

**KONİK METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ PRENSİBİ
VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Nurcan BİLGİLİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2009

ANKARA

Nurcan BİLGİLİ tarafından hazırlanan KONİK METRİK UZAYLARDA
BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ PRENSİBİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ adlı bu
tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cihan ORHAN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Bahri TURAN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 12 / 01 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orjinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nurcan BİLGİLİ

KONİK METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ PRENSİBİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nurcan BİLGİLİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2009

ÖZET

Bu tez çalışmasında konik metrik uzaylarda büzülme dönüşümü prensibi ve bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak metrik uzaylardaki dönüşümler için sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler ve bazı temel tanım ve teoremler verildi. Bundan sonra konik tanımı, çeşitleri ve bazı özellikleri verildi. Burada normal sabiti $K < 1$ olan hiçbir normal koniğin olmadığı, her regüler koniğin bir normal konik olduğu ve her bir $k > 1$ sayısı için $K > k$ olacak şekilde bir K normal sabitine sahip bir normal koniğin olduğu incelendi. Sonra konik metrik uzay tanımı ve bazı temel özellikleri verildi. Daha sonra konik metrik uzaylarda büzülme şartını sağlayan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri önce P nin K normal sabiti ile bir normal konik olması varsayımı altında ve sonra da mümkünse normallik varsayımı ihmal edilerek genelleştirilmiş hali incelendi. Ayrıca konik metrik uzaylarda büzülebilirlik şartlarını sağlayan dönüşümlerin çakışım ve ortak sabit noktalarının varlığı ve bazı teoremleri incelendi. Sonra konik metrik uzaylarda en iyi yaklaşım kavramı, temel tanım ve teoremleri incelendi.

Son olarak da konik metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için sabit nokta tanımı verilerek bu dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri incelendi.

Bilim Kodu	: 204.1.132
Anahtar Kelimeler	: Metrik uzay, büzülme dönüşümü, konik, konik metrik uzay, sabit nokta, en iyi yaklaşımlar, küme değerli dönüşümler
Sayfa Adedi	: 112
Tez Yöneticisi	: Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

**PRINCIPLE OF CONTRACTIVE MAPPINGS AND FIXED POINT
THEOREMS IN CONE METRIC SPACES**

(M.Sc. Thesis)

Nurcan BİLGİLİ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

December 2009

ABSTRACT

In this thesis, principle of contractive mappings and fixed point theorems in cone metric spaces have been investigated. First of all, background information, some basic definitions and theorems of fixed point theory were given for mappings in metric spaces. Secondly, definition, types and some properties of cone were given. Here, there are no normal cones with normal constant $K < 1$, every regular cone is normal and for each $k > 1$, there are cones with normal constant $K > k$ were investigated. Also definition and basic properties of cone metric spaces were given. Then some fixed point theorems have been investigated for the mappings which satisfy the contractive condition before under the assumption of normality in P after that if it is possible by omitting the assumption of normality in P . Also presence of coincidence and common fixed points of mappings which satisfy the contractive condition in cone metric spaces were investigated. Then characterization of best approximations and properties were given in cone metric spaces.

Finally endpoints and fixed points of set-valued contractions were given and some fixed point theorems of these mappings were investigated.

Science Code	: 204.1.132
Key Words	: Metric space, contractive mapping, cone, cone metric space, fixed point, best approximations, set-valued mappings
Page Number	: 112
Adviser	: Assoc. Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca bana burs veren TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna) ve benden desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen çok sevdiğim annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR	4
3. KONİK METRİK UZAYLAR	14
3.1. Konikler ve Özellikleri	14
3.2. Konik Metrik Uzaylarda Bazı Temel Tanım ve Teoremler	26
4. SABİT NOKTA TEOREMLERİ	36
4.1. Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	36
4.2. Konik Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Nokta Teoremleri	67
5. KONİK METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKLAŞIMLAR VE KÜME DEĞERLİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTALAR	91
5.1. Konik Metrik Uzaylarda En İyi Yaklaşımlar	91
5.2. Konik Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Noktaları	97
6. SONUÇ	107
KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ	112

