applications, and more advanced image enhancement techniques could be developed. This thesis aims to serve as an inspiration for future research by highlighting the advancements and contributions made in this field.

Furthermore, this thesis contributes to the development of more efficient solutions for equation-solving problems and image enhancement tasks. The innovative use of commutative elliptic octonions and matrix structures provides advantages in terms of accuracy, speed, and quality of results. By establishing a connection between commutative elliptic octonion algebra and general matrix algebra principles, this

research expands the applicability of matrices in various mathematical and practical contexts.

Moreover, the integration of commutative elliptic octonions into image processing techniques opens up new possibilities for enhancing the quality, realism, and visual appeal of images. The commutative elliptic octonion matrix structure serves as a powerful tool for representing and manipulating color images, enabling the application of advanced enhancement algorithms. This thesis showcases the effectiveness of these techniques and highlights their potential in producing visually appealing and high-quality images.

The evaluation of the research findings in the fifth chapter emphasizes the significance and contributions of the thesis. The comprehensive analysis of the results demonstrates the effectiveness and practicality of the proposed approaches in commutative elliptic octonion algebra and image processing. The successful application of commutative elliptic octonion matrix structures in solving equations and enhancing images highlights their relevance and potential in these domains.

Based on the outcomes of the thesis, recommendations for future research are presented. The identified areas of further exploration in commutative elliptic octonion algebra and image processing encourage researchers to delve deeper into these fields. The suggested directions include investigating additional applications of commutative elliptic octonions in image processing, exploring novel enhancement techniques, and further developing the theoretical foundations of commutative elliptic octonion algebra.

In conclusion, this thesis makes a significant contribution to the fields of commutative elliptic octonion algebra and image processing. By introducing innovative approaches and techniques, it expands our understanding of these domains and offers more efficient solutions. The findings highlight the necessity for continued research and exploration in commutative elliptic octonion algebra and image processing, with the potential for broader applications and advancements in the future. This thesis aims to inspire and guide future studies in these areas, encouraging researchers to build upon the progress made and explore new frontiers in commutative elliptic octonion algebra and image processing.



1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

Matematik çalışma yöntemlerinde matematiksel kavramları genellemenin önemi büyüktür. Matematiksel kavramları genelleme süreci matematiksel kavramları tanımayı ve bu kavramlar arasında ilişkiler kurmayı gerektirir (Mitchelmore, 2002). Bu genellemenin literatürde kullanılan en önemli örneği hiperkompleks sayılardır (Catoni ve ark., 2005; Hamilton, 1848). Hiperkompleks sayılar, gerçel sayılar üzerine ek kurallar veya yapılar eklenerek oluşturulan özel sayı sistemleridir. Bu sistemler, matematiksel yapıların genişletilmiş formlarını ifade eder ve farklı alanlarda uygulama potansiyeline sahip olmalarını sağlarlar. Gerçel sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve karmaşık sayılar gibi sayı sistemleri, matematiksel kavramların temelini oluştururken, hiperkompleks sayılar bu temel sistemleri genişleterek yeni yapılar sunar (Akar ve ark., 2018; Gu, 2023; Gürlebeck ve ark., 2007; Hazewinkel, 2012; Lounesto, 1986; Singh ve ark., 2022; Watanabe ve ark., 2019).

Hiperkompleks sayılar, matematik, bilgisayar bilimleri ve mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılan özel sayı sistemleridir. Bu sebeple, hiperkompleks sayıların denklem çözümleri alanında önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Hiperkompleks sayılar, kuaterniyonlar, oktonyonlar ve benzeri matematiksel yapılar aracılığıyla denklemlerin çözümünde daha fazla esneklik ve genişletilmiş bir hesaplama gücü sunmaktadır. Ayrıca literatürde çeşitli lineer kuaterniyon ve oktonyon denklemleri ve sistemleri büyük ilgi görmüştür (Bolat, İpek, 2012, 2014; Flaut, 2001; Flaut, Ştefănescu, 2009; Helmstetter, 2012; Iii, Bhattacharyya, 1983; Johnson, 1944; Kwon, Youn, 1987; Liu, 2018; Liu, Zhang, 2023; Porter, 1997; Shafai, Bhattacharyya, 1988; Shpakivskyi, 2011; Tian, 1999; Wang ve ark., 2020). Jiang ve Wei (2005), $X - AXB = C$ reel kuaterniyon matris denkleminin çözümünü elde ederek, bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmışlardır. Wang ve ark. (2008), $AXB + CYD = E$ reel kuaterniyon matris denkleminin bir çözümünün mevcut durumu için gerekli ve yeterli koşulları incelemişlerdir. Jiang ve Ling (2013) ise $A\tilde{X} - XB = C$ matris

denkleminin çözümlerini elde etme ve bu denklemin uygulamaları üzerine bir çalışma yapmışlardır. Kösal (2016), komütatif kuaterniyon ve eliptik kuaterniyonlar üzerinde Kalman Yakubovich s-eşlenik ve Sylvster s-eşlenik denklem çözümlerini elde etmiştir. Liu ve Zhang (2019), $AX^* - XB = CY + D$ ve $X - AX^*B = CY + D$ split kuaterniyon matris denklemlerinin tutarlılığını incelemişlerdir. Yu ve ark. (2020), $AXB + CX^*D = E$ genelleştirilmiş kuaterniyon matris eşitiliğinin çözümü olan X matrisinin n . eşleniğinin ve n . eşleniğinin transpozunun da bir çözüm olabileceğini ifade eden kriterler üzerine tartışmışlardır. Tosun ve Kösal (2021), Sylvester s-eşlenik eliptik kuaterniyon matris denklemlerinin çözümlerinin varlığını belirtmişlerdir ve çözüm yöntemini anlatan bir yarı-kod sunmuşlardır. Tian ve ark. (2023), genelleştirilmiş indirgenmiş bikuaterniyon matris denklemi olan $AXB = C$ denklemini çalışmışlardır. Oktonyonların birleşme ve komütatif olma özellikleri mevcut olmadığından dolayı, gerçel ve kompleks sayılar üzerinde elde edilen sonuçları doğrudan genişletilememiştir. Fakat büyük ölçüde Coxeter(1946) makalesine dayanan Conway ve Smith (2003) kitabı, oktonyonlar hakkında önemli bir arka plan sağlamıştır. Böylece son zamanlarda oktonyonlar üzerindeki araştırmalarda kayda değer bir artış görülmüştür. Tian (2000) oktonyonların matris temsillerini elde ederek, oktonyonların uygulama alanları üzerinde durmuştur. Ludkovsky (2013), oktonyon cebirini kullanarak, Korteweg-de-Vries ve Kadomtzev-Petviashvili tiplerine ait doğrusal olmayan vektör kısmi diferansiyel denklemlerine ve sıkıştırılamayan Newtonian sıvıların izotermik akışlarının açıklamalarına uygulamalar sunmuştur. Flaut ve Shpakivskyi (2015), genelleştirilmiş kuaterniyon cebirlerindeki bir bazdan, bölünmüş kuaterniyon cebirindeki bir baza geçiş formülleri sunmuşlardır ve aynı sonuçları genelleştirilmiş oktonyon cebri için de elde edilmişlerdir. Ayrıca, bu sonuçları cebirsel denklemlere ve De Moivre formülüne genelleştirmişlerdir. İpek ve Çimen (2016) ise lineer reel oktonyon denklem sistemleri üzerine çalışmışlardır. Demir ve Zeren (2018), sıkıştırılabilir akışkanların Maxwell tipi denklemlerinin hiperbolik oktonyonik genelleştirmesinden yola çıkarak, benzer çoklu akışkan plazma denklemleri için alternatif bir yeniden formülasyon önermişlerdir. Loginov (2021), oktonyon cebirini kullanarak $AX = B$ denkleminin modülünü incelemiştir. Daneshfar ve Jamshidi (2023), ESN'lerin ve Metaverse'deki uygulamalarının tüm sorunlarını çözmek için, oktonyon cebirine dayalı NO2GESNet adlı ESN'ler için yeni bir yapı geliştirmişlerdir.

Bunun yanı sıra, hiperkompleks sayılar görüntü işleme alanında da büyük öneme sahiptir. Özellikle renkli görüntülerin işlenmesinde kullanılırlar. Renkli görüntüler, genellikle üç kanaldan oluşur: kırmızı, yeşil ve mavi. Hiperkompleks sayılar kullanılarak bu kanalların işlenmesi ve birleştirilmesiyle daha karmaşık işlemler gerçekleştirilebilir. Örneğin, renk düzeltme, renk filtreleme ve görüntü iyileştirme gibi işlemlerde hiperkompleks sayılar etkin bir şekilde kullanılmaktadır (Bouman, Sauer, 1993; Bülow, 1999; Ell, Sangwine, 2006; Felsberg, 1998; Figueiredo Bahia, 2022; Gai, Huang, 2021; Valenti ve ark., 2015; Zaghloul, Hiary, 2020; Wang ve ark., 2023). Bu sayede daha gerçekçi ve doğal görüntüler elde edilebilir.

Hiperkompleks sayıların denklem çözümleri ve görüntü işleme gibi uygulama alanları, matematik, bilgisayar bilimleri ve mühendislik disiplinleri arasında büyük bir ilgi ve ortak çalışma konusu oluşturmaktadır. Bu alanlarda hiperkompleks sayılar, daha karmaşık problemlerin çözümünde ve görüntü işleme algoritmalarının geliştirilmesinde kullanılan güçlü bir araçtır. Farklı sayı sistemlerinin görüntü işleme süreçlerine dahil edildiği çok sayıda çalışma literatürde mevcut olmakla birlikte özellikle kuaterniyonların görüntü işlemede kullanımı 2000'li yılların başında başlayıp halen aktif bir şekilde devam etmektedir.

Renkli görüntülerin tanımlanmasında kullanılan kuaterniyon tabanlı modeller görüntü filtreleme, çapraz korelasyon ve sıkıştırma yöntemlerini başarılı bir şekilde geliştirerek birçok avantaj sağlamıştır. Kuaterniyonların görüntü işleme alanında kullanımı, zamanla daha da yaygınlaşmış ve çeşitli gelişmelere sahne olmuştur. Özellikle renkli görüntülerin tanımlanması ve işlenmesi konusunda kuaterniyon tabanlı modellerin sunduğu avantajlar, araştırmacıları bu alanda yeni yöntemler geliştirmeye teşvik etmiştir. Kuaterniyon tabanlı modeller, renkli görüntülerin işlenmesinde farklı avantajlar sunmaktadır. Geleneksel olarak, renkli görüntüler üç kanal (kırmızı, yeşil, mavi) aracılığıyla temsil edilir. Kuaterniyonlar ise dört bileşenli bir sayı sistemidir ve gerçekçi renkli görüntülerin daha doğru bir şekilde tanımlanmasına olanak sağlar. Literatürde birçok çalışma, kuaterniyonların görüntü işleme süreçlerindeki etkisini araştırmaktadır. Zhang ve ark. (2015) $AX = B$ kuaterniyon matris denklemini göz önüne alarak, bu denklemin en küçük kareler çözümünün elde edilmesiyle bu çözümü renkli görüntülerin iyileştirme sürecinde kullanmışlardır. Witten ve Shragge (2006) kuaterniyon tabanlı sinyal işleme süreci üzerine çalışmış ve kuaterniyon cebri yardımıyla sismik süreçleri incelemişlerdir. Yu ve ark. (2013) renkli görüntü problemlerinde kuaterniyon tabanlı seyrek yaklaşımı kullanmış ve önerdikleri seyrek

modelin gürültü temizleme ve iç boyama gibi renkli görüntü uygulamalarında geçerliliğini kanıtlamışlardır. Grigoryan ve Agaian (2014) renkli görüntüleri işleme ve gösterim için yeni bir model geliştirmişlerdir. Renkli görüntü işleme için bir diğer model ise Kolaman ve ark. (2011) tarafından geliştirilmiş ve bunun için kuaterniyon ve bi-kuaterniyon cebirine başvurmuşlardır. Diğer taraftan Yuan ve ark. (2013) reel kuaterniyon matrislerinin kompleks temsillerini ve pseudo (genelleştirilmiş) terslerini kullanarak reel kuaterniyon matris denkleminde normunu en küçük yapan matrisi reel kuaterniyonlar, pür reel kuaterniyonlar ve reel sayılar kümeleri üstünde araştırmışlardır. Lazendic ve ark. (2018), oktonyon tabanlı yeniden oluşturulan multispektral görüntünün gerçek ve sahte renkli görüntülerinde, renk duyarlılığının daha iyi korunma potansiyeline sahip olduğunu göstermişlerdir. Wang ve ark. (2021), oktonyon teorisini COM'larla birleştirerek oktonyon sürekli ortogonal momentlerini (OCOM'lar) önermişlerdir. Daoui ve ark. (2022), renkli stereo görüntülerin kompakt analizi için oktonyon Hahn momentleri (OHM'lar) adında bir moment türünü sunmuşlardır ve ayrıca stereo görüntüsünün tüm renk kanalları arasındaki iç ilişkileri korumuşlardır. Atali ve ark. (2023), en küçük normlu pür eliptik kuaterniyonik en küçük kareler çözümünün yeni elde edilen yöntemini, LabVIEW programına dayalı renkli görüntü geri yükleme işlemine uygulayarak, eliptik kuaterniyonik en küçük kareler çözümleri ile ilişkilendirilmiş yeni bir görüntü geri yükleme modeli olan "ELSI görüntü geri yükleme modeli" önermişlerdir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tez, komütatif eliptik oktonyon cebirini detaylı bir şekilde tanımlayarak, bu cebirin matris yapısını oluşturma hedefi taşır. Ayrıca, Kalman Yakubovich s-eşlenik ve Sylvester s-eşlenik ($1 \leq s \leq 7$) denklemlerinin çözümünü elde etmek amacıyla bu matris yapısını kullanır. Bu denklemler, kontrol sistemlerinde, sinyal işlemede önemli bir rol oynar ve çeşitli disiplinlerde geniş bir uygulama potansiyeline sahiptir.

Tezin bir diğer amacı, $AX = B$ denklemi için etkili bir çözüm algoritması tanımlamaktır. Bu algoritma, matris yapısı ve komütatif eliptik oktonyonlar aracılığıyla denklemin çözümünü optimize eder ve daha hızlı sonuçlar elde etmeyi hedefler. Bu sayede, denklem çözümü sürecinde daha verimli ve güvenilir sonuçlar elde edilebilir.

Ayrıca, çalışmanın bir bölümü, bir görüntünün komütatif eliptik oktonyon matrisi kullanılarak temsil edilmesine odaklanır. Komütatif eliptik oktonyon, sekiz boyutlu hiperkompleks sayılar olarak bilinir ve renkli görüntülerin temsili için kullanılır. Bu çalışmada, komütatif eliptik oktonyon matrisini kullanarak görüntü iyileştirme çalışması gerçekleştirilir. Bu yöntem, renk düzeltme, kontrast artırma ve gürültü azaltma gibi görüntü iyileştirme tekniklerinin etkili bir şekilde uygulanmasına olanak tanır.

Bu çalışma, komütatif eliptik oktonyon cebriinin matris yapısıyla birleştirilerek, Kalman Yakubovich s-eşlenik ve Sylvester s-eşlenik ($1 \leq s \leq 7$) denklemlerinin çözümlerine yeni bir yaklaşım sunar. Ayrıca, $AX = B$ denkleminin etkili bir şekilde çözülmesini sağlayan bir algoritma geliştirir ve görüntü iyileştirmede komütatif eliptik oktonyon matrisinin kullanımının potansiyelini ortaya koyar. Bu çalışma, matematiksel yöntemlerin pratik uygulamalarına yönelik yeni bir bakış açısı sunarak, alanında ilerlemeyi hedefler.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yer alan temel kavramlar, diğer bölümler için önemli bir temel teşkil eder ve ilerleyen bölümlerde bu kavramlar sıklıkla kullanılacaktır.

2.1. Eliptik Kuaterniyon Cebri ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. Eliptik kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{H}_p$ ile gösterilmek üzere

$$\mathbb{H}_p = \{q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

ile ifade edilir. Burada $0 > i^2 = p \in \mathbb{R}$ ve $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eliptik kuaterniyon cümlesinin bazıdır.

q eliptik kuaterniyonu

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \\ &= (q_0 + \mathbf{i}q_1) + \mathbf{j}(q_2 + \mathbf{i}q_3) \\ &= q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

eşitlikleri ile üç farklı biçimde ifade edilir. Burada $q_{(e),1} = (q_0 + q_2) + \mathbf{i}(q_1 + q_3)$,

$q_{(e),2} = (q_0 - q_2) + \mathbf{i}(q_1 - q_3) \in \mathbb{C}_p$ ve $\mathbf{e}_1 = \frac{1+\mathbf{j}}{2}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1-\mathbf{j}}{2}$ dir. Ayrıca

$$\mathbf{e}_1^n = \mathbf{e}_1^{n-1} = \dots = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{e}_2^n = \mathbf{e}_2^{n-1} = \dots = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ bazlarının idempotent olduğu görülür (Kösal, 2016).

Tanım 2.1.2. Eliptik kuaterniyon cümlesinin bazları arasındaki bağıntı $0 > i^2 = p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

Tablo 2.1. Eliptik kuaterniyon bazları arasındaki çarpım tablosu.

$\otimes$	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
1	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>p</i>	<i>k</i>	<i>pj</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	1	<i>i</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>pj</i>	<i>i</i>	<i>p</i>

tablosu ile verilir. Buradaki " $\otimes$ " sembolü eliptik kuaterniyonik çarpımı ifade eder. Buradan $\mathbb{H}_p$ cümlesinin çarpma işlemine göre değişme özelliğini sağladığı görülür (Kösal, 2016).

Tanım 2.1.3. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, $r = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{H}_p$ cümlesi üzerinde cebirsel işlemler olan toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$q + r = (q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)\mathbf{i} + (q_2 + r_2)\mathbf{j} + (q_3 + r_3)\mathbf{k},$$

$$p \otimes r = (q_0r_0 + pq_1r_1 + p_2r_2 + pq_3r_3) + (q_1r_0 + q_0r_1 + q_3r_2 + q_2r_3)\mathbf{i} \\ + (q_0r_2 + q_2r_0 + pq_1r_3 + pq_3r_1)\mathbf{j} + (q_3r_0 + q_0r_3 + q_1r_2 + q_2r_1)\mathbf{k},$$

$$\lambda q = \lambda(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) = \lambda q_0 + \lambda q_1\mathbf{i} + \lambda q_2\mathbf{j} + \lambda q_3\mathbf{k}$$

denklemleriyle verilir (Kösal, 2016; Pekyaman, 2021).

Tanım 2.1.4. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} \overset{1-}{q} &= q_0 - q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}, \\ \overset{2-}{q} &= q_0 + q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}, \\ \overset{3-}{q} &= q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde üç tane eşlenik tanımlanır (Kösal, 2016).

Tanım 2.1.5. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned}\|q\| &= \sqrt[4]{\left| q \otimes \begin{pmatrix} 1 & - \\ & q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & - \\ & q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & - \\ & q \end{pmatrix} \right|} \\ &= \sqrt[4]{\left[(q_0 + q_2)^2 - p(q_1 + q_3)^2 \right] \left[(q_0 - q_2)^2 - p(q_1 - q_3)^2 \right]} \geq 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanır (Kösal, 2016).

Teorem 2.1.6. $q = q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2 \in \mathbb{H}_p$ olsun. q eliptik kuaterniyonunun $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bazına göre normu aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$\|q\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\|q_{(e),1}\|^2 + \|q_{(e),2}\|^2 \right)} \quad (2.4)$$

(Pekyaman, 2021).

Tanım 2.1.7. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ ve $\|q\| \neq 0$ olsun. O halde q eliptik kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi q^{-1} olmak üzere

$$q^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & - \\ & q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & - \\ & q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & - \\ & q \end{pmatrix}}{\|q\|^4} \quad (2.5)$$

ile tanımlanır (Kösal, 2016).

2.1.1. Eliptik kuaterniyonların reel ve eliptik matris temsilleri

$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2 \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_q : \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{H}_p \\ q &\rightarrow \tilde{\varphi}_q(x) = q \otimes x,\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_q : \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{H}_p \\ q &\rightarrow \tilde{\psi}_q(x) = q \otimes x\end{aligned}\quad (2.7)$$

biçiminde lineer izomorfizmalar tanımlansın. $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\psi}$ lineer izomorfizmalarının tanımları göz önüne alınırsa, eliptik kuaterniyon cümlesinin $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bazıları için sırasıyla

$$\begin{aligned}
\check{\varphi}_q(\mathbf{1}) &= (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}), \\
\check{\varphi}_q(\mathbf{i}) &= (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})\mathbf{i} = pq_1 + q_0\mathbf{i} + pq_3\mathbf{j} + q_2\mathbf{k}, \\
\check{\varphi}_q(\mathbf{j}) &= (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})\mathbf{j} = q_2 + q_3\mathbf{i} + q_0\mathbf{j} + q_1\mathbf{k}, \\
\check{\varphi}_q(\mathbf{k}) &= (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})\mathbf{k} = pq_3 + q_2\mathbf{i} + pq_1\mathbf{j} + q_0\mathbf{k},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\check{\psi}_q(\mathbf{e}_1) &= (q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = q_{(e),1}\mathbf{e}_1, \\
\check{\psi}_q(\mathbf{e}_2) &= (q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = q_{(e),2}\mathbf{e}_2,
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Buradan $\check{\varphi}$ ve $\check{\psi}$ lineer izomorfizmalarının eliptik kuaterniyon cümlesinin bazıları olan $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bazlarına karşılık gelen matrisleri ise sırasıyla

$$\check{\varphi}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & pq_1 & q_2 & pq_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_2 & pq_3 & q_0 & pq_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & p_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (2.8)$$

ve

$$\check{\psi}(q) = \begin{bmatrix} q_{(e),1} & 0 \\ 0 & q_{(e),2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2 \times 2} \quad (2.9)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. $\check{\varphi}(q)$ ve $\check{\psi}(q)$ matrislerine ise sırasıyla $q \in \mathbb{H}_p$ 'nin reel temel matrisi ve eliptik temel matrisi denir (Kösal, 2016; Pekyaman, 2021).

