T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KONFORMAL-BÜKÜLMÜŞ VE ÇARPIK-BÜKÜLMÜŞ ÇARPIM MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR

Sibel GERDAN AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof.Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Nisan, 2021

İSTANBUL

Bu çalışma 28.04.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr. Hakan Mete TAŞTAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Serap Öztop KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Bayram ŞAHİN
Ege Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç .Dr. Bahar KIRIK RACZ
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Fatma KARACA
Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi′nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü′nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) nun 119F179 numaralı 1001-Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana yön gösteren, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, beni akademik açıdan yetiştiren ve bir matematikçinin nasıl olması gerektiği konusunda her zaman örnek aldığım danışman hocam Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca, her zaman bana destek olan eşim Ersan AYDIN'a ve eğitim hayatım boyunca en az benim kadar emek sahibi olan aileme de teşekkür ederim.

Nisan, 2021 Sibel GERDAN AYDIN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\bar{M}$	: Riemanniyen manifold
$Boy(\bar{M})$	: $\bar{M}$ Riemanniyen manifoldunun boyutu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
T_pM	: M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
C^∞	: Diferansiyellenebilirlik sınıfı
$\mathscr{F}(M)$	: M manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathscr{X}(M)$	: M manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi
$\Gamma(TM)$	: M manifoldunun teğet demetine ait vektör alanlarının kümesi
$\Gamma(T^\perp M)$	: M manifoldunun normal demetine ait vektör alanlarının kümesi
$\bar{\nabla}$	: Levi-Civita koneksiyonu ya da Riemanniyen koneksiyon
J	: Hemen hemen kompleks yapı
$\mathscr{D}^T$	: Holomorfik dağılım
$\mathscr{D}^\perp$	: Tümel reel dağılım
$\mathscr{D}^\theta$	: θ eğik açılı eğik dağılım

Kısaltmalar	**Açıklama**
g.k.K.	: Global konformal Kaehler manifold
y.k.K.	: Yerel konformal Kaehler manifold

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KONFORMAL-BÜKÜLMÜŞ VE ÇARPIK-BÜKÜLMÜŞ ÇARPIM MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLAR

Sibel GERDAN AYDIN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Bu tez çalışmasının amacı, konformal-bükülmüş ve çarpık-bükülmüş manifoldların geometrisini incelemektir. Bu tip manifoldlar global konformal Kaehler manifoldların altmanifoldu olarak ele alınmış ve Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar incelenmiştir.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez çalışmasının literatürdeki geçmişinden yani bu konu ile alakalı araştırmacıların daha önce yaptığı çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde Riemanniyen manifold tanımı, bir Riemanniyen manifold üzerinde tanımlı temel tensörlerin tanımı ve Einstein-like Riemanniyen manifoldların farklı sınıflarının tanımları verilmiştir. İkinci alt bölümde Riemanniyen manifoldların altmanifoldu kavramı ve sağladığı özellikler ile altmanifold ile kapsayan manifold arasındaki ilişkiyi kuran Gauss, Weingarten gibi temel denklemler verilmiştir. Üçüncü alt bölümde hemen hemen Hermityen manifoldun, Kaehleriyen manifoldun tanımı ve bu tip manifoldların temel özellikleri verilmiştir. Bunun yanısıra, hemen hemen Hermityen manifoldların holomorfik, tümel reel, eğik, yarı-eğik, kısmi-eğik gibi bazı özel altmanifoldları tanıtılmıştır. Dördüncü alt bölümde, global ve yerel konformal Kaehler manifoldların tanımları ve bu manifoldlar için geçerli olan temel teorem ve denklemler verilmiştir. Beşinci alt bölümde çift bükülmüş çarpım manifoldun tanımı ve bazı

özel hallerini karakterize eden bir teorem yer almıştır. Ayrıca çift çarpık çarpım manifoldların kovaryant türev formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez çalışmasının hazırlanmasında izlenen yöntemlerden ve kullanılan araçlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tez çalışmasının bulgularından oluşmaktadır. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci alt bölümde konformal-bükülmüş çarpım manifold, çarpık-bükülmüş çarpım manifold, bir global konformal Kaehler manifoldun bir yarı-eğik altmanifoldu, bir global konformal Kaehler manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu tanımları ve bu tip altmanifoldların sağladığı temel denklemler ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, bir g.k.K. manifoldun bir konformal-bükülmüş çarpım ve çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldu için aşikar olmayan birer örnek kurulmuştur. Bir g.k.K. manifoldunun sırası ile, bir has yarı-eğik altmanifoldunun yerel olarak bir konformal-bükülmüş çarpım manifold olması için ve bir has kısmi-eğik altmanifoldunun yerel olarak bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bunun yanı sıra, konformal-bükülmüş çarpım altmanifoldun ve çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldunun ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik kurulmuştur. Dahası, Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunun çarpan manifoldlarının da Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir ve Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların farklı sınıfları karakterize edilmiştir. Tersine, çarpan manifoldları Einstein-benzeri manifold olan manifoldların kendisinin de Einstein-benzeri olup olmaması durumu da incelenmiştir.

Beşinci bölümde, tez çalışmasının genel bir değerlendirmesi yapılmış ve çalışmanın literatüre katkısından bahsedilmiştir. Ayrıca, bu çalışmadan hareketle hangi çalışmaların yapılabileceği üzerinde durulmuştur.

Nisan 2021, 117 sayfa.

Anahtar kelimeler: Bükülmüş çarpım altmanifold, çarpık çarpım altmanifold, holomorfik dağılım, tümel-reel dağılım, eğik dağılım, yerel ve global konformal Kaehler manifold, Einstein-benzeri manifold, Codazzi Ricci tensörü, Killing Ricci tensörü, Weyl konformal düz manifold.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

CONFORMAL-TWISTED AND WARPED-TWISTED PRODUCT MANIFOLDS AND SUBMANIFOLDS

Sibel GERDAN AYDIN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Hakan Mete TAŞTAN

The main purpose of this thesis is to research the geometry of conformal-twisted product and warped-twisted product submanifolds. These types of manifolds are studied as submanifolds of globally conformal Kaehler manifolds and Einstein-like warped-twisted product manifolds are investigated.

This study consists of five main chapters. In the first chapter, the history of this study is given, which means that the previous studies in the literature that were studied by researchers related to this subject have been mentioned.

The second chapter consists of five subsections. In the first subsection, the definitions of the Riemannian manifold, the main tensors defined on the Riemannian manifold and different classes of Einstein-like manifolds are given. In the second subsection, the definition of submanifold of Riemannian manifolds is given and the main properties of a submanifold are given. The equations of Gauss and Weingarten which establish relationship between submanifold and the ambient manifold are given as well. In the third subsection, definitions of almost Hermitian manifold, Kaehlerian manifold and the main properties of this kind of manifolds are given. In addition to this, some special submanifolds of almost Hermitian manifolds which are called holomorphic, totally real, semi-slant, hemi-slant etc. are introduced. In the fourth subsection, the definitions of locally and globally conformal Kaehler manifolds are given and main theorems and equations valid for these submanifolds are reminded. The fifth subsection includes the definition of doubly twisted product submanifolds and the theorem which characterizes some special cases of such manifolds. Besides, the covariant derivative formulas of doubly warped product manifolds are given.

In the third chapter, tools and methods that are used through the thesis are mentioned.

The fourth chapter is the main part of the thesis. This chapter consists of two subsections. In these subsections, the notion of conformal-twisted product submanifolds of the form ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ and ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ is introduced, where M^T is a holomorphic submanifold and M^θ is a proper slant submanifold of M in a globally conformal Kaehler manifold and f_2 and f_1 are conformal factor and twisting function, respectively. Necessary and sufficient conditions for proper semi-slant submanifold to be a locally conformal-twisted product for such submanifolds of the form ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ and ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ are given. A general inequality for the square norm of second fundamental form of these types of submanifolds is established. Moreover, the notion of warped-twisted product hemi-slant submanifolds of the form ${}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ with warping function f_2 on M^θ and twisting function f_1 is introduced, where $M^\perp$ is a totally real and M^θ is a slant submanifold of a globally conformal Kaehler manifold. A warped-twisted product hemi-slant submanifold of a globally conformal Kaehler manifold is proved to be a locally doubly warped product. Then, a general inequality for doubly warped product mixed geodesic hemi-slant submanifolds is established and some results for such submanifolds are gotten by using the equality sign of the general inequality. Additionally, necessary and sufficient conditions are given for the factor manifolds of Einstein-like warped-twisted manifolds to be a Einstein-like manifolds and different classes of Einstein-like warped-twisted product manifolds are characterized. Conversely, when the factor manifolds of warped-twisted product manifold are Einstein-like manifold, whether the warped-twisted product is Einstein-like is examined.

In the fifth chapter, the study is reviewed. The contribution of thesis to the literature is mentioned and what's more, it is mentioned that this study will inspire to different research topics.

April 2021, 117 pages.

Keywords: Twisted product submanifold, warped product submanifold, holomorphic distribution, totally real distribution, slant distribution, locally and globally conformal Kaehler manifold, Einstein-like manifold, Codazzi Ricci tensor, Killing Ricci tensor, Weyl conformal flat manifold.

1. GİRİŞ

Yeni bir Riemanniyen manifold (ya da, daha genel olarak sözde-Riemanniyen manifold) elde etmenin yollarından biri iki Riemanniyen manifoldu alışılmış olarak çarpmaktır. Bu şekilde elde edilen en genel manifoldlar çift bükülmüş çarpım manifoldlardır [45]. Aslında, bu kavram çok uzun zaman önce literatürde konformal olarak ayrılabilir uzaylar [61] olarak ortaya çıkmıştır. Çift bükülmüş çarpım manifoldlar kavramı çift çarpık çarpım [25], bükülmüş çarpım [18], çarpık çarpım [6] ve direkt çarpım kavramlarının bir genelleştirmesidir.

Diferansiyel geometride, en yoğun çalışma alanlarından birisi de altmanifoldlar teorisidir. Altmanifoldlar sınıfının holomorfik (değişmez), tümel-reel (ters-değişmez) [59], CR-(Cauchy-Riemann) [1], yarı-değişmez [2], eğik [14], yarı-eğik [43], kısmi-eğik [9, 46] gibi iyi bilinen sınıfları vardır. Bütün bu sınıflar kapsayan manifoldun hemen hemen kompleks ya da hemen hemen çarpım yapısının davranışı tarafından belirlenir.

Bishop ve O' Neill [6], negatif eğrilikli tam manifoldların geniş bir sınıfını inşa etmek için Riemanniyen manifoldların çarpık çarpımı kavramını tanıttı. Bu kavram aslında Riemanniyen manifoldların alışılmış çarpımının bir genelleştirilmesidir. Çarpık çarpım yapısı diferansiyel geometrinin yanı sıra fizikte de önemli bir rol oynamaktadır. Robertson-Walker, Schwarschild, statik ve Kruscal gibi standart uzay-zaman modelleri çarpık çarpımdır. Aynı zamanda, yıldızların ve kara deliklerin komşuluklarının en basit modeli yine bir çarpık çarpımdır [42]. Dahası, Einstein alan denkleminin çoğu çözümü çarpık çarpımlar cinsinden ifade edilebilir [3]. Çarpık çarpım altmanifoldlar teorisi, Chen [15] Kaehler manifoldların çarpık çarpım CR-altmanifoldlarını çalıştıktan sonra popüler bir çalışma alanı haline geldi. Çarpık çarpım altmanifoldlar teorisi ile ilgili bir çok çalışma Chen'in kitabında [16] bulunabilir.

Çarpık çarpım manifoldların aksine, çift çarpık çarpım altmanifoldlar çok aktif bir çalışma alanı olmamıştır. Bu durum Kaehler, yaklaşık Kaehler, yerel çarpım Riemanniyen ve aşkın-Sasakiyen gibi iyi bilinen yapılar içinde, çarpan manifoldları holomorfik ve tümel reel (bkz. [39, 49, 52, 56]) olan çift çarpık çarpım altmanifoldların var olmamasından kaynaklanmaktadır. Oysa, yerel konformal Kaehler manifoldların çift çarpık çarpım CR-altmanifoldları, Munteanu [38] tarafından çalışılmıştır.

Taştan ve Gerdan [52], çift bükülmüş çarpım manifoldların iki farklı sınıfını *1. ve 2. tip yaklaşık çift bükülmüş çarpım manifold* adı altında tanımlamıştır. Bu tezde, 1. tip yaklaşık çift bükülmüş çarpım manifoldlar *çarpık-bükülmüş çarpım manifold* ve 2. tip yaklaşık çift bükülmüş çarpım manifoldlar *konformal-bükülmüş çarpım manifold* olarak yeniden adlandırılmıştır.

Kaehleriyen manifoldlar içinde çarpık çarpım yarı-eğik altmanifoldların var olmadığı Şahin [47] tarafından ispatlanmıştır. Gerçekten, M^T ve M^θ, bir Kaehleriyen manifoldun sırası ile bir holomorfik ve bir has eğik altmanifoldu olmak üzere , Kaehleriyen manifold içinde $M^\theta \times_f M^T$ ve $M^T \times_f M^\theta$ formunda çarpık çarpım yarı-eğik altmanifold yoktur [47]. Dahası, Şahin [48] Kaehleriyen manifoldların aksine yerel çarpım Riemanniyen manifoldlar içinde, M^T ve M^θ, yerel çarpım Riemanniyen manifoldun sırası ile bir holomorfik ve bir has eğik altmanifoldu olmak üzere , $M^\theta \times_f M^T$ formundaki çarpık çarpım yarı-eğik altmanifoldları tanımlamış ve çalışmıştır. Bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun $M^T \times_f M^\theta$ formunda aşikar olmayan çarpık çarpım yarı-eğik altmanifoldu olmadığı yine aynı çalışmada [48] kanıtlanmıştır. Son zamanlarda, Taştan ve Tripathi [53] y.k.K. manifoldların yarı-eğik altmanifoldlarını çalışmıştır. Diğer taraftan, Matsumoto [33, 37], y.k.K. manifoldların $M^\theta \times_f M^T$ ve $M^T \times_f M^\theta$ formundaki çarpık çarpım yarı-eğik altmanifoldlarını incelemiştir.

Diğer taraftan, Einstein-benzeri manifold kavramı, Gray [29] tarafından Einstein manifoldların genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır ve Einstein-benzeri manifoldların farklı sınıfları tanıtılmıştır. Besse, bu tip manifoldların detaylı bir çalışmasını kitabında ([5], Chapter 16) vermiştir. Bu andan itibaren, Einstein-benzeri manifoldlar değişik uzaylarda çeşitli koşullar altında incelenmiştir.

Örneğin, Boeckx [7], $\mathscr{A}$ sınıfından yarı-simetrik Einstein-benzeri manifoldları, Berndt [4], $\mathscr{D}$ sınıfından 3-boyutlu Einstein-benzeri manifoldları çalışmıştır. Deszcz [21] ise, aslında genelleştirilmiş Einstein manifold olan harmonik Weyl tensörüne sahip kompakt çarpık çarpım manifoldların bir kurulumunu çalışmıştır. Öte yandan, Bueken ve Vanhecke [8] tarafından sabit Ricci-eğrilik özdeğerine sahip $\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ sınıfından 3-boyutlu Einstein-benzeri manifoldların tam bir sınıflandırılması yapılmıştır. $\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ sınıfından Einstein-benzeri metriğe sahip küre ve projektif uzayların bir sınıflandırması Peng ve Qian [44] tarafından yapılmıştır. Zaeim v.d. [64], 4-boyutlu Einstein-benzeri özdeş (homogeneous) manifoldların tam bir sınıflandırmasını yapmıştır. Bunun yanısıra, Calvaruso, değişik uzaylarda, farklı koşullar altında Einstein-benzeri metrikleri çalışmıştır [10–13].

Einstein-benzeri olma koşulları, aynı zamanda eğrilik koşullarıdır. Çarpık çarpım manifoldlar üzerinde eğrilik koşulları hem diferansiyel hem cebirsel açıdan bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Çarpık çarpım manifoldlar üzerinde diferansiyel tipteki eğrilik koşulları için [20, 27] çalışmalarına bakılabilir. Genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay-zaman yapısı 1-boyutlu baza sahip çarpık çarpımlara örnektir. Benzer eğrilik koşulları genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay-zaman yapıları üzerinde de incelenmiştir [34, 35]. Mantica ve Shenawy Einstein-benzeri çarpık çarpım manifoldları çalışmıştır [33]. Bunun yanısıra, El-Sayied v.d. [24], Einstein-benzeri çift çarpık çarpımları ve bu çarpım yapılarının uygulamalarını incelemiştir.

Bütün bu çalışmalardan ilham alarak, bu tezde Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların farklı sınıfları incelenmiştir. Einstein-benzeri çarpık bükülmüş çarpım manifoldların farklı sınıflarının çarpan manifoldlarının da Einstein-benzeri olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Aksine çarpan manifoldları Einstein-benzeri manifold iken çarpık-bükülmüş çarpım manifoldun da Einstein-benzeri olması için de gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bunun yanı sıra çarpık-bükülmüş çarpım manifold yapısı ve konformal-bükülmüş çarpım manifold yapısı g.k.K. manifoldların altmanifoldları olarak ele alınmıştır.

G.k.K. manifoldların konformal-bükülmüş çarpım has yarı-eğik altmanifoldları ve çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldları düşünülmüş ve çalışılmıştır. G.k.K. manifoldların bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu ve bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu için aşikar olmayan örnekler verilmiştir. Dahası, bir g.k.K. manifodunun bir has yarı-eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ ve ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ formunda yerel olarak bir konformal-bükülmüş çarpım olması için ve bir g.k.K. manifoldunun bir has kısmi-eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ formunda yerel olarak bir çarpık-bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca, bu tip altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi için genel bir eşitsizlik elde edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu kısımda, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, kavramlar ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

2.1. RİEMANNİYEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde, Riemanniyen manifoldların geometrisinden bahsedilmiştir. Riemanniyen manifold tanımı, Ricci eğriliği, Weyl konformal eğrilik tensörü, skaler eğrilik, Hessiyen tensörü, Laplasyen gibi temel tanımlar, manifold üzerinde özel vektör alanları gibi kavramlar ve Einstein-like Riemanniyen manifold tanımı verilmiştir.

Tanım 2.1.1 *[50] $\bar{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda*

$$\bar{g} : \mathscr{X}(\bar{M}) \times \mathscr{X}(\bar{M}) \to \mathscr{F}(\bar{M})$$

ile tanımlı $\bar{g}$ bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani her $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathscr{X}(\bar{M})$ için

a) $\bar{g}(\bar{X},\bar{Y}) = \bar{g}(\bar{Y},\bar{X})$,

b) $\bar{g}(\bar{X},\bar{X}) \geq 0$ *ve* $\bar{g}(\bar{X},\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = 0$

koşulları sağlanıyorsa $\bar{g}$ bilineer formuna Riemanniyen metrik *veya* metrik tensör *adı verilir. Bu durumda $(\bar{M},\bar{g})$ ikilisine bir* Riemanniyen manifold *denir.*

Tanım 2.1.2 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$ bir Riemanniyen manifold olsun. $\bar{M}$ üzerindeki bir $\bar{\nabla}$ koneksiyonu, herhangi $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z} \in \mathscr{X}(\bar{M})$ için,*

$$\bar{X}[\bar{g}(\bar{Y},\bar{Z})] = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}) + \bar{g}(\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) \tag{2.1}$$

koşulunu sağlarsa, $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna $\bar{g}$ ile uyumlu (compatible) koneksiyon *denir. Bu koşul $\bar{\nabla}\bar{g} = 0$ koşuluna denktir. Bu durumda $\bar{g}$ metriğine $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre* paralel *denir.*

Teorem 2.1.3 *[42]* $(\bar{M},\bar{g})$ *bir Riemanniyen manifold olsun. Herhangi* $\bar{X},\bar{Y} \in \mathscr{X}(\bar{M})$ *için,*

$$[\bar{X},\bar{Y}] = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} \tag{2.2}$$

$$\bar{X}[\bar{g}(\bar{Y},\bar{Z})] = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}) + \bar{g}(\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) \tag{2.3}$$

koşullarını sağlayan bir tek $\bar{\nabla}$ *koneksiyonu vardır.* $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ *manifoldunun* Levi-Civita *koneksiyonu ya da* Riemanniyen koneksiyonu *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.1.4 *[50]* $(\bar{M},\bar{g})$ *bir Riemanniyen manifold ve* $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ *üzerinde bir lineer koneksiyon olsun.* $\bar{M}$ *manifoldunun Riemann eğrilik tensörü* $R : \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \to \Gamma(T\bar{M})$, *herhangi* $\bar{U},\bar{V},\bar{W} \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$R(\bar{U},\bar{V})\bar{W} = \bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W} - \bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{W} - \bar{\nabla}_{[\bar{U},\bar{V}]}\bar{W} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlı $(3,1)$*-tipinden bir tensör alanıdır.*

Tanım 2.1.5 *[50]* $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$, $(\bar{M},\bar{g})$ *Riemanniyen manifoldu üzerinde lokal ortonormal çatı alanı olsun.* $\bar{U},\bar{V} \in \Gamma(T\bar{M})$ *için* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldunun* $S : \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \to \mathscr{F}(\bar{M})$ Ricci tensörü

$$S(\bar{U},\bar{V}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{g}(R(e_i,\bar{U})\bar{V},e_i) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı $(2,0)$*- tipinden bir tensör alanıdır.*

Tanım 2.1.6 *[50]* $(\bar{M},\bar{g})$, *m-boyutlu Riemanniyen manifoldunun p noktasındaki* $T_p\bar{M}$ *teğet uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler* $\bar{U}$ *ve* $\bar{V}$ *olmak üzere*

$$K(P) = K(\bar{U},\bar{V}) = \frac{\bar{g}(R(\bar{U},\bar{V})\bar{V},\bar{U})}{\bar{g}(\bar{U},\bar{U})\bar{g}(\bar{V},\bar{V}) - \bar{g}(\bar{U},\bar{V})^2} \tag{2.6}$$

değerine $\bar{M}$ *manifoldunun P düzlemine göre* kesit eğriliği *denir. Eğer kesitsel eğrilik bütün düzlem kesitleri için aynı c sabitine eşit ise* $\bar{M}$ *manifolduna* sabit eğrilikli uzay *ya da* reel uzay form *denir ve* $\bar{M}(c)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.7 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$, m-boyutlu Riemanniyen manifoldunun p noktasındaki $T_p\bar{M}$ teğet uzayının 2-boyutlu alt uzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına $\bar{M}$ manifoldunun* skaler eğriliği *denir ve τ ile gösterilir. Buna göre $T_p\bar{M}$ teğet uzayının lokal ortonormal bazı $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ olmak üzere τ skaler eğriliği*

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} S(e_i,e_i) \tag{2.7}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.8 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$ Riemanniyen manifold ve $\bar{U} \in T\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ manifoldu üzerinde $\bar{U}$ vektör alanının* diverjansı *$div\bar{U} = iz\bar{\nabla}\bar{U}$ olarak tanımlanır. Böylece $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere,*

$$div\bar{U} = \sum_{i=1}^{m} \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{U},e_i) \tag{2.8}$$

olur.

Tanım 2.1.9 *[50] $f \in \mathscr{F}(\bar{M})$ olmak üzere $(\bar{M},\bar{g})$ Riemanniyen manifoldu üzerinde tanımlı f fonksiyonunun* gradiyenti *$\bar{\nabla}f$, $\bar{M}$ üzerinde bir vektör alanıdır ve $\bar{U} \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$\bar{g}(\bar{\nabla}f,\bar{U}) = df(\bar{U}) = \bar{U}(f) \tag{2.9}$$

eşitliği gerçeklenir.

Tanım 2.1.10 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$ bir Riemanniyen manifold ve $f \in \mathscr{F}(\bar{M})$ olmak üzere f fonksiyonunun* Hessiyan tensörü *$H^f : \Gamma(T\bar{M}) \to \Gamma(T\bar{M})$, $\bar{U} \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$H^f(\bar{U}) = \bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{\nabla}f \tag{2.10}$$

ile tanımlı bir lineer dönüşümdür.

Tanım 2.1.11 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$ bir Riemanniyen manifold ve $f \in \mathscr{F}(\bar{M})$ olsun. Bu durumda h^f : $\Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \to \Gamma(T\bar{M})$ olmak üzere $\bar{U},\bar{V} \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$h^f(\bar{U},\bar{V}) = \bar{g}(H^f(\bar{U}),\bar{V}) \tag{2.11}$$

tensörüne f fonksiyonunun Hessiyan formu *denir.*

Tanım 2.1.12 *[50] $(\bar{M},\bar{g})$ bir Riemanniyen manifold ve $f \in \mathscr{F}(\bar{M})$ olsun. f fonksiyonunun laplasyanı Δf,*

$$\Delta f = div\bar{\nabla} f \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.13 *[59] $(\bar{M},\bar{g})$ manifoldu m-boyutlu bir Riemanniyen manifold olsun. Bu durumda, $\bar{M}$ manifoldunun* Weyl konformal eğrilik tensör alanı $\mathscr{W}$ *, $\bar{M}$ üzerindeki herhangi $\bar{X},\bar{Y}$ ve $\bar{Z}$ vektör alanları için*

$$\begin{aligned}\mathscr{W}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z} = \;& R(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z} \\ & + \frac{1}{m-2}\left\{S(\bar{X},\bar{Z})\bar{Y} - S(\bar{Y},\bar{Z})\bar{X} + \bar{g}(\bar{X},\bar{Z})Q\bar{Y} - \bar{g}(\bar{Y},\bar{Z})Q\bar{X}\right\} \\ & - \frac{\tau}{(m-1)(m-2)}\left\{\bar{g}(\bar{X},\bar{Z})\bar{Y} - \bar{g}(\bar{Y},\bar{Z})\bar{X}\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

ile tanımlı $(1,3)$ tipinden bir tensör alanıdır, burada Q Ricci operatörü ve τ, $\bar{M}$ manifoldunun skaler eğriliğidir.

Tanım 2.1.14 *Bir Riemanniyen manifold $(\bar{M},\bar{g})$ üzerinde bir $\bar{V}$ vektör alanı, $\bar{M}$ üzerindeki herhangi $\bar{X}$ vektör alanı için [63]*

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{V} = \lambda\bar{X} + \mu(\bar{X})\bar{V} \tag{2.14}$$

eşitliğini gerçeklerse gövde-şekillendiren *(torse-forming) olarak adlandırılır, burada λ bir fonksiyon ve μ bir 1-formdur. Eğer* (2.14) *denklemindeki μ 1-formu özdeş olarak sıfırsa, bu durumda $\bar{V}$ vektör alanına* eşdairesel *(concircular) [17, 51, 60, 62] denir. Eğer $\lambda = 1$ ise, bu durumda $\bar{V}$ vektör alanına* uyuşan *(concurrent) [51, 60] denir. Eğer* (2.14) *denkleminde $\lambda \equiv 0$ sağlanırsa, $\bar{V}$ vektör alanına* tekrarlayan *(recurrent) vektör alanı denir.*

2.1.1. Einstein-Benzeri Riemanniyen Manifoldlar

Bu alt bölümde Einstein-benzeri (Einstein-like) Riemanniyen manifoldların farklı sınıflarının tanımları verilmiştir.

Tanım 2.1.1.1 *[29] Bir Riemanniyen manifold* $(\bar{M},\bar{g})$ *bir* dairesel paralel Ricci tensorü*ne sahip ise, yani,* $\bar{M}$ *üzerindeki herhangi* $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ *vektör alanları için*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}S)(\bar{Y},\bar{Z})+(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}S)(\bar{Z},\bar{X})+(\bar{\nabla}_{\bar{Z}}S)(\bar{X},\bar{Y})=0$$

denklemi gerçekleniyor ise $\bar{M}$ *manifolduna* $\mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri manifold *denir. Bu koşul* $\bar{M}$ *üzerindeki herhangi* $\bar{X}$ *vektör alanı için*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}S)(\bar{X},\bar{X})=0 \tag{2.15}$$

koşuluna denktir.

Tanım 2.1.1.2 *[29] Bir* $(\bar{M},\bar{g})$ *Riemanniyen manifoldunun Ricci tensörü bir Codazzi tensor ise yani,* $\bar{M}$ *üzerindeki herhangi* $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ *vektör alanları için*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}S)(\bar{Y},\bar{Z})=(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}S)(\bar{X},\bar{Z}) \tag{2.16}$$

denklemi sağlanırsa, bu durumda $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldu* $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold *olarak adlandırılır. Bu koşul aşağıdaki koşullardan birine denktir:*

i) $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldunun Riemanniyen tensörü harmoniktir.*

ii) $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörü harmoniktir ve* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldunun skaler eğriliği sabittir.*

Tanım 2.1.1.3 *[29] Bir* $(\bar{M},\bar{g})$ *Riemanniyen manifoldu paralel Ricci tensörüne sahip ise, yani,* $\bar{M}$ *üzerindeki herhangi* $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ *vektör alanları için*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}S)(\bar{Y},\bar{Z})=0 \tag{2.17}$$

denklemi sağlanırsa, $(\bar{M},\bar{g})$ *manifolduna* $\mathscr{P}$ sınıfından Einstein-benzeri manifold *denir. Bu durumda* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldu* Ricci simetrik *manifold olarak da adlandırılır.*

Tanım 2.1.1.4 *[29]* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldu m-boyutlu bir Riemanniyen manifold ve* $\mathscr{T}$ *tensörü*

$$\mathscr{T} = S - \frac{2\tau}{m+2}\bar{g}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\mathscr{T}$ *tensörü Killing ise, bu durumda* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifolduna* $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri manifold *denir. Bu koşul* $\bar{M}$ *üzerindeki herhangi* $\bar{X}$ *vektör alanı için*

$$0 = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\mathscr{T})(\bar{X},\bar{X}) \tag{2.18}$$

koşuluna denktir.