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
(X, ρ)	Metrik uzay
$\rho(x, y)$	Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
(X, d)	Konik Metrik uzay
$d(x, y)$	Konik Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
$\sup A$	A nın en küçük üst sınırı (supremum)
$\inf A$	A nın en büyük alt sınırı (infimum)
$\emptyset$	Boş küme
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\{x_n\}$	Dizi
$x_n \rightarrow x$	$\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\subset$	Altkümesidir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
Simgeler	Açıklamalar

$\exists$	Öyle ki
$\exists$	En az bir
$\forall$	Her (Herhangi)
P	Konik
E	Reel Banach Uzayı
$\text{int}P$	P nin içi
$x \sim y$	$(y - x) \in P$
$x < y$	$x \leq y$ fakat $x \neq y$
$x \ll y$	$y - x \in \text{int } P$
$T : X \rightarrow X$	T , X ten X e bir dönüşüm
$\ \cdot\ $	Norm
$(X, \ \cdot\)$	Normlu Uzay
θ	Sıfır vektörü
$C_{\mathbb{R}}^m([a, b])$	$[a, b]$ aralığında m . dereceden türevi sürekli, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar
$ \cdot $	Mutlak değer

1. GİRİŞ

Matematiğin evrensel gelişimi analizin çalışma yöntemlerinden etkilenmiştir. Diğer taraftan kümelerin cebirsel özellikleri analizin gelişimi için yetersiz kaldığından metrik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur.

Metrik uzay kavramını ilk olarak 1906 yılında Maurice Fréchet vermiştir [15]. Böylece klasik analizden modern analize geçiş sağlanmıştır. Nitekim metrik ve metrik uzay kavramı reel ve kompleks teorilerde bilinen bir çok önemli özelliklerin herhangi bir uzaya nasıl aktarılacağını bize gösterir. Ayrıca topoloji teorisinde soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzay teorisinde daha somut kavramlarla açıklanma imkanı bulur. Maurice Fréchet 1926 yılındaki bir çalışmasında da lineer metrik uzayları tanımlamıştır [16]. Bunun ardından metrik uzaylarla ilgili detaylı çalışmalar yapılmış ve uygulama alanları incelenmiştir [12,17,27,29,30].

Daha sonra 1910 yılında Brouwer normlu lineer uzaylarda sabit nokta çalışmalarını başlatmıştır. Öyle ki Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır [11]. Ardından 1930 da Schauder, Brouwer'in teoremini $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay olarak şu şekilde genişletmiştir [28]:

“ X bir normlu lineer uzay, $C \subseteq X$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $f : C \rightarrow C$ olsun. O zaman f, C de bir sabit noktaya sahiptir. ”

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ise 1922 de Banach'ın büzülme dönüşümü prensibi ile başlamıştır [8].

Sonrasında sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmiştir. Bunlardan birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta

teorisi, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Sabit nokta teorisinin matematiğın, genel topoloji, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, diferensiyel denklemler, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, kontrol sistemleri ve oyun teorisi gibi bir çok alanında çalışma ve uygulamaları vardır. Bunun dışında istatistik, mühendislik, matematiksel ekonomi, esneklik teorisi gibi alanlarda da çalışma ve uygulamalarını görebiliriz.

Yukarıda bahsedilen sabit nokta ile ilgili çalışma ve uygulamaları şu kaynaklarda bulabiliriz: [3,4,5,9,10,14,18,19,23,24,31,,35,36].

Tüm bu çalışmaların ardından son zamanlarda sabit nokta teorisinin uygulanabileceğı daha kapsamlı bir uzayın olup olmadığı sorusu soruldu.