Ayrıca $\mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ ve $\mathbb{C}_p^{2 \times 1}$ matris cümleleri arasında cebir izomorfizmaları kurulabilir. Bu izomorfizmalar

$$\begin{aligned}
\tau: \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 1} \\
q &\rightarrow \tau(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T
\end{aligned} \quad (2.10)$$

ve

$$\begin{aligned}
\kappa: \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{C}_p^{2 \times 1} \\
q &\rightarrow \kappa(q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + q_{(e),2}\mathbf{e}_2) = [q_{(e),1} \quad q_{(e),2}]^T
\end{aligned} \quad (2.11)$$

dönüşümleriyle tanımlanır. Sonuç olarak

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \cong (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T = \vec{q}_\tau$$

$$q = q_{(e),1} \mathbf{e}_1 + q_{(e),2} \mathbf{e}_2 \cong (q_{(e),1} \quad q_{(e),2})^T = \vec{q}_\kappa$$

eşitlikleri yazılır. Burada $\vec{q}_\tau$ ve $\vec{q}_\kappa$ matrislerine sırasıyla, q 'nun reel sütun matrisi ve eliptik sütun matrisi denir.

Tanımlanan izomorfizmalar yardımı ile $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_{(e),1} \mathbf{e}_1 + q_{(e),2} \mathbf{e}_2$ ve $r = r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k} = r_{(e),1} \mathbf{e}_1 + r_{(e),2} \mathbf{e}_2 \in \mathbb{H}_p$ arasındaki çarpma işlemi (2.10), (2.11)

dönüşümleri ve $\vec{r}_\tau, \vec{r}_\kappa$ sütun matrisleriyle aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$q \otimes r \cong \begin{bmatrix} q_0 & pq_1 & q_2 & pq_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_2 & pq_3 & q_0 & pq_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \check{\varphi}(q) \vec{r}_\tau,$$

$$q \otimes r \cong \begin{bmatrix} q_{(e),1} & 0 \\ 0 & q_{(e),2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{(e),1} \\ r_{(e),2} \end{bmatrix} = \check{\psi}(q) \vec{r}_\kappa.$$

$\check{\varphi}$ ve $\check{\psi}$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \check{\varphi}(q \otimes r) &= \check{\varphi}(q) \check{\varphi}(r), \\ \check{\varphi}(q + r) &= \check{\varphi}(q) + \check{\varphi}(r) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \check{\psi}(q \otimes r) &= \check{\psi}(q) \check{\psi}(r), \\ \check{\psi}(q + r) &= \check{\psi}(q) + \check{\psi}(r) \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu eşitliklerden $\check{\varphi}$ ve $\check{\psi}$ fonksiyonlarının bir cebir izomorfizması oldukları görülür (Kösal, 2016; Pekiyan, 2021).

Teorem 2.1.1.1. $q, r \in \mathbb{H}_p$ olsun. $\check{\varphi}$ ve $\check{\psi}$ izomorfizmaları için aşağıdaki özellikleri sağlanır (Kösal, 2016; Pekiyan, 2021):

1. $\check{\varphi}(q \otimes r) = \check{\varphi}(q) \check{\varphi}(r)$ ve $\check{\varphi}(q + r) = \check{\varphi}(q) + \check{\varphi}(r)$,
 $\check{\psi}(q \otimes r) = \check{\psi}(q) \check{\psi}(r)$ ve $\check{\psi}(q + r) = \check{\psi}(q) + \check{\psi}(r)$,
2. $\check{\varphi}(\check{\varphi}(q) \vec{r}_\tau) = \check{\varphi}(q) \check{\varphi}(r)$ ve $\check{\psi}(\check{\psi}(q) \vec{r}_\kappa) = \check{\psi}(q) \check{\psi}(r)$,

$$3. \quad q = r \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(q) = \tilde{\varphi}(r) \quad \text{ve} \quad \tilde{\psi}(q) = \tilde{\psi}(r),$$

$$4. \quad \tilde{\varphi}(\lambda q) = \lambda \tilde{\varphi}(q) \quad \text{ve} \quad \tilde{\psi}(\lambda q) = \lambda \tilde{\psi}(q)$$

$$5. \quad iz(\tilde{\varphi}(q)) = q + {}^1\bar{q} + {}^2\bar{q} + {}^3\bar{q},$$

$$iz(\tilde{\psi}(q)) = q_{(e),1} + q_{(e),2}$$

$$6. \quad \|q\|^4 = |\det(\tilde{\varphi}(q))| \quad \text{ve} \quad \|q\| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\det(\tilde{\psi}(q))|.$$

Teorem 2.1.1.2. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$P \operatorname{diag}(q, {}^1\bar{q}, {}^2\bar{q}, {}^3\bar{q}) P^{-1} = \tilde{\varphi}(q) \quad (2.12)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{i}}{p} & -\frac{\mathbf{i}}{p} & -\frac{\mathbf{i}}{p} & \frac{\mathbf{i}}{p} \\ \mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & -\mathbf{j} \\ \frac{\mathbf{k}}{p} & -\frac{\mathbf{k}}{p} & -\frac{\mathbf{k}}{p} & \frac{\mathbf{k}}{p} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{i} & -\mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}$$

dır. (2.12) eşitliğine eliptik kuaterniyonların evrensel benzerlik eşitliği adı verilir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar söylenebilir.

1. $\mathbb{H}_p$ cümlesi, eliptik kuaterniyonların reel matris temsil cümlesi olan

$$\mathbb{H}'_p = \left\{ \begin{bmatrix} q_0 & pq_1 & q_2 & pq_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_2 & pq_3 & q_0 & pq_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomorftur. Bu iki cümle arasındaki cebir izomorfizması

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}'_p$$

$$q \rightarrow \tilde{\varphi}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & pq_1 & q_2 & pq_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_2 & pq_3 & q_0 & pq_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

dır.

2. Her $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu

$$\tilde{\varphi}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & pq_1 & q_2 & pq_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_2 & pq_3 & q_0 & pq_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir.

3. $\mathbb{H}'_p$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{H}_p$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir.

Aynı sonuçlar $\tilde{\psi}$ fonksiyonu için de verilebilir (Kösal, 2016; Pekyaman, 2021).

2.2. Eliptik Kuaterniyon Değerli Matrisler

Tanım 2.2.1. Elemanları eliptik kuaterniyon olan $m \times n$ boyutlu matrislerin cümlesi $\mathbb{H}_p^{m \times n}$ ile ifade edilir. $Q = (q_{ij})$, $R = (r_{ij}) \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $S = (s_{jk}) \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{H}_p^{m \times n}$ cümlesi üzerinde toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$Q + R = (q_{ij}) + (r_{ij}) = (q_{ij} + r_{ij}) \in \mathbb{H}_p^{m \times n},$$

$$\lambda Q = \lambda (q_{ij}) = (\lambda q_{ij}) \in \mathbb{H}_p^{m \times n},$$

$$QS = \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} s_{jk} \right) \in \mathbb{H}_p^{m \times l}$$

ile tanımlanır. $m \times n$ boyutundaki eliptik kuaterniyon matris aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2\mathbf{i} + Q_3\mathbf{j} + Q_4\mathbf{k} \\ &= (Q_0 + \mathbf{i}Q_1) + \mathbf{j}(Q_3 + \mathbf{i}Q_4) \\ &= Q_{(e),1}\mathbf{e}_1 + Q_{(e),2}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Burada $Q_{(e),1} = (Q_0 + Q_2) + \mathbf{i}(Q_1 + Q_3)$ ve $Q_{(e),2} = (Q_0 - Q_2) + \mathbf{i}(Q_1 - Q_3) \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ dır (Kösal, 2016; Pekyaman, 2021).

Tanım 2.2.2. $Q = Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisi için

$$\begin{aligned}
{}^1\overline{Q} &= Q_0 - Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} - Q_3\mathbf{k}, \\
{}^2\overline{Q} &= Q_0 + Q_1\mathbf{i} - Q_2\mathbf{j} - Q_3\mathbf{k}, \\
{}^3\overline{Q} &= Q_0 - Q_1\mathbf{i} - Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

olacak biçimde üç tane eşlenik tanımı mevcuttur (Kösal, 2016).

Tanım 2.2.3. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. Q eliptik kuaterniyon matrisinin transpozu $Q^T \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ ile gösterilir. Ayrıca $Q^{*s} = \left({}^s\overline{Q}\right)^T \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ ($1 \leq s \leq 3$) eşitliğini sağlayan $Q^{*s} \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ matrisine ise $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ matrisinin s 'inci eşleniğe göre eşlenik transpozu denir (Kösal, 2016).

Teorem 2.2.4. Q ve R matrisleri boyutları uygun eliptik kuaterniyon matrisler olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Kösal, 2016):

1. $\left({}^s\overline{Q}\right)^T = {}^s\overline{(Q^T)},$
2. $(QR)^T = R^T Q^T,$
3. Q^{-1} mevcut ise $\left({}^s\overline{Q}\right)^{-1} = {}^s\overline{(Q^{-1})},$
4. ${}^s\overline{(QR)} = \left({}^s\overline{Q}\right)\left({}^s\overline{R}\right),$
5. Q^{-1} ve R^{-1} mevcut ise $(QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1},$
6. Q^{-1} mevcut ise $\left(Q^{*s}\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^{*s},$
7. $(QR)^{*s} = Q^{*s}R^{*s}.$

2.2.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin reel gösterimleri

$Q = Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere

$$\Psi_Q^1(X) = Q\left({}^1\overline{X}\right), \Psi_Q^2(X) = Q\left({}^2\overline{X}\right) \text{ ve } \Psi_Q^3(X) = Q\left({}^3\overline{X}\right)$$

şeklinde lineer izomorfizmalar tanımlansın. Bu izomorfizmaların $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazına karşılık gelen matrisler sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle verilir (Kösal, 2016):

$$\Psi_Q^1 = \begin{bmatrix} Q_0 & -pQ_1 & Q_2 & -pQ_3 \\ Q_1 & -Q_0 & A_3 & -Q_2 \\ Q_2 & -pQ_3 & A_0 & -pQ_1 \\ Q_3 & -Q_2 & A_1 & -Q_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4m \times 4n},$$

$$\Psi_Q^2 = \begin{bmatrix} Q_0 & pQ_1 & -Q_2 & -pQ_3 \\ Q_1 & Q_0 & -Q_3 & -Q_2 \\ Q_2 & pQ_3 & -Q_0 & -pQ_1 \\ Q_3 & Q_2 & -Q_1 & -Q_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4m \times 4n},$$

$$\Psi_Q^3 = \begin{bmatrix} Q_0 & -pQ_1 & -Q_2 & pQ_3 \\ Q_1 & -Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_2 & -pQ_3 & -A_0 & pQ_1 \\ Q_3 & -Q_2 & -Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}.$$

Teorem 2.2.1.1. Ψ_Q^1 , Ψ_Q^2 ve Ψ_Q^3 matrisleri için

1. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun.

$${}^1\overline{W}_t = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{bmatrix}, {}^2\overline{W}_t = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{bmatrix}, {}^3\overline{W}_t = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix},$$

$$S_t = \begin{bmatrix} 0 & pI_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pI_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \end{bmatrix}, T_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & pI_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & pI_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, bu matrisler ve Ψ_Q^1 , Ψ_Q^2 ve Ψ_Q^3 matrisleri arasında

$$\left({}^1\overline{W}_m\right)^{-1} \Psi_Q^1 \left({}^1\overline{W}_n\right) = \Psi_{{}^1\overline{Q}}^1, \left(S_m^{-1}\right) \Psi_Q^1 (S_n) = -\Psi_Q^1, \left(T_m^{-1}\right) \Psi_Q^1 (T_n) = \Psi_Q^1, \left(U_m^{-1}\right) \Psi_Q^1 (U_n) = -\Psi_Q^1,$$

$$\left({}^2\overline{W}_m\right)^{-1} \Psi_Q^2 \left({}^2\overline{W}_n\right) = \Psi_{{}^2\overline{Q}}^2, \left(S_m^{-1}\right) \Psi_Q^2 (S_n) = \Psi_Q^2, \left(T_m^{-1}\right) \Psi_Q^2 (T_n) = \Psi_Q^2, \left(U_m^{-1}\right) \Psi_Q^2 (U_n) = -\Psi_Q^2,$$

$$\left({}^3\overline{W}_m\right)^{-1} \Psi_Q^3 \left({}^3\overline{W}_n\right) = \Psi_{{}^3\overline{Q}}^3, \left(S_m^{-1}\right) \Psi_Q^3 (S_n) = -\Psi_Q^3, \left(T_m^{-1}\right) \Psi_Q^3 (T_n) = -\Psi_Q^3, \left(U_m^{-1}\right) \Psi_Q^3 (U_n) = \Psi_Q^3$$

eşitlikleri mevcuttur,

2. $Q, R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ise $\Psi_{Q+R}^1 = \Psi_Q^1 + \Psi_R^1$, $\Psi_{Q+R}^2 = \Psi_Q^2 + \Psi_R^2$ ve $\Psi_{Q+R}^3 = \Psi_Q^3 + \Psi_R^3$ dir,
3. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $R \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ olmak üzere Q ve R matrisleri arasındaki çarpma işleminin Ψ_{QR}^i ($1 \leq i \leq 3$) matrisi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned}\Psi_{QR}^1 &= \Psi_Q^1 \left({}^1\overline{W_n} \right) \Psi_R^1 = \Psi_Q^1 \left(\Psi_Q^1 \left({}^1\overline{Q} \right) \right) \left({}^1\overline{W_l} \right), \\ \Psi_{QR}^2 &= \Psi_Q^2 \left({}^2\overline{W_n} \right) \Psi_R^2 = \Psi_Q^2 \left(\Psi_Q^2 \left({}^2\overline{Q} \right) \right) \left({}^2\overline{W_l} \right), \\ \Psi_{QR}^3 &= \Psi_Q^3 \left({}^3\overline{W_n} \right) \Psi_R^3 = \Psi_Q^3 \left(\Psi_Q^3 \left({}^3\overline{Q} \right) \right) \left({}^3\overline{W_l} \right)\end{aligned}$$

eşitlikleri ile ifade edilir,

4. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$ olmak üzere, Q^{-1} mevcuttur ancak ve ancak $(\Psi_Q^1)^{-1}$, $(\Psi_Q^2)^{-1}$, $(\Psi_Q^3)^{-1}$ mevcut ve

$$\begin{aligned}(\Psi_Q^1)^{-1} &= \left({}^1\overline{W_n} \right) \Psi_{Q^{-1}}^1 \left({}^1\overline{W_m} \right), \\ (\Psi_Q^2)^{-1} &= \left({}^2\overline{W_n} \right) \Psi_{Q^{-1}}^2 \left({}^2\overline{W_m} \right), \\ (\Psi_Q^3)^{-1} &= \left({}^3\overline{W_n} \right) \Psi_{Q^{-1}}^3 \left({}^3\overline{W_m} \right)\end{aligned}$$

dir (Kösal, 2016).

2.2.1.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin bazı lineer denklem çözümleri

Bu bölümde eliptik kuaterniyonlarda sırasıyla Kalman Yakubovich s-eşlenik ve Sylvester s-eşlenik denklemleri olan

$$X - Q \left({}^s\overline{X} \right) P = R \quad (1 \leq s \leq 3)$$

ve

$$Q \left({}^s\overline{X} \right) - XP = R \quad (1 \leq s \leq 3)$$

denklemlerinin çözümleri verilecektir.

İlk olarak Kalman-Yakubovich-s-eşlenik denkleminin $1 \leq s \leq 3$ için çözümleri inceleyelim.

1. $X - Q\left({}^1\overline{X}\right)P = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$X - Q\left({}^1\overline{X}\right)P = R \quad (2.15)$$

denkleminin reel temsili

$$Y - \left(\Psi_Q^1\right)Y\left(\Psi_P^1\right) = \Psi_R^1 \quad (2.16)$$

şeklinde olur. (2.16) denklemi

$$\Psi_X^1 - \Psi_Q^1 \Psi_X^1 \Psi_P^1 = \Psi_R^1 \quad (2.17)$$

biçiminde de ifade edilir. (2.15) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise o halde (2.16) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^1$ matrisi olur.

Teorem 2.2.1.1.1. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. $Y - \left(\Psi_Q^1\right)Y\left(\Psi_P^1\right) = \Psi_R^1$

denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise o halde $X - Q\left({}^1\overline{X}\right)P = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix} \left(Y - S_m^{-1}YS_n + T_m^{-1}YT_n - U_m^{-1}YU_n \right) \begin{pmatrix} I_m \\ iI_m \\ jI_m \\ kI_m \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

olur (Kösal, 2016).

2. $X - Q\left({}^2\overline{X}\right)P = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$X - Q\left({}^2\overline{X}\right)P = R \quad (2.19)$$

denkleminin reel temsili

$$Y - (\Psi_Q^2)Y(\Psi_P^2) = \Psi_R^2 \quad (2.20)$$

şelindedir. Ayrıca (2.20) denklemi

$$\Psi_X^2 - \Psi_Q^2 \Psi_X^2 \Psi_P^2 = \Psi_R^2 \quad (2.21)$$

biçiminde de ifade edilir. Böylece (2.19) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise o halde (2.20) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^2$ matrisi olur.

Teorem 2.2.1.1.2. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}^{m \times n}$ olsun. $Y - (\Psi_Q^2)Y(\Psi_P^2) = \Psi_R^2$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise $X - Q\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \overline{X} \end{smallmatrix}\right)P = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix} \left(Y + S_m^{-1}YS_n - T_m^{-1}YT_n - U_m^{-1}YU_n \right) \begin{pmatrix} I_m \\ -iI_m \\ -jI_m \\ kI_m \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

dir (Kösal, 2016).

3. $X - Q\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \overline{X} \end{smallmatrix}\right)P = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$X - Q\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \overline{X} \end{smallmatrix}\right)P = R \quad (2.23)$$

denkleminin reel temsili

$$Y - (\Psi_Q^3)Y(\Psi_P^3) = \Psi_R^3 \quad (2.24)$$

biçimindedir. Ayrıca (2.24) denklemi

$$\Psi_X^3 - \Psi_Q^3 \Psi_X^3 \Psi_P^3 = \Psi_R^3 \quad (2.25)$$

biçiminde de ifade edilir. Böylece (2.23) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise o halde (2.24) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^3$ matrisi olur.

Teorem 2.2.1.1.3. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}^{m \times n}$ olsun. $Y - (\Psi_Q^3)Y(\Psi_P^3) = \Psi_R^3$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise $X - Q\left({}^3\overline{X}\right)P = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{bmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{bmatrix} \left(Y - S_m^{-1}YS_n - T_m^{-1}YT_n + U_m^{-1}YU_n \right) \begin{bmatrix} I_m \\ iI_m \\ -jI_m \\ -kI_m \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

biçimindedir (Kösal, 2016).

Şimdi Sylvester-s-eşlenik denkleminin $1 \leq s \leq 3$ için çözümleri inceleyelim.

1. $Q\left({}^1\overline{X}\right) - XP = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}^{m \times n}$ için

$$Q\left({}^1\overline{X}\right) - XP = R \quad (2.27)$$

denkleminin reel temsili

$$\left(\Psi_Q^1\right)Y - Y\left(\Psi_P^1\right) = \Psi_R^1 \quad (2.28)$$

biçimindedir. Ayrıca (2.28) denklemi

$$\Psi_Q^1 \Psi_X^1 W_n - \Psi_X^1 W_n \Psi_P^1 = \Psi_R^1 \quad (2.29)$$

biçiminde de yazılabilir. Böylece (2.27) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise o halde (2.28) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^1 W_n$ matrisi olur.

Teorem 2.2.1.1.4. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}^{m \times n}$ olsun. $\left(\Psi_Q^1\right)Y - Y\left(\Psi_P^1\right) = \Psi_R^1$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise $Q\left({}^1\overline{X}\right) - XP = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{bmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{bmatrix} \left(Y\left({}^1\overline{W_n}\right) - S_m^{-1}Y\left({}^1\overline{W_n}\right)S_n + T_m^{-1}Y\left({}^1\overline{W_n}\right)T_n - U_m^{-1}Y\left({}^1\overline{W_n}\right)U_n \right) \begin{bmatrix} I_m \\ iI_m \\ jI_m \\ kI_m \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

biçimindedir (Kösal, 2016).

2. $Q\left({}^2\overline{X}\right) - XP = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$Q\left({}^2\overline{X}\right) - XP = R \quad (2.31)$$

denkleminin reel temsili

$$\left(\Psi_Q^2\right)Y - Y\left(\Psi_P^2\right) = \Psi_R^2 \quad (2.32)$$

biçimindedir. Ayrıca (2.32) denklemi

$$\Psi_Q^2 \Psi_X^2 W_n - \Psi_X^2 W_n \Psi_P^2 = \Psi_R^2 \quad (2.33)$$

biçiminde de yazılabilir. Böylece (2.31) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise (2.32) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^2 W_n$ matrisi olur

Teorem 2.2.1.1.5. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. $\left(\Psi_Q^2\right)Y - Y\left(\Psi_P^2\right) = \Psi_R^2$

denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise o halde $Q\left({}^2\overline{X}\right) - XP = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{bmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{bmatrix} \left(Y \left({}^2\overline{W}_n \right) + S_m^{-1} Y \left({}^2\overline{W}_n \right) S_n - T_m^{-1} Y \left({}^2\overline{W}_n \right) T_n - U_m^{-1} Y \left({}^2\overline{W}_n \right) U_n \right) \begin{bmatrix} I_m \\ -iI_m \\ -jI_m \\ kI_m \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

biçimindedir (Kösal, 2016).

3. $Q\left({}^3\overline{X}\right) - XP = R$ denkleminin çözümü üzerine

$Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$Q\left({}^3\overline{X}\right) - XP = R \quad (2.35)$$

denkleminin reel temsili

$$\left(\Psi_Q^3\right)Y - Y\left(\Psi_P^3\right) = \Psi_R^3 \quad (2.36)$$

biçimindedir. Ayrıca (2.36) denklemi

$$\Psi_Q^3 \Psi_X^3 W_n - \Psi_X^3 W_n \Psi_P^3 = \Psi_R^3 \quad (2.37)$$

biçiminde de yazılabilir. Böylece (2.35) denkleminin bir çözümü eğer X matrisi ise o halde (2.36) denkleminin çözümü de $Y = \Psi_X^3 W_n$ matrisi olur.

Teorem 2.2.1.1.6. $Q \in \mathbb{H}_p^{m \times m}$, $P \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{H}^{m \times n}$ olsun. $(\Psi_Q^3)Y - Y(\Psi_P^3) = \Psi_R^3$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m \times 4n}$ ise o halde $Q(\overline{{}^3X}) - XP = R$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{8-8p} \begin{bmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{bmatrix} \left(Y(\overline{{}^3W_n}) - S_m^{-1} Y(\overline{{}^3W_n}) S_n + T_m^{-1} Y(\overline{{}^3W_n}) T_n - U_m^{-1} Y(\overline{{}^3W_n}) U_n \right) \begin{bmatrix} I_m \\ iI_m \\ -jI_m \\ -kI_m \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

dir (Kösal, 2016).