Tanım 2.1.1.5 *[29]* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldu m-boyutlu bir Riemanniyen manifold olsun. Eğer* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifoldu sabit bir skaler eğriliğe sahip ise bu durumda* $(\bar{M},\bar{g})$ *manifolduna* $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ sınıfından Einstein-benzeri manifold *denir.*

2.2. RİEMANNİYEN MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde bir Riemanniyen manifoldun altmanifoldu tanımı, altmanifoldlar için sağlanan temel denklemler ve tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1 *[50]* (M,g) *ve* $(\bar{M},\bar{g})$ *Riemanniyen manifoldları verilsin. Herhangi bir* $p \in M$ *noktasında, herhangi* $X_p, Y_p \in T_pM$ *için,*

$$g(X_p,Y_p) = \bar{g}(d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y))$$

koşulunu sağlayan bir $\varphi : M \to \bar{M}$ *dönüşümü tanımlansın. Bu durumda,* φ *dönüşümüne* izometrik dönüşüm *denir.* $\varphi_{*p}(X_p) = 0$ *iken* $X_p = 0$ *olduğundan,* $\varphi_* = d\varphi$ *türev dönüşümü p noktasında bire-bir bir dönüşümdür. M manifoldunun herhangi bir noktasında izometrik olan bir* φ *dönüşümüne bir daldırma denir ve bu daldırma* izometrik daldırma *(isometric* *immersion) olarak adlandırılır. Buna ek olarak, φ dönüşümü bire-bir ise φ dönüşümüne, M manifoldundan $\bar{M}$ manifolduna bir* izometrik gömme *(isometric imbedding) denir.*

Tanım 2.2.2 *[42]*

1) *M manifoldu, $\bar{M}$ manifoldunun bir topolojik alt uzayıdır,*

2) *$\varphi : M \to \bar{M}$ içerme dönüşümü diferansiyellenebilirdir ve her $p \in M$ noktasında $d\varphi$ diferansiyel dönüşümü bire-birdir,*

koşullarını sağlayan bir M Riemanniyen manifoldu bir $\bar{M}$ manifoldunun diferansiyellenebilir altmanifoldu *veya* gömülmüş altmanifoldu *olarak adlandırılır.*

Örnek. [42] $\mathscr{V}$ kümesi, M manifoldunun bir açık alt kümesi olsun. M manifoldunun diferansiyellenebilir yapısını $\mathscr{V}$ kümesine kısıtlayarak, $\mathscr{V}$ kümesini M manifoldu ile aynı boyuta sahip bir manifold yapan diferansiyellenebilir bir yapı kurulabilir. $\phi : \mathscr{V} \to M$ dönüşümü herhangi $p \in \mathscr{V}$, $\phi(p) = p$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda $\phi(\mathscr{V})$ kümesi, M manifoldunun gömülmüş bir altmanifoldu olur ve bu altmanifolda M manifoldunun *açık altmanifoldu* denir.

Tanım 2.2.3 *[50] M manifoldu, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun ve $\varphi : M \to \bar{M}$ içerme fonksiyonu tanımlansın. $\bar{\mathscr{V}}$, $\bar{M}$ nin bir açık komşuluğu olsun ve $\mathscr{V} = M \cap \bar{\mathscr{V}}$ koşulu sağlansın. Herhangi $p \in M$ için*

$$\bar{X}(p) = X(p)$$

oluyorsa, yani $d\varphi_p(X) = \bar{X}_p$ koşulu gerçekleniyorsa, $\bar{X} \in \mathscr{X}(\bar{\mathscr{V}})$ vektör alanı $X \in \mathscr{X}(\mathscr{V})$ vektör alanınının diferansiyellenebilir genişlemesi *olarak adlandırılır.*

$(\bar{M}, g)$ ve M sırası ile $\bar{m}$-boyutlu Riemanniyen manifold ve m-boyutlu keyfi manifold olsun ve $\varphi : M \to \bar{M}$ daldırmasını göz önüne alalım. φ daldırması M manifoldu üzerine

$$\varphi_p^* g(X_p, Y_p) = g(d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y))\ ;\ X, Y \in \Gamma(T_pM)\ ,\ p \in M$$

koşulunu sağlayan bir $\varphi^* g$ pozitif tanımlı, simetrik, bilineer formunu indirger. Bu Riemanniyen metriği g ile gösterilsin. Bu durumda (M, g) bir Riemanniyen manifold ve φ

de izometrik daldırma olur. $\bar{m}-m$ sayısı M altmanifoldunun ek boyutu olarak adlandırılır. Burada, $\varphi(p)$ ile p noktaları ve $\varphi^*(X)$ ile $X\in\mathscr{X}(M)$ vektör alanları özdeş olarak kabul edilir. $p\in M$ noktasında, T_pM ile M altmanifoldunun teğet uzayı gösterilsin. O halde, T_pM , $T_p\bar{M}$ teğet uzayının altvektör uzayıdır. T_pM uzayına normal (dik) olan uzay $T_p^{\perp}M$ ile gösterilir. $T_p^{\perp}M$ uzayı normal uzay ve bu uzayın meydana getirdiği teğet demet *normal demet* olarak adlandırılır. Böylece $T_p\bar{M}$ teğet uzayı için

$$T_p\bar{M}=T_pM\oplus T_p^{\perp}M \tag{2.19}$$

veya

$$T\bar{M}=TM\oplus TM^{\perp} \tag{2.20}$$

şeklinde ayrışır. Herhangi $\xi\in T_pM^{\perp}$ vektörüne *normal vektör* denir. Normal vektör alanlarının kümesi $\mathscr{X}^{\perp}(M)$ ile gösterilir.

M manifoldu bir $(\bar{M},g)$ Riemanniyen manifoldu içine izometrik olarak gömülmüş bir altmanifold olsun. $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ manifoldunun g ile ilgili Levi-Civita koneksiyonunu ve ∇ ve $\nabla^{\perp}$ sırası ile M üzerine indirgenmiş ve indirgenmiş normal koneksiyonu göstersin. Bu durumda, herhangi $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $Z\in\Gamma(T^{\perp}M)$ için, Gauss ve Weingarten formülleri [59] sırası ile

$$\bar{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y)\ , \tag{2.21}$$

$$\bar{\nabla}_XZ=-A_ZX+\nabla_X^{\perp}Z\ , \tag{2.22}$$

ile verilir. h, M manifoldunun ikinci temel formu ve A_Z, Z ile ilgili Weingarten endomorfizmidir. İkinci temel form h ve şekil operatörü A

$$g(h(X,Y),Z)=g(A_ZX,Y) \tag{2.23}$$

ile bağlantılıdır.

Tanım 2.2.4 *[50] $\bar{M}$ bir Riemanniyen manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun m-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, M manifoldunun bir ortonormal bazı olmak üzere,* *M Riemanniyen manifoldunun H* ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \sum_{i=1}^{m} h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.2.5 *[50] $\bar{M}$ bir Riemanniyen manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer M manifoldunun ikinci temel formu $h = 0$ ise M manifolduna $\bar{M}$ içinde* tümel jeodezik *denir. Eğer ortalama eğrilik vektör alanı $H = 0$ ise M manifoduna* minimal *denir. Eğer her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $h(X,Y) = g(X,Y)H$ ise M manifolduna* tümel umbilik *denir.*

Tanım 2.2.6 *[59] $\bar{M}$ bir Riemanniyen manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\mathscr{D}_1$ ile $\mathscr{D}_2$, M üzerinde iki dağılım olmak üzere, eğer $X \in \mathscr{D}_1$ ve $Y \in \mathscr{D}_2$ iken $h(X,Y) = 0$ oluyorsa, bu durumda M manifolduna $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$*-karışık tümel jeodeziktir *denir.*

2.3. KAEHLERİYEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde Kaehleriyen manifold kavramı ve bu manifoldun temel özellikleri verilecektir.

2.3.1. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Bu bölümde hemen hemen kompleks yapı kavramından ve hemen hemen kompleks manifold, hemen hemen Hermityen manifold gibi manifold sınıflarından bahsedilecektir.

Tanım 2.3.1.1 *[59] $\bar{M}$, m-boyutlu bir Riemanniyen manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde bir J tensör alanı, her $p \in \bar{M}$ için $T_p\bar{M}$ teğet uzayının*

$$J_p^2 = -I_p \tag{2.24}$$

koşulunu sağlayan bir endomorfizmi ise J ye hemen hemen kompleks yapı *denir. Burada I birim dönüşümdür. $\bar{M}$ nin her noktasında aynı J yapısına sahip $\bar{M}$ manifolduna* hemen hemen kompleks manifold *denir.*

Tanım 2.3.1.2 *[59] $\bar{M}$ manifoldu, J hemen hemen kompleks yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde herhangi $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ vektör alanı için,*

$$\bar{g}(J\bar{X},J\bar{Y}) = \bar{g}(\bar{X},\bar{Y}) \tag{2.25}$$

koşulu sağlanıyorsa $\bar{g}$ Riemanniyen metriğine Hermityen metrik *denir. Üzerinde Hermityen metrik tanımlanan bir hemen hemen kompleks manifolda* hemen hemen Hermityen manifold *denir.*

Örnek. [59] $\mathbb{C}^n$, $(z_1,\ldots,z_n)$ elemanlarından oluşan kompleks vektör uzayı olsun.

$$z_k = x_k + iy_k \; ; \; x_k, y_k \in \mathbb{R} \; , \; k = 1,\ldots,n$$

olmak üzere, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^{2n}$ reel vektör uzayı,

$$(z_1,\ldots,z_n) \to (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$$

lineer izomorfisi ile tanımlanabilir. $\mathbb{R}^{2n}$ uzayının *kanonik kompleks yapı* olarak adlandırılan kompleks yapısı

$$J_0 : (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \to (y_1,\ldots,y_n,-x_1,\ldots,-x_n)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^{2n}$ uzayının doğal bazı cinsinden kanonik kompleks yapısı,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesapanır.

Tanım 2.3.1.3 *[59] $(\bar{M},\bar{g},J)$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Eğer, her $\bar{X},\bar{Y} \in \mathscr{X}(\bar{M})$,*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}J)\bar{Y} = 0$$

ise, başka deyişle J paralel ise $\bar{M}$ ye bir Kaehleriyen manifold *denir.*

Tanım 2.3.1.4 *[30] $(\bar{M},\bar{g},J)$ hemen hemen Hermityen manifold olsun. N tensörü, $\bar{M}$ manifoldunun Nijenhuis tensörü olmak üzere, herhangi $X,Y \in \mathscr{X}(\bar{M})$ için, $N(X,Y) = 0$ ise $\bar{M}$ manifolduna* Hermityen manifold *denir.*

2.3.2. Bir Hemen Hemen Hermityen Manifoldun Bazı Altmanifoldları

Bu bölümde bir hemen hemen Hermityen manifoldların, holomorfik, tümel-reel ve eğik altmanifoldları gibi önemli altmanifold sınıflarının tanımı verilecektir.

M manifoldu, $(\bar{M},J,g)$ hemen hemen Hermityen manifoldu içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen altmanifold olsun. $\bar{M}$ manifoldunun metrik tensörünün yanısıra, M manifoldunun metrik tensörü de g ile gösterilmiştir.

Tanım 2.3.2.1 *[59] M manifoldu, $(\bar{M},J,g)$ hemen hemen Hermityen manifoldu içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen altmanifold olsun. Herhangi $p \in M$ için, T_pM teğet uzayı J altında değişmez kalıyorsa, yani $J(T_pM) \subset T_pM$ koşulu gerçekleniyorsa, M manifolduna $\bar{M}$ manifoldunun bir* holomorfik altmanifoldu *veya* değişmez altmanifoldu, *$J(T_pM) \subset T_p^{\perp}M$ koşulu gerçekleniyorsa M manifolduna $\bar{M}$ manifoldunun bir* tümel reel (totally real) altmanifoldu *veya* ters-değişmez altmanifoldu *denir.*

Tanım 2.3.2.2 *[14] M manifoldu, $(\bar{M},J,g)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. Herhangi $p \in M$ noktasında M manifolduna teğet herhangi X vektör alanı için, JX ile T_pM teğet uzayı arasındaki açı $\theta(X)$ ile gösterilir ve bu açı X in* Wirtinger açısı *olarak adlandırılır ve herhangi $X,Y \in \Gamma(T_pM)$ için*

$$cos\theta(X) = \frac{|\, g(JX,Y)\,|}{|\, JX\,|\,|\,Y\,|}$$

ile tanımlanır. X sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, $\theta(X)$ Wirtinger açısı sabit ise ($p \in M$ ve $X \in T_pM$ vektör alanının seçiminden bağımsız ise) bu durumda M ye $\bar{M}$ manifoldunun bir eğik (slant) altmanifoldu *denir.*

Bu tanım holomorfik ve tümel reel altmanifold kavramlarının bir genelleştirmesidir. Gerçekten, holomorfik ve tümel-reel altmanifoldlar sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ Wirtinger açılarına karşılık gelen altmanifoldlardır. Eğer, bir eğik altmanifold ne holomorfik ne de tümel reel altmanifold ise o altmanifolda bir *has (proper) eğik altmanifold* denir. Daha fazla ayrıntı için [14] referansına bakılabilir.

Tanım 2.3.2.3 *[14]* $(\bar{M}, J, g)$ *bir hemen hemen Hermityen manifold ve* M *manifoldu* $\bar{M}$ *içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemanniyen manifold olsun.* $\mathscr{D}$ *dağılımı* M *üzerinde herhangi bir dağılım olsun. Eğer, herhangi* $U \in \mathscr{D}_p$ *için* JU *ile* $\mathscr{D}_p$ *arasındaki* θ *açısı sabit ise yani* $p \in M$ *ile* $U \in \mathscr{D}_p$ *vektör alanının seçiminden bağımsız ise bu durumda* $\mathscr{D}$ *dağılımına* eğik dağılım *denir.* θ *sabit açısı* $\mathscr{D}$ *eğik dağılımının* eğik açısı *olarak adlandırılır. Bir eğik dağılım ne holomorfik ne de tümel reel dağılım ise* has *denir.*

M üzerindeki holomorfik ve tümel reel dağılımlar sırası ile $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ eğik açılarına karşılık gelen dağılımlardır.

M bir hemen hemen Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olmak üzere, herhangi $X \in \Gamma(TM)$ için

$$JX = PX + FX \ , \tag{2.26}$$

yazılabilir, burada PX ve FX sırası ile JX in teğet ve normal kısımlarıdır.

Benzer şekilde, herhangi $Z \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için,

$$JZ = tZ + nZ \ , \tag{2.27}$$

yazılabilir, burada tZ ve nZ, JZ nin sırası ile teğet ve normal kısımlarıdır.

Tanım 2.3.2.4 *[43] Bir* $(\bar{M}, J, \omega, g)$ *hemen hemen Hermityen manifoldun bir* M *altmanifoldunun* TM *teğet demeti* $\mathscr{D}^T$ *holomorfik ve* $\mathscr{D}^\theta$ *eğik dağılımlarının ortogonal tümleyen ayrışımına izin veriyorsa, yani,*

$$TM = \mathscr{D}^T \oplus \mathscr{D}^\theta \tag{2.28}$$

gerçekleniyorsa M *manifolduna* yarı-eğik altmanifold *denir.*

Eğer $Boy(\mathscr{D}^T) \neq \{0\}$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise M yarı eğik altmanifolduna *has* altmanifold denir.

Bu durumda M yarı-eğik altmanifoldunun $T^{\perp}M$ normal demeti

$$T^{\perp}M = F\mathscr{D}^{\theta} \oplus \overline{\mathscr{D}} \tag{2.29}$$

şeklinde ayrışır, bu kısımda $\overline{\mathscr{D}}$, $F\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının $T^{\perp}M$ içindeki ortogonal tümleyen dağılımıdır ve J ye göre $T^{\perp}M$ nin değişmez altdemetidir.

Tanım 2.3.2.5 *[43] Bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir M altmanifoldunun TM teğet demeti $\mathscr{D}^{\perp}$ tümel reel ve $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılımının ortogonal tümleyen ayrışımına izin veriyorsa, yani,*

$$TM = \mathscr{D}^{\perp} \oplus \mathscr{D}^{\theta} \tag{2.30}$$

koşulu gerçekleniyorsa M manifolduna kısmi-eğik altmanifold *denir.*

Eğer $Boy(\mathscr{D}^{\perp}) \neq \{0\}$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise M kısmi-eğik altmanifolduna *has* denir.

Bu durumda M kısmi-eğik altmanifoldunun $T^{\perp}M$ normal demeti

$$T^{\perp}M = J\mathscr{D}^{\perp} \oplus F\mathscr{D}^{\theta} \oplus \overline{\mathscr{D}} \ , \tag{2.31}$$

şeklinde ayrışır, bu kısımda $\overline{\mathscr{D}}$ dağılımı $J\mathscr{D}^{\perp} \oplus F\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının $T^{\perp}M$ içindeki tümleyen dağılımıdır ve $T^{\perp}M$ nin J ye göre değişmez alt demetidir.

Bir yarı-eğik ve kısmi-eğik altmanifold [46, 48] için

$$P^2V = -\cos^2\theta V \ , \tag{2.32}$$

$$g(PU, PV) = \cos^2\theta g(U,V) \qquad \text{ve} \qquad g(FU, FV) = \sin^2\theta g(U,V) \tag{2.33}$$

denklemleri geçerlidir, burada $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^{\theta})$.

Uyarı 2.3.2.6 *[46] Carriazo [9] tarafından kısmi-eğik altmanifoldlar, ters-eğik altmanifoldlar adı altında bi-eğik altmanifoldların özel bir durumu olarak tanımlanmıştır.*

Fakat "ters-eğik" tanımı eğik parçası olmayan altmanifoldu andırdığı için kısmi-eğik altmanifold ifadesi tercih edilir.

Uyarı 2.3.2.7 *[46] Hemen hemen Hermityen manifoldların has kısmi-eğik altmanifoldları ve has yarı-eğik altmanifoldları arasında herhangi bir kapsama bağıntısı geçerli değildir.*

Aşağıda yarı-eğik ve kısmi-eğik altmanifoldlara örnekler verilmiştir.

Örnek. [47] M, $\mathbb{R}^6$ Öklidyen uzayının

$$x_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}}\cos\alpha\ ,\ x_2 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}}\sin\alpha\ ,\ x_3 = \frac{\varphi}{\sqrt{2}},$$

$$x_4 = 0\ ,\ x_5 = t\ ,\ x_6 = t\ ,\ \varphi \neq 0$$

ile tanımlı bir altmanifoldu olsun. TM nin yerel çatısı

$$Z_1 = -\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\varphi}{\sqrt{2}}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Z_3 = \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^6$ nın J standart kompleks yapısı kullanılarak

$$JZ_1 = -\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\varphi}{\sqrt{2}}\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$JZ_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$JZ_3 = -\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6}$$

bulunur.

$$cos\theta = \frac{\mid g(JZ_2, Z_1)\mid}{\mid JZ_2 \mid\mid Z_1 \mid} = \frac{\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

olduğundan $\mathscr{D}^\theta = span\{Z_1, Z_2\}$ dağılımı, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ eğik açılı eğik dağılımdır ve $\mathscr{D}^\perp = span\{Z_3\}$ olduğu kolayca görülebilir. O halde M, $\mathbb{R}^6$ nın has kısmi-eğik altmanifoldudur.

Örnek. $(y_1,...,y_6)$, $\mathbb{R}^6$ 6-boyutlu Öklidyen uzayının doğal koordinatları ve (J,g_0), $\mathbb{R}^6$ üzerinde alışılmış Kaehler yapısı olsun. Bu durumda$(\mathbb{R}^6,J,g_0)$ bir Kaehler manifolddur. σ, $\mathbb{R}^6$ üzerinde tanımlı düzgün bir fonksiyon olmak üzere g_0 metriğine konformal olan $g = e^{\sigma} g_0$ Riemanniyen metriği için $(\mathbb{R}^6,J,g)$ bir g.k.K. manifolddur.

M manifoldu $(\mathbb{R}^6,J,g)$ uzayının

$$y_1 = x\,,\; y_2 = y\,,\; y_3 = u+v\,,\; y_4 = -u+v\,,\; y_5 = u\,,\; y_6 = 0\,,$$

ile tanımlı altmanifoldu olsun, burada $x,y,u,v \neq 0$. Bu durumda, M maifoldunun TM teğet demetinin yerel ortonormal çatı alanı

$$X = \partial_1\,,\; Y = \partial_2\,,\; U = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\partial_3 - \partial_4 + \partial_5\Big)\,,\; V = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\partial_3 + \partial_4\Big)\,,$$

ile verilir, burada $i \in \{1,2,...,6\}$ için $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$. Bu durumda $\mathscr{D} = span\{X,Y\}$ bir holomorfik dağılım $\mathscr{D}^{\theta} = span\{U,V\}$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{6}})$ eğik açısına sahip bir has eğik dağılım olur. Böylece M manifoldu $(\mathbb{R}^6,J,g)$ uzayının has yarı-eğik altmanifoldudur.

2.4. GLOBAL VE YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLDLAR

Tanım 2.4.1 *[23] $(\bar{M},J,g)$ manifoldu $2m$-boyutlu bir Hermityen manifold olsun. Her $p \in \bar{M}$ noktasının bir $\mathscr{U}$ açık komşuluğu var olsun ve bu komşulukta $\sigma : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu tanımlansın. Eğer $\tilde{g} = e^{-\sigma} g|_{\mathscr{U}}$ metriği $\mathscr{U}$ komşuluğu üzerinde bir Kaehler metriği ise bu durumda $(\bar{M},J,g)$ manifolduna* yerel konformal Kaehler manifold *(kısaca* y.k.K. manifold*) denir. Eğer $\mathscr{U} = \bar{M}$ ise bu durumda $(\bar{M},J,g)$ manifolduna* global konformal Kaehler manifold *(kısaca* g.k.K. manifold*) denir.*

Teorem 2.4.2 *[23] $(\bar{M},J,g)$ bir Hermityen manifold ve Ω, $\bar{M}$ üzerindeki herhangi $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ vektör alanları için $\Omega(\bar{X},\bar{Y}) = g(\bar{X},J\bar{Y})$ şeklinde tanımlı $2-$ form olsun. Bu durumda $(\bar{M},J,g)$ manifoldunun bir y.k.K. manifold olması için gerek ve yeter koşul*

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \qquad ve \qquad d\omega = 0 \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlı global olarak tanımlı bir ω 1-formunun var olmasıdır.

Kapalı $1-$ form ω, $(\bar{M},J,g)$ y.k.K. manifoldunun *Lee formu* olarak adlandırılır. Ek olarak, eğer ω Lee formu tam ise $(\bar{M},J,g)$ manifoldu g.k.K. manifold olur. Bu durumda $\omega = d\sigma$ [58] olur. *Lee vektör alanı B*, $\bar{M}$ üzerideki herhangi $\bar{X}$ vektör alanı için

$$\omega(\bar{X}) = g(B,\bar{X}) \tag{2.35}$$

ile tanımlanır. Global konformal Kaehler durumunun, yerel konformal Kaehler durumunun özel bir hali olduğu görülebilir. $\tilde{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}$, sırası ile $\tilde{g} = e^{-\sigma}g$ ve g metriği ile ilgili $\bar{M}$ üzerindeki Levi Civita koneksiyonlarını göstermektedir. Bu durumda [23], $\bar{M}$ üzerindeki herhangi $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ vektör alanları için

$$\tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \tfrac{1}{2}\left\{\omega(\bar{X})\bar{Y} + \omega(\bar{Y})\bar{X} - g(\bar{X},\bar{Y})B\right\} \tag{2.36}$$

elde edilir.

$\tilde{\nabla}$ koneksiyonu $\bar{M}$ üzerinde torsiyonsuz lineer bir koneksiyondur. ve g metriğinin *Weyl koneksiyonu* olarak adlandırılır. $\tilde{\nabla}$ Weyl koneksiyonunun

$$\tilde{\nabla}J = 0 \tag{2.37}$$

koşulunu sağladığı kolayca görülür. Y.k.K.ve g.k.K. manifoldu ile ilgili, örnekler ve daha fazla ayrıntı için [23] referansına bakılabilir.

Uyarı 2.4.3 *Bu çalışma boyunca, $(\bar{M},J,\omega,g)$ ile ω Lee formuna sahip bir g.k.K. manifold gösterilmiştir.*

M bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun herhangi bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{\nabla}$ ile ilgili Gauss ve Weingarten formülleri herhangi $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \hat{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X,Y) \ , \tag{2.38}$$

$$\tilde{\nabla}_X Z = -\tilde{A}_Z X + \tilde{\nabla}^{\perp}_X Z \tag{2.39}$$

ile verilir. Bu durumda, (2.36), (2.21)$\sim$(2.39) denkemleri kullanılırsa,

$$\hat{\nabla}_X Y = \quad \nabla_X Y - \tfrac{1}{2}\left\{\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X,Y)B^T\right\}, \tag{2.40}$$

$$\tilde{h}(X,Y) = \quad h(X,Y) + \tfrac{1}{2}g(X,Y)B^N\,, \tag{2.41}$$

$$\tilde{A}_Z X = \quad A_Z X + \tfrac{1}{2}\omega(Z)X\,, \tag{2.42}$$

ilişkileri elde edilir, burada $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(T^{\perp}M)$ ve B^T ile B^N sırası ile B vektör alanının teğet ve normal kısımlarıdır.

2.5. ÇİFT BÜKÜLMÜŞ ÇARPIM MANİFOLDLAR

Bu bölümde çift bükülmüş çarpım manifoldunun tanımı, alt sınıfları ve kovaryant türev formülleri verilecektir.

Tanım 2.5.1 *M_1 ve M_2 sırası ile g_1 ve g_2 metriklerine sahip Riemanniyen manifoldlar ve f_1 ve f_2, $M_1 \times M_2$ üzerinde tanımlı pozitif düzgün fonksiyonlar olsun. Bu durumda* çift bükülmüş çarpım manifold *[45] ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$,*

$$g = {f_2}^2\pi_1^* g_1 + {f_1}^2\pi_2^* g_2, \tag{2.43}$$

ile tanımlı g metriğine sahip $\bar{M} = M_1 \times M_2$ çarpım manifoldudur. Burada $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, $i = 1,2$ için standart izdüşümlerdir. Her f_i fonksiyonuna ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çift bükülmüş çarpım manifoldunun bükülmüş fonksiyonu *denir. Eğer f_1 ve f_2 bükülmüş fonksiyonları sırası ile sadece M_1 ve M_2 manifoldlarının noktalarına bağlı olursa, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çarpım manifoldu* çift çarpık çarpım manifold *[25] olarak adlandırılır ve f_i fonksiyonlarına çift çarpık çarpım manifoldunun* çarpık fonksiyon*ları denir. Eğer $f_1 \equiv 1$ veya $f_2 \equiv 1$ ise, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çift çarpık çarpım manifoldu bir* çarpık çarpım *manifold olur [6].*

${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir çift bükülmüş çarpım olsun. Eğer $f_1 \equiv 1$ veya $f_2 \equiv 1$ ise, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifolduna f_1 ya da f_2 bükülmüş fonksiyonuna sahip bükülmüş çarpım *[18] manifold denir. Çarpık çarpım ya da bükülmüş çarpım durumunda , ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ gösterimi ${}_{f_2}M_1 \times M_2$ ya da $M_1 \times_{f_1} M_2$ şekline dönüşür. Ek olarak, hem f_1 hem de f_2 fonksiyonu sabit ise, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldu* alışılmış *ya da* direkt çarpım manifold *[16] olarak adlandırılır.*

${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldu ∇ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir çift bükülmüş çarpım olsun. Burada ∇ koneksiyonu (2.43) denkleminde verilen g metriği ile ilişkilidir. ∇^i koneksiyonu

$i \in \{1,2\}$ için M_i manifoldunun Levi-Civita koneksiyonunu göstersin. Uygunluk açısından, M_i üzerindeki vektör alanlarının liftlerinin kümesi $\mathscr{L}(M_i)$ ile gösterilir ve bir vektör alanı ve onun lifti için aynı notasyon kullanılır. Diğer taraftan, π_1 bir izometri ve π_2 bir pozitif homotetidir, bu yüzden Levi-Civita koneksiyonunu korurlar. Böylece, M_i üzerindeki bir koneksiyon ve onun π_i ile geri çekilmişi için aynı notasyonu kullanmak karışıklık yaratmaz.

Aşağıda çift bükülmüş çarpım manifoldların kovaryant türev formülleri verilmiştir.

Önerme 2.5.2 *[26] ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir çift bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$\nabla_X Y = \nabla^1_X Y + X(\ln f_2)Y + Y(\ln f_2)X - g(X,Y)\nabla \ln f_2 \tag{2.44}$$

$$\nabla_X V = \nabla_V X = X(\ln f_1)V + V(\ln f_2)X \tag{2.45}$$

$$\nabla_U V = \nabla^2_U V + U(\ln f_1)V + V(\ln f_1)U - g(U,V)\nabla \ln f_1 \tag{2.46}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Aşağıda çift bükülmüş çarpım manifoldları ve onun özel durumlarını karakterize eden bir önerme verilmiştir.

Önerme 2.5.3 *(Proposition 3 [45]) g metriği bir $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu üzerinde bir sözde-Riemanniyen metrik olsun ve $\mathscr{L}_1$ ve $\mathscr{L}_2$ standart yapraklanmaları her yerde dik kesişsinler. Bu durumda g metriğinin*

***i)** bir ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çift bükülmüş çarpım manifoldunun metrik tensörü olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L}_1$ ve $\mathscr{L}_2$ nin tümel umbilik yapraklanma olmasıdır,*

***ii)** bir $M_1 \times_{f_1} M_2$ bükülmüş çarpım manifoldunun metrik tensörü olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L}_1$ in tümel jeodezik, $\mathscr{L}_2$ nin tümel umbilik yapraklanma olmasıdır,*

***iii)** bir $M_1 \times_{f_1} M_2$ çarpık çarpım manifoldunun metrik tensörü olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L}_1$ in tümel jeodezik, $\mathscr{L}_2$ nin küresel yapraklanma olmasıdır,*

***iv)** sözde-Riemanniyen manifoldların alışılmış çarpımının metrik tensörü olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{L}_1$ ve $\mathscr{L}_2$ nin tümel jeodezik yapraklanma olmasıdır.*

${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir çift bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ için [26]

$$h_1^k(X,Y) = XY(k) - (\nabla_X^1 Y)(k). \tag{2.47}$$

tensörü tanımlansın. Bu durumda, herhangi $U \in \mathscr{L}(M_2)$ için k fonksiyonunun (M,g) üzerindeki h^k Hessiyen formu

$$h^k(X,U) = XU(k) - X(k)U(l) - X(k)V(k) \tag{2.48}$$

$$h^k(X,Y) = h_1^k(X,Y) - X(l)Y(k) - X(k)Y(l) + g(X,Y)g(\nabla k, \nabla l) \tag{2.49}$$

denklemlerini gerçekler. Burada $k = \ln(f_1)$ ve $l = \ln(f_2 \circ \pi_2)$.