Ardından 2007 de Huang ve Zhang sabit noktayı incelemek için metrik uzayların tamamen yeterli olmadığını ve metrik uzaylardan daha kapsamlı bir uzayın olabileceğini gördüler ve bu sorunun üstesinden gelmek için de konik metrik uzay kavramını verdiler [20]. Ayrıca çalışmalarında konik metrik uzaylarda yakınsaklık, tamlık tanımını verip büzülebilir dönüşümlerle ilgili bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

$$E = \mathbb{R}^2 \text{ ve } P = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\} \text{ ve } X = \mathbb{R}$$

olarak $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm tanımlamışlardır. Bu dönüşüm konik metrik uzayda büzülebilir olduğı halde öklid metrik uzayında büzülebilir değildir.

Ayrıca $K < 1$ olacak şekilde K normal sabitine sahip hiç bir P normal koniğinin

olmadığını ve her bir $k > 1$ reel sayısı için $K > k$ olacak şekilde K normal sabitine sahip normal koniklerin olduğunu göstermişlerdir [26].

Ayrıca verilen bazı sonuçları P koniğinin normallik şartını kaldırarak, normal olmayan konikler için genelleştirmişlerdir [26]. Ardından konik metrik uzaylarda bazı ortak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır [1,7,13,21,32,34,37]. Abbas ve Rhoades, Huang ve Zhang'ın çalışmalarında verilen bazı sabit nokta teoremlerini kendi çalışmalarındaki konik metrik uzaylarda ispatlamışlardır [2,20]. Türkoğlu ve Abuloha konik metrik uzay topolojisiyle ilgili bazı topolojik özellikleri ve sabit nokta teoremlerini vermişlerdir [33]. Altun ve arkadaşları da sıralı konik metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini vermişlerdir [6]. Ilić ve Rakoćević konik metrik uzaylarda zayıf büzülme tanımını vererek bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır [22]. Konik metrik uzaylarda küme değerli büzülme dönüşümü tanımı ilk kez Wardowski tarafından verilmiştir [38]. Rezapour da konik metrik uzaylardaki en iyi yaklaşımların ayırıcı niteliği hakkında bazı sonuçlar vermiştir [25].

Bu Yüksek Lisans tez çalışmasında yukarıda adı geçen yazarlar tarafından verilen tanım, lemma, teorem ve sonuçlar ilişkilendirilerek aktarılmıştır. Ayrıca okuyucuya konu hakkında daha somut bilgi verebilmek için bu yazarların vermiş olduğu örnekler ayrıntılı incelenmiştir. Böylece konu hakkında yapılacak yeni çalışmalarda bu çalışmamızın destekleyici olmasını amaçlamaktayız.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T x_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, x_0 noktasına T dönüşümünün X de bir sabit noktası denir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T : X \rightarrow X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün bir tek veya birden fazla sabit noktası olabileceği gibi hiç bir sabit noktası olmayabilir.

2.1. Örnek

(1) $X = [0, \infty)$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = \frac{x}{3}$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ bu dönüşümün bir tek sabit noktasıdır.

(2) $X = [0, \infty)$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = x^2$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0, x_1 = 1$ bu dönüşümün iki sabit noktasıdır.

(3) $X = (-\infty, +\infty)$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = x^3$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0, x_1 = 1$ ve $x_2 = -1$ bu dönüşümün üç sabit noktasıdır.

(4) $X = [0, \infty)$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = x^2 + b$, $b > 0$ olsun. Bu durumda T nin hiç bir sabit noktası yoktur.

1, X üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası aslında

$$(T-I)(x)=0$$

denkleminin çözümleridir. O halde bu denklemin çözümünü bulmak için standart bir teknik, buna karşılık gelen dönüşümün sabit noktalarını bulmaktır.

2.2. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$(M3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

koşullarını sağlıyorsa ρ ya X üzerinde bir metrik ve (X, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir. Buradaki $(M1)-(M3)$ koşulları metrik aksiyomları olarak adlandırılır.