2.2.2. Eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik matris gösterimleri

Tanım 2.2.2.1. $Q = Q_{(e),1} e_1 + Q_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. O halde

$$\phi(Q) = \begin{bmatrix} Q_{(e),1} & 0 \\ 0 & Q_{(e),2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2m \times 2n} \quad (2.39)$$

matrisine Q matrisinin eliptik temel matrisi denir (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.2. $Q, R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ve $S \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ olsun. Bu durumda ϕ matrisi için aşağıdaki özellikler sağlanır (Pekyaman, 2021):

1. $\phi(I_n) = I_{2n}$,
2. $\phi(Q + R) = \phi(Q) + \phi(R)$,
 $\phi(QR) = \phi(Q)\phi(R)$,
3. $m = n$ için Q^{-1} mevcut ise $\phi(Q^{-1}) = (\phi(Q))^{-1}$,
4. $\phi_p(Q^*) = (\phi_p(Q))^*$ fakat $\phi(Q^*) \neq (\phi(Q))^*$, $\phi(Q^{*3}) \neq (\phi(Q))^*$

dır. Burada $(\phi(Q))^*$, $\phi(Q)$ eliptik kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozudur.

5. $m=l=n$ için $\det(\phi(QR)) = \det(\phi(Q))\det(\phi(R))$ ve

$\det(\phi(Q^{-1})) = (\det \phi(Q))^{-1}$ dir.

6. $(\phi(Q))^{-} = \phi(Q^{-})$ dir. Burada $(\phi(Q))^{-}$ matrisi $\phi(Q)$ matrisinin genelleştirilmiş tersidir.

7. $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 I_m & \mathbf{e}_2 I_m \end{bmatrix} \phi(Q) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 I_n \\ \mathbf{e}_2 I_n \end{bmatrix}$ dir.

Tanım 2.2.2.3. $Q = Q_1 + Q_2 \mathbf{i} + Q_3 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k} = Q_{(e),1} \mathbf{e}_1 + Q_{(e),2} \mathbf{e}_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için Q eliptik kuaterniyon matrisinin Frobenius normu

$$\begin{aligned} \|Q\|_F &= \sqrt{\|Q_0\|^2 - p\|Q_1\|^2 + \|Q_2\|^2 - p\|Q_3\|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|Q_{(e),1}\|^2 + \|Q_{(e),2}\|^2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

eşitliği ile tanımlanır (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.4. Eliptik kuaterniyon matrisler üzerinde tanımlanan norm fonksiyonu için $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall Q, R \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere

$$1. \|\alpha Q\|_F = |\alpha| \|Q\|_F,$$

$$2. \|Q + R\|_F \leq \|Q\|_F + \|R\|_F,$$

$$3. \|Q\|_F \geq 0,$$

$$4. \|Q\|_F = 0 \Leftrightarrow Q = (0)_{m \times n}$$

özellikleri sağlanır (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.5. $Q = Q_{(e),1} \mathbf{e}_1 + Q_{(e),2} \mathbf{e}_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. Q matrisinin Frobenius normu ile $\phi(Q)$ matrisinin Frobenius normu arasındaki bağıntı

$$\|Q\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi(Q)\|_F \quad (2.41)$$

eşitliği ile verilir (Pekyaman, 2021).

2.2.2.1. $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü

Bu bölümde

$$UX = Y$$

eliptik kuaterniyon matris denklemi için

$$\|UX - Y\|_F = \min.$$

olacak şekilde eliptik kuaterniyonik en küçük kareler çözümü, eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik matris temsili yardımıyla elde edilecektir. Burada $U \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve $X \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ dir.

Teorem 2.2.2.1.1. $U \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve $X \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ olmak üzere $UX = Y$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü X olur ancak ve ancak

$$\phi(U)Z = \phi(Y) \quad (2.42)$$

eliptik denkleminin eliptik en küçük kareler çözümü ise $Z = \phi(X)$ dir (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.1.2. $U \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ olsun. $UX = Y$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü

$$X = \left(U_{(e),1} \right)^{-} Y_{(e),1} \mathbf{e}_1 + \left(U_{(e),2} \right)^{-} Y_{(e),2} \mathbf{e}_2$$

dir (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.1.3. $U \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve X pür imajiner eliptik kuaterniyon matrisi için $UX = Y$ denkleminin pür imajiner en küçük kareler çözümü $X = X_{(e),1} \mathbf{e}_1 + X_{(e),2} \mathbf{e}_2$ olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \end{bmatrix} = (\bar{U})^{-} \vec{Y}$$

olur. Burada

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(U_{(e),1}) & p \operatorname{Im}(U_{(e),1}) & 0 \\ -\operatorname{Re}(U_{(e),2}) & 0 & p \operatorname{Im}(U_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(U_{(e),1}) & \sqrt{-p} \operatorname{Re}(U_{(e),1}) & 0 \\ -\sqrt{-p} \operatorname{Im}(U_{(e),2}) & 0 & \operatorname{Re}(U_{(e),2}) \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(Y_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(Y_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(Y_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(Y_{(e),2}) \end{bmatrix}$$

(Pekyaman, 2021).

Teorem 2.2.2.1.4. $U \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve X pür reel eliptik kuaterniyon matrisi için

$UX = Y$ nin pür reel en küçük kareler çözümü X olmak üzere

$$X = (\bar{U})^{-} \vec{Y}$$

eşitliği ile bulunur. Burada

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(U_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(U_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(U_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(U_{(e),2}) \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(Y_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(Y_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(Y_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(Y_{(e),2}) \end{bmatrix}$$

dır (Pekyaman, 2021).

Şimdi Teorem 2.2.2.1.2, 2.2.2.1.3 ve 2.2.2.1.4 baz alınarak eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümünü veren sayısal algoritmalar verilecektir (Pekyaman, 2021).

Algoritma 2.1.

- (1) Başla
- (2) Giriş U, Y ve p .
- (3) Hesapla $U_{(e),1}, U_{(e),2}, Y_{(e),1}$ ve $Y_{(e),2}$.

(4) Hesapla $X = \left(U_{(e),1} \right)^{-} Y_{(e),1} \mathbf{e}_1 + \left(U_{(e),2} \right)^{-} Y_{(e),2} \mathbf{e}_2$.

(5) Yaz X .

(6) Dur.

Algoritma 2.2.

(1) Başla

(2) Giriş U, Y ve p .

(3) Hesapla $X = \begin{bmatrix} \text{Re}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),2}) \end{bmatrix} = (\vec{U})^{-} \vec{Y}$.

(4) Hesapla $X = \left(\text{Re}(X_{(e),1}) + i \text{Im}(X_{(e),1}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(-\text{Re}(X_{(e),1}) + i \text{Im}(X_{(e),2}) \right) \mathbf{e}_2$.

(5) Yaz X .

(6) Dur.

Algoritma 2.3.

(1) Başla

(2) Giriş U, Y ve p .

(3) Hesapla $X_{(E)} = (\vec{U})^{-} \vec{Y}$

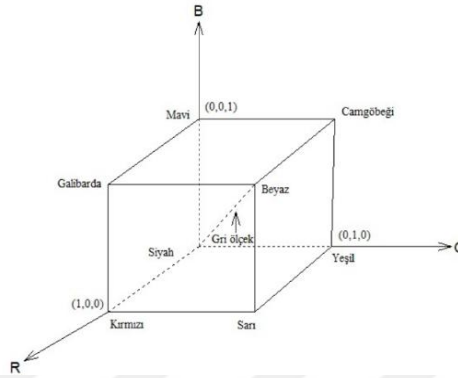
(4) Yaz X .

(5) Dur.

2.2.2.2. Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler yöntemi ile renkli görüntü iyileştirme

Görüntü elde etme araçlarının çoğalmasıyla birlikte, insan okuması, iletim, saklama, makine öğrenmesi gibi amaçlar doğrultusunda ortaya çıkan görüntülerin işlenmesi ve iyileştirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Görüntü onarımı, bozulmuş veya hasar görmüş görüntüyü orijinal haline getirme işlemidir ve görüntü işlemenin ilk adımını oluşturur. Görüntü bozulmalarını simüle etmek için görüntülere gürültüler eklenir. Görüntü iyileştirme ise, görüntünün kontrastı, parlaklığı, histogram eşleştirmesi gibi ayarların yapılmasıyla görüntünün zenginleştirilmesi işlemidir.

Renkli monitörler ve renkli video kameralar gibi donanımlar için yaygın olarak kullanılan renk uzayları, *RGB* (kırmızı, yeşil, mavi) modeli, renkli baskılar için *CMY* (camgöbeği, galibarda, sarı) veya *CMYK* (camgöbeği, galibarda, sarı, siyah) modeli ve insanların renkleri tarif etme ve yorumlama şekillerine daha yakın olan *HSI* (renk tonu, doygunluk, yeğlilik) modeli gibi seçenekleri içerir. Bu çalışmada, internet, renkli monitörler ve video kayıt cihazları gibi önemli ve yaygın olarak kullanılan ortamlarda *RGB* renk uzayının tercih edilmesi nedeniyle renk uzayı olarak *RGB* renk uzayı kullanılmıştır.



Şekil 2.1. *RGB* uzayı.

Ayrıca bu çalışmanın görüntü işlemede uygulaması olarak $g = Kf + n$ matris-vektör denklemini ele almıştır. Bu denklemde g gözlenen görüntü, f ideal görüntü, n ilave gürültü ve K bulanma olayını temsil eden matristir. Bu çalışmada $\|n\|_F = \|Kf - g\|_F$ eşitliğini en küçük yapan f ideal görüntüsü aranmıştır.

Renkli bir görüntü, kırmızı, yeşil ve mavi tonlarını ifade eden matrisler olarak da düşünülebilir. Bu durumda, doğal renkli 2 boyutlu bir *RGB* görüntü, her bir boyutunda üç matrisin birleşiminden oluşur ve

$$\{I(R, G, B) \mid R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

şeklinde ifade edilir. Matrislerin her biri elemanlarıyla beraber değerler alır ve bu değerler 0 ve 1 arasında yer alır.

Eliptik kuaterniyonlar, bir reel ve üç imajiner bileşene sahiptir. Renkli bir görüntü ise *RGB* uzayında her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç temel renk bileşenini içerdiği önceden belirtilmiştir. Bu bilgiler ışığında, bir renkli görüntünün her bir pikseli bir pür eliptik kuaterniyon ile ifade edilebilir. Bu gösterime göre, renkli

görüntülerde her bir pikselin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenleri pür imajiner eliptik kuaterniyonun i, j ve k bileşenleriyle ilişkilendirilir. Bu nedenle, $m \times n$ çözünürlüğe sahip bir renkli görüntü

$$Q = Ri + Gj + Bk \quad (2.43)$$

şeklinde bir eliptik kuaterniyon matrisi olarak ifade edilebilir. Burada matrisleri $R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, renkli görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşen matrislerini temsil eder. Diğer taraftan bir renkli görüntü için

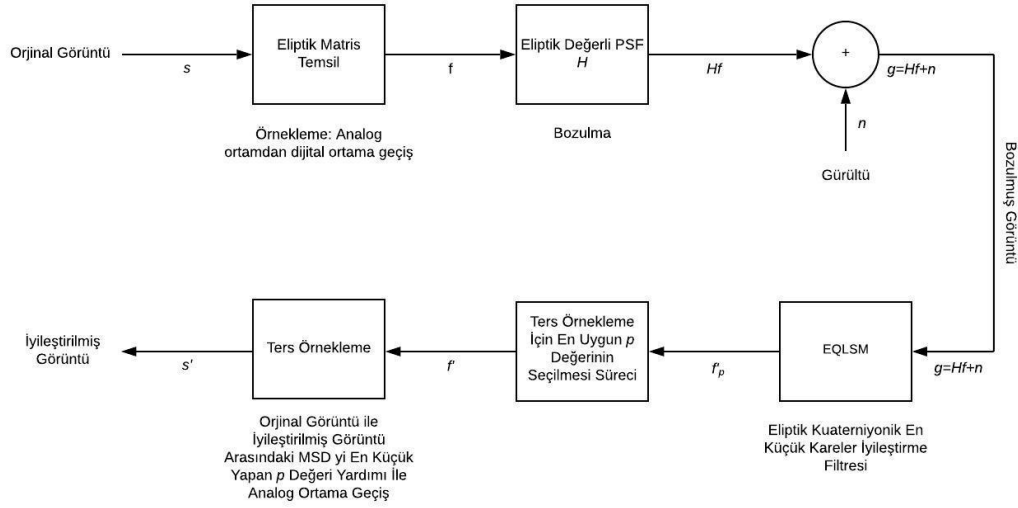
$$Luma = 0.2126R + 0.7152G + 0.0722B \quad (2.44)$$

değeri göz önüne alındığında bir renkli görüntü

$$Q = L + Ri + Gj + Bk \quad (2.45)$$

matris denklemi ile temsil edilir (Grigoryan, Aghaian, 2018; Luma, 2023).

Şimdi, ELSI (Elliptic Linear Shift Invariant) bozulma modeli olarak adlandırılan eliptik kuaterniyonlara dayanan yeni bir görüntü iyileştirme modeli sunulacaktır. Bu bağlamda, eliptik kuaterniyon cebri kullanılarak örneklenmiş ve eliptik değerli PSF (Point Spread Function) filtresinden geçirilmiş renkli bir görüntüye c/d/c model tabanlı EQLSM (Elliptic Quaternionic Least Squares Method) iyileştirme filtresi uygulanacaktır. Daha sonra, giriş görüntüsü ile iyileştirilen çıkış görüntüsü arasındaki uçtan uca ortalama kare hata (Mean Squared Difference- MSD) değerini minimize edecek en uygun uzay seçilerek, iyileştirilmiş görüntü dijital ortamdan analog ortama aktarılacaktır. Bunu süreci anlatan ELSI modelinin diyagramı aşağıdaki diyagramda ifade edilmiştir.



Şekil 2.2. ELSI görüntü iyileştirme modeli.

ELSI iyileştirme modelinde kullanılacak olan giriş görüntüleri Şekil 2.3'te verilmiştir. Bu giriş görüntülerini temsil etmek için f matrisini kullanalım. Bu durumda, giriş görüntülerinin eliptik kuaterniyon temsili $I = Ri + Gj + Bk$ şeklindedir. Burada, R, G, B matrisleri görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerini ifade etmektedir. $len = 15, theta = 30^\circ$ için 2-boyutlu $fspecial('motion', len, theta)$ filtresi kullanarak R matrisinin bozulmuş hali R' olsun ve $K = R'R^-$ sağlansın. G ve B matrislerinin bozulmuş hallerini sırasıyla G' ve B' olarak belirtelim. Bu durumda, $G' = KG$ ve $B' = KB$ elde edilir. Bu aşamada, I görüntüsünden bozulmuş $I' = R'i + G'j + B'k$ görüntüsünü elde etmiş oluruz. Bu elde edilen görüntüyü Şekil 2.4'te ile gösterelim.



Şekil 2.3. Orijinal görüntüler.



Şekil 2.4. Bozulmuş görüntüler.

Bunun bir sonucu olarak $KI = I'$ eşitliği ile eliptik kuaterniyonik en küçük kareler metoduna ulaşılmış oluruz. Bu method ve Algoritma 2.2'ye göre $KI = I'$ eliptik kuaterniyon matris denkleminde

$$K = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-p}K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad I' = \begin{bmatrix} G' \\ -G' \\ \sqrt{-p}(R' + B') \\ \sqrt{-p}(R' - B') \end{bmatrix}$$

olur. O halde $I = ((e_1 + e_2)\mathbf{i}_n \quad (e_1 - e_2)\mathbf{i}_n \quad (e_1 - e_2)\mathbf{i}_n) \begin{pmatrix} K \end{pmatrix}^{-1} I'$ matrisi $KI = I'$ matris denkleminin en küçük kareler çözümü olur. Ayrıca $p = -1$ için iyileştirilmiş çıkış görüntüleri de Şekil 2.5'te ifade edilmiştir.



Şekil 2.5. İyileştirilmiş çıkış görüntüleri.

Sonuç olarak eliptik kuaterniyon matris ile örneklenmiş renkli görüntülerin iyileştirme süreçlerinde üzerinde uygulanan eliptik kuaterniyonik en küçük kareler algoritmasının zaman ve bellek karmaşasının çok düşük olması, bozulmuş görüntü üzerindeki veri kayıplarını ve bozulmaları azaltma veya tamamen yok etme sürecinde yüksek başarı

göstermesi, gerçek zamanlı gömülü sistemler üzerinde dijital görüntü işlemeyi kullanılabilecek duruma getirir (örneğin bir hava savunma sisteminin hedefleri tespit ve takip etme yazılımı gibi). Ayrıca bu çalışma ile birlikte günümüzdeki ve gelecekteki yüksek performanslı dijital görüntüleme sistemlerinin performans problemine çözüm üretecektir (Pekyaman, 2022).



3. KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYONLAR

Tezin orijinal kısmının başlangıcı olan bu bölümde, komütatif eliptik oktonyonlar cümlesi tanımlanmıştır ve bu cümlelerin cebirsel özellikleri verilmiştir. Ayrıca komütatif eliptik oktonyonlara karşılık gelen temel matrisler kullanılarak, bu cümle üzerinde tanımlı bazı lineer denklemlerin çözümleri elde edilmiştir. Komütatif eliptik oktonyon matrisler tanımının verilmesiyle birlikte daha önce incelenmiş olan eliptik kuaterniyon matris uzayının özelliklerinin komütatif eliptik oktonyon matris uzayına aktarıldığı görülmüştür.

3.1. Komütatif Eliptik Oktonyonların Cebirsel Özellikleri

Komütatif eliptik oktonyonların cümlesi

$$\mathbb{CO}_p = \{a = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7 \mid a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq 7\}$$

ile gösterilir. Burada $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7\}$ cümlesi, $\mathbb{CO}_p$ cümlesinin bazı olur.

$0 < (\mathbf{e}_1)^2 = p \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{e}^2 = 1$ olmak üzere bazlar arasındaki bağıntı ise

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{1}, \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}, \mathbf{e}_5 = \mathbf{ie} = \mathbf{ei}, \mathbf{e}_6 = \mathbf{je} = \mathbf{ej}, \mathbf{e}_7 = \mathbf{ke} = \mathbf{ek}, \\ (\mathbf{e}_0)^2 &= \mathbf{1}, (\mathbf{e}_1)^2 = p, (\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{1}, (\mathbf{e}_3)^2 = p, (\mathbf{e}_4)^2 = \mathbf{1}, (\mathbf{e}_5)^2 = p, (\mathbf{e}_6)^2 = \mathbf{1}, (\mathbf{e}_7)^2 = p \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitlikleri ile verilir. Ayrıca (3.1) eşitlikleri göz önüne alınırsa komütatif eliptik oktonyon bazları arasındaki çarpma işlemi aşağıdaki tabloda verilir:

Tablo 3.1. Komütatif eliptik oktonyon bazları arasındaki çarpım tablosu.

$\times$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$p\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$p\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$p\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_7$	$p\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$p\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$p\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_7$	$p\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$p\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$p\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_7$	$p\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_1$	$p\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$p\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$p\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$p\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$	$p\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$p\mathbf{e}_0$

Bu tablodan görüldüğü üzere $\mathbb{C}\mathbb{O}_p$ cümlesinin çarpma işlemine göre değişme özelliğini sağladığı görülür.

Bir komütatif eliptik oktonyon a olmak üzere

$$\begin{aligned}
 a &= a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7 \\
 &= a' + \mathbf{e}a'' \\
 &= a_{q(1)}\mathbf{d}_1 + a_{q(2)}\mathbf{d}_2
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitlikleri ile üç farklı şekilde ifade edilir. Burada $a' = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$,

$a'' = a_4 + a_5\mathbf{i} + a_6\mathbf{j} + a_7\mathbf{k} \in \mathbb{H}_p$ ve $a_{q(1)} = a' + a'' \in \mathbb{H}_p$, $a_{q(2)} = a' - a'' \in \mathbb{H}_p$, $\mathbf{d}_1 = \frac{1+\mathbf{e}}{2}$,

$\mathbf{d}_2 = \frac{1-\mathbf{e}}{2}$ ile tanımlanır. Böylece $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ bazları $\mathbb{C}\mathbb{O}_p$ cümlesinin idempotent

bazları olur. Yani $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ bazları için

$$(\mathbf{d}_1)^n = (\mathbf{d}_1)^{n-1} = \dots = (\mathbf{d}_1)^2 = \mathbf{d}_1,$$

$$(\mathbf{d}_2)^n = (\mathbf{d}_2)^{n-1} = \dots = (\mathbf{d}_2)^2 = \mathbf{d}_2$$

$$\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_1 = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

$a = \sum_{i=0}^7 a_i \mathbf{e}_i$, $b = \sum_{i=0}^7 b_i \mathbf{e}_i$ komütatif eliptik oktonyonlarını ve λ reel sayısını alalım. O

halde $\mathbb{CO}_p$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') + \mathbf{e}(\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') \\ &= \left(a_{q(1)} + b_{q(1)} \right) \mathbf{d}_1 + \left(a_{q(2)} + b_{q(2)} \right) \mathbf{d}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_0 b_0 + p a_1 b_1 + a_2 b_2 + p a_3 b_3 + a_4 b_4 + p a_5 b_5 + a_6 b_6 + p a_7 b_7) \mathbf{e}_0 \\ &\quad + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_5 + a_5 b_4 + a_6 b_7 + a_7 b_6) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (a_0 b_2 + p a_1 b_3 + a_2 b_0 + p a_3 b_1 + a_4 b_6 + p a_5 b_7 + a_6 b_4 + p a_7 b_5) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + a_4 b_7 + a_5 b_6 + a_6 b_5 + a_7 b_4) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_0 b_4 + p a_1 b_5 + a_2 b_6 + p a_3 b_7 + a_4 b_0 + p a_5 b_1 + a_6 b_2 + p a_7 b_3) \mathbf{e}_4 \\ &\quad + (a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_7 + a_3 b_6 + a_4 b_1 + a_5 b_0 + a_6 b_3 + a_7 b_2) \mathbf{e}_5 \\ &\quad + (a_0 b_6 + p a_1 b_7 + a_2 b_4 + p a_3 b_5 + a_4 b_2 + p a_5 b_3 + a_6 b_0 + p a_7 b_1) \mathbf{e}_6 \\ &\quad + (a_0 b_7 + a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 + a_6 b_1 + a_7 b_0) \mathbf{e}_7 \\ &= (\mathbf{a}' \mathbf{b}' + \mathbf{a}'' \mathbf{b}'') + \mathbf{e}(\mathbf{a}' \mathbf{b}'' + \mathbf{b}' \mathbf{a}'') \\ &= \left(a_{q(1)} b_{q(1)} \right) \mathbf{d}_1 + \left(a_{q(2)} b_{q(2)} \right) \mathbf{d}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda a &= (\lambda a_0) \mathbf{e}_0 + (\lambda a_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda a_2) \mathbf{e}_2 + (\lambda a_3) \mathbf{e}_3 + (\lambda a_4) \mathbf{e}_4 + (\lambda a_5) \mathbf{e}_5 + (\lambda a_6) \mathbf{e}_6 + (\lambda a_7) \mathbf{e}_7 \\ &= (\lambda \mathbf{a}') + \mathbf{e}(\lambda \mathbf{a}'') \\ &= \left(\lambda a_{q(1)} \right) \mathbf{d}_1 + \left(\lambda a_{q(2)} \right) \mathbf{d}_2 \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

(3.2) eşitliği göz önüne alınırsa bir a komütatif eliptik oktonyonu için

$$\begin{aligned}
a^{o_1} &= \overline{{}^1(a')} + e \overline{{}^1(a'')} = \overline{{}^1(a_{q(1)})} d_1 + \overline{{}^1(a_{q(2)})} d_2, \\
a^{o_2} &= \overline{{}^2(a')} + e \overline{{}^2(a'')} = \overline{{}^2(a_{q(1)})} d_1 + \overline{{}^2(a_{q(2)})} d_2, \\
a^{o_3} &= \overline{{}^3(a')} + e \overline{{}^3(a'')} = \overline{{}^3(a_{q(1)})} d_1 + \overline{{}^3(a_{q(2)})} d_2, \\
a^{o_4} &= a' - ea'' = a_{q(2)} d_1 + a_{q(1)} d_2, \\
a^{o_5} &= \overline{{}^1(a')} - e \overline{{}^1(a'')} = \overline{{}^1(a_{q(2)})} d_1 + \overline{{}^1(a_{q(1)})} d_2, \\
a^{o_6} &= \overline{{}^2(a')} - e \overline{{}^2(a'')} = \overline{{}^2(a_{q(2)})} d_1 + \overline{{}^2(a_{q(1)})} d_2, \\
a^{o_7} &= \overline{{}^3(a')} - e \overline{{}^3(a'')} = \overline{{}^3(a_{q(2)})} d_1 + \overline{{}^3(a_{q(1)})} d_2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlı yedi eşlenik mevcuttur. Buradaki " $s -$ " ($1 \leq s \leq 3$) ifadesi (2.2) eşitliğinde verilen eliptik kuaterniyonik eşleniklere karşılık gelir.