2.5.1. Çift Çarpık Çarpım Altmanifoldlar

Bu bölümde, çift çarpık çarpım altmanifoldlar için geçerli olan kovaryant türev formülleri verilmiştir. Keyfi Riemanniyen manifoldların çift çarpık çarpım altmanifoldları için genel bir eşitsizlik Teorem 3 [41] de kanıtlanmıştır.

${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldu bir $(\bar{M}, g)$ Riemanniyen manifoldunun

$$g = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^*(g_1) + (f_1 \circ \pi_1)^2 \pi_2^*(g_2) \tag{2.50}$$

ile tanımlı g metriğine sahip bir çift çarpık çarpım altmanifoldu olsun. Bu durumda, kovaryant türev formülleri (2.44)$\sim$(2.46)

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^1 Y - g(X,Y)\bar{\nabla}(\ln f_2 \circ \pi_2)\ , \tag{2.51}$$

$$\bar{\nabla}_V X = \bar{\nabla}_X V = V(\ln f_2 \circ \pi_2)X + X(\ln f_1 \circ \pi_1)V\ , \tag{2.52}$$

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla_U^2 V - g(U,V)\bar{\nabla}(\ln f_1 \circ \pi_1) \tag{2.53}$$

formüllerine indirgenir, burada $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$.

$M_1 \times \{p_2\}$ ve $\{p_1\} \times M_2$ manifoldları ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ içinde kapalı ortalama eğrilik vektör alanlarına sahip tümel umbilik altmanifoldlardır [40], burada $p_1 \in M_1$ and $p_2 \in M_2$. Bir çift çarpık çarpım manifold ne çarpık çarpım ne de direkt çarpım ise aşikar olmayandır.

Uyarı 2.5.1.1 *[25] Bir çift çarpık çarpım manifold ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ için,*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}(\ln f_1 \circ \pi_1) &= \frac{1}{(f_2 \circ \pi_2)^2} \nabla^1(\ln f_1 \circ \pi_1) \\ \bar{\nabla}(\ln f_2 \circ \pi_2) &= \frac{1}{(f_1 \circ \pi_1)^2} \nabla^2(\ln f_2 \circ \pi_2). \end{aligned} \tag{2.54}$$

denklemleri gerçeklenir. Bu denklemlerden ve (2.50) ve (2.54) denklemlerinden, kovaryant türev formülleri (2.51) ve (2.53) sırası ile

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^1_X Y - \frac{(f_2 \circ \pi_2)^2}{(f_1 \circ \pi_1)^2} g_1(X,Y) \nabla^2(\ln f_2 \circ \pi_2) \ , \tag{2.55}$$

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla^2_U V - \frac{(f_1 \circ \pi_1)^2}{(f_2 \circ \pi_2)^2} g_2(U,V) \nabla^1(\ln f_1 \circ \pi_1) \tag{2.56}$$

şeklinde ifade edilir, burada $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$.

Çift çarpık çarpımlarla ilgili daha fazla detay için , [25], [31], [40] ve [57] çalışmaları incelenebilir.

Uyarı 2.5.1.2 *Şu andan itibaren, bir çarpık fonksiyon $i = 1,2$ için f_i ile onun geri çekilmişi $f_i \circ \pi_i$ için aynı sembol kullanılacaktır, yani $f_i = f_i \circ \pi_i$.*

Aşağıda çift çarpık çarpım manifoldları karakterize eden bir yardımcı teorem verilmiştir.

Lemma 2.5.1.3 *(Lemma 3.1.1 [40]) ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir çift bükülmüş çarpım olsun. ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldunun bir çift çarpık çarpım olması için gerek ve yeter koşul standart yapraklanmaların ortalama eğrilik vektör alanlarının kapalı olmasıdır.*

3. MALZEME VE YÖNTEM

Tezin özünü oluşturan bir g.k.K. manifoldun konformal-bükülmüş ve çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlarının varlığı incelenmiştir ve bu tarz altmanifoldlar karakterize edilmiştir. Ayrıca Einstein-like çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpan manifoldları da Einstein-like manifold olma açısından incelenmiştir. Bu kavramların tarih içindeki oluşum süreci hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bulgular için diferansiyel geometrideki temel tanımlardan, teoremlerden ve altmanifold teorisindeki temel denklemler ve sonuçlardan yararlanılmıştır.

Bu çalışma yapılırken diferansiyel geometrinin dalı olan manifoldlar ve altmanifoldlar teorisi ile ilgili kitaplar ve makaleler, kütüphane ve web aracılığı ile taranmıştır. Bir g.k.K. manifoldun konformal-bükülmüş ve çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldları ve Einstein-like çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar ile ilgili sonuçların elde edilmesi için bu konu ile ilgili makaleler kronolojik olarak incelenmiştir. Tezin doküman haline getirilmesi için Latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. KONFORMAL-BÜKÜLMÜŞ ÇARPIM MANİFOLDLAR

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemanniyen manifoldlar ve $f_2 : M_1 \to (0,\infty)$ ve $f_1 : M_1 \times M_2 \to (0,\infty)$ düzgün fonksiyonlar olsun. *Konformal-bükülmüş çarpım* [52],

$$g = (f_2 \circ \pi_1)^2 \pi_1^*(g_1) + (f_1 \circ \pi_2)^2 \pi_2^*(g_2), \tag{4.1}$$

ile tanımlı g metriğine sahip, $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldudur. Burada π_1 ve π_2, $M_1 \times M_2$ manifoldundan sırası ile M_1 ve M_2 manifoldları üzerine standart izdüşümlerdir. Notasyonda kolaylık için, (M, g) Riemanniyen manifoldu ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ ile gösterilir. Konformal-bükülmüş çarpım manifoldlar için, f_2 fonksiyonu *konformal çarpan* ve f_1 fonksiyonu *bükülmüş fonksiyon* olarak adlandırılır.

$({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, g)$, $\bar{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir konformal-bükülmüş çarpım manifold olsun. ∇^i koneksiyonu $i \in \{1,2\}$ için M_i manifoldlarının Levi-Civita koneksiyonunu göstersin. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^1_X Y + X(\ln f_2)Y + Y(\ln f_2)X - g(X,Y)\bar{\nabla} \ln f_2 \ , \tag{4.2}$$

$$\bar{\nabla}_V X = \bar{\nabla}_X V = X(\ln f_1)V \ , \tag{4.3}$$

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla^2_U V + U(\ln f_1)V + V(\ln f_1)U - g(U,V)\bar{\nabla} \ln f_1. \tag{4.4}$$

(M_2, g_2) manifoldu $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, g)$ konformal-bükülmüş çarpım manifoldunun *lif*i ve (M_1, g_1) ise *baz* manifoldu olarak adlandırılır.

Uyarı 4.1.1 *Çift bükülmüş çarpım ve konformal-bükülmüş çarpım tanımından görüldüğü* *gibi, konformal-bükülmüş çarpım, çift bükülmüş çarpımın özel bir durumudur. Gerçekten, konformal-bükülmüş çarpım durumunda (4.2)∼(4.4) kovaryant türev formülleri, çift bükülmüş çarpım durumundakilerin daha basit halleridir, (bkz. Lemma 2.1 [31]).*

4.1.1. Bir G.k.K. Manifoldun Yarı-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde, bir g.k.K. manifoldun yarı-eğik altmanifoldları için geçerli olan ve ana teoremlerde kullanılacak olan bazı sonuçlar verilmiştir.

Lemma 4.1.1.1 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, V) = \ & \csc^2\theta \left\{ g\left(A_{FV} JY - A_{FPV} Y, X \right) + \tfrac{1}{2}\omega(FV) g(JY, X) \right. \\ & \left. - \tfrac{1}{2}\omega(FPV) g(X, Y) \right\} - \tfrac{1}{2}\omega(V) g(X, Y) \end{aligned} \tag{4.5}$$

denklemi gerçeklenir.

İspat. $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ olsun. $(\bar{M}, J, \omega, \tilde{g} = e^{-\sigma} g)$ bir Kaehler manifold olduğundan, (2.37), (2.38), (2.39) ve (2.26) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, JV) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, PV) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, FV) \\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, JPV) + \tilde{g}(\tilde{A}_{FV} X, JY) \\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, P^2 V) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, FPV) + \tilde{g}(\tilde{A}_{FV} X, JY) \\ &= \cos^2\theta\, \tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) + \tilde{g}(\tilde{A}_{FV} JY, X) - \tilde{g}(\tilde{A}_{FPV} Y, X) \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Böylece,

$$\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) = \csc^2\theta\, \tilde{g}(\tilde{A}_{FV} JY, X) - \tilde{g}(\tilde{A}_{FPV} Y, X)$$

bulunur. (2.35), (2.40) ve (2.42) denklemlerinden, (4.5) denklemine ulaşılır. □

(4.5) denkleminden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.1.2 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(A_{FV}JY - A_{FPV}Y, X) = \frac{1}{2}\left\{ \left(\sin^2\theta\,\omega(V) + \omega(FPV) \right) g(Y,X) - \omega(FV)g(JY,X) \right\} \quad (4.7)$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

İspat. $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için $g(\nabla_X Y, V) = 0$ olmasıdır. (4.5) denkleminden, $g(\nabla_X Y, V) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.7) denkleminin sağlanmasıdır. □

Lemma 4.1.1.3 *M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(\nabla_U V, X) = -\csc^2\theta\, g\left(A_{FV}JX - A_{FPV}X, U \right) - \tfrac{1}{2}\omega(X)g(U,V) \quad (4.8)$$

denklemi sağlanır.

İspat. $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ olsun. $(\bar{M}, J, \omega, \tilde{g} = e^{-\sigma}g)$ bir Kaehler manifold olduğundan, (2.37), (2.38), (2.39) ve (2.26) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\hat{\nabla}_U V, X) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U V, X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U JV, JX) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U PV, JX) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U FV, JX) \\
&= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U JPV, X) - \tilde{g}(\tilde{A}_{FV}JX, U) \\
&= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U P^2V, X) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U FPV, X) - \tilde{g}(\tilde{A}_{FV}JX, U) \\
&= \cos^2\theta\,\tilde{g}(\hat{\nabla}_U V, X) + \tilde{g}(\tilde{A}_{FPV}X, U) - \tilde{g}(\tilde{A}_{FV}JX, U)
\end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{g}(\hat{\nabla}_U V, X) = -\csc^2\theta\,\tilde{g}(\tilde{A}_{FV}JX - \tilde{A}_{FPV}X, U)$$

bulunur. (2.35), (2.40) ve (2.42) denklemleri kullanılırsa, (4.8) denklemine ulaşılır. □

(4.8) denkleminden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.1.4 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(A_{FV}JX - A_{FPV}X, U) = g(A_{FU}JX - A_{FPU}X, V) \tag{4.10}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ ve $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ için $g([U,V], X) = 0$ olmasıdır. (4.8) denkleminden, $g([U,V], X) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.10) denkleminin sağlanmasıdır. □

Aşağıda $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının tümel jeodezik ve $\mathscr{D}^T$ dağılımının integrallenebilir olması koşulları verilmiştir.

Teorem 4.1.1.5 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(A_{FV}JX - A_{FPV}X, U) = -\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\,\omega(X) g(U, V) \tag{4.11}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ ve $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ için $g(\nabla_U V, X) = 0$ olmasıdır. (4.8) denkleminden, $g(\nabla_U V, X) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.11) denkleminin sağlanmasıdır. □

Uyarı 4.1.1.6 *Taştan ve Tripathi [53], $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının tümel jeodezik olması için farklı bir koşul vermiştir.*

Teorem 4.1.1.7 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(A_{FV}JY - A_{FPV}Y, X) + \omega(FV) g(JY, X) = g(A_{FV}JX - A_{FPV}X, Y) \tag{4.12}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için $g([X,Y],V) = 0$ olmasıdır. (4.6) denkleminden, $g([X,Y],V) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.12) denkleminin sağlanmasıdır. $\square$

Uyarı 4.1.1.8 *Taştan ve Tripathi [53], $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının integrallenebilir olması için farklı bir koşul vermiştir.*

Uyarı 4.1.1.9 *Bu kısımda, bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir M yarı-eğik altmanifoldu için, $B^M = B^T + B^\theta$ kabul edilmiştir, burada B^T ve B^θ, B^M vektör alanının sırası ile $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarına teğet parçalarıdır.*

4.1.2. Bir G.k.K. Manifoldun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ Formundaki Konformal-Bükülmüş Çarpım Yarı-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde, bir g.k.K. manifoldun f_2 konformal çarpanına ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ tipindeki konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldları çalışılmıştır. Burada, M^T ve M^θ sırası ile g.k.K. manifoldunun bir holomorfik ve bir eğik altmanifoldudur. İlk olarak bir g.k.K. manifoldun bu tip bir altmanifolduna örnek verilmiştir.

Örnek. $(z_1,...,z_6)$ altı boyutlu $\mathbb{R}^6$ Öklidyen uzayının doğal koordinatları olsun ve $\bar{\mathbb{R}}^6 = \{(z_1,...,z_6) \in \mathbb{R}^6 : z_1,z_2,z_5 \neq 0\}$ ile tanımlansın. Bu durumda $(\bar{\mathbb{R}}^6,J,g_0)$, (J,g_0) alışılmış Kaehler yapısına sahip bir Kaehler manifolddur. Şimdi, $e^\sigma = (z_1z_2)^2$ olmak üzere, $\bar{\mathbb{R}}^6$ üzerinde g_0 metriğine konformal olan $g = e^\sigma g_0$ Riemanniyen metriği alınsın. Bu durumda $(\bar{\mathbb{R}}^6,J,g)$, bir g.k.K. manifolddur. M,

$$z_1 = x,\ z_2 = y,\ z_3 = u+v,\ z_4 = -u+v,\ z_5 = u,\ z_6 = 0,$$

ile verilen bir altmanifold olsun, burada $x,y,u \neq 0$ ve $v > 1$. Bu durumda, M nin TM teğet demetinin yerel ortonormal çatı alanı

$$X = \partial_1\,,\ Y = \partial_2\,,\ U = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\partial_3 - \partial_4 + \partial_5\right\},\ V = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\partial_3 + \partial_4\right\},$$

ile verilir, burada $i \in \{1,2,...,6\}$ için $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$. Bu durumda $\mathscr{D}^T = span\{X,Y\}$ bir holomorfik dağılım ve $\mathscr{D}^\theta = span\{U,V\}$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{6}})$ eğik açısına sahip bir (has) eğik dağılım olur.

Böylece, M manifoldu $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldudur. $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integrallenebilir olduğu kolayca elde edilebilir. $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları sırası ile M^T ve M^θ ile gösterilsin. g_T ve g_θ sırası ile M^T ve M^θ, g_0 Kaehler metriği ile ilgili olarak indirgenmiş metrik olsunlar. M^θ üzerinde $\bar{g}_\theta = \frac{1}{v^2} g_\theta$ konformal metriği seçilsin. M üzerinde $x = z_1$ ve $y = z_2$ olduğundan, M manifoldunun g konformal Kaehler metriğinden indirgenmiş metriği

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (xy)^2(dx^2 + dy^2) + (xy)^2(du^2 + dv^2) \\
&= x^2y^2 g_T + x^2y^2 g_\theta \\
&= x^2y^2 g_T + x^2y^2v^2 \bar{g}_\theta
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, M manifoldu (M^T, g_T) ve $(M^\theta, \bar{g}_\theta)$ manifoldlarının bir konformal-bükülmüş çarpımıdır. Bu yüzden, M manifoldu, $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ tipinde aşikar olmayan bir konformal-bükülmüş çarpım has yarı-eğik altmanifoldudur. Konformal çarpanı $f_2 = xy$ ve bükülmüş fonksiyonu $f_1 = xyv$ dir. Dahası $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ nın Lee formu $\omega = 2\left\{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy\right\}$ olur. Sonuç olarak, Lee vektör alanı,

$$
B = \frac{2}{(xy)^2}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right\}
$$

ile verilir ve M^T ye teğettir.

Lemma 4.1.2.1 $M = {}_{f_2} M^T \times_{f_1} M^\theta$ *bir* $(\bar{M}, J, \omega, g)$ *g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, her* $V \in \Gamma(TM^\theta)$ *için*

$$
\omega(V) = 0. \tag{4.13}
$$

İspat. $M = {}_{f_2} M^T \times_{f_1} M^\theta$ bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve $V \in \Gamma(TM^\theta)$ ve $X, Y \in \Gamma(TM^T)$ olsun. Bu durumda, dış diferansiyel formülünden (bkz. [59], s. 17),

$$\begin{aligned} 3d\Omega(V,X,Y) &= V\Omega(X,Y)+X\Omega(Y,V)+Y\Omega(V,X) \\ &\quad -\Omega([V,X],Y)-\Omega([X,Y],V)-\Omega([Y,V],X) \\ &= Vg(X,JY)-Xg(JY,V)+Yg(V,JX) \\ &\quad -g([V,X],JY)+g(J[X,Y],V)-g([Y,V],JX) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, M bir yarı-eğik altmanifold olduğundan $g(JY,V)=g(V,JX)=0$. Aynı zamanda, (4.3) denkleminden, $[V,X]=[Y,V]=0$ elde edilir ve (4.2) denkleminden $[X,Y]=\nabla^T_X Y-\nabla^T_Y X$ elde edilir. Bu yüzden $J[X,Y]\in\Gamma(TM^T)$. Böylece,

$$\begin{aligned} 3d\Omega(V,X,Y) &= Vg(X,JY) \\ &= g(\nabla_V X,JY)+g(\nabla_V Y,JX) \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar (4.3) denklemi kullanılırsa,

$$3d\Omega(V,X,Y)=X(\ln b)g(V,JY)+Y(\ln b)g(V,JX)=0$$

bulunur. Bu yüzden $d\Omega(V,X,Y)=0$. Diğer taraftan, (2.34) denkleminden

$$\begin{aligned} d\Omega(V,X,Y) &= \omega\wedge\Omega(V,X,Y) \\ &= \omega(V)\Omega(X,Y)+\omega(X)\Omega(Y,V)+\omega(Y)\Omega(V,X) \\ &= \omega(V)g(X,JY) \end{aligned}$$

elde edilir. g dejenere olmadığından, $\omega(V)=0$ sonucu çıkar. □

Lemma 4.1.2.2 *$M={}_{f_2}M^T\times_{f_1}M^\theta$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, her $X\in\Gamma(TM^T)$ için*

$$\omega(X)=\tfrac{2}{3}X(\ln f_1)\ . \tag{4.14}$$

İspat. $M={}_{f_2}M^T\times_{f_1}M^\theta$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve $U,V\in\Gamma(TM^\theta)$ ve $X\in\Gamma(TM^T)$ olsun. Bu durumda, (4.3) denkleminden $[X,V]=[X,U]=0$ ve (4.4) denkleminden $[U,V]=\nabla^\theta_U V-\nabla^\theta_V U\in$

$\Gamma(TM^{\theta})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X,U,V) &= X\Omega(U,V)+U\Omega(V,X)+V\Omega(X,U) \\ &\quad -\Omega([X,U],V)-\Omega([U,V],X)-\Omega([V,X],U) \\ &= Xg(U,PV) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) denklemi kullanılırsa, bazı hesaplamalardan sonra

$$3d\Omega(X,U,V) = 2X(\ln f_1)g(U,PV) \tag{4.15}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.34) denkleminden

$$\begin{aligned} d\Omega(X,U,V) &= \omega\wedge\Omega(X,U,V) \\ &= \omega(X)\Omega(U,V)+\omega(U)\Omega(V,X)+\omega(V)\Omega(X,U) \\ &= \omega(X)g(U,PV) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$d\Omega(X,U,V) = \omega(X)g(U,PV) \tag{4.16}$$

bulunur. Böylece , (4.15) ve (4.16) denklemlerinden istenilen elde edilir. □

Uyarı 4.1.2.3 *Kaehleriyen durumda, $\omega = 0$ olduğundan $\omega(X) = \frac{2}{3}X(\ln f_1) = 0$ elde edilir. O halde bükülmüş fonksiyon f_1, sadece M^{θ} manifoldunun noktalarına bağlı olur. Bu durumda, $g_M = {f_2}^2 g_T \oplus {f_1}^2 g_{\theta}$ olduğundan M manifoldu (M_T, g_1) ve (M_{θ}, g_2) manifoldlarının yerel olarak direkt çarpımı olur, burada $g_1 = {f_2}^2 g_T$ ve $g_2 = {f_1}^2 g_{\theta}$.*

Teorem 4.1.2.4 *$M =_{f_2} M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun yerel olarak direkt çarpım manifold olabilmesi için gerek ve yeter koşul B Lee vektör alanının M altmanifolduna dik olmasıdır.*

İspat. M altmanifoldu (M^T, g_T) ve $(M^{\theta}, \bar{g}_{\theta})$ altmanifoldlarının direkt çarpımı olan bir yarı-eğik altmanifold olsun, burada bir c sabiti için $\bar{g}_{\theta} = c g_{\theta}$. Bu durumda M nin g_M indirgenmiş metrik tensörü $g_M = g_T \oplus \bar{g}_{\theta}$ formundadır, burada g_T ve g_{θ} sırası ile M^T

ve M^θ manifoldları üzerine indirgenmiş metriklerdir. Lemma 4.1.2.2 den, herhangi $X \in \Gamma(TM^T)$ için, f_1 fonksiyonu sabit olduğundan, $\frac{2}{3}X(\ln f_1) = \omega(X) = 0$ elde edilir. (2.35) denkleminden, $\omega(X) = g(B,X) = 0$ sonucu çıkar. Bu yüzden, B vektör alanı M^T altmanifolduna diktir. Buradan ve (4.13) denkleminden, $\omega(V) = g(B,V) = 0$ elde edilir. O halde B vektör alanı M_θ altmanifolduna da diktir. Böylece B vektör alanı M altmanifolduna dik olur.

Tersine B Lee vektör alanı M altmanifolduna dik olsun. Bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(TM^T)$ için (4.14) denkleminden $\frac{2}{3}X(\ln f_1) = \omega(X) = g(B,X) = 0$ elde edilir. Buradan bükülmüş fonksiyonun sadece M_θ altmanifoldunun noktalarına bağlı olduğu sonucu çıkar. Bu durumda M altmanifoldunun g_M indirgenmiş metrik tensörü $g_M = {f_2}^2 g_T \oplus {f_1}^2 g_\theta$ formundadır, burada f_2 ve f_1 sırası ile sadece M_T ve M_θ altmanifoldlarının noktalarına bağlıdır. Böylece, $g_1 = {f_2}^2 g_T$ ve $g_2 = {f_1}^2 g_\theta$ olmak üzere M manifoldunun (M_T, g_1) ve (M_θ, g_2) altmanifoldlarının yerel olarak direkt çarpımı olduğu elde edilir. □

Uyarı 4.1.2.5 *Aslında, bükülmüş çarpımlar ve konformal-bükülmüş çarpımlar birbirleri cinsinden ifade edilebilirler. Gerçekten, $(M_1 \times_{f_1} M_2, g)$ bir bükülmüş çarpım manifold olsun, burada f_1 bir bükülmüş fonksiyon olmak üzere $g = g_1 \oplus {f_1}^2 g_2$. f_2 pozitif düzgün fonksiyonu sadece M_1 manifoldunun noktalarına bağlı olmak üzere $g_1 = {f_2}^2 \bar{g}_1$ konformal metriği seçilirse, g metriği $g = {f_2}^2 \bar{g}_1 \oplus {f_1}^2 g_2$ formunda olur. Bu yüzden, $(M_1 \times_{f_1} M_2, g)$ manifoldu $(M_1, \bar{g}_1)$ ve (M_2, g_2) manifoldlarının bir konformal-bükülmüş çarpımı olur. Diğer taraftan, $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, g)$ manifoldu f_2 konformal çarpanına ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir konformal-bükülmüş çarpım olsun. $\bar{g}_1 = {f_2}^2 g_1$ konformal metriği seçilirse, g metriği $g = \bar{g}_1 \oplus {f_1}^2 g_2$ formunda olur. Böylece, $({}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2, g)$ manifoldu $(M_1, \bar{g}_1)$ ve (M_2, g_2) manifoldlarının bir bükülmüş çarpımıdır.*

Aşağıda, bu bölümle alakalı ana teorem verilmiştir.

Teorem 4.1.2.6 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda M manifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ tipinde yerel olarak bir konformal-bükülmüş çarpım olabilmesi için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$,*

$V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ ve bir μ fonksiyonu için

$$\omega(V) = 0\,, \tag{4.17}$$

$$\omega(X) = X(\mu)\,, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} A_{FV}JX - A_{FPV}X = \; & \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)X - \omega(FV)JX\Big\} \\ & + \sin^2\theta\,\omega(X)V \end{aligned} \tag{4.19}$$

denklemlerinin gerçeklenmesidir.

İspat. M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ tipinde bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. (4.17) denklemi Lemma 4.1.2.1 den elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 4.1.2.2 den, $\omega(X) = \frac{2}{3}X(\ln f_1)$ elde edilir. Böylece, (4.18) denklemi $\mu = \frac{2}{3}\ln f_1$ için elde edilir. Herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için,

$$A_{FV}JX - A_{FPV}X = \Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T + \Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^\theta \tag{4.20}$$

elde edilir, burada $\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T$, $A_{FV}JX - A_{FPV}X$ ifadesinin M^T manifolduna teğet parçası ve $\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^\theta$, $A_{FV}JX - A_{FPV}X$ ifadesinin M^θ manifolduna teğet parçasıdır. Böylece, herhangi $Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ için, (4.2) ve (4.13) denklemleri kullanılırsa, (4.5) denkleminden

$$g\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X, Y\Big) = \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)g(X,Y) - \omega(FV)g(JX,Y)\Big\}$$

bulunur. O halde,

$$\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T = \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)X - \omega(FV)JX\Big\} \tag{4.21}$$

sonucu çıkar. Benzer şekilde, herhangi $U \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (4.3) ve (4.14) denklemleri kullanılırsa, (4.8) denkleminden

$$g\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X, U\Big) = \sin^2\theta X(\tfrac{2}{3}\ln f_1)g(U,V)$$

elde edilir. $U \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ keyfi bir vektör alanı ve g metriği Riemanniyen olduğundan,

$$\left(A_{FV}JX - A_{FPV}X\right)^\theta = \sin^2\theta\,\omega(X)V \tag{4.22}$$

bulunur. Dahası, f_2 fonksiyonu sadece M^T manifoldunun noktalarına bağlı olduğundan $U(\ln f_2) = 0$ elde edilir. O halde, (4.20)∼(4.22) denklemlerinden (4.19) denklemi elde edilir.

Tersine, M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun ve (4.17)∼(4.19) denklemleri sağlansın. Bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (4.17) ve (4.19) denklemlerinden, (4.7) denklemi gerçeklenir. Böylece, Teorem 4.1.1.2 den, holomorfik dağılım $\mathscr{D}^T$ tümel jeodeziktir. Diğer taraftan, (4.19) denkleminden, (4.10) denklemi gerçeklenir. Böylece, Teorem 4.1.1.4 den, eğik dağılım $\mathscr{D}^\theta$ integrallenebilirdir. M^T ve M^θ sırası ile $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları olsun. h^T ve h^θ, sırası ile M^T ve M^θ manifoldlarının M içindeki ikinci temel formlarını göstersin. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denklemi kullanılırsa,

$$g(h^T(X,Y),V) = g(\nabla_X Y, V)$$

elde edilir. Burada, (4.17) ve (4.19) denklemleri kullanılırsa, (4.5) denkleminden

$$g(h^T(X,Y),V) = 0$$

sonucu çıkar. Bunun anlamı M^T manifoldunun M manifoldu içinde tümel jeodezik olduğudur. Diğer taraftan, herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denkleminden,

$$g(h^\theta(U,V),X) = g(\nabla_U V, X)$$

elde edilir. Burada (4.18) ve (4.19) denklemleri kullanılırsa, (4.8) denkleminden

$$g(h^\theta(U,V),X) = -X(\ln f_1)g(U,V)$$

bulunur. Bazı hesaplamalardan sonra

$$g(h^\theta(U,V),X) = -g(g(U,V)\nabla(\ln f_1),X)$$

elde edilir. Böylece,

$$h^{\theta}(U,V)=g(U,V)(-\nabla(\ln f_1))$$

sonucu çıkar. Bunun anlamı M^{θ} manifoldunun M manifoldu içinde $-\nabla(\ln f_1)$ paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip tümel umbilik bir manifold olduğudur. Böylece, Uyarı 2.5.3 ve Uyarı 4.1.2.5 den, M manifoldu ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir konformal-bükülmüş çarpımdır, burada M^T ve M^{θ} sırası ile M manifoldunun, bir holomorfik ve bir eğik altmanifoldudur. M^T manifoldu $\mathscr{D}^T$ dağılımının bir yaprağı, M^{θ} manifoldu $\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının bir yaprağı ve f_1 bir bükülmüş fonksiyondur. □

4.1.3. ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ Formundaki Konformal-Bükülmüş Çarpım Yarı-Eğik Altmanifoldlar İçin Bir Eşitsizlik

Bu bölümde, bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ formundaki bir konformal-bükülmüş çarpım yarı eğik altmanifoldunun ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik verilmiştir. Burada, M^T ve M^{θ} sırası ile $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir holomorfik ve bir eğik altmanifoldudur.

Lemma 4.1.3.1 *$M={}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş yarı-eğik altmanifoldu olsun ve h, M manifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formu olsun. Bu durumda, herhangi $X,Y\in\Gamma(TM^T)$ ve $U,V\in\Gamma(TM^{\theta})$ için*

$$g(h(X,Y),FV)=-\tfrac{1}{2}g(X,Y)\omega(FV)\ , \tag{4.23}$$

$$g(h(X,U),FV)=-\omega(JX)g(U,V)-\omega(X)g(U,PV)\ , \tag{4.24}$$

denklemleri gerçeklenir.