2.3. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$(Y1) \quad \forall x \in X \text{ için } \rho(x, x) = 0$$

$$(Y2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$(Y3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

koşullarını sağlıyorsa ρ ya X üzerinde bir pseudo (yarı) metrik ve (X, ρ) ikilisine de bir pseudo (yarı) metrik uzay denir.

2.4. Tanım

(X, ρ) herhangi bir metrik uzay olmak üzere bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$$

kümesine küre (yuvar yüzeyi) denir.

2.5. Tanım

(X, ρ) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subset U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine ρ - a ç ı k t ı r denir.

2.6. Tanım

Bir (X, ρ) metrik uzayında bir A alt kümesi için $A^c = X - A$ kümesi ρ - a ç ı k t ı r ise, A ya ρ - k a p a l ı küme denir.

2.1. Önerme

(X, ρ) bir metrik uzay olsun.

(a) (X, ρ) içindeki her açık yuvar ρ - a ç i k t i r .

(b) (X, ρ) içindeki her kapalı yuvar ρ - k a p a l ı d ı r .

2.7. Tanım

(X, ρ) bir metrik uzay ve A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi ve $x \in X$ olmak üzere

$$\rho(A, B) = \inf \{ \rho(a, b) : a \in A, b \in B \}$$

sayısına A ve B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$\rho(x, A) = \inf \{ \rho(x, a) : a \in A \}$$

sayısına x noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$\rho(A) = \sup \{ \rho(a, b) : a, b \in A \}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer $\rho(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, eğer $\rho(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

2.8. Tanım

Bir (X, ρ) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n(\varepsilon)$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

2.2. Önerme

(X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın ρ - $k a p a l ı$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $\{x_n\} \subset A$ için $x_n \rightarrow x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

2.9. Tanım

Bir (X, ρ) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n(\varepsilon)$ için $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Eğer (X, ρ) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, ρ) ikilisine *tam metrik uzay* denir.

2.3. Önerme

(X, ρ) bir tam metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul A nın ρ - $k a p a l ı$ olmasıdır.

2.10. Tanım

(X, ρ) bir metrik uzay $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $\rho(fx, fy) \leq k\rho(x, y)$

koşulunu sağlayan bir $k > 0$ reel sayısı varsa f dönüşümüne *Lipschitz koşulunu sağlıyor* denir.

Burada $k < 1$ ise f dönüşümüne *büzülme dönüşümü*, $k = 1$ ise *genişlemeyen dönüşüm* denir. Ayrıca $x \neq y$ olan her $x, y \in X$ için

$$\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$$

ise bu durumda f dönüşümüne *büzülebilir dönüşüm* (*zayıf büzülme dönüşümü*) denir.

2.11. Tanım

(X, ρ) ve (Y, ρ') metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\rho(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir δ sayısı varsa, f dönüşümüne x_0 noktasında *sürekli* denir. Yani,

$f, x_0 \in X$ da sürekli

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Eğer $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x \in X$ noktasında sürekli ise, f dönüşümüne *X uzayında sürekli* denir.

2.4. Önerme (Sabit Nokta Teoremi)

f dönüşümü $[a, b]$ den $[a, b]$ ye tanımlı sürekli bir dönüşüm ise, $f(x) = x$ denkleminin $[a, b]$ aralığı içinde en az bir kökü vardır.

2.12. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir.

Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$(V1) \quad x + y \in X \quad (\text{Kapalılık özelliği})$$

$$(V2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{Birleşme özelliği})$$

$$(V3) \quad x + \theta = \theta + x = x \quad \text{olacak şekilde } \theta \in X \text{ vardır. (Birim eleman özelliği)}$$

$$(V4) \quad x + (-x) = (-x) + x = \theta \quad \text{olacak şekilde } -x \in X \text{ vardır. (Ters eleman özelliği)}$$

$$(V5) \quad x + y = y + x \quad (\text{Değişme özelliği})$$

$$(V6) \quad \alpha x \in X$$

$$(V7) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V8) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(V9) \quad (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta x)$$

$$(V10) \quad 1 \cdot x = x \quad (\text{Burada } 1, \mathbb{K} \text{ nın birim elemanıdır})$$

2.13. Tanım

X bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümünün x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim.