$a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ komütatif eliptik oktonyonun normu

$$\begin{aligned}
\|a\|^8 &= a \times a^{o_1} \times a^{o_2} \times a^{o_3} \times a^{o_4} \times a^{o_5} \times a^{o_6} \times a^{o_7} \\
&= \left[(a_0 + a_2 - a_4 - a_6)^2 - p(a_1 + a_3 - a_5 - a_7)^2 \right] \\
&\times \left[(a_0 - a_2 + a_4 - a_6)^2 - p(a_1 - a_3 + a_5 - a_7)^2 \right] \\
&\times \left[(a_0 - a_2 - a_4 + a_6)^2 - p(a_1 - a_3 - a_5 + a_7)^2 \right] \\
&\times \left[(a_0 - a_2 - a_4 + a_6)^2 - p(a_1 - a_3 - a_5 + a_7)^2 \right] \\
&\times \left[(a_0 + a_2 + a_4 + a_6)^2 - p(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)^2 \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ile tanımlanır.

$a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ ve $\|a\| \neq 0$ olmak üzere

$$a^{-1} = \frac{a^{o_1} \times a^{o_2} \times a^{o_3} \times a^{o_4} \times a^{o_5} \times a^{o_6} \times a^{o_7}}{\|a\|^8}$$

eşitliği ile tanımlanan a^{-1} ifadesine a komütatif eliptik oktonyonunun çarpma işlemine göre tersi denir.

3.1.1. Komütatif eliptik oktonyonların temel matrisleri

$a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ komütatif eliptik oktonyonu için $\varphi_a(x) = a \times x$ biçiminde

$\varphi_a : \mathbb{C}\mathbb{O}_p \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{O}_p$ dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bir lineer dönüşümdür. φ

lineer dönüşümü ve $\{e_i\}$ ($0 \leq i \leq 7$) bazı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
 \varphi_a(e_0) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_0 \\
 &= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7, \\
 \varphi_a(e_1) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_1 \\
 &= pa_1 e_0 + a_0 e_1 + pa_3 e_2 + a_2 e_3 + pa_5 e_4 + a_4 e_5 + pa_7 e_6 + a_6 e_7, \\
 \varphi_a(e_2) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_2 \\
 &= a_2 e_0 + a_3 e_1 + a_0 e_2 + a_1 e_3 + a_6 e_4 + a_7 e_5 + a_4 e_6 + a_5 e_7, \\
 \varphi_a(e_3) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_3 \\
 &= pa_3 e_0 + a_2 e_1 + pa_1 e_2 + a_0 e_3 + pa_7 e_4 + a_6 e_5 + pa_5 e_6 + a_4 e_7, \\
 \varphi_a(e_4) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_4 \\
 &= a_4 e_0 + a_5 e_1 + a_6 e_2 + a_7 e_3 + a_0 e_4 + a_1 e_5 + a_2 e_6 + a_3 e_7, \\
 \varphi_a(e_5) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_5 \\
 &= pa_5 e_0 + a_4 e_1 + pa_7 e_2 + a_6 e_3 + pa_1 e_4 + a_0 e_5 + pa_3 e_6 + a_2 e_7, \\
 \varphi_a(e_6) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_6 \\
 &= a_6 e_0 + a_7 e_1 + a_4 e_2 + a_5 e_3 + a_2 e_4 + a_3 e_5 + a_0 e_6 + a_1 e_7, \\
 \varphi_a(e_7) &= (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \times e_7 \\
 &= pa_7 e_0 + a_6 e_1 + pa_5 e_2 + a_4 e_3 + pa_3 e_4 + a_2 e_5 + pa_1 e_6 + a_0 e_7
 \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. φ lineer dönüşümünün $\{e_i\}$ ($0 \leq i \leq 7$) bazına karşılık gelen matrisi

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} a_0 & pa_1 & a_2 & pa_3 & a_4 & pa_5 & a_6 & pa_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 & a_5 & a_4 & a_7 & a_6 \\ a_2 & pa_3 & a_0 & pa_1 & a_6 & pa_7 & a_4 & pa_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ a_4 & pa_5 & a_6 & pa_7 & a_0 & pa_1 & a_2 & pa_3 \\ a_5 & a_4 & a_7 & a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_6 & pa_7 & a_4 & pa_5 & a_2 & pa_3 & a_0 & pa_1 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ile tanımlanır. $\varphi(a)$ matrise ise özel olarak $a \in \mathbb{C}\mathbb{O}_p$ komütatif eliptik oktonyonunun

reel temel matrisi denir.

Ayrıca $\mathbb{CO}_p$ komütatif eliptik oktonyon cümlesi ile $\mathbb{R}^{8 \times 1}$ matris cümlesi arasında bir cebir izomorfizması tanımlanabilir. Bu izomorfizma

$$\psi: \mathbb{CO}_p \rightarrow \mathbb{R}^{8 \times 1}$$

$$a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i \rightarrow \psi(a) = \psi\left(\sum_{i=0}^7 a_i e_i\right) = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7]^T$$

dönüşümü ile verilir. Bu dönüşüm göz önüne alınırsa a komütatif eliptik oktonyonu için

$$a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \cong \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \vec{a}_\psi \quad (3.6)$$

eşitliği yazılır.

Sonuç olarak iki komütatif eliptik oktonyon $a = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ ve $b = \sum_{i=0}^7 b_i e_i$ olmak üzere, a

ve b arasındaki çarpma işlemi

$$a \times b \equiv \begin{bmatrix} a_0 & pa_1 & a_2 & pa_3 & a_4 & pa_5 & a_6 & pa_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 & a_5 & a_4 & a_7 & a_6 \\ a_2 & pa_3 & a_0 & pa_1 & a_6 & pa_7 & a_4 & pa_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ a_4 & pa_5 & a_6 & pa_7 & a_0 & pa_1 & a_2 & pa_3 \\ a_5 & a_4 & a_7 & a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_6 & pa_7 & a_4 & pa_5 & a_2 & pa_3 & a_0 & pa_1 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} = \varphi(a) \vec{b}_\psi \quad (3.7)$$

eşitliği ile tanımlanır.

φ lineer dönüşümü için

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) \varphi(b)$$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$\mathbf{e}_i$ bazlarına karşılık gelen $\varphi(\mathbf{e}_i)$ ($0 \leq i \leq 7$) dönüşüm matrisleri

$$\varphi(\mathbf{e}_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_6; \quad \varphi(\mathbf{e}_7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_7$$

olmak üzere

$$E_1E_1 = pE_0, E_2E_2 = E_0, E_3E_3 = pE_0, E_4E_4 = E_0, E_5E_5 = pE_0, E_6E_6 = E_0, E_7E_7 = pE_0,$$

$$\begin{aligned} E_1E_2 &= E_2E_1 = E_3, & E_2E_3 &= E_3E_2 = E_1, & E_3E_4 &= E_4E_3 = E_7, & E_3E_4 &= E_4E_3 = E_7, \\ E_1E_3 &= E_3E_1 = pE_2, & E_2E_4 &= E_4E_2 = E_6, & E_3E_5 &= E_5E_3 = pE_6, & E_3E_4 &= E_4E_3 = E_7, \\ E_1E_4 &= E_4E_1 = E_5, & E_2E_5 &= E_5E_2 = E_7, & E_3E_6 &= E_6E_3 = E_5, & E_3E_4 &= E_4E_3 = E_7, \\ E_1E_5 &= E_5E_1 = pE_4, & E_2E_6 &= E_6E_2 = E_4, & E_3E_7 &= E_7E_3 = pE_4, \\ E_1E_6 &= E_6E_1 = E_7, & E_2E_7 &= E_7E_2 = E_5, \\ E_1E_7 &= E_7E_1 = pE_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4E_5 &= E_5E_4 = E_1, & E_5E_6 &= E_6E_5 = E_3, & E_6E_7 &= E_7E_6 = E_1 \\ E_4E_6 &= E_6E_4 = E_7, & E_5E_7 &= E_7E_5 = pE_2, \\ E_4E_7 &= E_7E_4 = E_3, \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler göz önüne alınırsa E_i matrisleri ile e_i ($0 \leq i \leq 7$) bazlarının birbirlerine izomorf olduğu görülür.

Teorem 3.1.1.1. $a, b \in \mathbb{C}\mathbb{O}_p$ olmak üzere φ temel matrisi için

1. $\varphi(a \times b) = \varphi(a)\varphi(b),$
 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$
2. $\varphi(\varphi(a)\bar{b}_\psi) = \varphi(a)\varphi(b),$
3. $a = b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b),$
4. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a), \lambda \in \mathbb{R},$
5. $iz(\varphi(a)) = a + a^{\alpha_1} + a^{\alpha_2} + a^{\alpha_3} + a^{\alpha_4} + a^{\alpha_5} + a^{\alpha_6} + a^{\alpha_7}$
6. $\|a\|^8 = |\det(\varphi(a))|.$

özellikleri mevcuttur.

İspat: Teoremin ispatı eşitlik (3.5) kullanılarak kolayca görülür.

3.2. Komütatif Eliptik Oktonyon Değerli Matrisler ve Denklem Çözümleri

Elemanları komütatif eliptik oktonyon olan $m \times n$ boyutundaki matrislerin cümlesi $\mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ile gösterilir. $m \times n$ boyutundaki komütatif eliptik oktonyon matrisi A olmak üzere aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \mathbf{e}_0 + A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4 + A_5 \mathbf{e}_5 + A_6 \mathbf{e}_6 + A_7 \mathbf{e}_7 \\ &= A' + \mathbf{e}A'' \\ &= A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada $A' = A_0 + A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $A'' = A_4 + A_5 \mathbf{i} + A_6 \mathbf{j} + A_7 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ve

$$A_{q(1)} = A' + A'' \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, \quad A_{q(2)} = A' - A'' \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, \quad \mathbf{d}_1 = \frac{1 + \mathbf{e}}{2}, \quad \mathbf{d}_2 = \frac{1 - \mathbf{e}}{2} \text{ dir.}$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ matrisleri ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p), \\ \lambda A &= \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p), \\ AC &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} \right) \in \mathbb{U}_{m \times l}(\mathbb{CO}_p) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ komütatif eliptik oktonyon matrisi için eşlenik, transpoz ve eşlenik transpoz tanımları sırasıyla ($1 \leq s \leq 7$)

$$\begin{aligned} A^{o_s} &= (a_{ij})^{o_s} \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p), \\ A^T &= (a_{ji}) \in \mathbb{U}_{n \times m}(\mathbb{CO}_p), \\ A^{*o_s} &= (A^{o_s})^T \in \mathbb{U}_{n \times m}(\mathbb{CO}_p) \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $AXA = A$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^- ile gösterilir.

Teorem 3.2.1. A ve B matrisleri uygun boyutlarda komütatif eliptik oktonyon matrisler olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$1. \quad (A^{o_s})^T = (A^T)^{o_s} \quad (1 \leq s \leq 7),$$

2. $(AB)^{*_{o_s}} = B^{*_{o_s}} A^{*_{o_s}} \quad (1 \leq s \leq 7),$
3. $(AB)^T = B^T A^T,$
4. $(AB)^{o_s} = A^{o_s} B^{o_s} \quad (1 \leq s \leq 7),$
5. A^{-1} ve B^{-1} mevcut ise $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$
6. A^{-1} mevcut ise $(A^{*_{o_s}})^{-1} = (A^{-1})^{*_{o_s}} \quad (1 \leq s \leq 7),$
7. $(A^{o_s})^{-1} = (A^{-1})^{o_s} \quad (1 \leq s \leq 7),$
8. $(A^{o_i})^{o_j} = \begin{cases} A^{o_k}, & i \neq j \neq k \\ A, & i = j \end{cases} \quad (1 \leq i, j, k \leq 7),$

İspat. 1, 2, 3, 5, 6, 7 ve 8 eşitlikleri cebirsel işlemler ve verilen tanımlar ile kolaylıkla görülür. Burada 4. önermenin doğru olduğu gösterilecektir.

$A = A_1 + \mathbf{e}A_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $B = B_1 + \mathbf{e}B_2 \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ matrislerini alalım. Burada A_1, A_2, B_1 ve B_2 eliptik kuaterniyon matrislerdir. $s=1$ durumu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 (AB)^{o_1} &= [(A_1 + \mathbf{e}A_2)(B_1 + \mathbf{e}B_2)]^{o_1} \\
 &= [(A_1B_1) + (A_2B_2) + \mathbf{e}[(A_1B_2) + (A_2B_1)]]^{o_1} \\
 &= [(A_1B_1 + A_2B_2) + \mathbf{e}(A_2B_1 + A_1B_2)]^{o_1} \\
 &= \overline{{}^1A_1B_1 + A_2B_2} + \mathbf{e} \overline{{}^1A_2B_1 + A_1B_2} \\
 &= \left(\overline{{}^1A_1} \overline{{}^1B_1} + \overline{{}^1A_2} \overline{{}^1B_2} \right) + \mathbf{e} \left(\overline{{}^1A_2} \overline{{}^1B_1} + \overline{{}^1A_1} \overline{{}^1B_2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^{o_1} B^{o_1} &= (A_1 + \mathbf{e}A_2)^{o_1} (B_1 + \mathbf{e}B_2)^{o_1} \\
 &= \left(\overline{{}^1A_1} + \mathbf{e} \overline{{}^1A_2} \right) \left(\overline{{}^1B_1} + \mathbf{e} \overline{{}^1B_2} \right) \\
 &= \left(\overline{{}^1A_1} \overline{{}^1B_1} + \overline{{}^1A_2} \overline{{}^1B_2} \right) + \mathbf{e} \left(\overline{{}^1A_2} \overline{{}^1B_1} + \overline{{}^1A_1} \overline{{}^1B_2} \right)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Yukarıdaki eşitliklerin sağ tarafları aynı olduğundan $(AB)^{o_1} = A^{o_1} B^{o_1}$ eşitliği sağlanır. Diğer eşleniklerin ispatı da benzer adımlar takip edilerek kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.2. $A, B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. Eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ eşitliği sağlanır.

İspat: $A = A_1 + \mathbf{e}A_2 \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $B = B_1 + \mathbf{e}B_2 \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ matrislerini alalım.

Kabul edelim ki $AB = I_n$ eşitliği sağlansın. Buradan

$$AB = (A_1B_1 + A_2B_2) + \mathbf{e}(A_1B_2 + A_2B_1) = I_n$$

denklemini yazılır. Bu denklemden

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

matris denklemini bulunur.

$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ matrisleri eliptik kuaterniyon değerli matrisler olduğundan

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$B_1A_1 + B_2A_2 = I_n, \quad B_1A_2 + B_2A_1 = 0$$

$$(B_1A_1 + B_2A_2) + \mathbf{e}(B_1A_2 + B_2A_1) = I_n$$

olduğundan $BA = I_n$ eşitliği elde edilir.

3.2.1. Komütatif eliptik oktonyon matrislerin reel temsilleri

$$A = A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 + A_4\mathbf{e}_4 + A_5\mathbf{e}_5 + A_6\mathbf{e}_6 + A_7\mathbf{e}_7 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$$

$(A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, 0 \leq i \leq 7)$ komütatif eliptik oktonyon matrisi için izomorfizması

$\phi_A^{o_s}(X) = AX^{o_s} \quad (1 \leq s \leq 7)$ şeklinde tanımlansın. ϕ^{o_s} izomorfizmasının $1 \leq s \leq 7$

değerleri için $\{\mathbf{e}_i\} \quad (1 \leq i \leq 7)$ tabanına karşılık gelen matrisleri

$$\phi_A^{o_1} = \begin{bmatrix} A_0 & -pA_1 & A_2 & -pA_3 & A_4 & -pA_5 & A_6 & -pA_7 \\ A_1 & -A_0 & A_3 & -A_2 & A_5 & -A_4 & A_7 & -A_6 \\ A_2 & -pA_3 & A_0 & -pA_1 & A_6 & -pA_7 & A_4 & -pA_5 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 & A_7 & -A_6 & A_5 & -A_4 \\ A_4 & -pA_5 & A_6 & -pA_7 & A_0 & -pA_1 & A_2 & -pA_3 \\ A_5 & -A_4 & A_7 & -A_6 & A_1 & -A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_6 & -pA_7 & A_4 & -pA_5 & A_2 & -pA_3 & A_0 & -pA_1 \\ A_7 & -A_6 & A_5 & -A_4 & A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_2} = \begin{bmatrix} A_0 & pA_1 & -A_2 & -pA_3 & A_4 & pA_5 & -A_6 & -pA_7 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & -A_2 & A_5 & A_4 & -A_7 & -A_6 \\ A_2 & pA_3 & -A_0 & -pA_1 & A_6 & pA_7 & -A_4 & -pA_5 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & -A_0 & A_7 & A_6 & -A_5 & -A_4 \\ A_4 & pA_5 & -A_6 & -pA_7 & A_0 & pA_1 & -A_2 & -pA_3 \\ A_5 & A_4 & -A_7 & -A_6 & A_1 & A_0 & -A_3 & -A_2 \\ A_6 & pA_7 & -A_4 & -pA_5 & A_2 & pA_3 & -A_0 & -pA_1 \\ A_7 & A_6 & -A_5 & -A_4 & A_3 & A_2 & -A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_3} = \begin{bmatrix} A_0 & -pA_1 & -A_2 & pA_3 & A_4 & -pA_5 & -A_6 & pA_7 \\ A_1 & -A_0 & -A_3 & A_2 & A_5 & -A_4 & -A_7 & A_6 \\ A_2 & -pA_3 & -A_0 & pA_1 & A_6 & -pA_7 & -A_4 & pA_5 \\ A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 & A_7 & -A_6 & -A_5 & A_4 \\ A_4 & -pA_5 & -A_6 & pA_7 & A_0 & -pA_1 & -A_2 & pA_3 \\ A_5 & -A_4 & -A_7 & A_6 & A_1 & -A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_6 & -pA_7 & -A_4 & pA_5 & A_2 & -pA_3 & -A_0 & pA_1 \\ A_7 & -A_6 & -A_5 & A_4 & A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_4} = \begin{bmatrix} A_0 & pA_1 & A_2 & pA_3 & -A_4 & -pA_5 & -A_6 & -pA_7 \\ A_1 & A_0 & A_3 & A_2 & -A_5 & -A_4 & -A_7 & -A_6 \\ A_2 & pA_3 & A_0 & pA_1 & -A_6 & -pA_7 & -A_4 & -pA_5 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & -A_7 & -A_6 & -A_5 & -A_4 \\ A_4 & pA_5 & A_6 & pA_7 & -A_0 & -pA_1 & -A_2 & -pA_3 \\ A_5 & A_4 & A_7 & A_6 & -A_1 & -A_0 & -A_3 & -A_2 \\ A_6 & pA_7 & A_4 & pA_5 & -A_2 & -pA_3 & -A_0 & -pA_1 \\ A_7 & A_6 & A_5 & A_4 & -A_3 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_5} = \begin{bmatrix} A_0 & -pA_1 & A_2 & -pA_3 & -A_4 & pA_5 & -A_6 & pA_7 \\ A_1 & -A_0 & A_3 & -A_2 & -A_5 & A_4 & -A_7 & A_6 \\ A_2 & -pA_3 & A_0 & -pA_1 & -A_6 & pA_7 & -A_4 & pA_5 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 & -A_7 & A_6 & -A_5 & A_4 \\ A_4 & -pA_5 & A_6 & -pA_7 & -A_0 & pA_1 & -A_2 & pA_3 \\ A_5 & -A_4 & A_7 & -A_6 & -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_6 & -pA_7 & A_4 & -pA_5 & -A_2 & pA_3 & -A_0 & pA_1 \\ A_7 & -A_6 & A_5 & -A_4 & -A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_6} = \begin{bmatrix} A_0 & pA_1 & -A_2 & -pA_3 & -A_4 & -pA_5 & A_6 & pA_7 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & -A_2 & -A_5 & -A_4 & A_7 & A_6 \\ A_2 & pA_3 & -A_0 & -pA_1 & -A_6 & -pA_7 & A_4 & pA_5 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & -A_0 & -A_7 & -A_6 & A_5 & A_4 \\ A_4 & pA_5 & -A_6 & -pA_7 & -A_0 & -pA_1 & A_2 & pA_3 \\ A_5 & A_4 & -A_7 & -A_6 & -A_1 & -A_0 & A_3 & A_2 \\ A_6 & pA_7 & -A_4 & -pA_5 & -A_2 & -pA_3 & A_0 & pA_1 \\ A_7 & A_6 & -A_5 & -A_4 & -A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