İspat. $M={}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^{\theta}$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve $X,Y\in\Gamma(TM^T)$ ve $V\in\Gamma(TM^{\theta})$ olsun. $(\bar{M},J,\omega,\tilde{g}=$

$e^{-\sigma}g)$ bir Kaehler manifold olduğundan, (2.38), (2.26) ve (2.37) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{h}(X,Y),FV) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,FV)\\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,JV)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,PV)\\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY,V)-\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y,PV)\\ &= -\tilde{g}(\hat{\nabla}_X JY,V)-\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y,PV)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (2.40), (2.41) ve (4.13) denklemlerinden, (4.23) denklemi bulunur. Öte yandan, $X,Y\in\Gamma(TM^T)$ ve $V\in\Gamma(TM^\theta)$ için, $(\bar{M},J,\omega,\tilde{g}=e^{-\sigma}g)$ bir Kaehler manifold olduğundan, (2.38), (2.26) ve (2.37) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{h}(X,U),FV) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U X,FV)\\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_U X,JV)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U X,PV)\\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U JX,V)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_U X,PV)\\ &= -\tilde{g}(\hat{\nabla}_U JX,V)-\tilde{g}(\hat{\nabla}_U X,PV)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.3), (2.40), (2.41), (4.13) ve (4.14) denklemleri kullanılırsa, (4.24) denklemi bulunur. □

$M={}_{f_2}M^T\times_{f_1}M^\theta$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş yarı-eğik altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ nin $\{e_1,...,e_{m_1},\bar{e}_1,...,\bar{e}_{m_2},e_1^*,...,e_{m_2}^*,\hat{e}_1,...,\hat{e}_l\}$ standart ortonormal bazını seçelim, öyle ki burada $\{e_1,\dots,e_{m_1}\}$, $\mathscr{D}^T$ dağılımının bir ortonormal bazı; $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{m_2}\}$, $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının bir ortonormal bazı; $\{e_1^*,...,e_{m_2}^*\}$, $F\mathscr{D}^\theta$ dağılımının bir ortonormal bazı ve $\{\hat{e}_1,...,\hat{e}_l\}$, $\overline{\mathscr{D}}$ dağılımının bir ortonormal bazıdır. $m_1=dim(\mathscr{D}^T)$, $m_2=dim(\mathscr{D}^\theta)$ ve $l=dim(\overline{\mathscr{D}})$ ile tanımlanmıştır.

Uyarı 4.1.3.2 *$\mathscr{D}^T$ bir holomorfik dağılım olduğundan, $\{Je_1,...,Je_{m_1}\}$ bazı da , $\mathscr{D}^T$ dağılımının bir ortonormal bazı olur. Dahası, (2.33) denkleminden, $\{\bar{a}_1=\sec\theta P\bar{e}_2,\bar{a}_2=-\sec\theta P\bar{e}_1,...,\bar{a}_{2n_2-1}=\sec\theta P\bar{e}_{2n_2},\bar{a}_{2n_2}=-\sec\theta P\bar{e}_{2n_2-1}\}$ bazı da $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının bir ortonormal bazı olur ve $\{\csc\theta F\bar{e}_1,...,\csc\theta F\bar{e}_{m_2}\}$ bazı da $F\mathscr{D}^\theta$ dağılımının bir ortonormal bazı olur. Burada θ, $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının eğik açısıdır ve $m_2=2n_2=dim(M^\theta)$.*

Teorem 4.1.3.3 *$M={}_{f_2}M^T\times_{f_1}M^\theta$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda,*

(i) *M manifoldunun h ikinci temel formunun normunun karesi*

$$\|h\|^2 \geq \frac{1}{4}m_1\|B^{FD^\theta}\|_\theta^2 + m_2\left(1 + m_2\cot^2\theta\right)\|B^T\|_T^2 \tag{4.25}$$

eşitsizliğini gerçekler, burada $m_1 = dim(M^T)$, $m_2 = dim(M^\theta)$ *ve* B^{FD^θ}, *B Lee vektör alanının* $F\mathscr{D}^\theta$ *dağılımına teğet parçasıdır ve* $\|.\|_T$ *ve* $\|.\|_\theta$ *sırası ile* g_T *ve* g_θ *metriğine göre hesaplanmıştır.*

(ii) *(4.25) eşitsizliğinde eşitlik durumu özdeş olarak sağlanırsa,* M^θ *manifoldu* $\bar{M}$ *kapsayan manifoldu içinde de tümel umbiliktir.*

İspat. h ikinci temel formunun normunun karesi

$$\|h\|^2 = \quad \|h(\mathscr{D}^T,\mathscr{D}^T)\|^2 + \|h(\mathscr{D}^T,\mathscr{D}^\theta)\|^2 + \|h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta)\|^2$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.29) denkleminden,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 = \quad & \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),e_i^*)^2 + \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1} g(h(e_r,\bar{e}_i),e_j^*)^2 \\ & + \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{t=1}^{l} g(h(e_r,e_s),\hat{e}_t)^2 + \sum_{r=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2}\sum_{t=1}^{l} g(h(e_r,\bar{e}_i),\hat{e}_t)^2 \\ & + \|h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta)\|^2\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|h\|^2 \geq \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),e_i^*)^2 + \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_i,e_r),e_j^*)^2$$

bulunur. Uyarı 4.1.3.2 den,

$$\|h\|^2 \geq \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),e_i^*)^2 + \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_i,e_r),\csc\theta F\bar{e}_j)^2$$

elde edilir. (4.23) ve (4.24) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq\ & \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,e_s)\omega^2(e_i^*)\\ &+\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\left\{\omega^2(Je_r)g^2(\bar{e}_i,\bar{e}_j)+\omega^2(e_r)g^2(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\right\}\\ &+2\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\omega(Je_r)g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\omega(e_r)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\end{aligned}$$

sonucu çıkar. (2.35) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq\ & \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,e_s)g^2(B,e_i^*)\\ &+\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\left\{g^2(B,Je_r)g^2(\bar{e}_i,\bar{e}_j)+g^2(B,e_r)g^2(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\right\}\\ &+2\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}g(B,Je_r)g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)g(B,e_r)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $g(JB^T,B^T)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}g(B,Je_r)g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)g(B,e_r)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\\ &=\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}g(B,Je_r)g(B,e_r)g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\\ &=-\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}g(JB,e_r)g(B,e_r)g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\\ &=-g(JB^T,B^T)\sum_{i,j=1}^{m_2}g(\bar{e}_i,\bar{e}_j)g(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)=0.\end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq\ & \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,e_s)g^2(B,e_i^*)\\ &+\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\left\{g^2(B,Je_r)g^2(\bar{e}_i,\bar{e}_j)+g^2(B,e_r)g^2(\bar{e}_i,P\bar{e}_j)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mathscr{D}^\theta$, θ eğik açısına sahip bir eğik altmanifold olduğundan, $i,j\in$

$\{1,2,...,m_2\}$ için

$$g(\bar{e}_i, P\bar{e}_j) = \begin{cases} \cos\theta & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{if } i = j, \end{cases}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\sum_{i,j=1}^{m_2} g^2(\bar{e}_i, P\bar{e}_j) = m_2(m_2-1)\cos^2\theta$ bulunur. Böylece, direkt hesaplama ile

$$\|h\|^2 \geq \tfrac{1}{4} m_1 \|B^{FD^\theta}\|^2 + \csc^2\theta \left\{ m_2 \|B^T\|^2 + m_2(m_2-1)\cos^2\theta \|B^T\|^2 \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse, (4.25) eşitsizliği elde edilir. (4.25) eşitsizliğinde özdeş olarak eşitlik durumu gerçeklenirse, (4.26) denkleminden $h(\mathscr{D}^\theta, \mathscr{D}^\theta) = 0$ bulunur. Yani, h, $\mathscr{D}^\theta$ dağılımı üzerinde sıfırdır. $\mathscr{D}^\theta$, M manifoldu üzerinde bir umbilik dağılım olduğundan, M^θ manifoldu $\bar{M}$ içinde umbilik olur. $\square$

4.1.4. Bir G.k.K. Manifoldun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ Formundaki Konformal-Bükülmüş Çarpım Yarı-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde, bir g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ tipindeki konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldları çalışılmıştır. f_2 fonksiyonu M^θ üzerinde tanımlı konformal çarpan ve f_1 bir bükülmüş fonksiyondur. Burada M^Tve M^θ sırası ile g.k.K. manifoldunun bir holomorfik ve bir eğik altmanifoldudur. İlk olarak, bir g.k.K. manifoldu içinde bu tip altmanifoldlara örnek verilmiştir.

Örnek. $(z_1,...,z_6)$ altı boyutlu Öklidyen uzay $\mathbb{R}^6$ nın doğal koordinatları olsun ve $\bar{\mathbb{R}}^6 = \{(z_1,...,z_6) \in \mathbb{R}^6 : z_1, z_2, z_5 \neq 0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g_0)$, (J, g_0) alışılmış Kaehler yapısına sahip bir Kaehler manifolddur. $\bar{\mathbb{R}}^6$ üzerşnde g_0 Kaehler metriğine konformal olan $g = e^\sigma g_0$ metriği tanımlansın, burada $e^\sigma = (\frac{z_3+z_4}{2})^2$. Bu durumda $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ bir g.k.K. manifolddur. M

$$z_1 = x,\ z_2 = y,\ z_3 = u+v,\ z_4 = -u+v,\ z_5 = u,\ z_6 = 0,$$

ile tanımlı bir altmanifold olsun, burada $x > 1$ ve $y, u, v \neq 0$. Bu durumda M manifoldunun teğet demeti TM nin yerel ortonormal çatısı

$$X=\partial_1\,,\ Y=\partial_2\,,\ U=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\partial_3-\partial_4+\partial_5\right\},\ V=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\partial_3+\partial_4\right\},$$

ile verilir, burada $i\in\{1,2,...,6\}$ için $\partial_i=\frac{\partial}{\partial z_i}$ for $i\in\{1,2,...,6\}$. Bu durumda $\mathscr{D}^T=span\{X,Y\}$ bir holomorfik dağılım ve $\mathscr{D}^\theta=span\{U,V\}$, $\theta=\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{6}})$ eğik açısına sahip bir (has) eğik dağılımdır. Böylece, M manifoldu $(\bar{\mathbb{R}}^6,J,g)$ manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldudur. $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integrallenebilir olduğu kolayca elde edilebilir. $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları sırası ile M^T ve M^θ ile gösterilsin. g_T ve g_θ sırası ile M^T ve M^θ manifoldları üzerine g_0 Kaehler metriği ile ilgili olarak indirgenmiş metrikler olsun. M^T üzerinde $\bar{g}_T=\dfrac{1}{x^2}g_T$ konformal Riemanniyen metriğini seçelim. M üzerinde $v=\dfrac{z_3+z_4}{2}$ olduğundan, M manifoldunun g konformal Kaehler metriğinden indirgenmiş metriği

$$\begin{aligned}ds^2 &= v^2(du^2+dv^2)+v^2(dx^2+dy^2)\\ &= v^2g_\theta+v^2g_T\\ &= v^2g_\theta+v^2x^2\bar{g}_T\end{aligned}$$

olur. Böylece, M manifoldu $(M^T,\bar{g}_T)$ ve (M^θ,g_θ) manifoldlarının konformal-bükülmüş çarpımıdır. Böylece, M manifoldu $(\bar{\mathbb{R}}^6,J,g)$ manifoldunun $M={}_{f_2}M^\theta\times_{f_1}M^T$ tipinde bir aşikar olmayan bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldudur ve konformal çarpanı $f_2=v$ ve bükülmüş fonksiyonu $f_1=xv$ olur. Dahası, $(\bar{R}^6,J,g)$ manifoldunun Lee formu $\omega=2\left\{\dfrac{1}{v}dv\right\}$ şeklindedir. Sonuç olarak, Lee vektör alanı

$$B=\frac{2}{v^2}\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

olarak hesaplanır ve M^θ manifolduna teğettir.

Lemma 4.1.4.1 *$M={}_{f_2}M^\theta\times_{f_1}M^T$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi $V\in\Gamma(TM^\theta)$ için,*

$$\omega(V)=\tfrac{2}{3}V(\ln f_1). \tag{4.27}$$

İspat. Lemma 4.1.2.2 nin ispatına çok benzerdir. Bu yüzden bu ispat verilmemiştir. □

Lemma 4.1.4.2 *$M = {}_{f_2}M^{\theta} \times_{f_1} M^T$ bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(TM^T)$ için,*

$$\omega(X) = 0. \tag{4.28}$$

İspat. Lemma 4.1.2.1 nin ispatına çok benzerdir. Bu yüzden bu ispat verilmemiştir. □

Teorem 4.1.4.3 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir has yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda M manifoldunun ${}_{f_2}M^{\theta} \times_{f_1} M^T$ tipinde lokal olarak bir konformal-bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$, $V \in \Gamma(\mathscr{D}^{\theta})$ ve bir μ fonksiyonu için,*

$$\omega(V) = V(\mu), \tag{4.29}$$

$$\omega(X) = 0, \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} A_{FV}JX - A_{FPV}X = {} & \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)X - \omega(FV)JX\Big\} \\ & -V(\mu)X\sin^2\theta \end{aligned} \tag{4.31}$$

denklemlerinin gerçeklenmesidir.

İspat. M manifoldu $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\theta} \times_{f_1} M^T$ tipinde bir konformal-bükülmüş çarpımı olsun. $\mu = \frac{2}{3}\ln f_1$ olmak üzere (4.29) denklemi Lemma 4.1.4.1 den elde edilir. Diğer taraftan Lemma 4.1.4.2 den $\omega(X) = 0$. Böylece, (4.30) denklemi elde edilir. Herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^{\theta})$ için

$$A_{FV}JX - A_{FPV}X = \Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T + \Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^{\theta}, \tag{4.32}$$

şeklinde ifade edilir, burada $\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T$, $A_{FV}JX - A_{FPV}X$ ifadesinin M^T manifolduna teğet kısmı ve $\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^{\theta}$, $A_{FV}JX - A_{FPV}X$ ifadesinin M^{θ} manifolduna teğet kısmıdır. Böylece, herhangi $Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ için, (4.2) ve (4.27) denklemleri kullanılırsa, (4.5) denkleminden

$$g\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X, Y\Big) = -\omega(V)g(X,Y)\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)g(X,Y) - \omega(FV)g(JX,Y)\Big\}$$

elde edilir. Böylece

$$\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^T = -\omega(V)X\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}\Big\{\omega(FPV)X - \omega(FV)JX\Big\} \tag{4.33}$$

sonucu çıkar. Benzer şekilde, herhangi $U \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (4.3) ve (4.28) denklemleri kullanılırsa, (4.8) denkleminden

$$g\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X, U\Big) = -g(U,V)X(\ln f_2)$$

bulunur. $U \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ keyfi vektör alanı ve f_2, sadece M^θ manifoldunun noktalarına bağlı olduğundan, $X(\ln f_2) = 0$. Bu yüzden

$$\Big(A_{FV}JX - A_{FPV}X\Big)^\theta = 0\ . \tag{4.34}$$

$\mu = \frac{2}{3}\ln f_1$ olduğundan, (4.32)∼(4.34) denklemlerinden, (4.31) denklemi elde edilir.

Tersine, M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun yarı-eğik altmanifoldu olsun, öyle ki (4.29)∼(4.31) denklemleri sağlansın. Bu durumda, $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U,V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (4.30) ve (4.31) denklemlerinden, (4.11) denklemi sağlanır. Böylece, Teorem 4.1.1.5 den, $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımı tümel jeodeziktir. Diğer taraftan, (4.31) denkleminden (4.12) denklemi sağlanır. Böylece, Teorem 4.1.1.7 den, $\mathscr{D}^T$ holomorik dağılımı integrallenebilirdir. M^T ve M^θ sırası ile $\mathscr{D}^T$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları olsunlar ve h^T ve h^θ ile sırası ile M^T ve M^θ manifoldlarının M manifoldu içindeki ikinci temel formları gösterilsin. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denklemi kullanılırsa,

$$g(h^T(X,Y),V) = g(\nabla_X Y, V)$$

elde edilir. Burada, (4.29) ve (4.31) denklemleri kullanılırsa, (4.5) denkleminden

$$g(h^T(X,Y),V) = -\nabla(\ln f_1)g(X,Y)$$

bulunur. Bunun anlamı M^T manifoldunun M manifoldu içinde $-\nabla(\ln f_1)$ paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir tümel umbilik altmanifold olduğudur. Diğer taraftan, herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^T)$ ve $U,V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denkleminden,

$$g(h^\theta(U,V),X) = g(\nabla_U V,X)$$

elde edilir. Burada (4.30) ve (4.31) denklemleri kullanılırsa, (4.8) denkleminden

$$g(h^\theta(U,V),X) = 0$$

bulunur. Böylece,

$$h^\theta(U,V) = 0$$

sonucu çıkar. Bunun anlamı M^θ manifoldunun M manifoldu içinde tümel jeodezik olduğudur. Böylece, Uyarı 2.5.3 ve Uyarı 4.1.2.5 den, M manifoldu M nin bir M^T holomorfik altmanifoldu ve bir M^θ eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ tipinde bir konformal-bükülmüş çarpımıdır, burada M^T manifoldu $\mathscr{D}^T$ dağılımının bir yaprağı, M^θ manifoldu, $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının bir yaprağı ve f_1 bir bükülmüş fonksiyondur. □

4.1.5. ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ Formundaki Konformal-Bükülmüş Çarpım Yarı-Eğik Altmanifoldlar İçin Bir Eşitsizlik

Bu bölümde, bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ tipindeki bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldunun ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik verilmiştir, burada M^T ve M^θ, $(\bar{M},J,\omega,g)$ manifoldunun sırası ile bir holomorfik ve bir eğik altmanifoldudur.

Lemma 4.1.5.1 *$M = {}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve h, M manifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formu olsun. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \Gamma(TM^T)$ ve $U,V \in \Gamma(TM^\theta)$*

için

$$g(h(X,Y),FV) = \omega(V)g(X,JY) + \omega(PV)g(X,Y) - \frac{1}{2}\omega(FV)g(X,Y) \ , \tag{4.35}$$

$$g(h(X,U),FV) = 0 \ , \tag{4.36}$$

denklemleri gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.1.3.1 in ispatına çok benzerdir. Bu yüzden ispat verilmemiştir. □

Teorem 4.1.5.2 $M = {}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ *bir* $(\bar{M},J,\omega,g)$ *g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve h, M altmanifoldunun* $\bar{M}$ *içindeki ikinci temel formu olsun. Eğer herhangi* $X,Y \in \Gamma(TM)$ *için* $h(X,Y) \in \Gamma(\bar{\mathscr{D}})$ *ve Lee vektör alanı B, M altmanifolduna teğet ise, bu durumda* $M =_{f_2} M^\theta \times_{f_1} M^T$ *bir direkt çarpım manifolddur.*

İspat. $M =_{f_2} M^\theta \times_{f_1} M^T$ bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun ve h, M altmanifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formu olsun. $h \in \bar{\mathscr{D}}$ ve Lee vektör alanı B, M altmanifolduna teğet olsun. Bu durumda, $\omega(FV) = 0$ olduğundan, herhangi $X,Y \in \Gamma(TM^T)$ ve $V \in \Gamma(TM^\theta)$ için, (4.35) denkleminden

$$g(h(X,Y),FV) = \omega(V)g(X,JY) + \omega(PV)g(X,Y) = 0 \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) denklemi kullanılırsa,

$$\omega(V)g(JX,Y) = \omega(PV)g(X,Y) \tag{4.38}$$

bulunur. (4.38) denkleminde, X yerine JX yazılırsa,

$$-\omega(V)g(X,Y) = \omega(PV)g(JX,Y) \tag{4.39}$$

elde edilir ve (4.39) denkleminde V yerine PV yazılırsa,

$$-\omega(PV)g(X,Y) = \omega(P^2V)g(JX,Y) \tag{4.40}$$

elde edilir. Bazı hesaplamalardan sonra, (2.32) denkleminden,

$$\cos^2\theta\,\omega(V)g(JX,Y) = \omega(PV)g(X,Y) \tag{4.41}$$

sonucu çıkar. (4.38) ve (4.41) denklemleri kullanılırsa,

$$\sin^2\theta\,\omega(V)g(JX,Y) = 0 \tag{4.42}$$

elde edilir. $g(JX,Y) \neq 0$ olduğundan, $\omega(V) = 0$ sağlanır. (4.27) denkleminden, f_1 bükülmüş fonksiyonun sadece M^T altmanifoldunun noktalarına bağlı olduğu elde edilir. Bu durumda metrik tensör $g = {f_2}^2 g_\theta \oplus {f_1}^2 g_T$ formundadır. Bu yüzden M altmanifoldu (M^θ, g_1) ve (M^T, g_2) manifoldlarının direkt çarpımıdır, burada $g_1 = {f_2}^2 g_\theta$ ve $g_2 = {f_1}^2 g_T$. □

Teorem 4.1.5.3 *$M = {}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir konformal-bükülmüş çarpım yarı-eğik altmanifoldu olsun. h, M manifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formu ve Lee vektör alanı B, M manifolduna teğet olsun. Bu durumda*

(i) *M manifoldunun ikinci temel formu h nin normunun karesi*

$$\|h\|^2 \geq m_1(1+\cos^2\theta)\csc^2\theta\|B^\theta\|^2_\theta \ , \tag{4.43}$$

eşitsizliğini gerçekler, burada $m_1 = dim(M^T)$, $m_2 = dim(M^\theta)$ ve B^θ, B vektör alanının $\mathscr{D}^\theta$ dağılımına teğet parçasıdır ve $\|.\|_\theta$, g_θ metriğine göre hesaplanmıştır.

(ii) *(4.43) eşitsizliğinde eşitlik durumu özdeş olarak gerçeklenirse, bu durumda M^θ manifoldu $\bar{M}$ kapsayan manifoldu içinde de umbiliktir.*

İspat. h ikinci temel formunun normunun karesi

$$\|h\|^2 = \quad \|h(\mathscr{D}^T,\mathscr{D}^T)\|^2 + \|h(\mathscr{D}^T,\mathscr{D}^\theta)\|^2 + \|h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta)\|^2$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.29) ayrışımından,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 = &\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),e_i^*)^2+\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1} g(h(e_r,\bar{e}_i),e_j^*)^2\\ &+\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{t=1}^{l} g(h(e_r,e_s),\hat{e}_t)^2+\sum_{r=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2}\sum_{t=1}^{l} g(h(e_r,\bar{e}_i),\hat{e}_t)^2\\ &+\|h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta)\|^2\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|h\|^2 \geq \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),e_i^*)^2+\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_i,e_r),e_j^*)^2$$

bulunur. Uyarı 4.1.3.2 ve (4.36) denkleminden

$$\|h\|^2 \geq \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(h(e_r,e_s),\csc\theta F\bar{e}_i)^2$$

elde edilir. $\omega(FV)=g(B,FV)=0$ olduğundan, (4.35) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq\ &\csc^2\theta\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,Je_s)\omega^2(\bar{e}_i)\\ &+\csc^2\theta\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\omega^2(P\bar{e}_i)g^2(e_r,e_s)\\ &+2\csc^2\theta\sum_{i,j=1}^{m_2}\sum_{r=1}^{m_1}\omega(\bar{e}_i)g(e_r,Je_s)\omega(P\bar{e}_i)g(e_r,e_s)\end{aligned}$$

bulunur. (2.35) denkleminden,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq\ &\csc^2\theta\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,Je_s)g^2(B,\bar{e}_i)\\ &+\csc^2\theta\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(B,P\bar{e}_i)g^2(e_r,e_s)\\ &+2\csc^2\theta\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(B,\bar{e}_i)g(e_r,Je_s)g(B,P\bar{e}_i)g(e_r,e_s)\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Burada $g(JB,B)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(B,\bar{e}_i)g(e_r,Je_s)g(B,P\bar{e}_i)g(e_r,e_s)\\
&=\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(B,\bar{e}_i)g(B,P\bar{e}_i)g(e_r,Je_s)g(e_r,e_s)\\
&=-\sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g(B,\bar{e}_i)g(JB,\bar{e}_i)g(e_r,Je_s)g(e_r,e_s)\\
&=-g(JB,B)\textstyle\sum_{r,s=1}^{m_1} g(e_r,Je_s)g(e_r,e_s)=0.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 \geq \quad & \csc^2\theta \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,Je_s)g^2(B,\bar{e}_i)\\
&+\csc^2\theta \textstyle\sum_{r,s=1}^{m_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m_2} g^2(B,P\bar{e}_i)g^2(e_r,e_s)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Uyarı 4.1.3.2 den,

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 \geq \quad & \csc^2\theta \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} g^2(e_r,Je_s)g^2(B,\bar{e}_i)\\
&+\csc^2\theta\cos^2\theta \sum_{r,s=1}^{m_1}\sum_{i,j=1}^{m_2} g^2(B,\bar{a}_i)g^2(e_r,e_s)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, direkt hesaplama ile

$$\|h\|^2 \geq m_1\cot^2\theta\|B^\theta\|^2+m_1\csc^2\theta\|B^\theta\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse, (4.43) eşitsizliği elde edilir. (4.43) eşitsizliğinde eşitlik durumu özdeş olarak sağlanırsa, (4.44) denkleminden $h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta)=0$ elde edilir. Yani, h, $\mathscr{D}^\theta$ dağılımı üzerinde sıfırdır. $\mathscr{D}^\theta$ dağılımı M üzerinde umbilik olduğundan, M^θ manifoldu $\bar{M}$ içinde umbilik olur. □

Uyarı 4.1.5.4 *ω Lee formunun tam olup olmaması bu çalışmadaki sonuçları değiştirmez. Bu yüzden, bu sonuçlar yerel konformal Kaehler durumunda da geçerlidir.*

4.2. ÇARPIK-BÜKÜLMÜŞ ÇARPIM MANİFOLDLAR

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemanniyen manifoldlar ve $f_2 : M_2 \to (0,\infty)$ ve $f_1 : M_1 \times M_2 \to (0,\infty)$ düzgün fonksiyonlar olsun. Bu durumda *çarpık-bükülmüş çarpım* ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ [52],

$$g = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^*(g_1) + f_1^2 \pi_2^*(g_2) \tag{4.45}$$

ile tanımlı g metriğine sahip $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldudur. $f_2 \in C^\infty(M_2)$ fonksiyonu ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldunun bir *çarpık fonksiyonu* ve $f_1 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ fonksiyonu ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldunun bir *bükülmüş fonksiyonu* olarak adlandırılır. Bu durumda eğer f_1 fonksiyonu sadece M_2 manifoldunun noktalarına bağlı ise, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çarpık-bükülmüş çarpımı bir *baz konformal çarpık çarpım* [22] olur. Bir çarpık-bükülmüş çarpım ne çift çarpık çarpım, ne çarpık çarpım ne de baz konformal çarpık çarpım ise *aşikar olmayan*dır.

${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldu $\bar{\nabla}$, Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım olsun. Burada $\bar{\nabla}$ koneksiyonu (4.45) denkleminde verilen g metriği ile ilişkilidir. ∇^i koneksiyonu $i \in \{1,2\}$ için M_i manifoldunun Levi-Civita koneksiyonunu göstermektedir. Bu durumda, $f_2 \in C^\infty(M_2)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunun kovaryant türev formülleri, herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^1_X Y - g(X,Y)\bar{\nabla}\ln(f_2 \circ \pi_2)\ , \tag{4.46}$$

$$\bar{\nabla}_V X = \bar{\nabla}_X V = V(\ln(f_2 \circ \pi_2))X + X(\ln f_1)V\ , \tag{4.47}$$

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla^2_U V + U(\ln f_1)V + V(\ln f_1)U - g(U,V)\bar{\nabla}\ln f_1 \tag{4.48}$$

ile verilir. Bu formüller Lemma 2.1 [31] de $X(\ln(f_2 \circ \pi_2)) = Y(\ln(f_2 \circ \pi_2)) = 0$ alınarak direkt olarak elde edilebilir.

Uyarı 4.2.1 *Bu çalışma boyunca M manifoldu $f_2 \in C^\infty(M_2)$ çarpık fonksiyonuna, f_1 bükülmüş fonksiyonuna ve g Riemanniyen metriğine sahip ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ tipinde bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunu gösterecektir.*

R ve R^i, $i = 1,2$ için sırası ile ∇ ve ∇^i Levi-Civita koneksiyonları ile ilgili Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda, aşağıdaki formüller elde edilir.