Bu dönüşüm aşağıdaki şartlarını sağlarsa $\| \cdot \|$ a X üzerinde bir norm denir. $(X, \| \cdot \|)$

ikilisine de *normlu uzay* adı verilir.

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \quad \alpha \in K \text{ olmak üzere } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan ρ bir metriktir. Bu metriğe *norm metriği* denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

2.14. Tanım

X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına *Banach uzayı* denir.

2.2. Örnek

$$l_1 = \left\{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} \text{ lineer uzayı } \|\cdot\|_1 : l_1 \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ her } x \in l_1 \text{ için } \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

şeklinde tanımlı normuyla bir reel Banach uzayıdır.

2.3. Örnek

$$l_{\infty} = \left\{ \{x_n\} : \{x_n\} \text{ sınırlı} \right\} \text{ lineer uzayı } \|\cdot\|_{\infty} : l_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ her } x \in l_{\infty}$$

için $\|x\|_{\infty} = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}^+\}$ şeklinde tanımlı normuyla bir reel Banach uzayıdır.

2.4. Örnek

$$C_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{f : f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\} \text{ lineer uzay } \|\cdot\|_{\infty} : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ her } f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$$

için $\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ şeklinde tanımlı normuyla bir reel Banach uzayıdır.

2.15. Tanım

(a_n) dizisi verilsin. $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ olmak üzere $((a_n), (s_n))$ ikilisine bir *seri* denir. Burada (a_n) dizisinin ilk n teriminin toplamından oluşan (s_n) dizisi *serinin kısmi toplamlar dizisi*, a_n ifadesi de *serinin genel terimi* adını alır. Bundan böyle $((a_n), (s_n))$ serisini $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ile göstereceğiz.

2.5. Örnek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$$

ifadesi bir seri olup genel terimi $a_n = \frac{1}{5^n}$.

2.16. Tanım

Bir serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise o seriye *yakınsak seri* adı verilir. Kısmi toplamlar dizisinin limitine *serinin toplamı* denir. Yakınsak olmayan serilere de *ıraksak seriler* adı verilir.

Yani $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

2.5. Önerme

Yakınsak serilerin genel terimlerinin limiti 0 dir. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2.17. Tanım

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ biçimindeki serilere *p-serisi* denir.

2.6. Önerme

P-serileri $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.

3. KONİK METRİK UZAYLAR

3.1. Konikler ve Özellikleri

Bu bölümde konik tanımına, çeşitlerine ve bazı özelliklerine yer vereceğiz [20,26].

3.1. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve E nin bir P alt kümesi

$$(P1) \quad P \text{ kapalı, } P \neq \emptyset \text{ ve } P \neq \{\theta\},$$

$$(P2) \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in P \text{ ise } ax + by \in P,$$

$$(P3) \quad x \in P \text{ ve } -x \in P \text{ ise } x = \theta$$

koşullarını sağlıyorsa P kümesine bir *konik* (cone) denir [20].

3.2. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Bu durumda her $x, y \in E$ için $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ olarak tanımlı bağıntıya E üzerinde *kısmi sıralama* denir.

$x \leq y$ fakat $x \neq y$ olduğunu göstermek için ise $x < y$ yazılır.

Ayrıca $y - x \in \text{int } P$ iken de $x \ll y$ yazılır. Burada $\text{int } P$, P nin içini belirtmektedir[20].