$$\phi_A^{o_7} = \begin{bmatrix} A_0 & -pA_1 & -A_2 & pA_3 & -A_4 & pA_5 & A_6 & -pA_7 \\ A_1 & -A_0 & -A_3 & A_2 & -A_5 & A_4 & A_7 & -A_6 \\ A_2 & -pA_3 & -A_0 & pA_1 & -A_6 & pA_7 & A_4 & -pA_5 \\ A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 & -A_7 & A_6 & A_5 & -A_4 \\ A_4 & -pA_5 & -A_6 & pA_7 & -A_0 & pA_1 & A_2 & -pA_3 \\ A_5 & -A_4 & -A_7 & A_6 & -A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_6 & -pA_7 & -A_4 & pA_5 & -A_2 & pA_3 & A_0 & -pA_1 \\ A_7 & -A_6 & -A_5 & A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.2.1.1. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere $\phi_A^{o_s}$ ($1 \leq s \leq 7$) matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $A, B \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ise $\phi_{A+B}^{o_s} = \phi_A^{o_s} + \phi_B^{o_s}$ dir.
2. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ için

$$\begin{aligned}
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(Q_n) &= -\phi_A^{o_1}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(R_n) &= \phi_A^{o_1}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(S_n) &= -\phi_A^{o_1}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(Q_n) &= \phi_A^{o_2}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(R_n) &= -\phi_A^{o_2}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(S_n) &= -\phi_A^{o_2}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(Q_n) &= -\phi_A^{o_3}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(R_n) &= -\phi_A^{o_3}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(S_n) &= \phi_A^{o_3}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(Q_n) &= \phi_A^{o_4}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(R_n) &= \phi_A^{o_4}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(S_n) &= \phi_A^{o_4}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(Q_n) &= -\phi_A^{o_5}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(R_n) &= \phi_A^{o_5}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(S_n) &= -\phi_A^{o_5}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(Q_n) &= \phi_A^{o_6}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(R_n) &= -\phi_A^{o_6}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(S_n) &= -\phi_A^{o_6}, \\
(Q_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(Q_n) &= -\phi_A^{o_7}, & (R_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(R_n) &= -\phi_A^{o_7}, & (S_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(S_n) &= \phi_A^{o_7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(T_n) &= \phi_A^{o_1}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(U_n) &= -\phi_A^{o_1}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(V_n) &= \phi_A^{o_1}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(T_n) &= \phi_A^{o_2}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(U_n) &= \phi_A^{o_2}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(V_n) &= -\phi_A^{o_2}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(T_n) &= \phi_A^{o_3}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(U_n) &= \phi_A^{o_3}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(V_n) &= -\phi_A^{o_3}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(T_n) &= -\phi_A^{o_4}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(U_n) &= -\phi_A^{o_4}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(V_n) &= -\phi_A^{o_4}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(T_n) &= -\phi_A^{o_5}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(U_n) &= \phi_A^{o_5}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(V_n) &= -\phi_A^{o_5}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(T_n) &= -\phi_A^{o_6}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(U_n) &= -\phi_A^{o_6}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(V_n) &= \phi_A^{o_6}, \\
(T_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(T_n) &= -\phi_A^{o_7}, & (U_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(U_n) &= \phi_A^{o_7}, & (V_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(V_n) &= \phi_A^{o_7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_1}(W_n) &= -\phi_A^{o_1}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_2}(W_n) &= -\phi_A^{o_2}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_3}(W_n) &= \phi_A^{o_3}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_4}(W_n) &= -\phi_A^{o_4}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_5}(W_n) &= \phi_A^{o_5}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_6}(W_n) &= \phi_A^{o_6}, \\
(W_m)^{-1} \phi_A^{o_7}(W_n) &= -\phi_A^{o_7},
\end{aligned}$$

ve

$$(P_m^{o_s})^{-1} \phi_A^{o_s}(P_n^{o_s}) = \phi_{A^{o_s}}^{o_s} \quad (1 \leq s \leq 7)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

3. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times r}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. A ve B arasındaki çarpma işleminin ϕ^{o_s} altındaki görüntüsü

$$\phi_{AB}^{o_s} = \phi_A^{o_s} (P_n^{o_s}) \phi_B^{o_s} = \phi_A^{o_s} \phi_{(B^{o_s})}^{o_s} (P_r^{o_s}) \quad (1 \leq s \leq 7)$$

eşitliği ile bulunur.

4. $A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere A^{-1} mevcuttur ancak ve ancak $(\phi_A^{o_s})^{-1}$ mevcuttur ve $(\phi_A^{o_s})^{-1} = (P_m^{o_s}) \phi_{A^{-1}}^{o_s} (P_m^{o_s})$ denklemi sağlanır.

İspat. 1 2, ve 3 özelliklerinin ispatları $\phi_A^{o_s}$ matris tanımı ve matrisler üzerindeki cebirsel işlemler kullanılarak kolaylıkla görülür. Şimdi 4 özelliğinin ispatını verelim.

$A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$ matrisi için A^{-1} mevcut olsun. O halde $AA^{-1} = I_{8m}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \phi_{AA^{-1}}^{o_s} &= \phi_A^{o_s} (P_m^{o_s}) \phi_{A^{-1}}^{o_s} = \phi_{I_{8m}}^{o_s}, \\ \phi_A^{o_s} (P_m^{o_s}) \phi_{A^{-1}}^{o_s} (P_m^{o_s}) &= \phi_{I_{8m}}^{o_s} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Yukarıdaki eşitliklerin sağ tarafları aynı olduğundan $(\phi_A^{o_s})^{-1}$ mevcuttur ve $(\phi_A^{o_s})^{-1} = (P_m^{o_s}) \phi_{A^{-1}}^{o_s} (P_m^{o_s})$ bulunur.

Şimdi

$$X - A(X^{o_s})B = C$$

Kalman Yakubovich s-eşlenik ve

$$A(X^{o_s}) - XB = C$$

Sylvesters s-eşlenik denklem çözümleri $s = 7$ değeri için incelenecektir.

i. $X - A(X^{o_7})B = C$ denkleminin çözümü üzerine

$$X - A(X^{o_7})B = C \quad (3.9)$$

denkleminin çözümü komütatif eliptik oktonyon matrislerinin reel gösterimleri yardımı ile yapılacaktır. Burada $A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ dır.

Ayrıca (3.9) denkleminin reel temsili

$$Y - (\phi_A^{o_7})Y(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7} \quad (3.10)$$

biçimindedir. (3.10) denklemi

$$\phi_X^{o_7} - (\phi_A^{o_7})(\phi_X^{o_7})(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7} \quad (3.11)$$

biçiminde de ifade edilir. Sonuç olarak (3.9) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (3.10) denkleminin çözümü $Y = \phi_X^{o_7}$ olur.

Teorem 3.2.1.2. $A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. O halde $Y - (\phi_A^{o_7})Y(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7}$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$ ise bu durumda $X - A(X^{o_7})B = C$ denkleminin çözümü de

$$X = \frac{1}{32 - 32p} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_m \\ \mathbf{e}_1 I_m \\ \mathbf{e}_2 I_m \\ \mathbf{e}_3 I_m \\ \mathbf{e}_4 I_m \\ \mathbf{e}_5 I_m \\ \mathbf{e}_6 I_m \\ \mathbf{e}_7 I_m \end{bmatrix}^T \left(Y - Q_m^{-1}(\phi_X^{o_7})Q_n - R_m^{-1}(\phi_X^{o_7})R_n \right. \\ \left. + S_m^{-1}(\phi_X^{o_7})S_n - T_m^{-1}(\phi_X^{o_7})T_n \right. \\ \left. + U_m^{-1}(\phi_X^{o_7})U_n + V_m^{-1}(\phi_X^{o_7})V_n - W_m^{-1}(\phi_X^{o_7})W_n \right) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_n \\ \mathbf{e}_1 I_n \\ -\mathbf{e}_2 I_n \\ -\mathbf{e}_3 I_n \\ -\mathbf{e}_4 I_n \\ -\mathbf{e}_5 I_n \\ \mathbf{e}_6 I_n \\ \mathbf{e}_7 I_n \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} & Y_{17} & Y_{18} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} & Y_{27} & Y_{28} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} & Y_{38} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} & Y_{47} & Y_{48} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} & Y_{57} & Y_{58} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} & Y_{67} & Y_{68} \\ Y_{71} & Y_{72} & Y_{73} & Y_{74} & Y_{75} & Y_{76} & Y_{77} & Y_{78} \\ Y_{81} & Y_{82} & Y_{83} & Y_{84} & Y_{85} & Y_{86} & Y_{87} & Y_{88} \end{bmatrix} \quad (Y_{uv} \in \mathbb{R}^{m \times n}, 1 \leq u, v \leq 8)$$

matrisi (3.10) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Y = \phi_X^{o_7}$ ve

$$\begin{aligned} Q_m^{-1}(\phi_X^{o_7})Q_n &= -\phi_X^{o_7}, & R_m^{-1}(\phi_X^{o_7})R_n &= -\phi_X^{o_7}, & S_m^{-1}(\phi_X^{o_7})S_n &= \phi_X^{o_7}, \\ T_m^{-1}(\phi_X^{o_7})T_n &= -\phi_X^{o_7}, & U_m^{-1}(\phi_X^{o_7})U_n &= \phi_X^{o_7}, & V_m^{-1}(\phi_X^{o_7})V_n &= \phi_X^{o_7}, \\ W_m^{-1}(\phi_X^{o_7})W_n &= -\phi_X^{o_7}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} -Q_m^{-1}YQ_n - \phi_A^{o_7}(-Q_m^{-1}YQ_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, & U_m^{-1}YU_n - \phi_A^{o_7}(U_m^{-1}YU_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, \\ R_m^{-1}YR_n - \phi_A^{o_7}(R_m^{-1}YR_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, & V_m^{-1}YV_n - \phi_A^{o_7}(V_m^{-1}YV_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, \\ S_m^{-1}YS_n - \phi_A^{o_7}(S_m^{-1}YS_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, & -W_m^{-1}YW_n - \phi_A^{o_7}(-W_m^{-1}YW_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, \\ -T_m^{-1}YT_n - \phi_A^{o_7}(-T_m^{-1}YT_n)\phi_B^{o_7} &= \phi_C^{o_7}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak Y matrisi (3.10) denkleminin bir çözümü ise (3.13) ifadeleri de (3.10) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -Q_m^{-1}(\phi_X^{o_7})Q_n - R_m^{-1}(\phi_X^{o_7})R_n + S_m^{-1}(\phi_X^{o_7})S_n - T_m^{-1}(\phi_X^{o_7})T \\ + U_m^{-1}(\phi_X^{o_7})U_n + V_m^{-1}(\phi_X^{o_7})V_n - W_m^{-1}(\phi_X^{o_7})W \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ifadesi de (3.10) denkleminin bir çözümüdür. En son ifade düzenlenir ise

$$Y' = \begin{pmatrix} X_0 & -pX_1 & -X_2 & pX_3 & -X_4 & pX_5 & X_6 & -pX_7 \\ X_1 & -X_0 & -X_3 & X_2 & -X_5 & X_4 & X_7 & -X_6 \\ X_2 & -pX_3 & -X_0 & pX_1 & -X_6 & pX_7 & X_4 & -pX_5 \\ X_3 & -X_2 & -X_1 & X_0 & -X_7 & X_6 & X_5 & -X_4 \\ X_4 & -pX_5 & -X_6 & pX_7 & -X_0 & pX_1 & X_2 & -pX_3 \\ X_5 & -X_4 & -X_7 & X_6 & -X_1 & X_0 & X_3 & -X_2 \\ X_6 & -pX_7 & -X_4 & pX_5 & -X_2 & pX_3 & X_0 & -pX_1 \\ X_7 & -X_6 & -X_5 & X_4 & -X_3 & X_2 & X_1 & -X_0 \end{pmatrix}$$

matrisi bulunur. Öyle ki buradan

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{8}(Y_{11} - Y_{22} - Y_{33} + Y_{44} - Y_{55} + Y_{66} + Y_{77} - Y_{88}), \\
X_1 &= \frac{1}{8}\left(-\frac{Y_{12}}{p} + Y_{21} + \frac{Y_{34}}{p} - Y_{43} + \frac{Y_{56}}{p} - Y_{65} - \frac{Y_{78}}{p} + Y_{87}\right), \\
X_2 &= \frac{1}{8}(-Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} - Y_{42} + Y_{57} - Y_{68} - Y_{75} + Y_{86}), \\
X_3 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{14}}{p} - Y_{23} - \frac{Y_{32}}{p} + Y_{41} - \frac{Y_{58}}{p} + Y_{67} + \frac{Y_{76}}{p} - Y_{85}\right), \\
X_4 &= \frac{1}{8}(-Y_{15} + Y_{26} + Y_{37} - Y_{48} + Y_{51} - Y_{62} - Y_{73} + Y_{84}), \\
X_5 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{16}}{p} - Y_{25} - \frac{Y_{38}}{p} + Y_{47} - \frac{Y_{52}}{p} + Y_{61} + \frac{Y_{74}}{p} - Y_{83}\right), \\
X_6 &= \frac{1}{8}(Y_{17} - Y_{28} - Y_{35} + Y_{46} - Y_{53} + Y_{64} + Y_{71} - Y_{82}), \\
X_7 &= \frac{1}{8}\left(-\frac{Y_{18}}{p} + Y_{27} + \frac{Y_{36}}{p} - Y_{45} + \frac{Y_{54}}{p} - Y_{63} - \frac{Y_{72}}{p} + Y_{81}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\phi_X^{o_7} = Y'$ olduğundan (3.9) denkleminin çözümü

$$X = X_0 e_0 + X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 + X_4 e_4 + X_5 e_5 + X_6 e_6 + X_7 e_7 = \frac{1}{4-4p} \begin{bmatrix} e_0 I_m \\ e_1 I_m \\ e_2 I_m \\ e_3 I_m \\ e_4 I_m \\ e_5 I_m \\ e_6 I_m \\ e_7 I_m \end{bmatrix} Y' \begin{bmatrix} e_0 I_n \\ e_1 I_n \\ -e_2 I_n \\ -e_3 I_n \\ -e_4 I_n \\ -e_5 I_n \\ e_6 I_n \\ e_7 I_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

biçiminde bulunur.

Algoritma 3.1.

- (1) Başla
- (2) Giriş A, B ve p $\left(A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p), B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p), C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)\right)$
- (3) Oluştur $P_t^{o_7}, Q_t, R_t, S_t, T_t, U_t, V_t, W_t, \quad t = m, n$
- (4) Hesapla $\phi_A^{o_7}, \phi_B^{o_7}$ ve $\phi_C^{o_7}$
- (5) Oluştur denklem (3.14)'a göre Y'
- (6) Hesapla denklem (3.15)'ye göre X

Örnek 3.1.2.1.3. $X \in \mathbb{U}_{2 \times 2}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere

$$X - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} X^{\circ_7} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}$$

denkleminin çözümünü olan X matrisini bulalım.

(3.10) eşitliğini göz önüne alınırsa, verilen denkleme karşılık gelen reel matris temsilini

$$Y - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$$\phi_X^{o_7} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} Y - Q_m^{-1}(\phi_X^{o_7})Q_n - R_m^{-1}(\phi_X^{o_7})R_n + S_m^{-1}(\phi_X^{o_7})S_n - T_m^{-1}(\phi_X^{o_7})T_n \\ + U_m^{-1}(\phi_X^{o_7})U_n + V_m^{-1}(\phi_X^{o_7})V_n - W_m^{-1}(\phi_X^{o_7})W_n \end{pmatrix}$$

eşitliği göz önüne alınırsa $Y = \phi_X^{o_7}$ olur. Böylece Teorem 3.2.1.2 gereğince

$X \in \mathbb{U}_{2 \times 2}(\mathbb{C}\mathbb{O}_p)$ çözümü

$$X = \frac{1}{4-4p} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_m \\ \mathbf{e}_1 I_m \\ \mathbf{e}_2 I_m \\ \mathbf{e}_3 I_m \\ \mathbf{e}_4 I_m \\ \mathbf{e}_5 I_m \\ \mathbf{e}_6 I_m \\ \mathbf{e}_7 I_m \end{bmatrix}^T \phi_X^{o_7} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_n \\ \mathbf{e}_1 I_n \\ -\mathbf{e}_2 I_n \\ -\mathbf{e}_3 I_n \\ -\mathbf{e}_4 I_n \\ -\mathbf{e}_5 I_n \\ \mathbf{e}_6 I_n \\ \mathbf{e}_7 I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde $1 \leq s \leq 6$ için Kalman-Yakubovich s-eşlenik denklem çözümleri de incelenebilir.

ii. $A(X^{o_7}) - XB = C$ denkleminin çözümü üzerine

$$A(X^{o_7}) - XB = C \quad (3.16)$$

denkleminin çözümü komütatif eliptik oktonyon matrisinin reel gösterimleri yardımı ile yapılacaktır. Burada $A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ dir.

Ayrıca (3.16) denkleminin reel temsili

$$(\phi_A^{o_7})Y - Y(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7} \quad (3.17)$$

biçimindedir. (3.16) denklemi

$$(\phi_A^{o_7})(\phi_X^{o_7}) - (\phi_X^{o_7})(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7} \quad (3.18)$$

biçiminde de ifade edilir. Sonuç olarak (3.14) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (3.17) denkleminin çözümü $Y = \phi_X^{o_7}(P_n^{o_7})$ olur.

Teorem 3.2.1.4. $A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. O halde $(\phi_A^{o_7})Y - Y(\phi_B^{o_7}) = \phi_C^{o_7}$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{8m \times 8n}$ ise bu durumda $A(X^{o_7}) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{32 - 32p} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_m \\ \mathbf{e}_1 I_m \\ \mathbf{e}_2 I_m \\ \mathbf{e}_3 I_m \\ \mathbf{e}_4 I_m \\ \mathbf{e}_5 I_m \\ \mathbf{e}_6 I_m \\ \mathbf{e}_7 I_m \end{bmatrix}^T \left(Y - Q_m^{-1}(\phi_X^{o_7})Q_n - R_m^{-1}(\phi_X^{o_7})R_n + S_m^{-1}(\phi_X^{o_7})S_n + T_m^{-1}(\phi_X^{o_7})T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_n \\ \mathbf{e}_1 I_n \\ -\mathbf{e}_2 I_n \\ -\mathbf{e}_3 I_n \\ -\mathbf{e}_4 I_n \\ -\mathbf{e}_5 I_n \\ \mathbf{e}_6 I_n \\ \mathbf{e}_7 I_n \end{bmatrix}$$

biçiminde olur.

İspat.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} & Y_{17} & Y_{18} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} & Y_{27} & Y_{28} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} & Y_{38} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} & Y_{47} & Y_{48} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} & Y_{57} & Y_{58} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} & Y_{67} & Y_{68} \\ Y_{71} & Y_{72} & Y_{73} & Y_{74} & Y_{75} & Y_{76} & Y_{77} & Y_{78} \\ Y_{81} & Y_{82} & Y_{83} & Y_{84} & Y_{85} & Y_{86} & Y_{87} & Y_{88} \end{bmatrix} \quad (Y_{uv} \in \mathbb{R}^{m \times n}, 1 \leq u, v \leq 8)$$

matrisi (3.17) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Y = \phi_X^{\circ_7}$ ve

$$\begin{aligned} Q_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})Q_n &= -\phi_X^{\circ_7}, & R_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})R_n &= -\phi_X^{\circ_7}, & S_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})S_n &= -\phi_X^{\circ_7}, \\ T_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})T_n &= \phi_X^{\circ_7}, & U_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})U_n &= -\phi_X^{\circ_7}, & V_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})V_n &= \phi_X^{\circ_7}, \\ W_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})W_n &= -\phi_X^{\circ_7}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \phi_A^{\circ_7} \left(-Q_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})Q_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(-Q_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})Q_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(R_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})R_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(R_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})R_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(-S_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})S_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(-S_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})S_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} \phi_C^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(T_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})T_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(T_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})T_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(-U_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})U_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(-U_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})U_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(V_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})V_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(V_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})V_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7}, \\ \phi_A^{\circ_7} \left(-W_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})W_n \right) (P_n^{\circ_7}) - \left(-W_m^{-1}Y(P_n^{\circ_7})W_n \right) (P_n^{\circ_7}) \phi_B^{\circ_7} &= \phi_C^{\circ_7} \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitlikleri yazılır. Sonuç olarak Y matrisi (3.17) denkleminin bir çözümü ise (3.20) ifadeleri de (3.17) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} Q_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})Q_n + R_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})R_n - S_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})S_n - T_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})T_n \\ + U_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})U_n - V_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})V_n + W_m^{-1}(\phi_X^{\circ_7})W_n \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

ifadesi de (3.17) denkleminin bir çözümüdür. En son ifade düzenlenir ise

$$Y' = \begin{pmatrix} X_0 & -pX_1 & -X_2 & pX_3 & -X_4 & pX_5 & X_6 & -pX_7 \\ X_1 & -X_0 & -X_3 & X_2 & -X_5 & X_4 & X_7 & -X_6 \\ X_2 & -pX_3 & -X_0 & pX_1 & -X_6 & pX_7 & X_4 & -pX_5 \\ X_3 & -X_2 & -X_1 & X_0 & -X_7 & X_6 & X_5 & -X_4 \\ X_4 & -pX_5 & -X_6 & pX_7 & -X_0 & pX_1 & X_2 & -pX_3 \\ X_5 & -X_4 & -X_7 & X_6 & -X_1 & X_0 & X_3 & -X_2 \\ X_6 & -pX_7 & -X_4 & pX_5 & -X_2 & pX_3 & X_0 & -pX_1 \\ X_7 & -X_6 & -X_5 & X_4 & -X_3 & X_2 & X_1 & -X_0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Öyleki bu matrizen

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{8}(Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} + Y_{44} + Y_{55} + Y_{66} + Y_{77} + Y_{88}) \\ X_1 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{12}}{p} + Y_{21} + \frac{Y_{34}}{p} + Y_{43} + \frac{Y_{56}}{p} + Y_{65} + \frac{Y_{78}}{p} + Y_{87}\right) \\ X_2 &= \frac{1}{8}(Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} + Y_{42} + Y_{57} + Y_{68} + Y_{75} + Y_{86}) \\ X_3 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{14}}{p} + Y_{23} + \frac{Y_{32}}{p} + Y_{41} - \frac{Y_{58}}{p} + Y_{67} + \frac{Y_{76}}{p} + Y_{85}\right) \\ X_4 &= \frac{1}{8}(Y_{15} + Y_{26} + Y_{37} + Y_{48} + Y_{51} + Y_{62} + Y_{73} + Y_{84}) \\ X_5 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{16}}{p} + Y_{25} + \frac{Y_{38}}{p} + Y_{47} + \frac{Y_{52}}{p} + Y_{61} + \frac{Y_{74}}{p} + Y_{83}\right) \\ X_6 &= \frac{1}{8}(Y_{17} + Y_{28} + Y_{35} + Y_{46} + Y_{53} + Y_{64} + Y_{71} + Y_{82}) \\ X_7 &= \frac{1}{8}\left(\frac{Y_{18}}{p} + Y_{27} + \frac{Y_{36}}{p} + Y_{45} + \frac{Y_{54}}{p} + Y_{63} + \frac{Y_{72}}{p} + Y_{81}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\phi_X^{o_7} = Y(P_n^{o_7})$ olduğundan (3.16) denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{32 - 32p} \begin{bmatrix} e_0 I_m \\ e_1 I_m \\ e_2 I_m \\ e_3 I_m \\ e_4 I_m \\ e_5 I_m \\ e_6 I_m \\ e_7 I_m \end{bmatrix}^T Y' \begin{bmatrix} e_0 I_n \\ e_1 I_n \\ -e_2 I_n \\ -e_3 I_n \\ -e_4 I_n \\ -e_5 I_n \\ e_6 I_n \\ e_7 I_n \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

biçiminde bulunur.