Lemma 4.2.2 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda herhangi* $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ *ve* $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$R_{XY}Z = R^1_{XY}Z + H^l(Y)g(X,Z) - H^l(X)g(Y,Z), \tag{4.49}$$

$$R_{XY}U = U(l)\left\{Y(k)X - X(k)Y\right\}, \tag{4.50}$$

$$R_{UV}X = X(k)\left\{V(l)U - U(l)V\right\} + UX(k)V - VX(k)U, \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} R_{XU}Y = & \left\{h^k_1(X,Y) + X(k)Y(k)\right\}U + Y(k)U(l)X \\ & + g(X,Y)\left\{H^l(U) + U(l)\nabla l\right\}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} R_{UX}V = & \left\{h^l_2(U,V) + U(l)V(l) - U(l)V(k) - U(k)V(l)\right\}X \\ & + \left\{V(l)X(k) - XV(k)\right\}U + \left\{X(k)\nabla k + H^k(X)\right\}g(U,V), \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} R_{UV}W = & R^2_{UV}W - \left\{h^k_2(V,W) - W(k)V(k)\right\}U \\ & + \left\{h^k_2(U,W) - W(k)U(k)\right\}V \\ & - \left\{H^k(U) + U(k)\nabla k\right\}g(V,W) \\ & + \left\{H^k(V) + V(k)\nabla k\right\}g(U,W) \end{aligned} \tag{4.54}$$

denklemleri gerçeklenir, burada H^k*, k fonksiyonunun M üzerindeki Hessiyen tensörüdür.*

İspat. *M* bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, $[U,V] = 0$ olmak üzere, herhangi $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için,

$$R_{UV}W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W. \tag{4.55}$$

Burada (4.48) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_U\nabla_V W = \; & \nabla_U\{\nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V - g(V,W)\nabla k\} \\
= \; & \nabla^2_U(\nabla^2_V W) + U(k)\nabla^2_V W + \nabla^2_V W(k)U - g(U,\nabla^2_V W)\nabla k \\
& + U(V(k))W + V(k)\nabla_U W + U(W(k))V + W(k)\nabla_U V \\
& - \{g(\nabla_U V,W) + g(V,\nabla_U W)\}\nabla k - g(V,W)\nabla_U\nabla k
\end{aligned}$$

bulunur. Burada tekrar (4.48) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_U\nabla_V W = \; & \nabla^2_U(\nabla^2_V W) + U(k)\nabla^2_V W + \nabla^2_V W(k)U - g(U,\nabla^2_V W)\nabla k \\
& + U(V(k))W + V(k)(\nabla^2_U W) + V(k)U(k)W + V(k)W(k)U - V(k)g(U,W)\nabla k \\
& + U(W(k))V + W(k)(\nabla^2_U V) + W(k)U(k)V + W(k)V(k)U - W(k)g(U,V)\nabla k \\
& - \{g(\nabla^2_U V,W) + U(k)g(V,W) + V(k)g(U,W) - g(U,V)g(\nabla k,W)\}\nabla k \\
& - \{g(V,\nabla^2_U W) + U(k)g(V,W) + W(k)g(V,U) - g(U,W)g(V,\nabla k)\}\nabla k \\
& - g(V,W)\nabla_U\nabla k
\end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.56) denkleminde V ile U vektör alanları yer değiştirirse

$$\begin{aligned}
\nabla_V\nabla_U W = \; & \nabla^2_V(\nabla^2_U W) + V(k)\nabla^2_U W + \nabla^2_U W(k)V - g(V,\nabla^2_U W)\nabla k \\
& + V(U(k))W + U(k)(\nabla^2_V W) + U(k)V(k)W + U(k)W(k)V - U(k)g(V,W)\nabla k \\
& + V(W(k))U + W(k)(\nabla^2_V U) + W(k)V(k)U + W(k)U(k)V - W(k)g(V,U)\nabla k \\
& - \{g(\nabla^2_V U,W) + V(k)g(U,W) + U(k)g(V,W) - g(V,U)g(\nabla k,W)\}\nabla k \\
& - \{g(U,\nabla^2_V W) + V(k)g(U,W) + W(k)g(U,V) - g(V,W)g(U,\nabla k)\}\nabla k \\
& - g(U,W)\nabla_V\nabla k
\end{aligned} \tag{4.57}$$

bulunur. Bu durumda, (4.56) ve (4.57) denklemlerinin farkları alınıp düzenlenirse, (4.55) denkleminden

$$\begin{aligned}
R_{UV}W = \ & R^2_{UV}W + U(k)\nabla^2_V W - V(k)\nabla^2_U W + \nabla^2_V W(k)U - \nabla^2_U W(k)V \\
& -g(U,\nabla^2_V W)\nabla k + g(V,\nabla^2_U W)\nabla k + \{U(V(k)) - V(U(k))\}W \\
& +U(W(k))V - V(W(k))U + V(k)(\nabla^2_U W) - U(k)(\nabla^2_V W) + W(k)\{\nabla^2_U V - \nabla^2_V U\} \\
& -V(k)g(U,W)\nabla k + U(k)g(V,W) + W(k)V(k)U - W(k)U(k)V \\
& -g(\nabla^2_U V, W)\nabla k - g(V,\nabla^2_U W)\nabla k + g(\nabla^2_V U, W)\nabla k + g(U,\nabla^2_V W)\nabla k \\
& -U(k)g(V,W)\nabla k + V(k)g(U,W)\nabla k + g(U,W)V(k)\nabla k - g(V,W)U(k)\nabla k \\
& -g(V,W)\nabla_U \nabla k + g(U,W)\nabla_V \nabla k
\end{aligned} \tag{4.58}$$

elde edilir. Burada (2.47) denklemi ve $\nabla_U \nabla k = H^k(U)$ olduğu gerçeği kullanılırsa, (4.54) denklemine ulaşılır. Diğer denklemler benzer teknikler ile ispatlanır. $\square$

S ve S^i, $i = 1,2$ için, sırası ile (M,g) ve (M_i,g_i) manifoldlarının Ricci tensörü olsun. Bu durumda, aşağıdaki formüller elde edilir.

Lemma 4.2.3 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$\begin{aligned}
S(X,Y) = \ & S^1(X,Y) + h^l(X,Y) - m_2\left\{h^k_1(X,Y) + X(k)Y(k)\right\} \\
& -g(X,Y)\left\{\Delta l + g(\nabla l, \nabla l)\right\},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$S(X,U) = (1-m_2)XU(k) + (m_1+m_2-2)X(k)U(l), \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
S(U,V) = \ & S^2(U,V) + h^k(U,V) + (1-m_2)h^k_2(U,V) + m_2 U(k)V(k) \\
& -g(U,V)\left\{\Delta k + g(\nabla k, \nabla k)\right\} \\
& -m_1\left\{h^l_2(U,V) + U(l)V(l) - U(l)V(k) - U(k)V(l)\right\}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

denklemleri gerçeklenir.

İspat. *M* bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, herhangi $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$S(U,V) = \sum_{i=1}^{m_1} g(R_{e_iU}V, e_i) + \sum_{i=1}^{m_2} g(R_{w_iU}V, w_i), \tag{4.62}$$

burada $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m_1}\}$, M_1 manifoldunun bir ortonormal bazı ve $\{w_1, w_2, \ldots, w_{m_2}\}$, M_2 manifoldunun bir ortonormal bazıdır. Burada (4.53) ve (4.54) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S(U,V) = \; & -\sum_{i=1}^{m_1}\{h_2^l(U,V) + V(l)U(l) - U(k)V(l) - V(k)U(l)\}g(e_i,e_i) \\ & -\sum_{i=1}^{m_1}\{V(l)e_i(k) - e_i(V(k))\}g(U,e_i) \\ & -\sum_{i=1}^{m_1}\{e_i(k)g(\nabla k, e_i) + g(H^k(e_i),e_i)\}g(U,V) \\ & +\sum_{i=1}^{m_2} g(R^2_{w_iU}V, w_i) + \sum_{i=1}^{m_2}\{-h_2^k(U,V) + V(k)U(k)\}g(w_i,w_i) \\ & +\sum_{i=1}^{m_2}\{h_2^k(w_i,V) - V(k)w_i(k)\}g(U,w_i) \\ & -\sum_{i=1}^{m_2}\{g(H^k(w_i),w_i) + w_i(k)g(\nabla k, w_i)\}g(U,V) \\ & +\sum_{i=1}^{m_2}\{g(H^k(U),w_i) + U(k)g(\nabla k, w_i)\}g(w_i,V) \end{aligned}$$

elde edilir. Bazı hesaplamalardan sonra

$$\begin{aligned} S(U,V) = \; & -m_1\{h_2^l(U,V) + V(l)U(l) - U(k)V(l) - V(k)U(l)\} \\ & -g(\nabla^1 k, \nabla^1 k)g(U,V) - \Delta^1 k g(U,V) + S^2(U,V) \\ & +m_2\{-h_2^k(U,V) + V(k)U(k)\} + h_2^k(U,V) - V(k)U(k) \\ & -\Delta^2 k g(U,V) - g(\nabla^2 k, \nabla^2 k)g(U,V) \\ & g(H^k(U),V) + U(k)V(k) \end{aligned} \tag{4.63}$$

bulunur, burada $\sum_{i=1}^{m_1} g(H^k(e_i),e_i) = \Delta^1 k$ ve $\sum_{i=1}^{m_2} g(H^k(w_i),w_i) = \Delta^2 k$ alınmıştır. $\Delta k = \Delta^1 k + \Delta^2 k$, $g(\nabla^1 k, \nabla^2 k) = 0$ ve $g(H^k(U),V) = h^k(U,V)$ olduğundan, (4.63) denklemi düzenlenirse (4.61) denklemi elde edilir. Diğer denklemler benzer teknikler ile ispatlanır.

Öte yandan, (4.59), (4.60) ve (4.61) denklemleri, herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve için Proposition 3 [26] den, $X(l) = 0$ alınarak da kolayca elde edilebilir. $\square$

τ^1 ve τ^2, sırası ile (M_1, g_1) ve(M_2, g_2) manifoldlarının skaler eğriliğini göstersin. Bu durumda, Lemma 4.2.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.2.4 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve τ, M manifoldunun skaler eğriliği* *olsun. Bu durumda, herhangi* $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ *ve* $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$\begin{aligned}\tau = \;& \frac{\tau^1}{{f_2}^2} + \frac{\tau^2}{{f_1}^2} + \tilde{\Delta}_1(l) + \tilde{\Delta}_2(k) - \frac{m_2}{{f_2}^2}\Delta_1(k) - \frac{m_1}{{f_1}^2}\Delta_2(l) \\ & + \frac{(1-m_2)}{{f_1}^2}\Delta_2(k) - m_2 g(P_1\nabla k, P_1\nabla k) - m_1\Delta l - 2m_1 g(\nabla l, \nabla l) \\ & - m_2\left\{\Delta k + g(\nabla k, \nabla k)\right\} + m_2 g(P_2\nabla k, P_2\nabla k) + 2m_1 g(P_2\nabla k, \nabla l)\end{aligned} \tag{4.64}$$

denklemi gerçeklenir, burada $\tilde{\Delta}_1(k) = \sum_{i=1}^{m_1} h^k(e_i,e_i)$, $\tilde{\Delta}_2(k) = \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} h^k(e_i,e_i)$, $\Delta k = \tilde{\Delta}_1(k) + \tilde{\Delta}_2(k)$ *ve* $\nabla k = P_1\nabla k + P_2\nabla k$.

İspat. M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve τ, M manifoldunun skaler eğriliği olsun. $\{e_1,\ldots,e_{m_1},e_{m_1+1},\ldots,e_{m_1+m_2}\}$, M manifoldunun bir ortonormal bazı olsun, burada $\{f_2e_1,\ldots,f_2e_{m_1}\}$, M_1 manifoldunun bir ortonormal bazı ve $\{f_1e_{m_1+1},\ldots,f_1e_{m_1+m_2}\}$, M_2 manifoldunun bir ortonormal bazıdır. Bu durumda,

$$\tau = \sum_{i=1}^{m_1} S(e_i,e_i) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} S(e_i,e_i). \tag{4.65}$$

Burada, (4.59) ve (4.61) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tau = \;& \tfrac{1}{f_2^2}\textstyle\sum_{i=1}^{m_1} S^1(f_2e_i,f_2e_i) + \sum_{i=1}^{m_1} h^l(e_i,e_i) \\ & -\tfrac{m_2}{f_2^2}\textstyle\sum_{i=1}^{m_1} h_1^k(f_2e_i,f_2e_i) - m_2\sum_{i=1}^{m_1} e_i(k)e_i(k) \\ & -\{\Delta l + g(\nabla l,\nabla l)\}\textstyle\sum_{i=1}^{m_1} g(e_i,e_i) \\ & +\tfrac{1}{f_1^2}\textstyle\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} S^2(f_1e_i,f_1e_i) + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} h^k(e_i,e_i) \\ & +(1-m_2)\textstyle\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} h_2^k(e_i,e_i) + m_2\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} e_i(k)e_i(k) \\ & -\{\Delta k + g(\nabla k,\nabla k)\}\textstyle\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} e_i(k)e_i(k) - m_1\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} h_2^l(e_i,e_i) \\ & -m_1\textstyle\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2}\{e_i(l)e_i(l) - 2e_i(k)e_i(l)\}\end{aligned} \tag{4.66}$$

bulunur. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}\tau = \;& \tfrac{\tau^1}{f_2^2} + \tilde{\Delta}_1(l) - \tfrac{m_2}{f_2^2}\Delta_1(k) \\ & -m_2 g(P_1\nabla k, P_1\nabla k) - m_1\Delta l - 2m_1 g(\nabla l,\nabla l)\} + \tfrac{\tau^2}{f_1^2} \\ & +\tilde{\Delta}_2(k) + \tfrac{(1-m_2)}{f_1^2}\Delta_2(k) + m_2 g(P_2\nabla k, P_2\nabla k) \\ & -m_2\{\Delta k + g(\nabla k,\nabla k)\} - \tfrac{m_1}{f_1^2}\Delta_2(l) + 2m_1 g(P_2\nabla k, \nabla l)\end{aligned} \tag{4.67}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\Delta}_1(k) = \sum_{i=1}^{m_1} h^k(e_i,e_i)$, $\tilde{\Delta}_2(k) = \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} h^k(e_i,e_i)$, $\Delta k = \tilde{\Delta}_1(k) + \tilde{\Delta}_2(k)$ ve $\nabla k = P_1\nabla k + P_2\nabla k$. İstenilen (4.67) denkleminden çıkar. □

Aşağıda çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörünü karakterize eden lemma verilmiştir.

Lemma 4.2.5 *M bir çarpık-bükülmüş manifold olsun. Bu durumda, herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için, Weyl konformal eğrilik tensörü $\mathscr{W}$,*

$$\mathscr{W}(U,V)X = \frac{(m_1-1)}{(m_1+m_2-2)}\left\{XU(k)V - XV(k)U\right\} \tag{4.68}$$

denklemini gerçekler, burada $m_i = dimM_i$, i=1,2.

İspat. $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ olsun. Bu durumda, $g(U,X) = g(V,X) = 0$ olduğundan, (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\mathscr{W}(U,V)X = R(U,V)X + \frac{1}{(m_1+m_2-2)}\left\{S(U,X)V - S(V,X)U\right\} \tag{4.69}$$

elde edilir. (4.60) denklemi (4.69) denkleminde kullanılırsa, (4.68) denklemi bulunur. □

Tanım 4.2.6 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için $\mathscr{W}(U,V) = 0$ ise M_2 manifoldu M_1 boyunca* Weyl konformal düzdür *denir ve eğer $\mathscr{W}(X,Y) = 0$ ise M_1 manifoldu M_2 boyunca* Weyl konformal düzdür *denir.*

Aşağıda, çarpık-bükülmüş çarpımları karakterize eden bir teorem verilmiştir.

Teorem 4.2.7 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve $dimM_1 > 1$ olsun. Bu durumda (M,g) manifoldunun (M_1,g_1) ve $(M_2,\tilde{g}_2)$ manifoldlarının ${}_{f_2}M_1 \times_f M_2$ tipinde f_2 ve f çarpık fonksiyonlarına sahip bir çift çarpık çarpımı olarak ifade edilebilmesi için gerek ve yeter koşul M_2 manifoldunun M_1 boyunca Weyl konformal düz olmasıdır, burada f, M_2 üzerinde bir pozitif düzgün fonksiyon olmak üzere $\tilde{g}_2 = f^2 g_2$.*

İspat. (M,g) manifoldu (M_1,g_1) ve $(M_2,\tilde{g_2})$ manifoldlarının f_2 ve f çarpık fonksiyonlarına sahip bir çift çarpık çarpımı olsun. Bu durumda, herhangi $V \in \mathscr{L}(M_2)$ için $V(k)=0$ elde edilir. Böylece iddia (4.68) denkleminden çıkar.

Tersine, herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M_2)$ için $\mathscr{W}(U,V)X=0$ ise, bu durumda (2.33) denkleminden

$$XV(k)U - XU(k)V = 0 \tag{4.70}$$

elde edilir. U ve V lineer bağımsız vektörleri için, (4.70) denkleminden $XV(k)=XU(k)=0$ sonucu çıkar. Böylece, $f_1 = e^k = a(x)b(y)$ elde edilir, burada a ve b sırası ile M_1 ve M_2 üzerinde pozitif düzgün fonksiyonlardır. Bu durumda, g metriği $g = f_2^2(y)g_1 + a^2(x)\tilde{g_2}$ şeklinde ifade edilebilir, burada $\tilde{g_2} = b^2(y)g_2$. O halde, $f=a$ olmak üzere $({}_{f_2}M_1 \times_f M_2, g)$ bir çift çarpık çarpımdır. $\square$

Bu kısımda, bir eşdairesel (concircular) vektör alanına izin veren çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar çalışılmıştır.

Aşağıda, eşdairesel vektör alanına izin veren bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold için bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 4.2.8 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda*

***a)** Eğer M manifoldu $\mathscr{L}(M_1)$ içinde bir eşdairesel vektör alanına izin veriyorsa, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir bükülmüş çarpımdır.*

***b)** Eğer M manifoldu $\mathscr{L}(M_2)$ içinde bir eşdairesel vektör alanına izin veriyorsa, bu durumda ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir baz konformal çarpık çarpımdır.*

İspat. M bir çarpık-bükülmüş çarpım olsun.

a) X, $\mathscr{L}(M_1)$ içinde bir eşdairesel vektör alanı ise, bu durumda herhangi $V \in \mathscr{L}(M_2)$ için, (2.14) denkleminden

$$\nabla_V X = \lambda V \tag{4.71}$$

elde edilir. (4.47) denklemi kullanılırsa, (4.71) denkleminden

$$V(l)X + X(k)V = \lambda V$$

elde edilir. Böylece, herhangi $V \in \mathscr{L}(M_2)$ için $V(l) = 0$ bulunur. Bunun anlamı, l fonksiyonunun sabit olduğudur, yani f_2 fonksiyonu sabittir. Böylece ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir bükülmüş çarpımdır.

b) U, $\mathscr{L}(M_2)$ içinde bir eşdairesel vektör alanı olsun, bu durumda herhangi $Y \in \mathscr{L}(M_1)$ için, (2.14) denkleminden

$$\nabla_Y U = \lambda Y \tag{4.72}$$

elde edilir. (4.47) denklemi kullanılırsa, (4.72) denkleminden

$$U(l)Y + Y(k)U = \lambda Y$$

bulunur. Böylece, herhangi $Y \in \mathscr{L}(M_1)$ için $Y(k) = 0$ bulunur. Bunun anlamı $k = \ln f_1$ fonksiyonunun sadece M_2 manifoldunun noktalarına bağlı olduğudur. Böylece, ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir baz konformal çarpık çarpımdır. □

Teorem 4.2.9 *M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Eğer l fonksiyonunun gradiyenti ∇l bir eşdairesel vektör alanı ise bu durumda M bir baz konformal çarpık çarpımdır.*

İspat. M bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. $\nabla l \in \mathscr{L}(M_2)$ olduğundan, herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ için (4.47) denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_X \nabla l = \nabla l(l)X + X(k)\nabla l$$

elde edilir. Burada, ∇l eşdairesel olduğundan her $X \in \mathscr{L}(M_1)$ vektör alanı için $X(k)$ sıfıra eşit olmalıdır. Bunun anlamı $f_1 = e^k$ fonksiyonu sadece M_2 manifoldunun noktalarına bağlıdır. Böylece, M bir baz konformal çarpık çarpımdır. □

4.2.1. Einstein-Benzeri Çarpık-Bükülmüş Çarpım Manifoldlar

Bu bölümde, Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar çalışılmıştır. Farklı sınıflardan Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpan manifoldlarını karakterize eden teoremler kanıtlanmıştır.

Aşağıda $\mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldları karakterize eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2.1.1 *M manifoldu $\mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda*

a) *(M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ için*

$$\begin{aligned}(\nabla^1_X h^l)(X,X) = \; & m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) + 2X(k)h^k_1(X,X)\} \\ & -2g(X,X)S(\nabla l, X)\end{aligned} \tag{4.73}$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

b) *(M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$\begin{aligned}(\nabla^2_U h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) = \; & m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) - 2m_2 h^k_2(U,U)U(k) \\ & +2U(f_1)f_1 g_2(U,U)k^\diamond + g(U,U)U(k^\diamond) \\ & +2m_1\{h^l_2(U,U)U(l) - h^l_2(U,U)U(k) \\ & -h^k_2(U,U)U(l)\} \\ & +4U(k)S(U,U) - 2g(U,U)S(\nabla k, U)\end{aligned} \tag{4.74}$$

denkleminin gerçeklenmesidir, burada $k^\diamond = \triangle k + \|\nabla k\|^2$.

İspat. M manifoldu $\mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda M manifoldu üzerindeki herhangi X vektör alanı için, (2.15) denkleminden $(\nabla_X S)(X,X) = 0$ elde edilir.

a) (M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_1 üzerindeki herhangi bir X vektör alanı için

$$(\nabla^1_X S^1)(X,X) = 0 \tag{4.75}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, (4.46) ve (4.59) denklemlerinden, $X \in \mathscr{L}(M_1)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(X,X) = \; & X(S(X,X)) - 2S(\nabla_X X, X) \\
= \; & X(S^1(X,X) + h^l(X,X) - m_2\{h^k_1(X,X) + X(k)X(k)\} - g(X,X)l^\diamond) \\
& -2S(\nabla^1_X X - g(X,X)\nabla l, X). \\
= \; & X(S^1(X,X)) - 2S^1(\nabla^1_X X, X) + X(h^l(X,X)) - 2h^l(\nabla^1_X X, X) \\
& -m_2\{X(h^k_1(X,X)) - 2h^k_1(X,X)\} - m_2 X(X(k)X(k)) - X(g(X,X)l^\diamond) \\
& +2m_2 \nabla^1_X X(k)X(k) + 2g(\nabla^1_X X, X)l^\diamond + 2g(X,X)S(\nabla l, X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla_X S)(X,X) = \; & (\nabla^1_X S^1)(X,X) + (\nabla^1_X h^l)(X,X) \\
& -m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) - 2m_2 X(X(k))X(k) - (\nabla^1_X g)(X,X)l^\diamond \\
& +2m_2 \nabla^1_X X(k)X(k) + 2g(X,X)S(\nabla l, X)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

bulunur. (2.47) ve (4.75) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla_X S)(X,X) = \; & (\nabla^1_X h^l)(X,X) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) \\
& -2m_2 X(k)h^k_1(X,X) + 2g(X,X)S(\nabla l, X)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

sonucuna ulaşılır. Bu yüzden, (4.73) denklemi, (4.77) denkleminden elde edilir.

b) (M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_2 üzerindeki herhangi bir U vektör alanı için

$$(\nabla^2_U S^2)(U,U) = 0 \tag{4.78}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, (4.48) ve (4.61) denklemlerinden $U \in \mathscr{L}(M_2)$

için

$$
\begin{aligned}
(\nabla_U S)(U,U) = \;& U(S(U,U)) - 2S(\nabla_U U,U) \\
= \;& U(S^2(U,U) + h^k(U,U) + (1-m_2)h_2^k(U,U) + m_2 U(k)U(k) - g(U,U)k^\diamond) \\
& -m_1 U(h_2^l(U,U) + U(l)U(l) - U(l)U(k) - U(k)U(l)) \\
& -2S(\nabla_U^2 U + 2U(k)U - g(U,U)\nabla k, U) \\
= \;& U(S^2(U,U)) - 2S^2(\nabla_U^2 U,U) + U(h^k(U,U)) - 2h^k(\nabla_U^2 U,U) \\
& +(1-m_2)\{U(h_2^k(U,U)) - 2h_2^k(\nabla_U^2 U,U)\} \\
& -m_1\{U(h_2^l(U,U)) - 2h_2^l(\nabla_U^2 U,U)\} + m_2\{U(U(k)U(k)) - 2\nabla_U^2 U(k)U(k)\} \\
& -U(g(U,U))k^\diamond + 2g(\nabla_U^2 U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\
& -m_1\{U(U(l)U(l)) - 2U(U(l)U(k))\} \\
& -m_1\{-2\nabla_U^2 U(l)U(l) + 2\nabla_U^2 U(l)U(k) + 2\nabla_U^2 U(k)U(l)\} \\
& -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k,U)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
0 = (\nabla_U S)(U,U) = \;& (\nabla_U^2 S^2)(U,U) + (\nabla_U^2 h^k)(U,U) \\
& +(1-m_2)(\nabla_U^2 h_2^k)(U,U) - m_1(\nabla_U^2 h_2^l)(U,U) \\
& +2m_2 h_2^k(U,U)U(k) - (\nabla_U^2 g)(U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\
& -m_1\{2U(U(l))U(l) - 2U(U(l))U(k) - 2U(U(k))U(l)\} \\
& -m_1\{-2\nabla_U^2 U(l)U(l) + 2\nabla_U^2 U(l)U(k) + 2\nabla_U^2 U(k)U(l)\} \\
& -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k,U)
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

bulunur. (2.47) ve (4.78) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 = \;& (\nabla_U^2 h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla_U^2 h_2^k)(U,U) \\
& -m_1(\nabla_U^2 h_2^l)(U,U) + 2m_2 h_2^k(U,U)U(k) \\
& -2U(f_1)f_1 g_2(U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\
& -2m_1\{h_2^l(U,U)U(l) - h_2^l(U,U)U(k) - h_2^k(U,U)U(l)\} \\
& -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k,U).
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu yüzden, (4.74) denklemi (4.80) denkleminden elde edilir. □

Yukarıdaki teoremden hareketle, bir çarpık çarpım manifold için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.2 *M manifoldu $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık çarpım manifold* *olsun. Bu durumda*

a) (M_1, g_1) *manifoldunun* $\mathscr{A}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi* $X \in \mathscr{L}(M_1)$ *için*

$$(\nabla^1_X h^l)(X,X) = 0 \tag{4.81}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

b) (M_2, g_2) *manifoldunun* $\mathscr{A}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi* $U \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) + 2h^l_2(U,U)U(l) = 0 \tag{4.82}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. (4.73) ve (4.74) denklemlerinde k fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa istenilen elde edilir. □

$\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpan manifoldları aşağıdaki teoremde karakterize edilmiştir.

Teorem 4.2.1.3 *M manifoldu* $\mathscr{B}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda,*

a) (M_1, g_1) *manifoldunun* $\mathscr{B}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi* $X, Y, Z \in \mathscr{L}(M_1)$ *için*

$$\begin{aligned}(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^l)(X,Z) = \;& m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^k_1)(X,Z)\} \\ & + m_2\{h^k_1(X,Z)Y(k) - h^k_1(Y,Z)X(k)\} \\ & - g(X,Z)S(Y,\nabla l) + g(Y,Z)S(X,\nabla l)\end{aligned} \tag{4.83}$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

b) (M_2, g_2) *manifoldunun* $\mathscr{B}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve* *yeter koşul herhangi* $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$\begin{aligned}
&(\nabla^2_U h^k)(V,W) - (\nabla^2_V h^k)(U,W) + (1-m_2)\{(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^k_2)(U,W)\} = \\
&m_1\{(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^l_2)(U,W)\} \\
&+\{2U(f_1)f_1 g_2(V,W) - 2V(f_1)f_1 g_2(U,W)\}k^\diamond \\
&+g(V,W)U(k^\diamond) - g(U,W)V(k^\diamond) \\
&-m_2\{h^k_2(U,W)V(k) - h^k_2(V,W)U(k)\} \qquad (4.84) \\
&+m_1\{h^l_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,W)V(l)\} \\
&+m_1\{-h^l_2(U,W)V(k) - h^l_2(V,W)U(l)\} \\
&+m_1\{h^k_2(V,W)U(l) + h^l_2(V,W)U(k)\} \\
&-U(k)S(V,W) + V(k)S(U,W) + g(U,W)S(V,\nabla k) - g(V,W)S(U,\nabla k)
\end{aligned}$$

denkleminin gerçeklenmesidir, burada $k^\diamond = \triangle k + \|\nabla k\|^2$.

İspat. M manifoldu $\mathscr{B}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş manifold olsun.

a)(M_1,g_1) manifoldunun $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_1 manifoldu üzerindeki herhangi X,Y,Z vektör alanları için

$$(\nabla^1_X S^1)(Y,Z) = (\nabla^1_Y S^1)(X,Z) \qquad (4.85)$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, (4.46) ve(4.59) denklemlerinden $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y,Z) &= X(S(Y,Z)) - S(\nabla_X Y,Z) - S(Y,\nabla_X Z) \\
&= X(S(Y,Z)) - S(\nabla^1_X Y - g(X,Y)\nabla l, Z) - S(Y, \nabla^1_X Z - g(X,Z)\nabla l) \\
&= X(S^1(Y,Z)) + X(h^l(Y,Z)) - m_2\{X(h^k_1(Y,Z)) + X(Y(k)Z(k))\} - X(g(Y,Z))l^\diamond \\
&\quad -\{S^1(\nabla^1_X Y,Z) + h^l(\nabla^1_X Y,Z) - m_2\{h^k_1(\nabla^1_X Y,Z) + \nabla^1_X Y(k)Z(k)\} - g(\nabla^1_X Y,Z)l^\diamond\} \\
&\quad -\{S^1(Y,\nabla^1_X Z) + h^l(Y,\nabla^1_X Z) - m_2\{h^k_1(Y,\nabla^1_X Z) + \nabla^1_X Z(k)Y(k)\} - g(Y,\nabla^1_X Z)l^\diamond\} \\
&\quad +g(X,Y)S(\nabla l,Z) + g(X,Z)S(Y,\nabla l)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) = \;& X(S^1(Y,Z)) - S^1(\nabla^1_X Y,Z) - S^1(Y,\nabla^1_X Z)\\ & X(h^l(Y,Z)) - h^l(\nabla^1_X Y,Z) - h^l(Y,\nabla^1_X Z)\\ & -m_2\{X(h^k_1(Y,Z)) - h^k_1(\nabla^1_X Y,Z) - h^k_1(Y,\nabla^1_X Z)\}\\ & -\{X(g(Y,Z))l^\diamond - g(\nabla^1_X Y,Z)l^\diamond - g(Y,\nabla^1_X Z)l^\diamond\}\}\\ & -m_2\{X(Y(k)Z(k)) - \nabla^1_X Y(k)Z(k) - \nabla^1_X Z(k)Y(k)\}\\ & +g(X,Y)S(\nabla l,Z) + g(X,Z)S(Y,\nabla l)\end{aligned}$$

bulunur. Eğer (2.47) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) = \;& (\nabla^1_X S^1)(Y,Z) + (\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z)\\ & -m_2\{h^k_1(X,Y)Z(k) + h^k_1(X,Z)Y(k)\}\\ & +g(X,Y)S(\nabla l,Z) + g(X,Z)S(Y,\nabla l)\end{aligned} \tag{4.86}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer, (4.86) denkleminde X ve Y vektör alanları değiştirilirse

$$\begin{aligned}(\nabla_Y S)(X,Z) = \;& (\nabla^1_Y S^1)(X,Z) + (\nabla^1_Y h^l)(X,Z) - m_2(\nabla^1_Y h^k_1)(X,Z)\\ & -m_2\{h^k_1(Y,X)Z(k) + h^k_1(Y,Z)X(k)\}\\ & +g(Y,X)S(\nabla l,Z) + g(Y,Z)S(X,\nabla l)\end{aligned} \tag{4.87}$$

elde edilir. Böylece (2.16), (4.86), (4.87) ve (4.85) denklemlerinden

$$\begin{aligned}0 = \;& (\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^l)(X,Z)\\ & -m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^k_1)(X,Z)\}\\ & -m_2\{h^k_1(X,Z)Y(k) - h^k_1(Y,Z)X(k)\}\\ & +g(X,Z)S(Y,\nabla l) - g(Y,Z)S(X,\nabla l).\end{aligned} \tag{4.88}$$

bulunur. Bu yüzden, (4.83) denklemi (4.88) denkleminden elde eilir.

b) (M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_2 manifoldu üzerindeki herhangi U,V,W vektör alanları için

$$(\nabla^2_U S^2)(V,W) = (\nabla^2_V S^2)(U,W) \tag{4.89}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, (4.48) ve (4.61) denklemlerinden $U,V,W \in$

$\mathscr{L}(M_2)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(V,W) = \; & U(S(V,W)) - S(\nabla_U V,W) - S(V,\nabla_U W) \\ = \; & U(S^2(V,W) + h^k(V,W) + (1-m_2)h_2^k(V,W) + m_2 V(k)W(k) - g(V,W)k^{\diamond}) \\ & -m_1 U(h_2^l(V,W) + V(l)W(l) - V(l)W(k) - V(k)W(l)) \\ & -S(\nabla_U^2 V + U(k)V + V(k)U - g(U,V)\nabla k, W) \\ & -S(V, \nabla_U^2 W + U(k)W + W(k)U - g(U,W)\nabla k)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(V,W) = \; & U(S^2(V,W)) + U(h^k(V,W)) + (1-m_2)U(h_2^k(V,W)) + m_2 U(V(k)W(k)) \\ & -U(g(V,W)k^{\diamond}) \\ & -m_1\{U(h_2^l(V,W)) + U(V(l)W(l)) - U(V(l)W(k)) - U(V(k)W(l))\} \\ & -\{S^2(\nabla_U^2 V,W)) + h^k(\nabla_U^2 V,W) + (1-m_2)h_2^k(\nabla_U^2 V,W) \\ & +m_2\nabla_U^2 V(k)W(k) - g(\nabla_U^2 V,W)k^{\diamond}\} \\ & -\{-m_1\{h_2^l(\nabla_U^2 V,W) + \nabla_U^2 V(l)W(l) - \nabla_U^2 V(l)W(k) - \nabla_U^2 V(k)W(l)\}\} \\ & -\{S^2(V,\nabla_U^2 W)) + h^k(V,\nabla_U^2 W) + (1-m_2)h_2^k(V,\nabla_U^2 W) \\ & +m_2\nabla_U^2 W(k)V(k) - g(V,\nabla_U^2 W)k^{\diamond}\} \\ & -\{-m_1\{h_2^l(V,\nabla_U^2 W) + \nabla_U^2 W(l)V(l) - \nabla_U^2 W(k)V(l) - \nabla_U^2 W(l)V(k)\}\} \\ & -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\ & +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k)\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(V,W) = \; & U(S^2(V,W)) - S^2(\nabla_U^2 V,W)) - S^2(V,\nabla_U^2 W)) \\ & +U(h^k(V,W)) - h^k(\nabla_U^2 V,W) - h^k(V,\nabla_U^2 W) \\ & +(1-m_2)\{U(h_2^k(V,W)) - h_2^k(\nabla_U^2 V,W) - h_2^k(V,\nabla_U^2 W)\} \\ & -m_1\{U(h_2^l(V,W)) - h_2^l(\nabla_U^2 V,W) - h_2^l(V,\nabla_U^2 W)\} \\ & -\{U(g(V,W))k^{\diamond} - g(\nabla_U^2 V,W)k^{\diamond} - g(V,\nabla_U^2 W)k^{\diamond}\} - g(V,W)U(k^{\diamond}) \\ & +m_2\{U(V(k))W(k) + U(W(k))V(k) - \nabla_U^2 V(k)W(k) - \nabla_U^2 W(k)V(k)\} \\ & -m_1\{U(V(l)W(l)) - U(V(l)W(k)) - U(V(k)W(l))\} \\ & -m_1\{-\nabla_U^2 V(l)W(l) + \nabla_U^2 V(l)W(k) + \nabla_U^2 V(k)W(l)\} \\ & -m_1\{-\nabla_U^2 W(l)V(l) + \nabla_U^2 W(k)V(l) + \nabla_U^2 W(l)V(k)\} \\ & -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\ & +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (2.47) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(V,W) = \; & (\nabla_U^2 S^2)(V,W) + (\nabla_U^2 h^k)(V,W) + (1-m_2)(\nabla_U^2 h_2^k)(V,W) - m_1(\nabla_U^2 h_2^l)(V,W) \\ & -(\nabla_U^2 g)(V,W)k^\diamond - g(V,W)U(k^\diamond) \\ & +m_2\{h_2^k(U,V)W(k) + h_2^k(U,W)V(k)\} \\ & -m_1\{h_2^l(U,V)W(l) + h_2^l(U,W)V(l) - h_2^l(U,V)W(k)\} \\ & -m_1\{-h_2^k(U,W)V(l) - h_2^k(U,V)W(l) - h_2^l(U,W)V(k)\} \\ & -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\ & +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k)\end{aligned} \tag{4.90}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer (4.90) denkleminde, U ve V vektör alanları değiştirlirse

$$\begin{aligned}(\nabla_V S)(U,W) = \; & (\nabla_V^2 S^2)(U,W) + (\nabla_V^2 h^k)(U,W) + (1-m_2)(\nabla_V^2 h_2^k)(U,W) \\ & -m_1(\nabla_V^2 h_2^l)(U,W) - (\nabla_V^2 g)(U,W)k^\diamond - g(U,W)V(k^\diamond) \\ & +m_2\{h_2^k(V,U)W(k) + h_2^k(V,W)U(k)\} \\ & -m_1\{h_2^l(V,U)W(l) + h_2^l(V,W)U(l) - h_2^l(V,U)W(k)\} \\ & -m_1\{-h_2^k(V,W)U(l) - h_2^k(V,U)W(l) - h_2^l(V,W)U(k)\} \\ & -2V(k)S(U,W) - U(k)S(V,W) - W(k)S(U,V) \\ & +g(V,U)S(\nabla k,W) + g(V,W)S(U,\nabla k)\end{aligned} \tag{4.91}$$

elde edilir. Böylece (2.16), (4.90),(4.91) ve (4.89) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
0 = \; & (\nabla^2_U h^k)(V,W) - (\nabla^2_V h^k)(U,W) + (1-m_2)\{(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^k_2)(U,W)\} \\
& -m_1\{(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^l_2)(U,W)\} \\
& -2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond + 2V(f_1)f_1 g_2(U,W)k^\diamond - g(V,W)U(k^\diamond) + g(U,W)V(k^\diamond) \\
& +m_2\{h^k_2(U,W)V(k) - h^k_2(V,W)U(k)\} \\
& -m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\
& -m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\
& +m_1\{h^l_2(V,U)W(l) + h^l_2(V,W)U(l) - h^l_2(V,U)W(k)\} \\
& +m_1\{-h^k_2(V,W)U(l) - h^k_2(V,U)W(l) - h^l_2(V,W)U(k)\} \\
& -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\
& +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k) \\
& +2V(k)S(U,W) + U(k)S(V,W) + W(k)S(U,V) \\
& -g(V,U)S(\nabla k,W) - g(V,W)S(U,\nabla k)
\end{aligned} \tag{4.92}$$

bulunur. Bu yüzden, (4.84) denklemi (4.92) denkleminden elde edilir. □

Yukarıdaki teoremden hareketle, bir çarpık çarpım manifold için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.4 *M manifoldu $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık çarpım manifold olsun. Bu durumda*

a) *(M_1,g_1) manifoldunun $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ için*

$$(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^l)(X,Z) = 0 \tag{4.93}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

b) *(M_2,g_2) manifoldunun $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul için $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^l_2)(U,W) = -h^l_2(U,W)V(l) + h^l_2(V,W)U(l) \tag{4.94}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. (4.83) ve (4.84) denklemlerinde k fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa istenilen elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde $\mathscr{P}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpan manifoldları karakterize edilmiştir.

Teorem 4.2.1.5 *M manifoldu $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda,*

a) *(M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $X, Y, Z \in \mathscr{L}(M_1)$ için*

$$\begin{aligned}(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) = \quad & m_2(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) \\ & + m_2\{h^k_1(X,Y)Z(k) + h^k_1(X,Z)\}Y(k) \\ & - g(X,Y)S(\nabla l, Z) - g(X,Z)S(Y,\nabla l)\end{aligned} \tag{4.95}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

b) *(M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul için $U, V, W \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$\begin{aligned}&(\nabla^2_U h^k)(V,W) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) = \\ &m_1(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) + 2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond \\ &+ g(V,W)U(k^\diamond) - m_2\{h^k_2(U,V)W(k) + h^k_2(U,W)V(k)\} \\ &+ m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\ &+ m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\ &+ 2U(k)S(V,W) + V(k)S(U,W) + W(k)S(V,U) \\ &- g(U,V)S(\nabla k, W) - g(U,W)S(V,\nabla k)\end{aligned} \tag{4.96}$$

denkleminin sağlanmasıdır, burada $k^\diamond = \triangle k + \|\nabla k\|^2$.

İspat. M manifoldu $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş manifold olsun.

a)(M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_1 üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$(\nabla^1_X S^1)(Y,Z) = 0 \tag{4.97}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan (4.86) denkleminden $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) = \; & (\nabla^1_X S^1)(Y,Z) + (\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) \\ & -m_2\{h^k_1(X,Y)Z(k) + h^k_1(X,Z)Y(k)\} \\ & +g(X,Y)S(\nabla l,Z) + g(X,Z)S(Y,\nabla l)\end{aligned} \tag{4.98}$$

elde edilir. Böylece, (2.17) ve (4.97) denklemleri (4.98) denkleminde kullanılırsa, (4.95) denklemi elde edilir.

b) (M_2,g_2) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul M_2 üzerindeki herhangi U,V,W vektör alanları için

$$(\nabla^2_U S^2)(V,W) = 0 \tag{4.99}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, (4.90) denkleminden

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(V,W) = \; & (\nabla^2_U S^2)(V,W) + (\nabla^2_U h^k)(V,W) \\ & +(1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - m_1(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) \\ & -2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond - g(V,W)U(k^\diamond) \\ & +m_2\{h^k_2(U,V)W(k) + h^k_2(U,W)V(k)\} \\ & -m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\ & -m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\ & -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\ & +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k)\end{aligned} \tag{4.100}$$

bulunur. Böylece, (2.17) ve (4.99) denklemleri(4.100) denkleminde kullanılırsa, (4.102) denklemi elde edilir. □

Yukarıdaki teoremden hareketle, bir çarpık çarpım manifold için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.6 *M manifoldu $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık çarpım manifold olsun. Bu durumda*

a) *(M_1,g_1) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ vektör alanları için*

$$(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) = 0 \tag{4.101}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

b) *(M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ vektör alanları için*

$$(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) = -h^l_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(l) \tag{4.102}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. (4.95) ve (4.102) denklemlerinde k fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa istenilen elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpan manifoldları karakterize edilmiştir.

Teorem 4.2.1.7 *M manifoldu $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda*

a) *(M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $X \in \mathscr{L}(M_1)$ vektör alanı için*

$$\begin{aligned}(\nabla^1_X h^l)(X,X) = \;& m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) \\ & +2m_2 X(k) h^k_1(X,X) - 2g(X,X)S(\nabla l, X) \\ & +\frac{2}{m+2}\{\nabla_X \tau g(X,X) - \frac{m+2}{m_1+2}\nabla^1_X \tau^1 g_1(X,X)\}\end{aligned} \tag{4.103}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

b) *(M_2, g_2) manifoldunun $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek* *ve yeter koşul $U \in \mathscr{L}(M_2)$ vektör alanı için*

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2_U h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) = \; & m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) - 2m_2 h^k_2(U,U)U(k) \\
& +2U(f_1)f_1 g_2(U,U)k^\diamond + g(U,U)U(k^\diamond) \\
& +m_1\{2h^l_2(U,U)U(l) - 2h^l_2(U,U)U(k) \\
& -2h^k_2(U,U)U(l)\} \\
& +4U(k)S(U,U) - 2g(U,U)S(\nabla k, U) \\
& +\frac{2}{m+2}\{(\nabla_U \tau)g(U,U) - \frac{m+2}{m_2+2}\nabla^2_U \tau^2 g_2(U,U)\}
\end{aligned}
\tag{4.104}
$$

denkleminin sağlanmasıdır, burada $k^\diamond = \triangle k + \|\nabla k\|^2$.

İspat. M manifoldu $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun.

a)(M_1, g_1) manifoldunun $\mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{T}^1 = S^1 - \frac{2\tau^1}{m_1+2} g_1$ tensörünün Killing olmasıdır, yani M_1 üzerindeki herhangi X vektör alanı için

$$
0 = (\nabla^1_X \mathscr{T}^1)(X,X) \tag{4.105}
$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan (2.18) denkleminden $X \in \mathscr{L}(M_1)$ için

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (\nabla_X \mathscr{T})(X,X) \\
= \; & (\nabla_X S)(X,X) - \tfrac{2}{m+2}(\nabla_X(\tau g))(X,X) \\
= \; & (\nabla_X S)(X,X) - \tfrac{2}{m+2}(\nabla_X \tau) g(X,X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda (4.76) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (\nabla^1_X S^1)(X,X) + (\nabla^1_X h^l)(X,X) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) - 2m_2 X(k) h^k_1(X,X) \\
& -(\nabla^1_X g)(X,X)l^\diamond + 2g(X,X)S(\nabla l, X) \\
& -\tfrac{2}{m+2}(\nabla_X \tau) g(X,X)
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

bulunur. Eğer $\nabla^1_X(\frac{2\tau^1}{m_1+2}g_1)(X,X)$ terimi (4.106) denkleminin sağ tarafına ekleyip çıkartılırsa

$$\begin{aligned} 0 = \quad & (\nabla^1_X S^1)(X,X) - \nabla^1_X(\tfrac{2\tau^1}{m_1+2}g_1)(X,X) \\ & +(\nabla^1_X h^l)(X,X) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) - 2m_2 X(k)h^k_1(X,X) \\ & +2g(X,X)S(\nabla l,X) - \tfrac{2}{m+2}(\nabla_X \tau)g(X,X) \\ & +\nabla^1_X(\tfrac{2\tau^1}{m_1+2}g_1)(X,X). \end{aligned} \tag{4.107}$$

bulunur. Bu yüzden, (4.107) ve (4.105) denklemlerinden, (4.103) denklemi bulunur.

b)(M_2,g_2) manifoldunun $\mathscr{I}\oplus\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{T}^2 = S^2 - \frac{2\tau^2}{m_2+2}g_2$ tensörünün Killing olmasıdır, yani M_2 üzerindeki herhangi U vektör alanı için

$$0 = (\nabla^2_U \mathscr{T}^2)(U,U) \tag{4.108}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, $U \in \mathscr{L}(M_2)$ için (2.18) denkleminden

$$\begin{aligned} 0 = \quad & (\nabla_U \mathscr{T})(U,U) \\ = \quad & (\nabla_U S)(U,U) - \tfrac{2}{m+2}(\nabla_U(\tau g))(U,U) \\ = \quad & (\nabla_U S)(U,U) - \tfrac{2}{m+2}(\nabla_U \tau)g(U,U) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (4.79) denkleminden

$$\begin{aligned} 0 = \quad & (\nabla^2_U S^2)(U,U) + (\nabla^2_U h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) \\ & -m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) \\ & +2m_2 h^k_2(U,U)U(k) - (\nabla^2_U g)(U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\ & -m_1\{2h^l_2(U,U)U(l) - 2h^l_2(U,U)U(k) - 2h^k_2(U,U)U(l)\} \\ & -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k,U) \\ & -\tfrac{2}{m+2}(\nabla_U \tau)g(U,U) \end{aligned} \tag{4.109}$$

bulunur. Eğer $\nabla^2_U(\frac{2\tau^2}{m_2+2}g_2)(U,U)$ terimi (4.109) denkleminin sağ tarafına eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
0 = \quad & (\nabla^2_U S^2)(U,U) - \nabla^2_U(\tfrac{2\tau^2}{m_2+2}g_2)(U,U) \\
& (\nabla^2_U h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) - m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) \\
& +2m_2 h^k_2(U,U)U(k) - 2U(f_1)f_1 g_2(U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\
& -m_1\{2h^l_2(U,U)U(l) - 2h^l_2(U,U)U(k) - 2h^k_2(U,U)U(l)\} \\
& -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k,U) \\
& -\tfrac{2}{m+2}(\nabla_U\tau)g(U,U) \\
& +\nabla^2_U(\tfrac{2\tau^2}{m_2+2}g_2)(U,U)
\end{aligned} \tag{4.110}$$

elde edilr. Bu yüzden (4.110) ve (4.108) denklemlerinden, (4.104) denklemi bulunur. $\square$

Aşağıda $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold karakterize edilmiştir. (4.64) denkleminden hareketle, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1.8 *M manifoldu $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olsun. Bu durumda, (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) manifoldlarının $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned}
c = \quad & \frac{c_1}{{f_2}^2} + \frac{c_2}{{f_1}^2} + \tilde{\Delta}_1(l) + \tilde{\Delta}_2(k) - \frac{m_2}{{f_2}^2}\Delta_1(k) - \frac{m_1}{{f_1}^2}\Delta_2(l) \\
& + \frac{(1-m_2)}{{f_1}^2}\Delta_2(k) - m_2 g(P_1\nabla k, P_1\nabla k) - m_1\Delta l - 2m_1 g(\nabla l,\nabla l) \\
& -m_2\left\{\Delta k + g(\nabla k,\nabla k)\right\} + m_2 g(P_2\nabla k, P_2\nabla k) + 2m_1 g(P_2\nabla k,\nabla l)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

denkleminin sağlanmasıdır, c, c_1 ve c_2 sırası ile $(M,g),(M_1,g_1)$ ve(M_2,g_2) manifoldlarının skaler eğriliğidir.

Aşağıdaki teoremlerde çarpan manifoldları Einstein-benzeri olan bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldun kendisinin de Einstein-benzeri olması durumu incelenmiştir.

Teorem 4.2.1.9 *M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) çarpan manifoldları $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. Bu durumda M manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması* *için gerek ve yeter koşul herhangi* $X \in \mathscr{L}(M_1)$ *ve* $U \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$\begin{aligned}
&(\nabla^1_X h^l)(X,X) + (\nabla^2_U h^k)(U,U) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) = \\
&+m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) + 2X(k)h^k_1(X,X)\} \\
&-2g(X,X)S(\nabla l,X) + m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) - 2m_2 h^k_2(U,U)U(k) \\
&+2U(f_1)f_1 g_2(U,U)k^{\diamond} + g(U,U)U(k^{\diamond}) \\
&+2m_1\{h^l_2(U,U)U(l) - h^l_2(U,U)U(k) - h^k_2(U,U)U(l)\} \\
&+4U(k)S(U,U) - 2g(U,U)S(\nabla k,U) \\
&-(\nabla_U S)(X,X) - 2(\nabla_X S)(X,U) - 2(\nabla_U S)(X,U) - (\nabla_X S)(U,U)
\end{aligned} \tag{4.112}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) çarpan manifoldları $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. O halde herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$(\nabla^1_X S^1)(X,X) = 0 \qquad ve \qquad (\nabla^2_U S^2)(U,U) = 0 \tag{4.113}$$

sağlanır. Bu durumda M manifoldunun $\mathscr{A}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$(\nabla_{X+U} S)(X+U,X+U) = 0 \tag{4.114}$$

olmasıdır. Burada, $X+U \in \Gamma(TM)$. (4.114) denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X S)(X,X) + (\nabla_U S)(X,X) + 2(\nabla_X S)(X,U) + 2(\nabla_U S)(X,U) \\
&+(\nabla_X S)(U,U) + (\nabla_U S)(U,U) = 0
\end{aligned} \tag{4.115}$$

elde edilir. Burada, (4.76) ve (4.79) denklemleri kullanılırsa, (4.115) denkleminden

$$\begin{aligned} 0 = \; & (\nabla^1_X S^1)(X,X) + (\nabla^1_X h^l)(X,X) \\ & -m_2(\nabla^1_X h^k_1)(X,X) - 2m_2 X(X(k))X(k) - (\nabla^1_X g)(X,X)l^\diamond \\ & +2m_2 \nabla^1_X X(k)X(k) + 2g(X,X)S(\nabla l, X) \\ & +(\nabla^2_U S^2)(U,U) + (\nabla^2_U h^k)(U,U) \\ & +(1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(U,U) - m_1(\nabla^2_U h^l_2)(U,U) \\ & +2m_2 h^k_2(U,U)U(k) - (\nabla^2_U g)(U,U)k^\diamond - g(U,U)U(k^\diamond) \\ & -m_1\{2U(U(l))U(l) - 2U(U(l))U(k) - 2U(U(k))U(l)\} \\ & -m_1\{-2\nabla^2_U U(l)U(l) + 2\nabla^2_U U(l)U(k) + 2\nabla^2_U U(k)U(l)\} \\ & -4U(k)S(U,U) + 2g(U,U)S(\nabla k, U) \\ & +(\nabla_U S)(X,X) + 2(\nabla_X S)(X,U) \\ & +2(\nabla_U S)(X,U) + (\nabla_X S)(U,U) \end{aligned} \tag{4.116}$$

bulunur. Burada, $(\nabla_U S)(X,X), (\nabla_X S)(X,U), (\nabla_U S)(X,U), (\nabla_X S)(U,U)$ terimleri (4.59)∼(4.61) denklemleri kullanılarak açılıp incelenirse, birbirlerini sıfırlamadığı ve açılımdaki tüm terimlerin aynı şekilde kaldığı görülür. O halde (4.112) denklemi, (4.113) ve (4.116) denklemlerinden elde edilir. □

Teorem 4.2.1.10 *M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve* (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *çarpan manifoldları* $\mathscr{B}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. Bu durumda M manifoldunun* $\mathscr{B}$ *sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi* $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ *ve* $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ *için*

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^l)(X,Z) + (\nabla^2_U h^k)(V,W) - (\nabla^2_V h^k)(U,W) \\
&+(1-m_2)\{(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^k_2)(U,W)\} \\
&+(\nabla_U S)(Y,Z) + (\nabla_{X+U} S)(Y,W) + (\nabla_{X+U} S)(V,Z) + (\nabla_X S)(V,W) = \\
&m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^k_1)(X,Z)\} + m_2\{h^k_1(X,Z)Y(k) - h^k_1(Y,Z)X(k)\} \\
&-g(X,Z)S(Y,\nabla l) + g(Y,Z)S(X,\nabla l) + m_1\{(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^l_2)(U,W)\} \\
&+\{2U(f_1)f_1 g_2(V,W) - 2V(f_1)f_1 g_2(U,W)\}k^\diamond + g(V,W)U(k^\diamond) - g(U,W)V(k^\diamond) \\
&-m_2\{h^k_2(U,W)V(k) - h^k_2(V,W)U(k)\} + m_1\{h^l_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,W)V(l)\} \\
&+m_1\{-h^l_2(U,W)V(k) - h^l_2(V,W)U(l)\} + m_1\{h^k_2(V,W)U(l) + h^l_2(V,W)U(k)\} \\
&-U(k)S(V,W) + V(k)S(U,W) + g(U,W)S(V,\nabla k) - g(V,W)S(U,\nabla k) \\
&+(\nabla_V S)(X,Z) + (\nabla_{Y+V} S)(X,W) + (\nabla_{Y+V} S)(U,Z) + (\nabla_Y S)(U,W)
\end{aligned}
\tag{4.117}
$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) çarpan manifoldları $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. O halde herhangi $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$(\nabla^1_X S^1)(Y,Z) = (\nabla^1_Y S^1)(X,Z) \qquad \textit{ve} \qquad (\nabla^2_U S^2)(V,W) = (\nabla^2_V S^2)(U,W) \tag{4.118}$$

sağlanır. Bu durumda M manifoldunun $\mathscr{B}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$(\nabla_{X+U} S)(Y+V,Z+W) = (\nabla_{Y+V} S)(X+U,Z+W) \tag{4.119}$$

olmasıdır. Burada, $X+U, Y+V, Z+W \in \Gamma(TM)$. (4.119) denklemi düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_U S)(Y,Z) + (\nabla_{X+U} S)(Y,W) \\
&+(\nabla_{X+U} S)(V,Z) + (\nabla_X S)(V,W) + (\nabla_U S)(V,W) = \\
&(\nabla_Y S)(X,Z) + (\nabla_V S)(X,Z) + (\nabla_{Y+V} S)(X,W) \\
&+(\nabla_{Y+V} S)(U,Z) + (\nabla_Y S)(U,W) + (\nabla_V S)(U,W)
\end{aligned}
\tag{4.120}
$$

elde edilir. (4.86), (4.87), (4.90) ve (4.91) denklemleri kullanılırsa, (4.120) denkleminden

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (\nabla^1_X S^1)(Y,Z) - (\nabla^1_Y S^1)(X,Z) + (\nabla^2_U S^2)(V,W) - (\nabla^2_V S^2)(U,W) \\
& +(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^l)(X,Z) - m_2\{(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) - (\nabla^1_Y h^k_1)(X,Z)\} \\
& -m_2\{h^k_1(X,Z)Y(k) - h^k_1(Y,Z)X(k)\} + g(X,Z)S(Y,\nabla l) - g(Y,Z)S(X,\nabla l) \\
& (\nabla^2_U h^k)(V,W) - (\nabla^2_V h^k)(U,W) + (1-m_2)\{(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^k_2)(U,W)\} \\
& -m_1\{(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) - (\nabla^2_V h^l_2)(U,W)\} \\
& -2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond + 2V(f_1)f_1 g_2(U,W)k^\diamond - g(V,W)U(k^\diamond) + g(U,W)V(k^\diamond) \\
& +m_2\{h^k_2(U,W)V(k) - h^k_2(V,W)U(k)\} \\
& -m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\
& -m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\
& +m_1\{h^l_2(V,U)W(l) + h^l_2(V,W)U(l) - h^l_2(V,U)W(k)\} \\
& +m_1\{-h^k_2(V,W)U(l) - h^k_2(V,U)W(l) - h^l_2(V,W)U(k)\} \\
& -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\
& +g(U,V)S(\nabla k,W) + g(U,W)S(V,\nabla k) \\
& +2V(k)S(U,W) + U(k)S(V,W) + W(k)S(U,V) \\
& -g(V,U)S(\nabla k,W) - g(V,W)S(U,\nabla k) \\
& +(\nabla_U S)(Y,Z) + (\nabla_{X+U} S)(Y,W) + (\nabla_{X+U} S)(V,Z) + (\nabla_X S)(V,W) \\
& -(\nabla_V S)(X,Z) - (\nabla_{Y+V} S)(X,W) - (\nabla_{Y+V} S)(U,Z) - (\nabla_Y S)(U,W)
\end{aligned}
\tag{4.121}
$$

bulunur. Burada, $(\nabla_U S)(Y,Z), (\nabla_{X+U} S)(Y,W), (\nabla_{X+U} S)(V,Z), (\nabla_X S)(V,W)$, $(\nabla_V S)(X,Z), (\nabla_{Y+V} S)(X,W), (\nabla_{Y+V} S)(U,Z), (\nabla_Y S)(U,W)$ terimleri (4.59)∼(4.61) denklemleri kullanılarak açılıp incelenirse, birbirlerini sıfırlamadığı ve açılımdaki tüm terimlerin aynı şekilde kaldığı görülür. O halde (4.117) denklemi, (4.118) ve (4.121) denklemlerinden elde edilir. □

Teorem 4.2.1.11 *M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) çarpan manifoldları $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. Bu durumda M manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için*

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^1_X h^l)(Y,Z) + (\nabla^2_U h^k)(V,W) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) = \\
&m_2(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) + m_2\{h^k_1(X,Y)Z(k) + h^k_1(X,Z)\}Y(k) \\
&-g(X,Y)S(\nabla l, Z) - g(X,Z)S(Y,\nabla l) \\
&+m_1(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) + 2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond \\
&+g(V,W)U(k^\diamond) - m_2\{h^k_2(U,V)W(k) + h^k_2(U,W)V(k)\} \\
&+m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\
&+m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\
&+2U(k)S(V,W) + V(k)S(U,W) + W(k)S(V,U) \\
&-g(U,V)S(\nabla k, W) - g(U,W)S(V,\nabla k) \\
&-(\nabla_U S)(Y,Z) - (\nabla_{X+U} S)(Y,W) - (\nabla_{X+U} S)(V,Z) - (\nabla_X S)(V,W)
\end{aligned}
\tag{4.122}
$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. M manifoldu bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold ve (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) çarpan manifoldları $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri manifold olsun. O halde herhangi $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$
(\nabla^1_X S^1)(Y,Z) = 0 \qquad ve \qquad (\nabla^2_U S^2)(V,W) = 0 \tag{4.123}
$$

sağlanır. Bu durumda M manifoldunun $\mathscr{P}$ sınıfından bir Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X,Y,Z \in \mathscr{L}(M_1)$ ve $U,V,W \in \mathscr{L}(M_2)$ için

$$
(\nabla_{X+U} S)(Y+V, Z+W) = 0 \tag{4.124}
$$

olmasıdır. Burada, $X+U, Y+V, Z+W \in \Gamma(TM)$. (4.119) denklemi düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_U S)(Y,Z) + (\nabla_{X+U} S)(Y,W) \\
&+(\nabla_{X+U} S)(V,Z) + (\nabla_X S)(V,W) + (\nabla_U S)(V,W) \quad = 0
\end{aligned}
\tag{4.125}
$$

elde edilir. (4.98) ve (4.100) denklemleri kullanılırsa, (4.125) denkleminden

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & (\nabla^1_X S^1)(Y,Z) + (\nabla^1_X h^l)(Y,Z) - m_2(\nabla^1_X h^k_1)(Y,Z) \\
& -m_2\{h^k_1(X,Y)Z(k) + h^k_1(X,Z)Y(k)\} + g(X,Y)S(\nabla l, Z) + g(X,Z)S(Y,\nabla l) \\
& +(\nabla^2_U S^2)(V,W) + (\nabla^2_U h^k)(V,W) + (1-m_2)(\nabla^2_U h^k_2)(V,W) - m_1(\nabla^2_U h^l_2)(V,W) \\
& -2U(f_1)f_1 g_2(V,W)k^\diamond - g(V,W)U(k^\diamond) + m_2\{h^k_2(U,V)W(k) + h^k_2(U,W)V(k)\} \\
& -m_1\{h^l_2(U,V)W(l) + h^l_2(U,W)V(l) - h^l_2(U,V)W(k)\} \\
& -m_1\{-h^k_2(U,W)V(l) - h^k_2(U,V)W(l) - h^l_2(U,W)V(k)\} \\
& -2U(k)S(V,W) - V(k)S(U,W) - W(k)S(V,U) \\
& +g(U,V)S(\nabla k, W) + g(U,W)S(V,\nabla k) \\
& +(\nabla_U S)(Y,Z) + (\nabla_{X+U} S)(Y,W) + (\nabla_{X+U} S)(V,Z) + (\nabla_X S)(V,W)
\end{aligned}
\tag{4.126}
$$

bulunur. Burada, $(\nabla_U S)(Y,Z), (\nabla_{X+U} S)(Y,W), (\nabla_{X+U} S)(V,Z), (\nabla_X S)(V,W)$ terimleri (4.59)$\sim$(4.61) denklemleri kullanılarak açılıp incelenirse, birbirlerini sıfırlamadığı ve açılımdaki tüm terimlerin aynı şekilde kaldığı görülür. O halde (4.122) denklemi, (4.123) ve (4.126) denklemlerinden elde edilir. $\square$

4.2.2. Bir G.k.K. Manifoldun Kısmi-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde bir g.k.K. manifoldun bir kısmi-eğik altmanifoldu için geçerli olan ve ana teoremlerde kullanılan temel sonuçlar verilmiştir.