Bu teoremdeki sonuçlara dayanarak $A(X^{o_7}) - XB = C$ denkleminin çözümünü veren sayısal algotirmayı ve bu algotirmanın uygulamasını gösteren bir örnek verelim.

Algoritma 3.2.

- (1) Başla
- (2) Giriş A, B ve p ($A \in \mathbb{U}_{m \times m}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $C \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$)
- (3) Oluştur $P_t^{o_7}, Q_t, R_t, S_t, T_t, U_t, V_t, W_t$, $t = m, n$
- (4) Hesapla $\phi_A^{o_7}, \phi_B^{o_7}$ ve $\phi_C^{o_7}$
- (5) Oluştur denklem (3.21) 'a göre Y'
- (6) Hesapla denklem (3.22) 'ye göre X

Örnek 3.2.1.5. $X \in \mathbb{U}_{2 \times 2}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} X^{o_7} - X \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_7 \\ 0 & -\mathbf{e}_4 \end{bmatrix}$$

denkleminin çözümünü olan X matrisini bulalım.

(3.17) eşitliğini göz önüne alınırsa verilen denkleme karşılık gelen reel matris temsili

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu reel matris denklemi çözülürse, çözüm

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$$\phi_X^{o_7} = \frac{1}{8} \left(Y(P_n)^{o_7} + Q_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} Q_n - R_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} R_n + S_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} S_n - T_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} T_n \right. \\ \left. + U_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} U_n - V_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} V_n + W_m^{-1} Y(P_n)^{o_7} W_n \right)$$

eşitliğinden $\phi_X^{o_7} = Y(P_n)^{o_7}$ olur. Böylece $X \in \mathbb{U}_{2 \times 2}(\mathbb{C}\mathbb{O}_p)$ çözümü Teorem 3.2.1.4 gereğince

$$X = \frac{1}{4-4p} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_m \\ \mathbf{e}_1 I_m \\ \mathbf{e}_2 I_m \\ \mathbf{e}_3 I_m \\ \mathbf{e}_4 I_m \\ \mathbf{e}_5 I_m \\ \mathbf{e}_6 I_m \\ \mathbf{e}_7 I_m \end{bmatrix}^T \phi_X^{o_7} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 I_n \\ \mathbf{e}_1 I_n \\ -\mathbf{e}_2 I_n \\ -\mathbf{e}_3 I_n \\ -\mathbf{e}_4 I_n \\ -\mathbf{e}_5 I_n \\ \mathbf{e}_6 I_n \\ \mathbf{e}_7 I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde $1 \leq s \leq 6$ için Sylvesters s-eşlenik denklem çözümleri de incelenebilir.

3.2.2. Komütatif eliptik oktonyon matrislerin eliptik kuaterniyonik matris gösterimleri

Tanım 3.2.2.1. $A = \sum_{i=0}^7 A_i e_i = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p^{2m \times 2n} \quad (3.23)$$

matrisine A matrisinin eliptik kuaterniyonik temel matrisi denir.

$$\begin{aligned} A_{(e),1} &= A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \mathbf{i}(A_1 + A_3 + A_5 + A_7) \\ A_{(e),2} &= A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \mathbf{i}(A_1 - A_3 + A_5 - A_7) \\ A_{(e),3} &= A_0 + A_2 - A_4 - A_6 + \mathbf{i}(A_1 + A_3 - A_5 - A_7) \\ A_{(e),4} &= A_0 - A_2 - A_4 + A_6 + \mathbf{i}(A_1 - A_3 - A_5 + A_7) \end{aligned}$$

$m \times n$ tipindeki eliptik matrisler göz önüne alınırsa A matrisi için

$$A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 = (A_{(e),1} \mathbf{e}_1 + A_{(e),2} \mathbf{e}_2) \mathbf{d}_1 + (A_{(e),3} \mathbf{e}_1 + A_{(e),4} \mathbf{e}_2) \mathbf{d}_2$$

eşitliği yazılır. Buradaki $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ ifadeleri eliptik kuaterniyon matris cümlesi için idempotent bazlardır.

$$\Phi(\Phi(A)) = \begin{bmatrix} \Phi(A_{q(1)}) & \Phi(0) \\ \Phi(0) & \Phi(A_{q(2)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_p^{4m \times 4n} \quad (3.24)$$

matrisine ise A matrisinin eliptik temel matrisi denir.

Teorem 3.2.2.2. $A, B \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $C \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\Phi(I_n) = I_{2n}$,
2. $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$,
 $\Phi(AC) = \Phi(A)\Phi(C)$,
3. $m = n$ için A^{-1} mevcut ise $\Phi(A^{-1}) = (\Phi(A))^{-1}$,

4. $(\Phi(A))^- = \Phi(A^-)$ eşitliği sağlanır. Burada $(\Phi(A))^-$ matrisi $\Phi(A)$ matrisinin genelleştirilmiş tersidir.

5. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 I_m & \mathbf{d}_2 I_m \end{bmatrix} \Phi(A) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 I_n \\ \mathbf{d}_2 I_n \end{bmatrix}$ dir.

İspat.

1. $I_n = I_n \mathbf{d}_1 + I_n \mathbf{d}_2$ olduğundan (3.23) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\Phi(I_n) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

elde edilir

2. $A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2$, $B = B_{q(1)} \mathbf{d}_1 + B_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere

$$A + B = (A_{q(1)} + B_{q(1)}) \mathbf{d}_1 + (A_{q(2)} + B_{q(2)}) \mathbf{d}_2$$

eşitliği yazılır. Bu durumda

$$\Phi(A) + \Phi(B) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} + B_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} + B_{q(2)} \end{bmatrix}$$

ve

$$\Phi(A + B) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} + B_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} + B_{q(2)} \end{bmatrix}$$

olduğundan $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ eşitliği sağlanır.

$A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $B = B_{q(1)} \mathbf{d}_1 + B_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere

$$AC = A_{q(1)} C_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} C_{q(2)} \mathbf{d}_2$$

dir. Bu durumda

$$\Phi(A)\Phi(C) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} C_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} C_{q(2)} \end{bmatrix}$$

ve

$$\Phi(AC) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} C_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} C_{q(2)} \end{bmatrix}$$

olduğundan $\Phi(AC) = \Phi(A)\Phi(C)$ eşitliği elde edilir.

3. Kabul edelim ki $A \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ regüler bir matris olsun. O halde

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

eşitliğini sağlayan $A^{-1} \in \mathbb{U}_{n \times n}(\mathbb{CO}_p)$ mevcuttur. Bu eşitlik göz önüne alınırsa

$$\Phi(A)\Phi(A^{-1}) = \Phi(A^{-1})\Phi(A) = I_{2n}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(\Phi(A))^{-1} = \Phi(A^{-1})$$

eşitliği bulunur.

4. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve $AA^{-}A = A$ eşitliğini sağlayan $A^{-} \in \mathbb{U}_{n \times m}(\mathbb{CO}_p)$ mevcut olsun. Bu eşitlikten

$$\Phi(A)\Phi(A^{-})\Phi(A) = \Phi(A),$$

$$\Phi(A)\Phi(A)^{-}\Phi(A) = \Phi(A)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$(\Phi(A))^{-} = \Phi(A^{-})$$

denkleminin sağlandığı görülür.

5. $A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ matrisi için

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} A_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} \end{bmatrix}$$

mevcuttur. Bu temel matris ve matrislerdeki cebirsel işlemler göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
[\mathbf{d}_1 I_m \quad \mathbf{d}_2 I_m] \Phi(A) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 I_n \\ \mathbf{d}_2 I_n \end{bmatrix} &= [\mathbf{d}_1 I_m \quad \mathbf{d}_2 I_m] \begin{bmatrix} A_{q(1)} & 0 \\ 0 & A_{q(2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 A_{q(1)} & \mathbf{d}_2 A_{q(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 I_n \\ \mathbf{d}_2 I_n \end{bmatrix} \\
&= A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 = A
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2.2. $A = \sum_{i=0}^7 A_i e_i = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ olsun. A komütatif

eliptik oktonyon matrisinin Frobenius normu

$$\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sqrt{\|A_0\|^2 - p\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 - p\|A_3\|^2 + \|A_4\|^2 - p\|A_5\|^2 + \|A_6\|^2 - p\|A_7\|^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|A_{q(1)}\|^2 + \|A_{q(2)}\|^2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

eşitliği tanımlanır.

Teorem 3.2.2.3. $A = \sum_{i=0}^7 A_i e_i = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2$ ve $B = \sum_{i=0}^7 B_i e_i = B_{q(1)} \mathbf{d}_1 + B_{q(2)} \mathbf{d}_2$ $m \times n$

boyutlu komütatif eliptik oktonyon matrisler ve $\forall \beta \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\|\beta A\|_F = |\beta| \|A\|_F,$
2. $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F,$
3. $\|A\|_F \geq 0,$
4. $\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow A = (0)_{m \times n}$

özellikleri sağlanır. Böylece bir komütatif eliptik oktonyon matrisin Frobenius norm tanımının norm şartlarını sağladığı görülür.

İspat. $A = \sum_{i=0}^7 A_i e_i = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2,$ $B = \sum_{i=0}^7 B_i e_i = B_{q(1)} \mathbf{d}_1 + B_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ ve

$\forall \beta \in \mathbb{R}$ için 1 şıkının ispatını verelim.

(3.25) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|\beta A\|_F &= \left\| \beta \left(A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \right) \right\|_F \\
&= \left\| \left(\beta A_{q(1)} \right) \mathbf{d}_1 + \left(\beta A_{q(2)} \right) \mathbf{d}_2 \right\|_F \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left\| \beta A_{q(1)} \right\|^2 + \left\| \beta A_{q(2)} \right\|^2}
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Daha sonra (2.40) eşitliğinden

$$\left\| \beta A_{q(1)} \right\|_F^2 + \left\| \beta A_{q(2)} \right\|_F^2 = |\beta|^2 \left\| A_{q(1)} \right\|_F^2 + |\beta|^2 \left\| A_{q(2)} \right\|_F^2$$

yazılır. Böylece

$$\|\beta A\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta| \sqrt{\left\| A_{q(1)} \right\|^2 + \left\| A_{q(2)} \right\|^2} = |\beta| \|A\|_F$$

elde edilir ve 1 şıkkının ispatı tamamlanır.

2, 3, ve 4, şıklarının da ispatı 1 şıkkına benzer şekilde elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.3. $A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ komütatif eliptik oktonyon matrisi olsun. O halde A matrisi ile eliptik kuaterniyonik ve eliptik temel matrislerinin Frobenius normları arasındaki bağıntı

$$\|A\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi(A)\|_F = \frac{1}{2} \|\Phi(\Phi(A))\|_F \quad (3.26)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $A = A_{q(1)} \mathbf{d}_1 + A_{q(2)} \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$ komütatif eliptik oktonyon matris için (3.25) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\Phi(A) = \sqrt{\left\| A_{q(1)} \right\|^2 + \left\| A_{q(2)} \right\|^2} \in \mathbb{H}_p^{2m \times 2n}$$

denklemini yazılır. Daha sonra komütatif eliptik oktonyon matris için Frobenius norm tanımı olan (3.23) eşitliğinden

$$\|A\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi(A)\|_F$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\|A\|_F = \frac{1}{2} \|\Phi(\Phi(A))\|_F$$

eşitliği de kolaylıkla görülür. Böylece ispat tamamlanır.

3.3. $AX = B$ Komütatif Eliptik Oktonyon Matris Denkleminin En Küçük Kareler Çözümü ve Çözüme Dair Algoritma

Bu bölümde, $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{m \times l}(\mathbb{CO}_p)$ ve $X \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ komütatif eliptik oktonyon matrisleri olmak üzere

$$AX = B \quad (3.27)$$

komütatif eliptik oktonyon matris denkleminin

$$\|AX - B\|_F = \min. \quad (3.28)$$

olacak biçimde komütatif eliptik oktonyonik en küçük kareler çözümünü, komütatif eliptik oktonyon matrislerin eliptik kuaterniyonik ve eliptik temsili yardımıyla elde edilecektir.

Teorem 3.3.1. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{m \times l}(\mathbb{CO}_p)$ ve $X \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$ olsun

$$AX = B \quad (3.29)$$

komütatif eliptik oktonyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü X olur ancak

$$\Phi(A)Y = \Phi(B) \quad (3.30)$$

eliptik kuaterniyonik denklemin eliptik kuaterniyonik en küçük kareler çözümünün de $Y = \Phi(X)$ olması ile sağlanır.

İspat. $AX = B$ komütatif eliptik oktonyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü X ise

$$\|AX - B\|_F = \min.$$

olur. (3.26) denkleminde

$$\|AX - B\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi(AX) - \Phi(B)\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi(A)\Phi(X) - \Phi(B)\|_F$$

elde edilir. Buradan açıktır ki $AX = B$ denkleminin en küçük kareler çözümü X ise (3.30) denkleminin en küçük kareler çözümü $Y = \Phi(X)$ dir. Benzer biçimde ispatın diğer yönü de gösterilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. $A \in \mathbb{U}_{m \times n}(\mathbb{CO}_p)$, $B \in \mathbb{U}_{m \times l}(\mathbb{CO}_p)$ olmak üzere $AX = B$ komütatif eliptik oktonyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü

$$X = X_{q(1)} \mathbf{d}_1 + X_{q(2)} \mathbf{d}_2 = \left(X_{(e),1} \mathbf{e}_1 + X_{(e),2} \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_1 + \left(X_{(e),3} \mathbf{e}_1 + X_{(e),4} \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_2 \in \mathbb{U}_{n \times l}(\mathbb{CO}_p)$$

olmak üzere

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),2}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),3}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),4}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),3}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \end{bmatrix} = (\tilde{A})^{-1} \vec{B}$$

olur. Buradan

$$X = \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),1}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),2}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_1 \\ + \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),3}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),3}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),4}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_2$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),4}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),4}) \\ \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),3}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),4}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),4}) \end{bmatrix},$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) & \operatorname{Re}(B_{(e),2}) & \operatorname{Re}(B_{(e),3}) & \operatorname{Re}(B_{(e),4}) & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(B_{(e),1}) & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(B_{(e),2}) & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(B_{(e),3}) & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(B_{(e),4}) \end{bmatrix}^T$$

dir.

İspat. $AX = B$ komütatif eliptik oktonyon matrisinin en küçük kareler çözümü X ise bu durumda $\|AX - B\|_F = \min.$ olur.

$$\begin{aligned}
\|AX - B\|_F &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi(A)\Phi(X) - \Phi(B)\|_F \\
&= \frac{1}{2} \|\Phi(\Phi(A))\Phi(\Phi(X)) - \Phi(\Phi(B))\|_F \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} A_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{(e),4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{(e),4} \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3}X_{(e),3} - B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4}X_{(e),4} - B_{(e),4} \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3}X_{(e),3} - B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4}X_{(e),4} - B_{(e),4} \end{bmatrix} \\ +i\text{Im} \begin{bmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3}X_{(e),3} - B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4}X_{(e),4} - B_{(e),4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3}X_{(e),3} - B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4}X_{(e),4} - B_{(e),4} \end{bmatrix} \\ \sqrt{-p}\text{Im} \begin{bmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{(e),3}X_{(e),3} - B_{(e),3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{(e),4}X_{(e),4} - B_{(e),4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|_F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),4}) & 0 & 0 & 0 & p\operatorname{Im}(A_{(e),4}) \\ \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),3}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Im}(A_{(e),4}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}\operatorname{Re}(A_{(e),4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),2}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),3}) \\ \operatorname{Re}(X_{(e),4}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),3}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),3}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),4}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),3}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),4}) \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \frac{1}{2} \|\tilde{A}\vec{X} - \vec{B}\|_F
\end{aligned}$$

69

olur.

$$\begin{aligned}
\vec{X} &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) & \operatorname{Re}(X_{(e),2}) & \operatorname{Re}(X_{(e),3}) & \operatorname{Re}(X_{(e),4}) & \operatorname{Im}(X_{(e),1}) & \operatorname{Im}(X_{(e),2}) & \operatorname{Im}(X_{(e),3}) & \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \end{bmatrix}^T \\
&= (\tilde{A})^- \vec{B}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$X = \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),1}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),2}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_1 \\ + \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),3}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),3}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),4}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_2$$

çözümü elde edilir.

Algoritma 3.3.

(1) Başla

(2) Giriş A, B ve p .

(3) Hesapla

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) & \operatorname{Re}(X_{(e),2}) & \operatorname{Re}(X_{(e),3}) & \operatorname{Re}(X_{(e),4}) & \operatorname{Im}(X_{(e),1}) & \operatorname{Im}(X_{(e),2}) & \operatorname{Im}(X_{(e),3}) & \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \end{bmatrix}^T \\ = (\tilde{A})^- \vec{B}$$

(4) Hesapla

$$X = \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),1}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),2}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_1 \\ + \left(\left(\operatorname{Re}(X_{(e),3}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),3}) \right) \mathbf{e}_1 + \left(\operatorname{Re}(X_{(e),4}) + i \operatorname{Im}(X_{(e),4}) \right) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{d}_2.$$

(5) Yaz X .

(6) Dur.

4. KOMÜTATİF ELİPTİK OKTONYONİK EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

Çevremizde ve doğada çok sayıda farklı renk tonu bulunması, renklerin sınıflandırılması ve anlaşılması için gruplandırma ihtiyacını doğurmuştur. Benzer şekilde, görüntülerdeki renklerin çeşitliliği de görüntü işleme alanında renk uzayları gibi araçların kullanımını gerektirmiştir. Bilindiği üzere bir görüntü, 2 boyutlu bir düzlemde belirli bir alanda bulunan piksellerden oluşan görsel bir temsildir. Pikseller ise her biri bir renk değeri içeren küçük noktalardan oluşur. Günümüzde görüntüler, fotoğraf, video, medikal görüntüleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kullanılır.

Renk uzayları, renklerin sayısal olarak ifade edildiği bir uzaydır. Renk uzayları, renklerin farklı özelliklerini tanımlamak için kullanılır. Örneğin, *RGB* renk uzayı, renkleri kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerinin kombinasyonu ile ifade ederken, *Lab** renk uzayı (*CIELAB*), renkleri insan gözü algısına daha uygun bir şekilde ifade eder.

Görüntülerde renkler, renk uzaylarının birbirleriyle dönüştürülmesi sayesinde işlenir. Örneğin, bir *RGB* görüntüsü, *Lab** renk uzayına dönüştürülerek daha doğru renk işlemesi yapılabilir. Renk uzayları, görüntü işlemede renklerin doğru bir şekilde temsil edilmesi ve işlenmesi için önemlidir.

İnternet, renkli monitörler ve video kayıt cihazları gibi önemli ve sık kullanılan ortamlarda *RGB* renk uzayının kullanılması sebebi ile bu çalışma da renk uzayı olarak *RGB* renk uzayı ve Luma parlaklık değeri kullanılacaktır.

4.1. Renkli Görüntüler ve Renkli Görüntü İyileştirme

RGB, kırmızı (*R*), yeşil (*G*) ve mavi (*B*) renk bileşenlerinden oluşan bir renk uzayıdır. Bu bileşenlerin birleşimi, herhangi bir rengi oluşturabilir. Renkli görüntüyü oluşturan bu üç renk bant olarakta isimlendirilir.

Renkli bir görüntünün kırmızı, yeşil ve mavi tonları matris olarak da ifade edilebilir. Matris anlamında düşünüldüğünde doğal renkli 2 boyutlu bir *RGB* görüntü, her biri $m \times n$ boyutunda üç matrisin bileşiminden oluşur ve

$$\{I(R, G, B) \mid R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

biçiminde ifade edilir. Burada R, G ve B matrislerinin her birinin elemanları 0 ile 1 arasında değerler alır.

Renk uzaylarında parlaklık, renklerin ışık yoğunluğunu ifade eden bir özelliktir. Parlaklık, renklerin algılanan aydınlık veya karanlık derecesini ifade eder. Yüksek parlaklık değerleri, renklerin daha aydınlık görünmesine neden olurken, düşük parlaklık değerleri renklerin daha karanlık görünmesine neden olur. Örneğin, beyaz en yüksek parlaklık değerine sahipken, siyah en düşük parlaklık değerine sahiptir.