Lemma 4.2.2.1 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$
g(\nabla_X Y, V) = -\sec^2\theta g\left(A_{JY}PV - A_{FPV}Y - \tfrac{1}{2}\omega(FPV)Y, X\right) - \tfrac{1}{2}\omega(V)g(X,Y) \ , \tag{4.127}
$$

$$
g(\nabla_U V, X) = \sec^2\theta g\left(A_{JX}PV - A_{FPV}X + \tfrac{1}{2}\omega(JX)PV, U\right) - \tfrac{1}{2}\omega(X)g(U,V) \tag{4.128}
$$

denklemleri sağlanır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ olsun. $(\bar{M}, J, \tilde{g} = e^{-\sigma} g)$ bir Kaehler manifold olduğundan (2.37), (2.39), (2.26) ve (2.27) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) = & \ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, JV) \\ = & \ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, PV) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JY, FV) \\ = & \ -\tilde{g}(\tilde{A}_{JY} PV, X) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, tFV) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, nFV)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $tF = -I - P^2$ ve $nF = -FP$ olduğu gerçeği kulanılırsa (bkz. (2.16) denklemi [53]),

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) = & \ -\tilde{g}(\tilde{A}_{JY} PV, X) + \sin^2\theta \tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, FPV) \\ = & \ -\tilde{g}(\tilde{A}_{JY} X, PV) + \tilde{g}(\tilde{A}_{FPV} Y, X) + \sin^2\theta \tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\tilde{g}(\hat{\nabla}_X Y, V) = -\sec^2\theta \{\tilde{g}(\tilde{A}_{JY} PV - \tilde{A}_{FPV} Y, X)\}$$

elde edilir. (2.35), (2.40) ve (2.42) denklemlerinden, (4.127) denklemine ulaşılır. (4.128) denklemi benzer şekilde ispatlanabilir. □

(4.128) denkleminden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.2.2 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağımının M üzerinde integrallebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için*

$$g(A_{JX} PV - A_{FPV} X, U) = g(A_{JX} PU - A_{FPU} X, V) - \omega(JX) g(PV, U) \tag{4.129}$$

denkleminin gerçeklenmesidir.

İspat. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $U, V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ ve $X \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ için $g([U,V], X) = 0$ olmasıdır. (4.128) denkleminden, $g([U,V], X) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.129) denkleminin sağlanmasıdır. □

Uyarı 4.2.2.3 *$\mathscr{D}^\theta$ dağılımının integrallenebilirlik koşulu Taştan ve Gerdan [54] tarafından farklı bir şekilde verilmiştir.*

Teorem 4.2.2.4 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ manifoldunun has kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^{\perp}$ tümel reel dağılımı her zaman integrallenebilirdir.*

İspat. Bu teoremin ispatı Theorem 3.1 [54] in ispatı ile oldukça benzerdir. Bu yüzden, burada verilmemiştir. □

Uyarı 4.2.2.5 *Bu kısımda, bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir M kısmi-eğik altmanifoldu için, $B^M = B^{\perp} + B^{\theta}$ şeklinde ifade edilmiştir, burada B^T ve B^{θ}, B^M vektör alanının sırası ile $\mathscr{D}^{\perp}$ ve $\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımarına teğet kısımlarıdır.*

4.2.3. Bir G.k.K. Manifoldun Çarpık-Bükülmüş Çarpım Kısmi-Eğik Altmanifoldları

Bu bölümde, bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldları karakterize edilmiştir. Burada $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyon ve f_1 bükülmüş fonksiyondur. İlk olarak, bu tip manifoldlara örnek verilmiştir.

Örnek. $(z_1, ..., z_6)$, altı boyutlu $\mathbb{R}^6$ öklidyen uzayının doğal koordinatları olsun ve $\bar{\mathbb{R}}^6 = \{(z_1, ..., z_6) \in \mathbb{R}^6 : z_1 \neq \mp z_2 \,\text{and}\, z_5 \neq 0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g_0)$, (J, g_0) alışılmış Kaehler yapısına sahip bir Kaehler manifolddur. $\bar{\mathbb{R}}^6$ üzerinde g_0 Kaehler metriğine konformal olan $g = e^{\sigma} g_0$ metriği alınsın, burada $e^{\sigma} = \dfrac{(z_2^2 - z_1^2)^2}{16}(z_5)^2$ şeklinde tanımlanmıştır. O halde, $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ bir g.k.K. manifolddur. M manifoldu

$$z_1 = u - v\,,\ z_2 = u + v\,,\ z_3 = v\,,\ z_4 = 0\,,\ z_5 = x\,,\ z_6 = 0\,,$$

şeklinde tanımlı bir altmanifold olsun, burada $x, u, v \neq 0$. Bu durumda, M manifoldunun TM teğet demetinin yerel çatı alanı

$$X = \partial_5\,,\ U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + \partial_2)\,,\ V = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)$$

şeklinde hesaplanır, burada $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ için $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$. Bu durumda $\mathscr{D}^{\perp} = span\{X\}$ bir tümel reel dağılım ve $\mathscr{D}^{\theta} = span\{U, V\}$ dağılımı $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{6}})$ eğik açısına sahip bir (has) eğik dağılımdır. Böylece, M manifoldu $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{6}})$ eğik açısına sahip bir has kısmi-eğik altmanifolddur.

Direkt hesaplama ile $\mathscr{D}^{\perp}$ ve $\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımlarının integrallenebilir olduğu görülebilir. $\mathscr{D}^{\perp}$ ve

$\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları sırası ile $M^\perp$ ve M^θ ile gösterilsin. $g_\perp$ ve g_θ sırası ile $M^\perp$ ve M^θ üzerine g_0 Kaehler metriğinden indirgenmiş metrik olsunlar. $M^\perp$ ve M^θ üzerinde sırası ile $\bar{g}_\perp = x^2 g_\perp$ ve $\bar{g}_\theta = u^2 g_\theta$ konformal Riemanniyen metrikleri tanımlansın.

M üzerinde $x = z_5$ ve $uv = \dfrac{(z_2^2 - z_1^2)}{4}$ olduğundan, M manifoldunun g_0 Kaehler metriğinden indirgenmiş metriği g,

$$\begin{aligned} ds^2 = &\ (uv)^2 x^2 dx^2 + (uv)^2 x^2 (du^2 + dv^2) \\ = &\ (uv)^2 x^2 g_\perp + (uv)^2 x^2 g_\theta \\ = &\ (uv)^2 \bar{g}_\perp + (xv)^2 \bar{g}_\theta \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece, M manifoldu $(M^\perp, \bar{g}_\perp)$ ve $(M^\theta, \bar{g}_\theta)$ manifoldlarının bir çarpık-bükülmüş çarpımıdır. O halde, ${}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ manifoldu $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 = uv$ çarpık fonksiyonuna ve $f_1 = vx$ bükülmüş fonksiyonuna sahip aşikar olmayan bir çarpık-bükülmüş çarpım has kısmi-eğik altmanifoldudur. Dahası, $(\bar{\mathbb{R}}^6, J, g)$ manifoldunun Lee formu

$$\omega = 2\left(\frac{1}{x}dx + \frac{1}{u}du + \frac{1}{v}dv\right)$$

ile verilir. Sonuç olarak, Lee vektör alanı

$$B = \frac{2}{(uv)^2 x^2}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

şeklinde hesaplanır ve M manifolduna teğettir.

Lemma 4.2.3.1 *$M = {}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^\infty(M^\theta)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X \in \mathscr{L}(M^\perp)$ için*

$$\omega(X) = \tfrac{2}{3} X(\ln f_1) \tag{4.130}$$

denklemi sağlanır.

İspat. $M = {}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^\infty(M^\theta)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi $U,V \in \mathscr{L}(M^\theta)$ and $X \in \mathscr{L}(M^\perp)$ için, (4.47) denkleminden $[X,V] = [X,U] = 0$ ve (4.48) denkleminden $[U,V] = \nabla^\theta_U V - \nabla^\theta_V U \in \Gamma(TM^\theta)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X,U,V) = \;& X\Omega(U,V) + U\Omega(V,X) + V\Omega(X,U) \\ & -\Omega([X,U],V) - \Omega([U,V],X) - \Omega([V,X],U) \\ = \;& Xg(U,PV) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.47) denklemi kullanılırsa, bazı hesaplamalardan sonra

$$3d\Omega(X,U,V) = 2X(\ln f_1)g(U,PV) \tag{4.131}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.34) denkleminden

$$\begin{aligned} d\Omega(X,U,V) = \;& \omega \wedge \Omega(X,U,V) \\ = \;& \omega(X)\Omega(U,V) + \omega(U)\Omega(V,X) + \omega(V)\Omega(X,U) \\ = \;& \omega(X)g(U,PV) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$d\Omega(X,U,V) = \omega(X)g(U,PV) \tag{4.132}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, istenilen (4.131) ve (4.132) denklemlerinden elde edilir. □

Lemma 4.2.3.1 den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3.2 *$M = {}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^\infty(M^\theta)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, M altmanifoldunun ${}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ tipinde bir baz konformal çarpık çarpım olması için gerek ve yeter koşul B Lee vektör alanının $M^\perp$ altmanifolduna dik olmasıdır.*

İspat. $M = {}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^\infty(M^\theta)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. M altmanifoldu ${}_{f_2}M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ tipinde bir baz konformal çarpık çarpım ise, bu durumda f_1 fonksiyonu sadece M^θ altmanifoldunun noktalarına bağlı olduğundan herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ için , $X(\ln f_1)$=0 elde edilir. (4.130) denkleminden, $g(B,X)=0$ bulunur. O halde, B Lee vektör alanı $M^{\perp}$ altmanifolduna diktir.

Tersine, B Lee vektör alanı $M^{\perp}$ altmanifolduna dik ise, herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ için $g(B,X)=0$ elde edilir. Bu durumda, (4.130) denkleminden $X(\ln f_1)=0$ elde edilir. O halde, f_1 fonksiyonu sadece M^{θ} altmanifoldunun noktalarına bağlıdır. Bu durumda M altmanifoldunun g_M indirgenmiş metrik tensörü $g_M = {f_2}^2 g_{\perp} \oplus \tilde{g}_{\theta}$ şeklinde olur, burada f_2 çarpık fonksiyon ve $\tilde{g}_{\theta} = {f_1}^2 g_{\theta}$ ile tanımlıdır. Böylece $M =_{f_2} M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ bir baz konformal çarpık çarpımdır. $\square$

Lemma 4.2.3.3 *$M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için*

$$\omega(V) = \tfrac{2}{3}V(\ln f_2) \tag{4.133}$$

denklemi sağlanır.

İspat. $M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\omega = d\sigma$ olduğundan, $d\omega = 0$ elde edilir. Böylece, dış diferansiyel formülü kullanılırsa, herhangi $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ ve $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ için $0 = d\omega(V,X) = V\omega(X) - X\omega(V) - \omega([V,X])$ bulunur. Böylece, $[V,X]=0$ olduğundan

$$V\omega(X) = X\omega(V) \tag{4.134}$$

elde edilir. Burada (4.130), (4.47) ve (2.35) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{2}V\omega(X) = &\quad V[X(\ln f_1)] = V[g(X,\nabla \ln f_1)] \\
= &\quad g(\nabla_V X, \nabla \ln f_1) + g(X, \nabla_V \nabla \ln f_1) \\
= &\quad g\Big(V(\ln f_2)X + X(\ln f_1)V, \nabla \ln f_1\Big) \\
&\quad + g\Big(X, V(\ln f_2)\nabla \ln f_1 + \nabla \ln f_1 (\ln f_1)V\Big) \\
= &\quad 2V(\ln f_2)X(\ln f_1)
\end{aligned} \tag{4.135}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$V\omega(X) = \tfrac{4}{3}V(\ln f_2)X(\ln f_1) \tag{4.136}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.47) ve (2.35) denklemlerinden

$$\begin{aligned} X\omega(V) = \; & Xg(B,V) = Xg(B^{\theta},V) \\ = \; & g(\nabla_X B^{\theta},V) + g(B^{\theta},\nabla_X V) \\ = \; & g\Big(B^{\theta}(\ln f_2)X + X(\ln f_1)B^{\theta},V\Big) + g\Big(B^{\theta},V(\ln f_2)X + X(\ln f_1)V\Big) \\ = \; & 2\omega(V)X(\ln f_1) \end{aligned} \tag{4.137}$$

bulunur. Yani,

$$X\omega(V) = 2\omega(V)X(\ln f_1) \tag{4.138}$$

elde edilir. O halde, (4.134)∼(4.138) denklemlerinden (4.133) denklemine ulaşılır. □

Lemma 4.2.3.3 den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3.4 *$M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, M altmanifoldunun $M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir bükülmüş çarpım olması için gerek ve yeter koşul B Lee vektör alanının M^{θ} altmanifolduna dik olmasıdır.*

İspat. $M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, f_2 sabit olduğundan herhangi $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için, $V(\ln f_2) = 0$ elde edilir. (4.133) denkleminden, $g(B,V) = 0$ bulunur. O halde, B Lee vektör alanı M^{θ} altmanifolduna diktir.

Tersine, B Lee vektör alanı M^{θ} altmanifolduna dik olsun. Bu durumda, herhangi $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için $g(B,V) = 0$ elde edilir. O halde, (4.133) denkleminden $V(\ln f_2) = 0$ bulunur. Böylece, f_2 fonksiyonu bir sabittir, $f_2 = c$ olsun. Bu durumda M nin indirgenmiş metrik tensörü g_M, $g_M = c^2 g_{\perp} \oplus {f_1}^2 g_{\theta}$ formunda olur, burada c bir sabit ve f_1 bükülmüş fonksiyondur. Böylece,

$M = M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ bir bükülmüş çarpımdır. □

Teorem 4.2.3.2 ve Teorem 4.2.3.4 den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3.5 *$M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. bu durumda, M altmanifoldunun yerel olarak direkt çarpım olabilmesi için gerek ve yeter koşul B Lee vektör alanının M altmanifolduna dik olmasıdır.*

İspat. $M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Eğer M manifoldu yerel olarak bir direkt çarpım ise bu durumda f_1 ve f_2 fonksiyonları sabittir. Bu durumda, herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için, (4.130) ve (4.133) denklemlerinden sırası ile $g(B, X) = g(B, V) = 0$ elde edilir. O halde B Lee vektör alanı M altmanifolduna diktir.

Tersine, B Lee vektör alanı M altmanifolduna dik olsun. Bu durumda, herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için, $X(\ln f_1) = V(\ln f_2) = 0$ elde edilir. Buradan f_2 fonksiyonu sabit çıkar, $f_2 = c$ olsun ve f_1 fonksiyonu sadece M^{θ} manifoldunun noktalarına bağlı olur. Bu durumda M manifoldunun g_M metrik tensörü $g_M = c^2 g_{\perp} \oplus {f_1}^2 g_{\theta}$ formunda olur. Böylece, M altmanifoldu $(M^{\perp}, \tilde{g_{\perp}})$ ve $(M^{\theta}, \tilde{g_{\theta}})$ altmanifoldlarının lokal olarak bir direkt çarpımıdır, burada $\tilde{g_{\perp}} = c^2 g_{\perp}$ ve $\tilde{g_{\theta}} = {f_1}^2 g_{\theta}$. □

Lemma 4.2.3.6 *$M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için*

$$g(A_{JX}PV - A_{FPV}X, Y) = \left\{ \cos^2\theta\, \omega(V) + \tfrac{1}{2}\omega(FPV) \right\} g(X, Y) \tag{4.139}$$

denklemi sağlanır.

İspat. M hipotezde belirtildiği gibi bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifold olsun. Bu durumda herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için (4.127) denklemi kullanılırsa,

$$g(\nabla_Y X,V) = -\sec^2\theta g\left(A_{JX}PV - A_{FPV}X - \frac{1}{2}\omega(FPV)X, Y\right) - \frac{1}{2}\omega(V)g(X,Y)$$

elde edilir. Burada (4.46) ve (4.133) kullanılırsa, (4.139) denklemine ulaşılır. □

Lemma 4.2.3.7 *$M = {}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun $f_2 \in C^{\infty}(M^{\theta})$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için*

$$g(A_{JX}PV - A_{FPV}X,U) = -\cos^2\theta\,\omega(X)g(V,U) - \frac{1}{2}\omega(JX)g(PV,U) \tag{4.140}$$

denklemi sağlanır.

İspat. M hipotezde belirtildiği gibi bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifold olsun. Bu durumda herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U,V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için (4.128) denklemi kullanılırsa,

$$g(\nabla_U V,X) = \sec^2\theta g\left(A_{JX}PV - A_{FPV}X + \frac{1}{2}\omega(JX)PV, U\right) - \frac{1}{2}\omega(X)g(U,V)$$

elde edilir. Burada (4.48) ve (4.130) kullanılırsa, (4.140) denklemine ulaşılır. □

Lemma 2.5.3 ve Lemma 2.5.1.3 den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.2.3.8 *${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ bir çift bükülmüş çarpım olsun. ${}_{f_2}M_1 \times_{f_1} M_2$ manifoldunun $f_2 \in \mathscr{C}^{\infty}(M_2)$ çarpık fonksiyonuna ve f_1 bükülmüş fonksiyonuna sahip bir çarpık-bükülmüş manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{D}_1$ standart yapraklanmasının ortalama eğrilik vektör alanının kapalı olmasıdır.*

İspat. Lemma 2.3 [31] ün ispatına çok benzer olduğu için, burada ispat verilmeyecektir. □

Aşağıda çarpık-bükülmüş çarpımları karakterize eden bir teorem verilmiştir.

Teorem 4.2.3.9 *M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun bir kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda M manifoldunun lokal olarak bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşul A şekil operatörünün herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^{\perp})$ and $V \in \Gamma(\mathscr{D}^{\theta})$ için*

$$\begin{aligned} A_{JX}PV - A_{FPV}X = & \Big\{\cos^2\theta\,\omega(V) + \tfrac{1}{2}\omega(FPV)\Big\}X \\ & - \cos^2\theta\,\omega(X)V - \tfrac{1}{2}\omega(JX)PV \end{aligned} \tag{4.141}$$

denklemini sağlamasıdır. Dahası M manifoldu lokal olarak bir çift çarpık çarpım manifolddur.

İspat. M manifoldu bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Herhangi $X \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için

$$A_{JX}PV - A_{FPV}X = \Big(A_{JX}PV - A_{FPV}X\Big)^{\perp} + \Big(A_{JX}PV - A_{FPV}X\Big)^{\theta} \tag{4.142}$$

şeklinde ifade edilir, burada $\Big(A_{JX}PV - A_{FPV}X\Big)^{\perp}$, $A_{JX}PV - A_{FPV}X$ ifadesinin $M^{\perp}$ manifolduna teğet kısmı ve $\Big(A_{JX}PV - A_{FPV}X\Big)^{\theta}$, $A_{JX}PV - A_{FPV}X$ ifadesinin M^{θ} manifolduna teğet kısmıdır. Böylece, herhangi $Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ için, (4.139) denkleminden,

$$g(A_{JX}PV - A_{FPV}X, Y) = g\bigg(\Big\{\cos^2\theta\,\omega(V) + \frac{1}{2}\omega(FPV)\Big\}X, Y\bigg)$$

elde edilir. $Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ keyfi vektör alanı ve g Riemanniyen olduğundan

$$\Big(A_{JX}PV - A_{FPV}X\Big)^{\perp} = \Big\{\cos^2\theta\,\omega(V) + \tfrac{1}{2}\omega(FPV)\Big\}X \tag{4.143}$$

bulunur. Benzer şekilde, herhangi $U \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için, (4.140) denklemi kullanılırsa

$$g(A_{JX}PV - A_{FPV}X, U) = g\bigg(-\cos^2\theta\,\omega(X)V - \frac{1}{2}\omega(JX)PV, U\bigg)$$

elde edilir. $U \in \mathscr{L}(M^\theta)$ keyfi vektör alanı ve g Riemanniyen olduğundan,

$$\left(A_{JX}PV - A_{FPV}X\right)^\theta = -\cos^2\theta\, \omega(X)V - \tfrac{1}{2}\omega(JX)PV \tag{4.144}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece(4.142)$\sim$ (4.144) denklemlerinden, (4.141) denklemi elde edilir.

Tersine, M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun kısmi-eğik altmanifoldu olsun öyle ki (4.141) denklemi sağlansın. Bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $U,V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (4.141) denkleminden, (4.129) denklemi elde edilir. Böylece, Teorem 4.2.2.2 den, $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımı integrallenebilirdir. Diğer taraftan, Teorem 4.2.2.4 den, $\mathscr{D}^\perp$ tümel reel dağılımının her zaman integrallenebilir olduğu bilinmektedir. $M^\perp$ ve M^θ sırası ile $\mathscr{D}^\perp$ ve $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldu olsun ve $h^\perp$ ve h^θ, sırası ile $M^\perp$ ve M^θ manifoldlarının M içindeki ikinci temel formlarını göstersin. Bu durumda, herhangi $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denklemi kullanılırsa,

$$g(h^\perp(X,Y),V) = g(\nabla_X Y, V)$$

elde edilir. Burada (4.127) ve (4.141) denklemlerinden

$$g(h^\perp(X,Y),V) = -\tfrac{3}{2}\omega(V)g(X,Y)$$

bulunur. Bazı hesaplamalardan sonra,

$$g(h^\perp(X,Y),V) = g(-g(X,Y)\tfrac{3}{2}B^\theta, V)$$

elde edilir. Böylece,

$$h^\perp(X,Y) = -g(X,Y)\tfrac{3}{2}B^\theta$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklem $M^\perp$ manifoldunun $-\frac{3}{2}B^\theta$ ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir tümel umbilik manifold olduğunu söyler. Diğer taraftan, herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^\perp)$ ve $U,V \in \Gamma(\mathscr{D}^\theta)$ için, (2.21) denkleminden

$$g(h^\theta(U,V),X) = g(\nabla_U V, X)$$

elde edilir. Burada, (4.128) ve (4.141) denklemleri kullanılırsa

$$g(h^{\theta}(U,V),X) = -\tfrac{3}{2}\omega(X)g(U,V)$$

bulunur. Bazı hesaplamalardan sonra,

$$g(h^{\theta}(U,V),X) = g(-g(U,V)\tfrac{3}{2}B^{\perp},X)$$

elde edilir. Böylece,

$$h^{\theta}(U,V) = -g(U,V)\tfrac{3}{2}B^{\perp}$$

sonucuna ulaşılır. Bunun anlamı, M^{θ} manifoldunun M içinde $-\frac{3}{2}B^{\perp}$ ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir tümel umbilik manifold olduğudur.

Şimdi $B^{\perp}$ ve B^{θ} vektör alanlarının kapalı olduğu gösterilecektir. $\omega^{\perp}$ ve ω^{θ}, sırası ile $B^{\perp}$ ve B^{θ} vektör alanlarının dual 1-formlarını göstersin. Herhangi $X \in \Gamma(\mathscr{D}^{\perp})$ için, $\omega^{\perp}(X) = \omega(X)$ elde edilir. Böylece, herhangi $X,Y \in \Gamma(\mathscr{D}^{\perp})$ için,

$$\begin{aligned} d\omega^{\perp}(X,Y) = &\; X\omega^{\perp}(Y) - Y\omega^{\perp}(X) - \omega^{\perp}([X,Y]) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \\ = &\; d\omega(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $d\omega = 0$ olduğundan $d\omega^{\perp} = 0$ sonucu çıkar. Yani, $\omega^{\perp}$ kapalıdır. Böylece, dual 1-formu kapalı olduğundan $B^{\perp}$ vektör alanı kapalıdır. Böylece Lemma 4.2.3.8 den, M lokal olarak bir çarpık-bükülmüş çarpımdır. Dahası, B^{θ} vektör alanının kapalı olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Bu yüzden, Lemma 2.5.1.3 den, M manifoldu aynı zamanda bir çift çarpık çarpım manifolddur. $\square$

Uyarı 4.2.3.10 *Teorem 4.2.3.9 da bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun bir çarpık-bükülmüş çarpım kısmi-eğik altmanifoldunun aynı zamanda bir çift çarpık çarpım manifold olduğu kanıtlanmıştır. Bu yüzden, buradan itibaren bir g.k.K. manifoldun çift çarpık çarpım altmanifoldları çalışılmıştır.*

4.2.4. Çift Çarpık Çarpım Karışık Jeodezik Kısmi-Eğik Altmanifoldlar İçin Bir Eşitsizlik

Bu bölümde, bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipindeki bir çift çarpık çarpım karışık jeodezik kısmi-eğik altmanifoldunun ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik verilmiştir. Burada, $M^{\perp}$ bir tümel reel ve M^{θ} bir eğik altmanifolddur.

Lemma 4.2.4.1 *M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çift çarpık çarpım kısmi-eğik altmanifoldu olsun, burada $M^{\perp}$ bir tümel reel ve M^{θ} bir eğik altmanifolddur. Bu durumda, herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için*

$$g(h(X,Y),FV) = g(h(V,Y),JX) + \left\{ \tfrac{2}{3} PV(\ln f_2) - \tfrac{1}{2}\omega(FV) \right\} g(X,Y) \ , \tag{4.145}$$

$$g(h(U,V),JX) = g(h(U,X),FV) + \tfrac{2}{3} X(\ln f_1) g(PV,U) - \tfrac{1}{2}\omega(JX) g(U,V) \tag{4.146}$$

denklemleri gerçeklenir.

İspat. $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ olsun, V ile PV sırası ile (4.139) ve (4.140) denklemlerinde yer değiştirirse ve (2.23) ve (2.32) denklemleri kullanılırsa, sırası ile (4.145) ve (4.146) denklemleri elde edilir. □

Uyarı 4.2.4.2 *Eğer, $X \in \Gamma(\mathscr{D}^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(\mathscr{D}^{\theta})$ için $h(X,V) = 0$ ise, M kısmi eğik altmanifolduna* karışık jeodezik *denir.*

Uyarı 4.2.4.2 ve (2.35) denkleminden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.4.3 *M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çift çarpık çarpım karışık jeodezik kısmi-eğik altmanifoldu olsun. Eğer B Lee vektör alanı M manifolduna teğet ise, bu durumda herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için, (4.145) ve (4.146) denklemleri sırası ile*

$$g(h(X,Y),FV) = \tfrac{2}{3} PV(\ln f_2) g(X,Y) \ , \tag{4.147}$$

$$g(h(U,V),JX) = \frac{2}{3}X(\ln f_1)g(PV,U) \tag{4.148}$$

haline gelir.

$M =_{f_2} M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ manifoldu bir $(\bar{M},J,\omega,g)$ g.k.K. manifoldunun (m_1+m_2)-boyutlu bir çift çarpık çarpım altmanifoldu olsun. $\bar{M}$ manifoldunun $\{e_1,...,e_{m_1},\bar{e}_1,...,\bar{e}_{m_2}, Je_1,...,Je_{m_1},e_1^*,...,e_{m_2}^*,\hat{e}_1,...,\hat{e}_l\}$ şeklinde bir standart ortonormal bazı seçilsin öyle ki burada $\{e_1,...,e_{m_1}\}$, $\mathscr{D}^{\perp}$ dağılımının bir ortonormal bazı; $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_{m_2}\}$, $\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının bir ortonormal bazı; $\{Je_1,...,Je_{m_1}\}$, $J\mathscr{D}^{\perp}$ dağılımının bir ortonormal bazı; $\{e_1^*,...,e_{m_2}^*\}$, $F\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının bir ortonormal bazı ve $\{\hat{e}_1,...,\hat{e}_l\}$, $\overline{\mathscr{D}}$ dağılımının bir ortonormal bazıdır. Burada $m_1 = dim(\mathscr{D}^{\perp})$, $m_2 = dim(\mathscr{D}^{\theta})$ ve $l = dim(\overline{\mathscr{D}})$.

Uyarı 4.2.4.4 *(2.33) denkleminden,* $\{\sec\theta P\bar{e}_1,...,\sec\theta P\bar{e}_{m_2}\}$ *bazının da* $\mathscr{D}^{\theta}$ *dağılımının bir ortonormal bazı ve* $\{\csc\theta F\bar{e}_1,...,\csc\theta F\bar{e}_{m_2}\}$ *bazının da* $F\mathscr{D}^{\theta}$ *dağılımının bir ortonormal bazı olduğu elde edilir, burada* θ, $\mathscr{D}^{\theta}$ *dağılımının eğik açısıdır.*

Teorem 4.2.4.5 *M bir* $(\bar{M},J,\omega,g)$ *g.k.K. manifoldunun* ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ *tipinde bir çift çarpık çarpım karışık jeodezik kısmi-eğik altmanifoldu ve B Lee vektör alanı M manifolduna teğet olsun. Bu durumda, M manifoldunun h ikinci temel formunun normunun karesi*

$$\|h\|^2 \geq m_1 \cot^2\theta \|B^{\theta}\|_{\theta}^2 + m_2(m_2-1)\cos^2\theta \|B^{\perp}\|_{\perp}^2 \tag{4.149}$$

eşitsizliğini gerçekler, burada $m_1 = dim(M^{\perp})$, $m_2 = dim(M^{\theta})$ *ve* $\|.\|_{\perp}$ *ve* $\|.\|_{\theta}$ *sırası ile* $g_{\perp}$ *ve* g_{θ} *metriğine göre hesaplanmıştır.*

İspat. Hipotezden, h ikinci temel formunun normunun karesi

$$\|h\|^2 = \quad \|h(\mathscr{D}^{\perp},\mathscr{D}^{\perp})\|^2 + \|h(\mathscr{D}^{\theta},\mathscr{D}^{\theta})\|^2$$

şeklinde ifade edilir. (2.31) ayrışımından,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 = \; & \sum_{i,j,k=1}^{m_1} g(h(e_i,e_j),Je_k)^2 + \sum_{i,j=1}^{m_1}\sum_{a=1}^{m_2} g(h(e_i,e_j),e_a^*)^2 \\ & + \sum_{a,b=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_b),Je_i)^2 + \sum_{a,b,c=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_b),e_c^*)^2 \\ & + \sum_{r,s=1}^{m_1+m_2}\sum_{t=1}^{l} g(h(\tilde{e}_r,\tilde{e}_s),\hat{e}_t)^2\end{aligned} \tag{4.150}$$

elde edilir, burada $\{\tilde{e}_r\}_{1\leq r\leq (m_1+m_2)}$, M nin bir ortonormal bazıdır. Böylece,

$$\|h\|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{m_1}\sum_{a=1}^{m_2} g(h(e_i,e_j),e_a^*)^2 + \sum_{a,b=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_b),Je_i)^2$$

gerçeklenir. Uyarı 4.2.4.4 den

$$\|h\|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{m_1}\sum_{a=1}^{m_2} g(h(e_i,e_j),\csc\theta F\bar{e}_a)^2 + \sum_{a,b=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_b),Je_i)^2$$

bulunur. (4.147) ve (4.148) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq \; & \tfrac{4}{9}\csc^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_1}\sum_{a=1}^{m_2} (P\bar{e}_a(\ln f_2))^2 g^2(e_i,e_j) \\ & +\tfrac{4}{9} \sum_{a,b=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} (e_i(\ln f_1))^2 g^2(P\bar{e}_a,\bar{e}_b)\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar, Uyarı 4.2.4.4 den, $P\bar{e}_a = \cos\theta \acute{e}_c$ sonucuna ulaşılır, burada $\{\acute{e}_c\}_{1\leq c\leq m_2}$, $\mathscr{D}^\theta$ nın bir ortonormal bazıdır, bu yüzden son eşitsizlik

$$\begin{aligned}\|h\|^2 \geq \; & \tfrac{4}{9}\cot^2\theta \sum_{i,j=1}^{m_1}\sum_{c=1}^{m_2} (\acute{e}_c(\ln f_2))^2 g^2(e_i,e_j) \\ & +\tfrac{4}{9} \sum_{a,b=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m_1} (e_i(\ln f_1))^2 g^2(P\bar{e}_a,\bar{e}_b)\end{aligned}$$

haline gelir. Burada $a,b \in \{1,2,...,m_2\}$ için $\mathscr{D}^\theta$, θ eğik açılı bir eğik dağılım olduğundan

$$g(P\bar{e}_a,\bar{e}_b) = \begin{cases} \cos\theta & if \;\; a \neq b, \\ 0 & if \;\; a = b, \end{cases}$$

bulunur. Böylece, direkt hesap ile

$$\|h\|^2 \geq \frac{4}{9}\left\{m_1 \cot^2\theta \|\nabla \ln f_2\|^2 + m_2(m_2-1)\cos^2\theta \|\nabla \ln f_1\|^2\right\} \tag{4.151}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.35) ve (2.54) denklemleri kullanılırsa (4.130) ve (4.133) denklemlerinden sırası ile

$$B^{\perp} = \frac{2}{3{f_2}^2}\nabla^{\perp}(\ln f_1) \qquad ve \qquad B^{\theta} = \frac{2}{3{f_1}^2}\nabla^{\theta}(\ln f_2) \tag{4.152}$$

elde edilir. Böylece, (2.50), (2.54) ve (4.152) denklemleri (4.151) eşitsizliğinde kullanılırsa, (4.149) eşitsizliği bulunur. □

Teorem 4.2.4.6 *M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çift çarpık çarpım karışık jeodezik kısmi-eğik altmanifoldu ve B Lee vektör alanı M manifolduna teğet olsun. Eğer invaryant normal alt demet $\overline{\mathscr{D}} = \{0\}$ ise, bu durumda (4.149) eşitsizliğinin eşitlik durumunun özdeş olarak sağlanması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U, V \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için $A_{JX}Y \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ ve $A_{FU}V \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ olmasıdır.*

İspat. Verilen hipotez altında (4.149) eşitsizliğinin eşitlik durumunun özdeş olarak sağlanması için gerek ve yeter koşul (4.150) denkleminden

$$g(h(\mathscr{D}^{\perp}, \mathscr{D}^{\perp}), J\mathscr{D}^{\perp}) = 0 \qquad \text{ve} \qquad g(h(\mathscr{D}^{\theta}, \mathscr{D}^{\theta}), F\mathscr{D}^{\theta}) = 0$$

gerçeklenmesidir. Bu koşullar, $X, Y, Z \in \mathscr{L}(M^{\perp})$ ve $U, V, W \in \mathscr{L}(M^{\theta})$ için

$$g(h(Y,Z), JX) = 0 \qquad \text{ve} \qquad g(h(V,W), FU) = 0$$

koşullarına denktir. (2.23) denkleminden, bu koşulların sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_{JX}Y \in \mathscr{L}(M^{\theta}) \qquad \text{ve} \qquad A_{FU}V \in \mathscr{L}(M^{\perp})$$

denklemlerinin gerçeklenmesidir. □

Teorem 4.2.4.7 *M bir $(\bar{M}, J, \omega, g)$ g.k.K. manifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ tipinde bir çift çarpık çarpım karışık jeodezik kısmi-eğik altmanifoldu ve B Lee vektör alanı M manifolduna* *teğet ve invaryant normal alt demet $\overline{\mathscr{D}} = \{0\}$ olsun. (4.149) eşitsizliğinde eşitlik durumu özdeş olarak sağlanırsa, bu durumda M^θ manifoldu $\bar{M}$ kapsayan manifoldu içinde de tümel umbiliktir.*

İspat. $\bar{h}^\theta$, M^θ manifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formunu göstersin. Bu durumda, $a \in \{1,...,m_2\}$ için

$$\bar{h}^\theta(\bar{e}_a,\bar{e}_a) = h^\theta(\bar{e}_a,\bar{e}_a) + h(\bar{e}_a,\bar{e}_a) \tag{4.153}$$

şeklinde ifade edilir, burada $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_{m_2}\}$, M^θ nın bir ortonormal bazı ve h^θ, M^θ manifoldunun M içindeki ikinci temel formu ve h, M manifoldunun $\bar{M}$ içindeki ikinci temel formudur. $M =_{f_2} M^\perp \times_{f_1} M^\theta$ aşikar olmayan bir çift çarpık çarpım olduğundan, (2.56) denkleminden

$$h^\theta(\bar{e}_a,\bar{e}_a) = -\tfrac{2}{{f_2}^2}\nabla^\perp(\ln f_1) \neq 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, $h(\mathscr{D}^\theta,\mathscr{D}^\theta) \subseteq J\mathscr{D}^\perp$ olduğu Teorem 4.2.4.6 dan bilinmektedir. Böylece,

$$h(\bar{e}_a,\bar{e}_a) = \sum_{i=1}^{m_1} g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_a),Je_i)Je_i$$

bulunur, burada $\{e_1,...,e_{m_1}\}$, $M^\perp$ manifoldunun bir ortonormal bazıdır. Burada, $a \in \{1,...,m_2\}$ ve $i \in \{1,...,m_1\}$ olmak üzere (4.148) denklemi kullanılırsa, $g(P\bar{e}_a,\bar{e}_a) = 0$ olduğundan

$$g(h(\bar{e}_a,\bar{e}_a),Je_i) = \tfrac{2}{3}e_i(\ln f_1)g(P\bar{e}_a,\bar{e}_a) = 0$$

elde edilir. Bunun anlamı, her $a \in \{1,...,m_2\}$ için

$$h(\bar{e}_a,\bar{e}_a) = 0$$

olduğudur. O halde, (4.153) denkleminden

$$\bar{h}^\theta(\bar{e}_a,\bar{e}_a) = h^\theta(\bar{e}_a,\bar{e}_a)$$

sonucu çıkar. Böylece, M^{θ} manifoldu M içinde tümel umbilik olduğundan, $\bar{M}$ içinde tümel umbiliktir. $\square$

Uyarı 4.2.4.8 *Lee form ω nın tam olup olmaması bu çalışmadaki sonuçları değiştirmez. Böylece, bu sonuçlar yerel konformal Kaehler durumunda da geçerlidir.*

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasına ilk olarak, Riemanniyen manifold, Einstein-benzeri Riemanniyen manifold, Riemanniyen manifoldların altmanifoldları, hemen hemen Hermityen manifold, Kaehleriyen manifold, çift bükülmüş çarpım manifold, yerel ve global konformal Kaehler manifold tanımları ile başlanmıştır. Daha sonra hemen hemen Hermityen manifoldların kısmi-eğik ve yarı-eğik altmanifoldları ile ilgili tanımlar yer almıştır. Tezin bulgular kısmında, ilk olarak konformal-bükülmüş çarpım manifoldlar tanıtılmış ve bu tip manifoldlar g.k.K. manifoldların alt manifoldları olarak ele alınmıştır. Lemma 4.1.1.1 ve Lemma 4.1.1.3 de g.k.K. manifoldların yarı-eğik altmanifodları için sağlanan koşullar verildikten sonra, Teorem 4.1.1.2, Teorem 4.1.1.4, Teorem 4.1.1.5 ve Teorem 4.1.1.7 de $\mathscr{D}^T$ holomorfik dağılımının ve $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının tümel jeodezik ve integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Daha sonra, alt bölüm 4.1.2 de, bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım manifoldu için bir örnek inşa edilmiştir. Lemma 4.1.2.1 ve Lemma 4.1.2.2 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım altmanifoldu için sağlanan eşitlikler kanıtlandıktan sonra, Teorem 4.1.2.4 de bu tip altmanifoldların B Lee vektör alanının altmanifolda dik olması durumunda direkt çarpım manifolda indirgendiği ispatlanmıştır. Teorem 4.1.2.6 da bir g.k.K. manifoldun bir has yarı-eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ formunda yerel olarak bir konformal-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Lemma 4.1.3.1 de bir g.k.K.manifoldun ${}_{f_2}M^T \times_{f_1} M^\theta$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım altmanifoldunun ikinci temel formu için sağlanan bazı denklemler kanıtlandıktan sonra, Teorem 4.1.3.3 de bu tip altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik kurulmuştur ve aynı zamanda bu eşitsizliğin eşitlik durumu incelenmiştir. Alt bölüm 4.1.4 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım manifoldu için bir örnek inşa edilmiştir. Lemma 4.1.4.1 ve Lemma 4.1.4.2 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım altmanifoldu için sağlanan denklemler kanıtlandıktan sonra, Teorem 4.1.4.3 de bir g.k.K. manifoldun bir has yarı-eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ formunda yerel olarak bir konformal-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Lemma 4.1.5.1 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^\theta \times_{f_1} M^T$ formunda bir konformal-bükülmüş çarpım altmanifoldunun ikinci temel formu için sağlanan bazı denklemler kanıtlandıktan sonra, Teorem 4.1.5.2 de bu tip altmanifoldların direkt çarpım manifolda indirgenmesi için yeter koşullar verilmiştir. Teorem 4.1.5.3 de yine bu formdaki altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik kurulmuştur ve aynı zamanda bu eşitsizliğin eşitlik durumu incelenmiştir. Bulguların 4.2 numaralı kısmında çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar tanıtılmıştır. Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4 de bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldun sırası ile Riemann eğrilik, Ricci eğrilik ve skaler eğrilik formülleri kanıtlanmıştır. Lemma 4.2.5 de bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörü hesaplandıktan sonra Teorem 4.2.7 de bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldun çift çarpık çarpım manifolda indirgenmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Önerme 4.2.8 de ve Teorem 4.2.9 da eşdairesel vektör alanına izin veren çarpık-bükülmüş çarpım manifoldunun özel durumları incelenmiştir. Teorem 4.2.1.1, Teorem 4.2.1.3, Teorem 4.2.1.5, Teorem 4.2.1.7 ve Teorem 4.2.1.8 de sırası ile $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I} \oplus \mathscr{A}$ ve $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlarının çarpan manifoldlarının da Einstein-benzeri manifold olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Sonuç 4.2.1.2, Sonuç 4.2.1.4 ve Sonuç 4.2.1.6 da $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ ve $\mathscr{P}$ sınıfından Einstein-benzeri çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların çarpık çarpım manifoldlara indirgenmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Tersine, Teorem 4.2.1.9, Teorem 4.2.1.10 ve Teorem 4.2.1.11 de ise çarpan manifoldları Einstein-benzeri olan bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldun kendisinin de Einstein-benzeri olması durumu da incelenmiştir. Alt bölüm 4.2.2 de çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar g.k.K. manifoldların altmanifoldu olarak ele alınmıştır. Lemma 4.2.2.1 de bir g.k.K. manifoldunun kısmi-eğik altmanifodları için geçerli denklemler kanıtlandıktan sonra, Teorem 4.2.2.2 ve Teorem 4.2.2.4 de sırası ile $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılımının ve $\mathscr{D}^{\perp}$ tümel reel dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Alt bölüm 4.2.3 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ formunda bir çarpık-bükülmüş çarpım manifoldu için bir örnek inşa edilmiştir. Lemma 4.2.3.1 ve Lemma 4.2.3.3 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ formunda bir çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldu üzerinde geçerli bazı eşitlikler verildikten sonra, Teorem 4.2.3.2, Teorem 4.2.3.4 ve Teorem 4.2.3.5 de B Lee vektör alanının altmanifolda dik olması durumunda bu tip altmanifoldların sırası ile baz konformal çarpık çarpım, bükülmüş çarpım ve direkt çarpıma indirgenmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Lemma 4.2.3.6 ve Lemma 4.2.3.7 den hareketle Lemma 4.2.3.8 elde edilmiştir. Teorem 4.2.3.9 da bir g.k.K. manifoldun bir has kısmi-eğik altmanifoldunun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ formunda yerel olarak bir çarpık-bükülmüş çarpım manifold olması için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir ve bu tip çarpım manifoldların çift çarpık çarpım manifodlara indirgendiği gözlenmiştir. Lemma 4.2.4.1 de bir g.k.K. manifoldun ${}_{f_2}M^{\perp} \times_{f_1} M^{\theta}$ formunda bir çift çarpık çarpım altmanifoldunun ikinci temel formu için geçerli bazı denklemler kanıtlandıktan sonra, karışık-jeodezik olan bu tip altmanifoldlar için Sonuç 4.2.4.3 de bazı sonuçlar elde edilmiştir. Teorem 4.2.4.5 de yine bu formdaki altmanifoldların ikinci temel formunun normunun karesi için bir eşitsizlik kurulmuştur. Teorem 4.2.4.6 ve Teorem 4.2.4.7 de B Lee vektör alanı M manifolduna teğet olduğunda ve $\bar{\mathscr{D}} = \{0\}$ koşulu altında bu tip altmanifoldlar üzerinde eşitsizliğin eşitik durumunda geçerli olan sonuçlar elde edilmiştir.

Konformal-bükülmüş çarpım manifoldlar ve çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar çift bükülmüş çarpım manifoldlarda bükülmüş fonksiyonlardan birinin sadece bir çarpan manifolda bağlı olması durumunda ortaya çıkan manifold tipleridir yani, çift bükülmüş çarpım manifoldlarının özel halleridir. Literatürde bu tip manifoldlar daha önce çalışılmamıştır. Bu manifold tipleri ilk defa bu tezde tanımlanmıştır. Dolayısı ile bu tezde yapılan çalışmalar literatürdeki bir boşluğu doldurmaktadır. Bu çalışmada g.k.K. manifoldlar içinde çarpık-bükülmüş ve konformal-bükülmüş altmanifoldların varlığı incelenmiş ve bu tip altmanifoldlara aşikar olmayan örnekler verilmiştir. Kapsayan manifold g.k.K. olduğunda çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldların çift çarpık çarpım manifoldlara indirgendiği görülmüştür. Literatürde çarpık çarpım manifoldlar ve çift çarpık çarpım manifoldların farklı sınıflardan Einstein-benzeri manifold olması durumunda çarpan manifoldlarının Einstein-benzeri manifold olması durumu daha önce Mantica [33] ve Sayied v.d. [24] tarafından incelenmiştir. Bu tez çalışmasında çarpık-çarpım, çift çarpık çarpım ve hatta bükülmüş çarpım manifoldların daha genel hali olan çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar için benzer problem incelenmiş ve Ricci tensörü ve Hessiyen tensörü cinsinden gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bu inceleme sonucunda bükülmüş fonksiyon sabit alındığında ya da bükülmüş fonksiyon sadece bir çarpan manifolda bağlı alındığında, çarpık-bükülmüş çarpım manifold için bulunan sonuçların diğer araştırmacılar tarafından çarpık çarpım ve çift çarpık çarpım manifoldlar için bulunan sonuçlarla uyuştuğu gözlenmiştir.

Konformal-bükülmüş çarpım ve çarpık-bükülmüş çarpım manifoldlar literatürde daha önce çalışılmadığından, geniş çalışma alanına sahiptir. Kapsayan manifold yerel çarpım Riemanniyen manifold, değme manifold ya da değme manifoldların özel tipleri olan Sasakiyen, kosimplektik (cosymplectic), Kenmotsu v.b. manifold olduğunda konformal-bükülmüş ve çarpık-bükülmüş çarpım altmanifoldların bu tip kapsayan manifoldar içindeki varlığı araştırılabilir ve bu tez çalışmasındaki benzer problemler farklı kapsayan manifoldlar için incelenebilir. Ayrıca, bu çalışmada verilen çarpık-bükülmüş çarpım manifoldların Ricci tensöründen yola çıkarak, bu tip manifoldların Ricci soliton, Yamabe soliton, quasi-Einstein, generalized quasi Einstein manifold olması ve bunların yanı sıra bu tip manifoldların harmonik Weyl konformal eğrilik tensörüne sahip olması gibi durumlarda da farklı problemler çalışılabilir. Dolayısı ile bu tez çalışması yeni çalışmalara ışık tutacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] Bejancu, A., 1978, CR-Submanifolds of Kaehler manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 69, 135—142.

[2] Bejancu, A., 1984, Semi-invariant submanifolds of locally product Riemannian manifolds, *An. Univ. West. Timis. Ser. Mat.-Inform.*, 22.

[3] Beem, J.K., Ehrlkich, P.E., Powell, T.G., 1982, *Warped product manifolds in relativity, Selected studies: physics-astropysics, mathematics, history of science*, pp. 4156, North Holland, Amsterdam-New York.

[4] Berndt, J., 1992, Three-dimensional Einstein-like manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, 2, 385–397.

[5] Besse, A.L., 2008, *Einstein Manifolds, Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin.

[6] Bishop, R.L., O'Neill, B., 1969, Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1 (145), 1–49.

[7] Boeckx, E., 1992, Einstein like semisymmetric spaces, *Archivum Mathematicum*, Tomus 29, 235–240.

[8] Bueken, P., Vanhecke, L., 1999, Three- and four-dimensional Einstein-like manifolds and homogeneity, *Geom. Dedicata*, 75, 123-–136.

[9] Carriazo, A., 2000, *Bi-slant immersions*, 88–97, in:Proc. ICRAMS 2000, Kharagpur, India.

[10] Calvaruso, G., 2007, Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Geom. Dedicata*, 127, 99—119.

[11] Calvaruso, G., 2008, Curvature Properties of Four-Dimensional Generalized Symmetric Spaces, *J. Geom.*, 90 , 30—46.

[12] Calvaruso, G., 2009, Einstein-like curvature homogeneous Lorentzian threemanifolds, *Result Math.*, 55, 295-–310.

[13] Calvaruso, G., 2011, Riemannian 3-metrics with a generic Codazzi Ricci tensor, *Geom Dedicata*, 151, 259—267.

[14] Chen, B.Y., 1990, *Geometry of slant submanifolds*, Katholieke Universiteit, Leuven, Leuven.

[15] Chen, B.Y., 2001, Geometry of warped product CR-submanifolds in Kaehler manifolds, *Monatsh. Math.*, 133, 177–195.

[16] Chen, B.Y.,2017, *Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds*, World Scientific, ISBN:978-981-3208-92-6/hbk; 978-981-3208-94-0/ebook.

[17] Chen, B.Y., 2014, A simple characterization of generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativ. Gravit.*, 46(12), Article ID 1833 5.

[18] Chen, B.Y., 1981, *Geometry of submanifolds and its applications*, Science University of Tokyo.

[19] Chern, S.S., Chen, W.H., Lam, K.S., 1998, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, London, ISBN: 9810234945.

[20] De, U.C., Murathan, C., Özgür, C., 2010, Pseudo symmetric and pseudo Ricci symmetric warped product manifolds, *Commun. Korean. Math. Soc.*, 25, 4, 615–621.

[21] Deszcz, R., Verheyen P., Verstraelen, L., 1996, On some generalized Einstein metric conditions, *Publications De L'Institut Mathematique Nouvelle serie*, 60, 74, 108–120.

[22] Dobarro, F., Ünal, B., 2008, Curvature in special base conformal warped products, *Acta. Appl. Math.*, 104, 1–46.

[23] Dragomir , S., Ornea, L., 1998, *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Mathematicsi 155, Birkhäuser, Boston Inc: Boston, MA, ISBN:0-8176-4020-7/hbk.

[24] El-Sayied, H. K., Mantica, C. A., Shenawy, S., Syied, N., Gray's decomposition on doubly warped product manifolds and applications, https://arxiv.org/abs/1905.05866.

[25] Ehrlich, P.E., 1974, *Metric deformations of Ricci and sectional curvature on compact Riemannian manifolds*, Ph.D. Dissertation, SUNY, Stony Brook, New York.

[26] Fernandez Lopez, M., Garcia Rio, E., Küpeli, D. N., Ünal, B., 2001, A curvature condition for a twisted product to be a warped product, *Manuscripta Math.*, 106, 213–217.

[27] Gebarowski, A., 1994, On nearly conformally symmetric warped product spacetimes, *Soochow J. Math.*, 20, 1, 61–75.

[28] Gerdan, S., 2015, *Kısmi-Eğik Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

[29] Gray, A., 1978, Einstein-like manifolds which are not Einstein, *Geom. Dedicata*, 7, 259–280.

[30] Gray, A., 1965, Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds,*Michigan Mathematical Journal*, 12(3), 273-287.

[31] Gutierrez, M., Olea, B., 2012, Semi-Riemannian manifolds with a doubly warped structures, *Rev. Mat. Iberoam.*, 28 (1), 1-24.

[32] Hsiung, C.C., 1995, *Almost complex and complex structures*, World Scientific, London, ISBN: 981-02-1712-9.

[33] Mantica, C. A., Shenawy, S., 2017, Einstein-like warped product manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 14 (11).

[34] Mantica, C.A., Molinari , L.G., De, U.C., 2016, A condition for a perfect fluid space-time to be a generalized Robertson-Walker space-time, *J. Math. Phys.*, 57, 022508; erratum 57049901.

[35] C.A. Mantica and L.G. Molinari, On the Weyl and the Ricci tensors of generalized Robertson-Walker space-times , *J. Math. Phys.* 57, 102502.

[36] Matsumoto, K., 2017, Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds, *Proc. Int. Geom. Cent.* 10 (2), 8–23.

[37] Matsumoto, K., 2018, Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds II, *Proc. Int. Geom. Cent.*, 11 (3), 27–44.

[38] Munteanu, M.I., 2007, Doubly warped product CR-submanifolds in locally conformal Kähler manifolds, *Monatsh. Math.* 150, 333-342.

[39] Munteanu, M.I., 2007, A note on doubly warped product contact CR-submanifolds in trans-Sasakian manifolds, *Acta Math. Hungar.*, 116 (1-2), 121–126.

[40] Olea, B., 2009, *Doubly warped product structures on semi-Riemannian manifolds*, Ph.D. thesis, Universty of Malaga.

[41] Olteanu, A., 2010, A general inequality for doubly warped product submanifolds, *Math. J. Okayama Univ.*, 52, 133–142.

[42] O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, San Diego.

[43] Papaghiuc , N., 1994, Semi-slant submanifolds of a Kählerian manifold, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)*, 40, 55–61.

[44] Peng, C.K., Qian, C., 2016, Homogeneous Einstein-like metrics on spheres and projective spaces, *Differential Geometry and its Applications*, 44, 63—76.

[45] Ponge, R., Reckziegel, H., 1993, Twisted products pseudo- Riemannian geometry, *Geom. Dedicata*, 48, 15–25.

[46] Şahin, B., 2009, Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor, *Ann. Pol. Math.*, 95, 207–226.

[47] Şahin, B., 2005, Nonexistence of warped product semi-slant submanifolds of Kaehler manifolds, *Geom. Dedicata*, 117, 195–202.

[48] Şahin, B., 2009, Warped product semi-slant submanifolds of a locally product Riemannian manifold, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 46 (2), 169–184.

[49] Şahin, B., 2007, Notes on doubly warped and doubly twisted product CR-submanifolds of Kaehler manifolds, *Mat. Vesnik*, 59, 205–210.

[50] Şahin, B., 2012, *Manifoldların diferansiyel geometrisi*, Nobel, Ankara.

[51] Schouten, J . A., 1954, *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin.

[52] Taştan, H.M., Gerdan, S., 2018, Doubly twisted product semi-invariant submanifolds of a locally product Riemannian manifold, *Mathematical Advances in Pure and Applied Sciences*, 1 (1), 23–26.

[53] Taştan, H.M., Tripathi, M.M., 2016, Semi-slant submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) Mathematics Tomul LXII*, 1 (2), 337–347.

[54] Taştan, H.M., Gerdan, S., 2015, Hemi-slant submanifolds of a locally conformal Kähler manifold, *Int. Electron. J. Geom.*, 8(2), 46–56.

[55] Taştan, H.M., Gerdan, S., 2018, *On doubly twisted product submanifolds*, 16th International Geometry Symposium, Manisa, Turkey.

[56] Uddin , S., 2010, On doubly warped and doubly twisted product submanifolds, *Int. Electron. J. Geom.*, 3 (1), 35–39.

[57] Ünal, B., 2001, Doubly warped products, *Differential Geom. Appl.*, 15, 253–263.

[58] Vaisman, I., 1980, On locally and globally conformal Kähler manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262 (2), 533–542.

[59] Yano, K., Kon, M., 1984, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, ISBN:9971-966-15-8.

[60] Yano, K., Chen, B. Y., 1971, On the concurrent vector fields of immersed manifolds, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23, 343-–350.

[61] Yano, K., 1940, Conformally separable quadratic differential forms, *Institute of Mathematics, Tokyo Imperial Univ.*, 16(3), 83–86.

[62] Yano, K., 1940, Concircular geometry. I. Concircular transformations. II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}$. III. Theory of curves. IV. Theory of subspaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 16, 195-–200.

[63] Yano, K., 1944, On torse forming direction in a Riemannian space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20, 340-–345.

[64] Zaeim, A., Haji-Badali, A., 2016, Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four, *Mediterr. J. Math.*, 13 , 3455—3468.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Sibel GERDAN AYDIN	Sibel GERDAN AYDIN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2012

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2015

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2021

Makale ve Bildiriler

Makaleler

Gerdan Aydın S., Taştan H.M., 2021, Conformal-Twisted Product Semi-Slant Submanifolds in Globally Conformal Kaehler Manifolds, *Hacet. J. Math. Stat.*, accepted.

Taştan H.M., Gerdan Aydın S., 2021, Some Results On Warped and Twisted Products, *Riv. Mat. Univ. Parma*, accepted.

Taştan H.M., Gerdan Aydın S., 2020, On Doubly Warped Products,

Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 69, 10, 1329-1335, DOI:10.31801/cfsuasmas.635048.

Taştan H.M., Gerdan Aydın S., 2019, Clairaut Anti-Invariant Submersions From Cosymplectic Manifolds, *Honam Math. J.*, 41, 707-724, DOI:10.5831/HMJ.2019.41.4.707.

Taştan H.M., Gerdan S., 2018, Doubly Twisted Product Semi-Invariant Submanifolds of a Locally Product Riemannian Manifold, *Mathematical Advances in Pure and Applied Sciences*, 1, 1, 23-26.

Taştan H.M., Gerdan S., 2017, Clairaut Anti-invariant Submersions from Sasakian and Kenmotsu Manifolds, *Mediterr. J. Math.*, 14, 235, DOI:10.1007/s00009-017-1028-1.

Taştan H.M., Gerdan S., 2015, Hemi-Slant Submanifolds of A Locally Conformal Kaehler Manifold, *Int. Electron. J. Geom.*, 8, 46-56, DOI:10.36890/iejg.592280.

Bildiriler

Taştan H.M., Gerdan S., 2018, On Doubly Twisted Submanifolds, *16th International Geometry Symposium*, Manisa, Türkiye, 4-7 July, pp.153-153.

Taştan H.M., Gerdan S., 2017, Non-Existence of Doubly Warped Semi-Invariant Submanifolds of a Locally Product Riemannian Manifolds, *International Conference on Mathematics and Engineering,*, İstanbul, Türkiye, 10-12 May, pp.191-191.

Taştan H.M., Gerdan S., 2017, On Anti-Invariant Submersions whose Total Manifolds are Cosymplectic, *International Conference on Mathematics and Engineering,*, İstanbul, Türkiye, 10-12 May, pp.191-191.

Taştan H.M., Gerdan S., 2016,On Anti-Invariant Riemannian Submersion From Sasakian Manifolds, *International Workshop On Theory of Submanifolds*, İstanbul, Türkiye, 2-04 June, pp.33-33.

Taştan H.M., Gerdan S., 2016, Minimal Surfaces and Harmonic Mappings, *14th International Geometry Symposium*, Denizli, Türkiye, 25-28 May, pp.1-1.

Taştan H.M., Gerdan S., 2015, Hemi-slant Submanifolds of A Locally Conformal Kaehler Manifold, *XIII. Geometri Sempozyumu*, İstanbul, Türkiye, 27-30 Temmuz, ss.81-81.