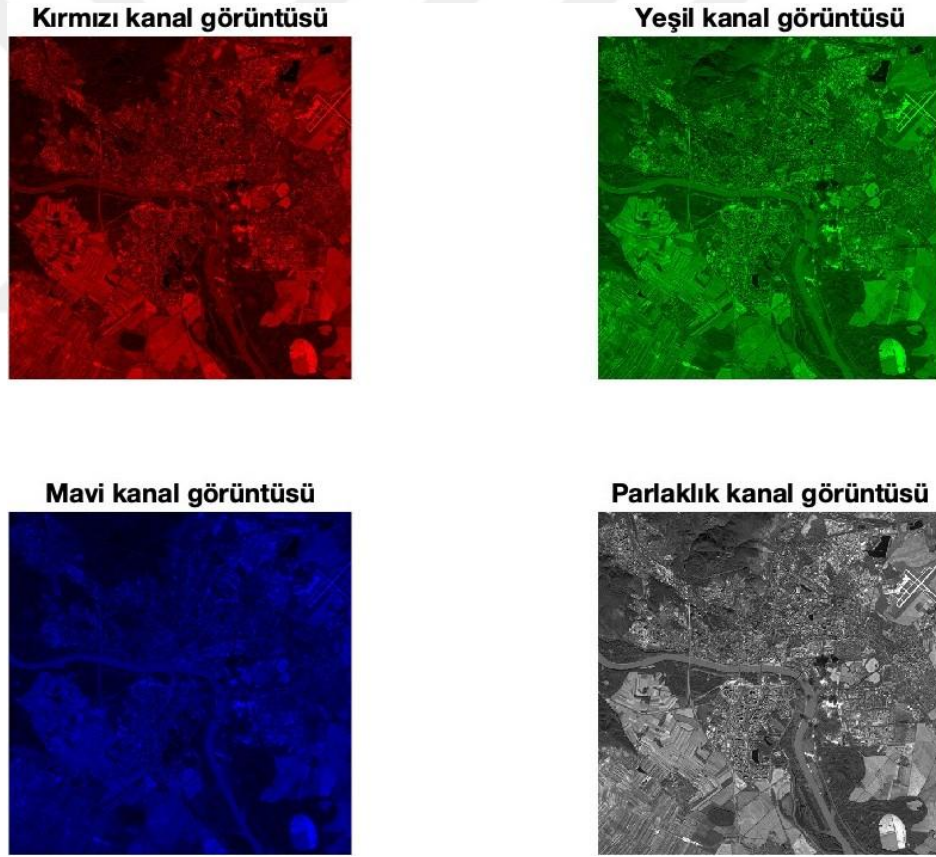
RGB renk uzayında bir pikselin parlaklığını hesaplamak için, genellikle pikselin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerinin ortalaması alınır. Ancak bu hesaplama, insan gözünün algıladığı parlaklığı tam olarak yansıtmayabilir. Bunun nedeni, insan gözünün farklı renkleri farklı duyarlılık düzeyleriyle algılamasıdır. Özellikle yeşil renk, insan gözünün en duyarlı olduğu renklerden biridir. Bu nedenle, yeşil bileşenin diğer renk bileşenlerine kıyasla daha fazla ağırlık verilmesi, insan gözünün algıladığı parlaklık değerine daha yakın sonuçlar verebilir.

Bir pikselin insan gözünün algıladığı parlaklık değerini hesaplamak için, pikselin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerinin ağırlıklı ortalaması alınabilir. Bu ağırlıklar, sırasıyla 0.2126, 0.7152 ve 0.0722 olarak belirlenebilir. Bu hesaplama yöntemi, (2.44) denkleminde verilen "luma" hesaplama olarak adlandırılır. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, bir pikselin luma değeri şu şekilde hesaplanabilir:

$$Luma = 0.2126 * R + 0.7152 * G + 0.0722 * B.$$



Şekil 4.1. Orijinal görüntü.



Şekil 4.2. Orijinal görüntünün R , G , B ve parlaklık bantları görüntüsü.

Birçok görüntüleme uygulamasında gözlenen görüntü, orijinal görüntünün bozulmuş bir tasviridir. Bu bozulmaların sebebi gürültü, piksel değeri hataları, sensör bulanıklığı, kamera sarsıntıları veya sahnedeki nesnelerin hareketlerinden kaynaklanan görüntü bulanıklığı olabilir. Görüntü iyileştirme, bozulmuş veya

gürültülü görüntülerin elde edilmesi sırasında ortaya çıkan hataları veya bozulmaları azaltmak veya ortadan kaldırmak için kullanılan tekniklerdir. Bu teknikler, elde edilen bozulmuş görüntüden, gerçek görüntü hakkında önceden bilgi sahibi olunarak istenen özelliklere sahip bir çözüm elde etmek için kullanılır.

Görüntü iyileştirme, orijinal görüntüye uygulanır. Orijinal görüntü, bir nesnenin gerçek dünyadaki görüntüsünü yakalamak için bir kamera veya sensör tarafından alınır. Bu görüntü, işlemde geçirilmeye hazır bir formatta değildir. İşlem için hazır hale getirmek için, orijinal görüntü bir nokta yayılım fonksiyonu (PSF) ile çarpılır. PSF, bir kameranın veya sensörün nesneyi nasıl gördüğünü gösteren bir fonksiyondur. İşlem aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\text{Orijinal Görüntü } (f) \rightarrow \text{PSF } (h) \rightarrow \text{Gözlemlenen Görüntü } (g).$$

Daha sonra, gözlemlenen görüntü üzerinde filtreleme, dekonvolüsyon veya matematiksel işlemler uygulanarak, orijinal görüntünün kalitesini artıran bir işlem gerçekleştirilir. Aşağıdaki şema, görüntü iyileştirme işleminin basit bir gösterimidir:

$$\text{Orijinal Görüntü } f \rightarrow \text{PSF } (h) \rightarrow \text{Gözlemlenen Görüntü } (g) \rightarrow \text{Filtreleme/İyileştirme İşlemi} \rightarrow \text{İyileştirilmiş Görüntü } (f')$$

Matematiksel olarak, bozulmuş bir görüntüyü $g(x,y)$, orijinal (bozulmamış) görüntüyü $f(x,y)$ ve PSF fonksiyonunu $H(x,y)$ olarak düşünelim. Bozulmuş görüntüyü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$g(x,y) = f(x,y) * H(x,y) + n(x,y).$$

Burada, "*" işareti konvolüsyon işaretidir ve $n(x,y)$ gürültü bileşenini ifade eder. Bu eşitlik, bozulmuş görüntüyü orijinal görüntü ve PSF fonksiyonu kullanarak yeniden oluşturmanın mümkün olmayacağı anlamına gelir, ancak bu süreci tersine çevirmek için birçok görüntü iyileştirme yöntemi vardır.

Bu çalışmanın görüntü işleme uygulaması olarak $g = Kf$ matris-vektör denklemi ele alınmıştır. Bu denklemde gözlenen görüntü, f ideal görüntü ve K bulanma olayını temsil eden matristir. Bu çalışmada

$$\|Kf - g\|_F$$

değeri en küçük yapan f ideal görüntüsü aranmıştır.

4.2. Renkli Görüntünün Komütatif Eliptik Oktonyon Matrisleri ile İfade Edilmesi

Komütatif eliptik oktonyonlar cümlesi sekiz bileşene sahip olan iki eliptik kuaterniyonun birleşimiyle elde edilen sayı cümlesidir. RGB uzayında ifade edilmiş renkli bir görüntünün ise her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç temel renk bileşeni içerdiği daha önce söylenmişti. Ayrıca bir görüntü için parlaklık da önemli bir etkidir. Bir görüntünün parlaklığı, her bir pikselin ışık yoğunluğunu veya aydınlığını belirleyen bir özelliktir. Parlaklık, bir pikselin rengini veya tonunu etkilemez, sadece pikselin görüntüdeki ne kadar ışık yansıttığını belirtir. Parlaklık, bir görüntünün genel görüntü kalitesi veya yoğunluğu hakkında bilgi sağlar ve bazı görüntü işleme işlemleri için önemli bir özelliktir. RGB renk uzayında parlaklık değeri

$$Luma = 0.2126 * R + 0.7152 * G + 0.0722 * B$$

formülü ile hesaplanır.

Bu bilgilerden yola çıkılarak renkli bir görüntünün her iki pikseli bir komütatif eliptik oktonyon ile ifade edilebilir. Bu gösterime göre renkli görüntülerin bir pikselinin parlaklık, kırmızı, yeşil ve mavi bileşenleri sırasıyla eliptik kuaterniyonların reel kısmına ve i, j, k bazlarına karşılık getirilerek iki komşu piksel bir komütatif eliptik oktonyon olarak temsil edilir. Dolayısıyla $m \times n$ piksel çözünürlüğe sahip renkli bir görüntü, (2.45) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} Q_1 &= Le_0 + Re_1 + Ge_2 + Be_3, \\ Q_2 &= Le_0 + Re_1 + Ge_2 + Be_3 \end{aligned}$$

gibi yan yana olan iki farklı pikselin kullanılması ile komütatif eliptik oktonyonik matris olarak

$$O = Le_0 + Re_1 + Ge_2 + Be_3 + Le_4 + Re_5 + Ge_6 + Be_7$$

biçiminde ifade edilir. Burada $L, R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisleri renkli görüntünün sırasıyla parlaklık, kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerini temsil eden matrisleridir.

Örnek olarak bir $n \times n$ boyutlu

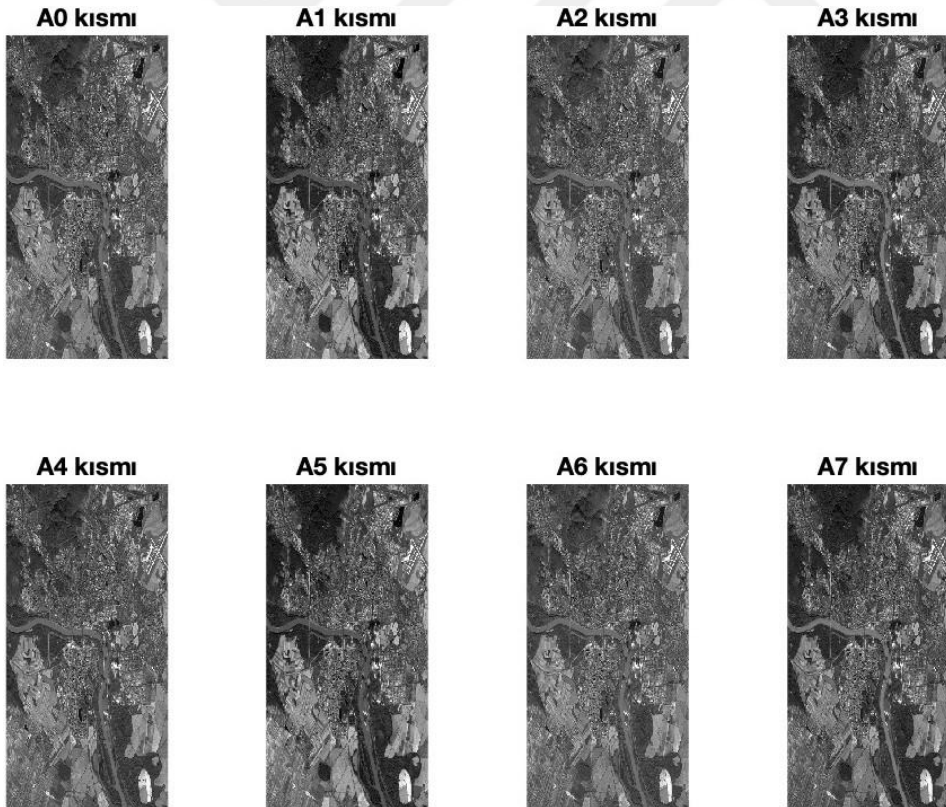
$$A = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + A_4e_4 + A_5e_5 + A_6e_6 + A_7e_7$$

komütatif eliptik oktonyon matrisini ve



Şekil 4.3. Orijinal görüntü.

görüntüsünü göz önüne alalım. 500×500 boyutundaki Wikipedia kaynaklı Bratislava görüntüsünü A matrisinin elemanlarını kullanarak ifade edersek 500×250 boyutunda aşağıdaki gibi görüntüler elde ederiz;



Şekil 4.4. Orijinal görüntünün, A komütatif eliptik oktonyon matris elemanlarıyla temsili.

Buradaki görüntülerde görüldüğü üzere görüntüde veri kaybolmamaktadır. Elde edilen bu matrisleri kullanarak 500×500 boyutundaki orijinal görüntü



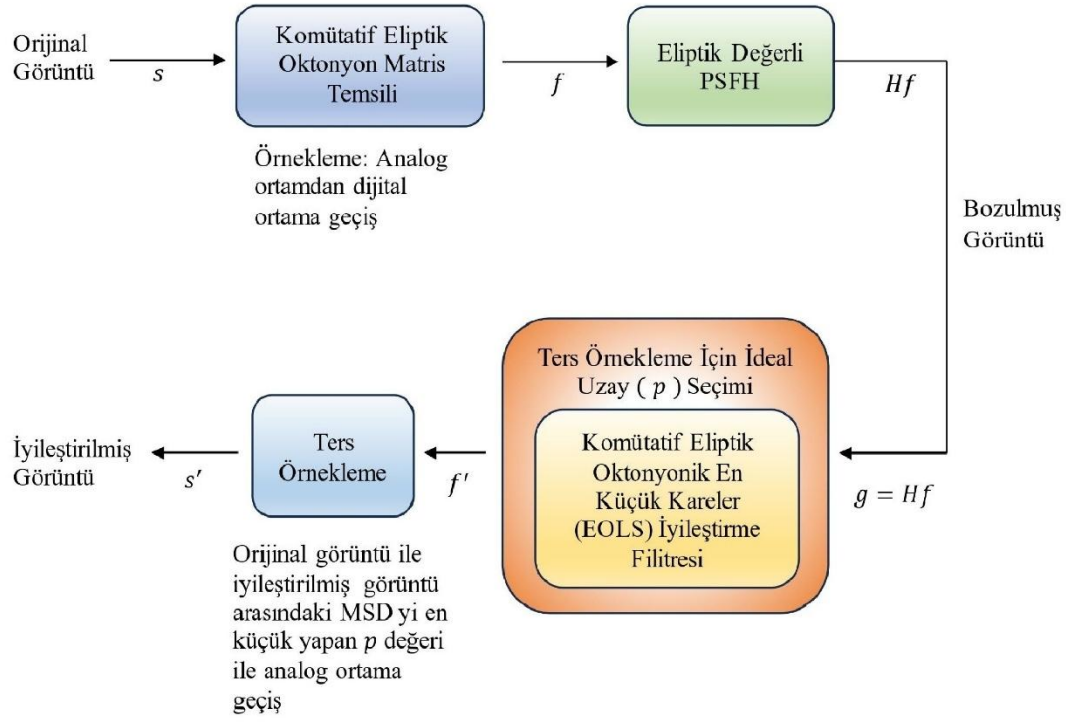
Şekil 4.5. Orijinal görüntünün, A komütatif eliptik oktonyon matristen elde edilen görüntüsü.

şeklinde bulunur.

4.3. Komütatif Eliptik Oktonyonik En Küçük Kareler İyileştirme Filtresi Tasarımı

Şimdi ise OELSI (Octonion Elliptic Linear Shift Invariant) bozulma modeli olarak adlandıracağımız komütatif eliptik oktonyonlar cebri kullanılarak yeni bir görüntü iyileştirme modeli elde edilecektir. Bu bağlamda komütatif eliptik oktonyon cebri kullanılarak örneklenmiş ve eliptik değerli PSF filtresinden geçirilmiş renkli bir görüntüye c/d/c model tabanlı EOLSM (Elliptic Octonionic Least Squares Method) komütatif eliptik oktonyonik en küçük kareler iyileştirme filtresi adını vereceğimiz bir iyileştirme filtresi uygulayacağız.

OELSI modelinin diyagramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.6. OELSI görüntü iyileştirme modeli.

OELSI iyileştirme modeli için aşağıdaki giriş görüntülerini alalım.



(a1)



(a2)

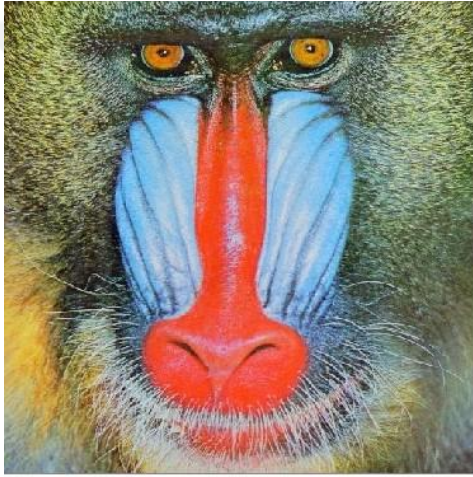
Şekil 4.7. Orijinal giriş görüntüleri.



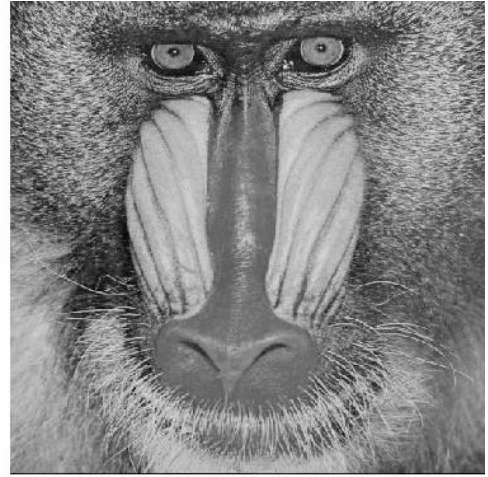
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Şekil 4.7. (Devamı) Orijinal giriş görüntüleri.

Burada alınan görüntüler **(a1)** 512×512 boyutunda Wikipedia kaynaklı Peppers görüntüsü, **(b1)** 512×512 boyutunda Wikipedia kaynaklı Lenna görüntüsü ve **(c1)** 512×512 boyutunda Wikipedia kaynaklı Baboon görüntüsüdür. Ayrıca **(a2)**, **(b2)** ve **(c2)** görüntüleri ise sırasıyla **(a1)**, **(b1)** ve **(c1)** görüntülerinin gri kısmını temsil eder. Bu giriş görüntülerinin matris temsilleri f olsun. Bu durumda f nin komütatif eliptik oktonyon matris temsili

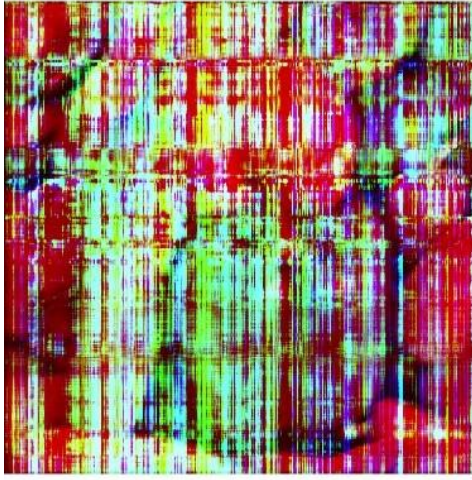
$$O = Le_0 + Re_1 + Ge_2 + Be_3 + Le_4 + Re_5 + Ge_6 + Be_7$$

dır. Burada L, R, G, B reel matrisleri görüntünün sırasıyla parlaklık, kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerini temsil etmektedir. $len = 15$, $theta = 30^\circ$ için 2-boyutlu

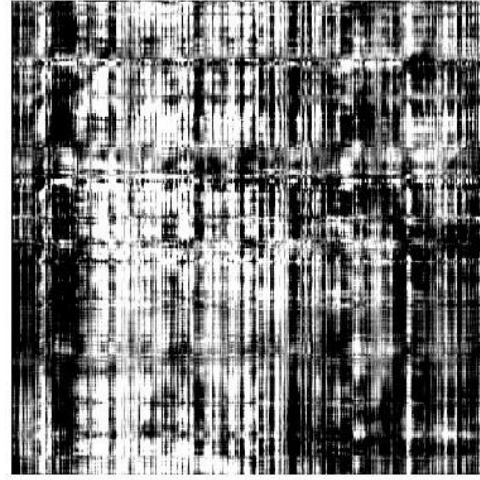
$f_{special}('motion', len, theta)$ filtresini kullanırsak L matrisinin bozulmuş hali L' ve $L' = KL$ eşitliğini sağlar. R , G ve B matrislerinin K ile bozulmuş halleri sırasıyla R' , G' ve B' olsun. O halde $R' = KR$, $G' = KG$ ve $B' = KB$ dır. Bu durumda $K = L'L^{-}$, $K = R'R^{-}$, $K = G'G^{-}$ ve $K = B'B^{-}$ eşitlikleri de mevcuttur. Buraya kadar O görüntüsünden bozulmuş

$$O' = L'e_0 + R'e_1 + G'e_2 + B'e_3 + L'e_4 + R'e_5 + G'e_6 + B'e_7$$

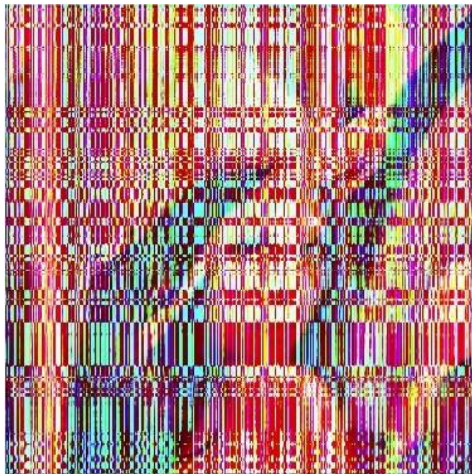
görüntüsünü elde ederiz. (a1), (a2), (b1), (b2), (c1), (c2) görüntülerinin bozulmuş görüntülerinin temsili f' olmak üzere, bu bozulmuş görüntüler sırasıyla



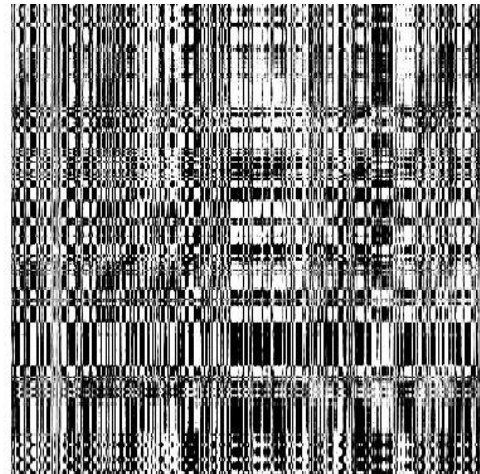
(a3)



(a4)

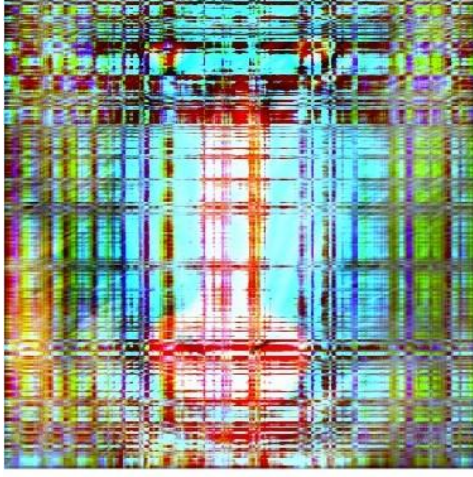


(b3)

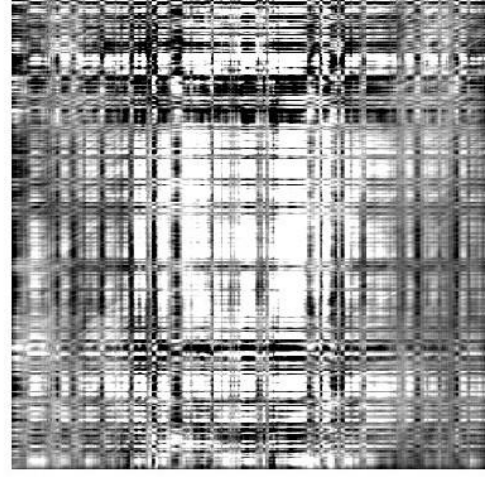


(b4)

Şekil 4.8. Bozulmuş görüntüler.



(c3)



(c4)

Şekil 4.8. (Devamı) Bozulmuş görüntüler.

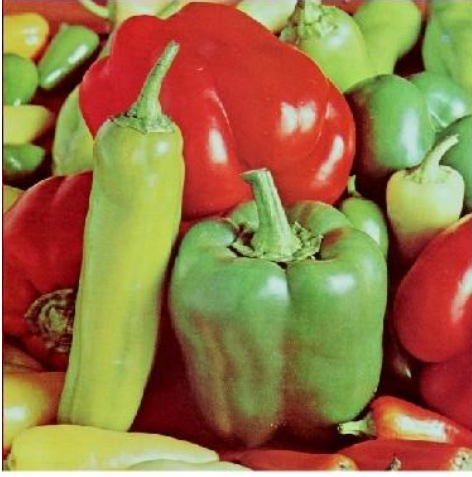
şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak $KO = O'$ komütatif eliptik oktonyonik en küçük kareler metodunu elde etmiş oluruz. Elde ettiğimiz Algoritma 3.3'e göre $KO = O'$ komütatif eliptik oktonyon matris denklemini göz önüne alınırsa

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{-p}K \end{bmatrix},$$

$$O' = \begin{bmatrix} 2(L+G) & 2(L-G) & 0 & 0 & 2\sqrt{-p}(R+B) & 2\sqrt{-p}(R-B) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

şeklinde bulunur. O halde $O = ((ie_1 + ie_2)I_n \ (e_1 - e_2)I_n \ (ie_1 - ie_2)I_n) (K)^{-1} O'$ matrisi $KI = I'$ modelinin en küçük kareler çözümüdür. $p = -1$ değeri her üç görüntü içinde ideal değerdir. Buna göre $p = -1$ için iyileştirilmiş çıkış görüntüleri Şekil 4.9 da verilmiştir.



(a5)



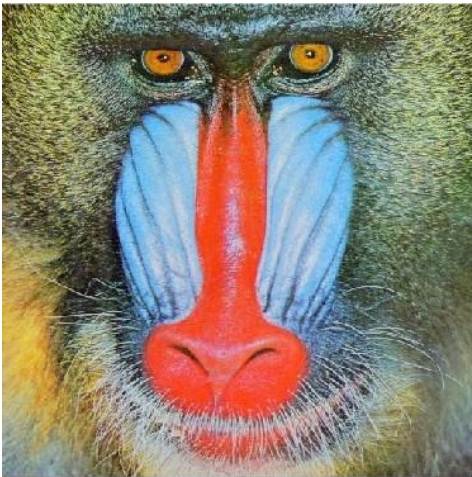
(a6)



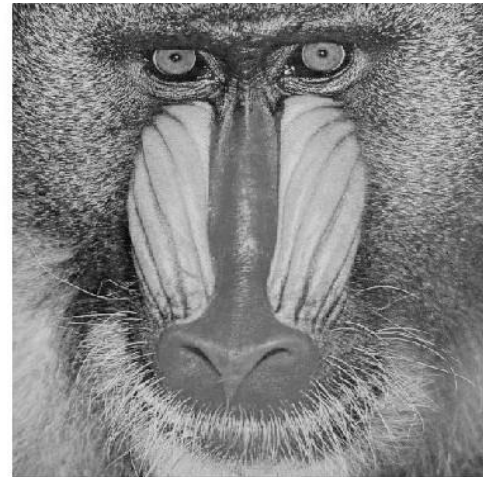
(b5)



(b6)



(c5)



(c6)

Şekil 4.9. İyileştirilmiş görüntüler.

“Peppers”, “Lenna” ve “Baboon” renkli görüntüleri kullanılarak OELSI ve ELSI görüntü iyileştirme yöntemlerinin tepe-sinyal gürültü oranı (PSNR) ve ortalama kare hatası (MSE) ölçütlerine göre metrik değerleri Tablo 4.1 de verilmiştir. Bu ölçütler, modelin görüntüleri ne kadar iyi düzeltebildiğini daha net bir şekilde görülmesine yardımcı olur. MSE değeri ne kadar sıfıra yakın ve PSNR değeri ne kadar 255 değerine yakın ise görüntüyü temsil eden matrisler arasındaki fark o kadar az olur.

Tablo 4.1. OELSI ve ELSI yöntemlerinin PSNR ve MSE ölçütlerine göre metrik değerler tablosu.

		OELSI	ELSI
Peppers	PSNR	234.0446	231.5706
	MSE	3.9404×10^{-24}	6.96052×10^{-24}
Lenna	PSNR	208.2956	202.2678
	MSE	1.4806×10^{-21}	5.9323×10^{-21}
Baboon	PSNR	233.4956	232.2885
	MSE	4.4714×10^{-24}	5.9040×10^{-24}



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez, komütatif eliptik oktonyon cebri alanında sağladığı katkılar ve görüntü işleme potansiyeliyle önemli bir çalışma olarak öne çıkmaktadır. Tezin amacı, bu alanlarda yapılan araştırmalara yeni bir bakış açısı getirerek daha etkili çözümler sunmak ve gelecekteki çalışmalara ilham kaynağı olmaktır. Ayrıca Tablo 4.1 incelendiğinde Atali ve ark. (2023) çalışması olan eliptik kuaterniyonlardaki iyileştirme modeli olan ELSI yöntemine göre komütatif eliptik oktonyonlardaki OELSI görüntü iyileştirme yönteminin matrisleri arasındaki farkında daha az olduğu görülmektedir. Sonuç olarak komütatif eliptik oktonyonlardaki görüntü iyileştirme methodu, eliptik kuaterniyonlardaki methoda göre daha gerçekçi bir görüntü elde etmeyi sağlamaktadır. Yürütülen detaylı analizler ve deneysel sonuçlar, komütatif eliptik oktonyonların görüntü işleme alanında büyük bir potansiyele sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Bu potansiyelin, görüntü iyileştirme yöntemlerinin daha da geliştirilmesine ve görüntülerin daha gerçekçi ve etkileyici bir şekilde yeniden üretilmesine katkı sağlayabileceği belirtilmektedir.

Gelecekteki çalışmalarda, komütatif eliptik oktonyonların daha geniş bir araştırma ve uygulama alanına sahip olacağı öngörülmektedir. Bu tez, literatürdeki boşlukları doldurmayı hedefleyerek ileri düzeyde matematiksel ve algoritmik çözümler sunmaktadır. Ayrıca, komütatif eliptik oktonyon cebriyle ilgili daha derinlemesine çalışmalar yapılması ve yeni matematiksel yapıların keşfedilmesi teşvik edilmektedir. Bu şekilde, komütatif eliptik oktonyon cebri alanında daha ileri düzeyde araştırmaların yapılması ve bu alanda daha etkili ve yenilikçi yöntemlerin geliştirilmesi mümkün olacaktır.

Sonuç olarak, bu tez, komütatif eliptik oktonyon cebri, Kalman-Yakubovich ve Sylvester denklemleri gibi önemli denklemlerin çözümü ve görüntü işleme alanındaki çalışmaların birleşimiyle ortaya çıkan önemli bir çalışmayı temsil etmektedir. Tezin sonuçları, komütatif eliptik oktonyonların potansiyelini vurgulayarak daha geniş bir kullanım alanına sahip olabileceklerini, denklem çözümleri üzerindeki araştırmaların ilerletilebileceğini ve gelişmiş görüntü iyileştirme yöntemlerinin geliştirilebileceğini

göstermektedir. Bu tez, gelecekteki araştırmalara yol gösterici olmayı amaçlamaktadır ve komütatif eliptik oktonyon cebri alanında daha ileri düzeyde keşiflerin yapılmasını teşvik etmektedir.



KAYNAKLAR

- Mitchelmore, M. C. (2002, Mayıs, 27-31). The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge. *East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Singapore.
- Catoni F., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P. (2005). N-dimensional geometries generated by hypercomplex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 15, 1-25. <https://doi.org/10.1007/s00006-005-0001-4>
- Hamilton, W. R. (1848). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(219), 58-60. <https://doi.org/10.1080/14786444708645898>
- Akar, M., Yüce, S., Şahin, S. (2018). On the dual hyperbolic numbers and the complex hyperbolic numbers. *Journal of Computer Science and Computational Mathematics*, 8(1), 1-6. <https://doi.org/10.20967/jcscm.2018.01.001>
- Gu, Y. Q. (2023). Clifford Algebras, Hypercomplex Numbers and Nonlinear Equations in Physics. *Geometry, Integrability and Quantization, Papers and Lecture Series*, 25, 47-72.
- Gürlebeck, K., Habetha, K., Sprößig, W. (2007). *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*. Springer Science and Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8272-8>
- Hazewinkel, M. (2012). *Encyclopaedia of Mathematics: Reaction-Diffusion Equation-Stirling Interpolation Formula*. Springer Science and Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-1235-0>
- Lounesto, P. (1986). *Clifford algebras and spinors*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526022>
- Singh, P., Gupta, A., Joshi, S. D. (2022). On the hypercomplex numbers and normed division algebra of all finite dimensions: Beyond quaternions and octonions. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11918.64321/2>
- Watanabe, R. A., Laureano, E. E., Watanabe, C. C. T. (2019, Haziran). Fuzzy Octonion Numbers and Fuzzy Hypercomplex Numbers. In 2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-6). IEEE. <https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2019.8858970>
- Bolat, C., İpek, A. (2012). A method to find the solution of the linear octonionic equation $\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = p$. *General Mathematics Notes*, 12(2), 10-18. <http://dx.doi.org/10.12785/msl/030303>
- Bolat, C., İpek, A. (2014). On the solutions of some linear complex quaternionic equations. *The Scientific World Journal*, (2014). <https://doi.org/10.1155/2014/563181>
- Flaut, C. (2001). Some equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 9(2), 45-68.

- Flaut, C., Ştefănescu, M. (2009). Some equations over generalized quaternion and octonion division algebras. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 427-439.
- Helmstetter, J. (2012). The quaternionic equation $ac + xb = b$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22, 1055-1059. <https://doi.org/10.1007/s00006-012-0322-z>
- Iii, R. C., Bhattacharyya, S. P. (1983). Robust and well-conditioned eigenstructure assignment via Sylvester's equation. *Optimal Control Applications and Methods*, 4(3), 205-212. <https://doi.org/10.1002/oca.4660040302>
- Johnson, R. E. (1944). On the equation $\chi\alpha = \gamma\chi + \beta$ over an algebraic division ring. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1944-08112-3>
- Kwon, B. H., Youn, M. J. (1987). Eigenvalue-generalized eigenvector assignment by output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5), 417-421. <https://doi.org/10.1109/TAC.1987.1104623>
- Liu, X. (2018). The η -anti-Hermitian solution to some classic matrix equations. *Applied Mathematics and Computation*, 320, 264-270. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.09.033>
- Liu, X., Zhang, Y. (2023). *Matrices over Quaternion Algebras*. In: Moslehian, M.S. (eds) Matrix and Operator Equations and Applications. Mathematics Online First Collections. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/16618_2023_46
- Porter, R. M. (1997). Quaternionic Linear and Quadratic Equations. *Journal of Natural Geometry*, 11, 101-106.
- Shafai, B., Bhattacharyya, S. P. (1988). An algorithm for pole assignment in high order multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(9), 870-876. <https://doi.org/10.1109/9.1320>
- Shpakivskyi, V. S. (2011). Linear quaternionic equations and their systems. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 21(3), 637-645. <https://doi.org/10.1007/s00006-010-0264-2>
- Tian, Y. (1999). Similarity and consimilarity of elements in the real Cayley-Dickson algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 9(1), 61-76. <https://doi.org/10.1007/BF03041938>
- Wang, G., Guo, Z., Zhang, D., Jiang, T. (2020). Algebraic techniques for least squares problem over generalized quaternion algebras: A unified approach in quaternionic and split quaternionic theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(3), 1124-1137. <https://doi.org/10.1002/mma.5917>
- Jiang, T. S., Wei, M. S. (2005). On a solution of the quaternion matrix equation $X - A\tilde{X}B = C$ and its application. *Acta Mathematica Sinica*, 21(3), 483-490. <https://doi.org/10.1007/s10114-004-0428-x>
- Wang, Q. W., Zhang, H. S., Yu, S. W. (2008). On solutions to the quaternion matrix equation. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 17, 343-358. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1268>
- Jiang, T., Ling, S. (2013). On a solution of the quaternion matrix equation $A\tilde{X} - XB = C$ and its applications. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 689-699. <https://doi.org/10.1007/s00006-013-0384-6>

- Kösal, H. H. (2016). *Komütatif kuaterniyonların matrisleri üzerine* [Doktora tezi]. Sakarya Üniversitesi.
- Liu, X., Zhang, Y. (2019). Consistency of Split Quaternion Matrix Equations $AX^* - XB = CY + D$ and $X - AX^*B = CY + D$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 29, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s00006-019-0980-1>
- Yu, C. E., Liu, X., Zhang, Y. (2020). The generalized quaternion matrix equation $AXB + CX \star D = E$. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(15), 8506-8517.
- Tosun, M., Hüda Kösal, H. (2021). An Algorithm for Solving the Sylvester s-Conjugate Elliptic Quaternion Matrix Equations. *Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics*, 279-292. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61334-1_14
- Tian, Y., Liu, X., Zhang, Y. (2023). Least-squares solutions of the generalized reduced biquaternion matrix equations. *Filomat*, 37(3), 863-870.
- Coxeter, H. S. M. (1946). Integral cayley numbers. *Duke Mathematical Journal*, 13(4), 561-578. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-46-01347-6>
- Conway, J. H., Smith, D. A. (2003). *On quaternions and octonions*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781439864180>
- Tian, Y. (2000). Matrix representations of octonions and their applications. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 10, 61-90. <https://doi.org/10.1007/BF03042010>
- Ludkovsky, S. V. (2013). Integration of vector hydrodynamical partial differential equations over octonions: An International Journal. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58(5), 579-609. <https://doi.org/10.1080/17476933.2011.598930>
- Flaut, C., Shpakivskyi, V. (2015). An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25, 337-350. <https://doi.org/10.1007/s00006-014-0493-x>
- İpek, A., Çimen, C. B. (2016). On the solutions of some systems of linear real octonion equations. *Palestine Journal of Mathematics*, 5(2), 292-303.
- Demir, S., Zeren, E. (2018). Multifluid plasma equations in terms of hyperbolic octonions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(04), 1850053. <https://doi.org/10.1142/S0219887818500536>
- Loginov, E. K. (2021). Octonionic instantons in eight dimensions. *Physics Letters B*, 816, 136244. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136244>
- Daneshfar, F., Jamshidi, M. B. (2023). An octonion-based nonlinear echo state network for speech emotion recognition in Metaverse. *Neural Networks*, 163, 108-121. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2023.03.026>
- Bouman, C., Sauer, K. (1993). A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(3), 296-310. <https://doi.org/10.1109/83.236536>
- Bülow, T. (1999). *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images* [Doktora Tezi]. Christian Albrechts University.

- Ell, T. A., Sangwine, S. J. (2006). Hypercomplex Fourier transforms of color images. *IEEE Transactions on image processing*, 16(1), 22-35.
- Felsberg, M. (1998). *Signal Processing Using Frequency Domain Methods in Clifford Algebra* [Yüksek Lisans Tezi]. Christian Albrechts University.
- Figueiredo Bahia, B. (2022). Hypercomplex processing of vector-valued seismic signals [Doktora Tezi]. University of Alberta. <https://doi.org/10.7939/r3-8deh-e547>
- Gai, S., Huang, X. (2021). Reduced biquaternion convolutional neural network for color image processing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 32(3), 1061-1075. <https://doi.org/10.1109/TCSVT.2021.3073363>
- Valenti, R. G., Dryanovski, I., Xiao, J. (2015). A linear Kalman filter for MARG orientation estimation using the algebraic quaternion algorithm. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 65(2), 467-481. <https://doi.org/10.1109/TIM.2015.2498998>
- Zaghloul, R. I., Hiary, H. (2020). Image colour edge detection using hypercomplex convolution. *International Journal of Signal and Imaging Systems Engineering*, 12(1-2), 54-61.
- Wang, C., Zhang, Q., Xia, Z., Zhou, L., Wei, Z., Zhang, H., Ma, B. (2023). Multi-dimensional hypercomplex continuous orthogonal moments for light-field images. *Expert Systems with Applications*, 217, 119553.
- Zhang, F., Wei, M., Li, Y., Zhao, J. (2015). Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ with applications. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 425-433. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.046>
- Witten, B., Shragge, J. (2006, Ekim). Quaternion-based signal processing. In 2006 SEG Annual Meeting. One Petro. <https://doi.org/10.1190/1.2370120>
- Yu, L., Xu, Y., Xu, H., Zhang, H. (2013, Temmuz). Quaternion-based sparse representation of color image. In 2013 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME) (pp. 1-7). <https://doi.org/10.1109/ICME.2013.6607436>
- Grigoryan, A. M., Agaian, S. S. (2014). Retooling of color imaging in the quaternion algebra. *Applied Mathematics and Sciences: An International Journal*, 1(3), 23-39.
- Kolaman, A., Egozi, A., Guterman, H., Coleman, B. L. (2011, Temmuz). Relativity and Contrast Enhancement. In IMAGAPP/IVAPP (pp. 94-99).
- Yuan, S. F., Wang, Q. W., Duan, X. F. (2013). On solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ and their applications in color image restoration. *Applied Mathematics and Computation*, 221, 10-20. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.069>
- Lazendic, S., De Bie, H., Pizurica, A. (2018, Eylül). Octonion sparse representation for color and multispectral image processing. In 2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO) (pp. 608-612). IEEE. <https://doi.org/10.23919/EUSIPCO.2018.8553272>

- Wang, C., Hao, Q., Ma, B., Wu, X., Li, J., Xia, Z., Gao, H. (2021). Octonion continuous orthogonal moments and their applications in color stereoscopic image reconstruction and zero-watermarking. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 106, 104450. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2021.104450>
- Daoui, A., Yamni, M., Karmouni, H., Sayyouri, M., Qjidaa, H., Ahmad, M., Abd El-Latif, A. A. (2022). Color stereo image encryption and local zero-watermarking schemes using octonion Hahn moments and modified Henon map. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 34(10), 8927-8954. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2022.08.021>
- Atali, G., Kösal, H. H., Pekyaman, M. (2023). A new image restoration model associated with special elliptic quaternionic least-squares solutions based on LabVIEW. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 425, 115071. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115071>
- Pekyaman, M. (2021). *AX = B eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü ve görüntü iyileştirmedeki uygulamaları* [Yüksek Lisans Tezi]. Sakarya Üniversitesi.
- Grigoryan, A. M., Agaian, S. S. (2018, Nisan). Quaternion and octonion color image processing with MATLAB. SPIE--The International Society for Optical Engineering. <https://doi.org/10.1117/3.2278810>
- Luma [https://en.wikipedia.org/wiki/Luma_\(video\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Luma_(video)) adresinden 4 Ocak 2023 tarihinde alınmıştır.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Arzu SÜREKÇİ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat, Matematik
- **Yükseklisans** : 2019, Sakarya Üniversitesi, Geometri, Tezli
- **Doktora** :Halen, Sakarya Üniversitesi, YÖK 100/2000 Doktora, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik, Matematik Anabilim Dalı.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2016 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümün'ü üçüncülük derecesiyle bitirdi.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Cihan Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (2022). A Study on Commutative Elliptic Octonion Matrices. *Analele Universitatii Ovidius Constanta Seria Matematica*, 30(1), 151-169.
- Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (2022). Commutative Elliptic Octonions. *Honam Mathematical Journal*, 24(2), 195-208.
- Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (11.01.2022 tarihi itibariyle inceleme altında). An Algorithm for Solution of the Sylvester s-Conjugate Linear Equation for the Commutative Elliptic Octonion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.
- Cihan, A., ve Güngör, M. A. (2020, 25-28, Ağustos). Commutative Octonion Matrices. *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Skopje, North Macedonia.
- Cihan, A., ve Güngör, M. A. (2021, 12-13, Temmuz). A Study on Commutative Elliptic Octonion Matrices. *18th International Geometry Symposium*, Malatya.
- Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (2021, 25-27, Ağustos). Commutative Elliptic Octonions. *10th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Sakarya.

- Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (2022, 27-30, Haziran). Eigenvalues and Eigenvectors of Commutative Elliptic Octonion Matrices. *19th International Geometry Symposium*, Edirne.
- Sürekçi, A., ve Güngör, M. A. (2022, 29-1, Ağustos-Eylül). Applications of Commutative Elliptic Octonion Matrices in Image Restoration. *11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, İstanbul.

Diğer Eserler:

- Güngör, M. A., ve Cihan, A. (2019). On dual-hyperbolic numbers with generalized Fibonacci and Lucas numbers components. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 2(2), 162-172.
- Cihan, A., Azak, A. Z., Güngör, M. A. ve Tosun, M. (2019). A study on dual hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers. *Analele Universitatii Ovidius Constanta Seria Matematica*, 27(1), 35-48.
- Cihan, A., Azak, A. Z., ve Güngör, M. A. (2020). On dual-complex numbers with generalized Fibonacci and Lucas numbers coefficients. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 8(1), 55-68.
- Sürekçi, A., Kösal, H. H., ve Güngör, M. A. (2021). A Note on Gershgorin Disks in the Elliptic Plane. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 4(3), 104-109.