Şimdi $\text{int } P$ ile ilgili olarak sık kullanacağımız bir lemmayı verelim [26]:

3.1. Lemma

E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik ve $\lambda > 0$ reel sayı olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır.

$$(i) \text{ int } P + \text{ int } P \subset \text{ int } P$$

$$(ii) \lambda \text{ int } P \subset \text{ int } P .$$

İspat

(i) $x \in \text{ int } P$ ve $y \in \text{ int } P$ olsun. Bu durumda en az $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ vardır öyle ki $B(x, \varepsilon_1) \subset P$ ve $B(y, \varepsilon_2) \subset P$. Şimdi $B = B(x + y, \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) \subset P$ olduğunu gösterelim;

$z \in B$ olsun. $\|z - x - y\| < \varepsilon$ olur.

Bu ise $\|z - x - y\| < \varepsilon_1$ ve $\|z - x - y\| < \varepsilon_2$ olmasını gerektirir. Buradan

$$(z - x) \in B(y, \varepsilon_2) \subset P \text{ ve } (z - y) \in B(x, \varepsilon_1) \subset P .$$

Şimdi $(P2)$ özelliğinden, $(2z - x - y) \in P$. $x \in P$ olduğundan $(2z - x - y + x) \in P$ olur.

Buradan $(2z - y) \in P$. $y \in P$ olduğundan $(2z - y + y) \in P$. Buradan $2z \in P$. $(P2)$ den $\frac{1}{2}2z \in P$ olur ve böylece $z \in P$.

Yani $B(x + y, \varepsilon) \subset P$ olur. O halde $(x + y) \in \text{ int } P$ olur.

(ii) $\lambda > 0$ bir reel sayı ve $x \in \text{int } P$ olsun. Bu durumda $x \in B(x, \varepsilon) \subset P$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\lambda x \in \text{int } P$ olduğunu göstermek için $B(\lambda x, \lambda \varepsilon) \subset P$ olduğunu gösterelim;

$z \in B(\lambda x, \lambda \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\|z - \lambda x\| < \lambda \varepsilon$ olur.

Yani $\lambda \left\| \frac{1}{\lambda} z - x \right\| < \lambda \varepsilon$ ve $\left\| \frac{1}{\lambda} z - x \right\| < \varepsilon$ olur.

Bu ise $\frac{1}{\lambda} z \in P$ demektir. (P2) den $z \in P$ ve böylece $B(\lambda x, \lambda \varepsilon) \subset P$. Yani $\lambda x \in \text{int } P$ olur.

3.3. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Her $x, y \in E$ için en az bir $K > 0$ sayısı var öyle ki $\theta \leq x \leq y$ iken $\|x\| \leq K \|y\|$ oluyorsa P koniğine *normal konik* denir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan en küçük K pozitif sayısına P normal koniğinin *normal sabiti* denir [20].

3.4. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Eğer P kümesinden alınan üstten sınırlı her artan dizi yakınsak ise P koniğine *regüler konik* denir.

Yani $\{x_n\}$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y$, $y \in E$ olacak şekilde bir dizi öyle ki bir $x \in E$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) oluyorsa P koniğine *regüler konik* denir.

Eşdeğer olarak P kümesinden alınan alttan sınırlı her azalan dizi yakınsak ise P koniğine *regüler konik* denir [20].

Şimdi ispat edelim ki normal sabiti $K < 1$ olan hiç bir normal konik yoktur [26].

3.2. Lemma

Normal sabiti $K < 1$ olan hiç bir normal konik yoktur.

İspat

(X, d) bir konik metrik uzay ve P de $K < 1$ normal sabiti ile bir normal konik olsun.

Şimdi $x \neq \theta$ olacak şekilde $x \in P$ seçelim ve $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $K < 1 - \varepsilon$ olsun.

Bu durumda $x \in P$ ve $\varepsilon > 0$ iken $(P2)$ den $x - (1 - \varepsilon)x = \varepsilon x \in P$ olup $(1 - \varepsilon)x \leq x$.

Fakat $(1 - \varepsilon)\|x\| > K\|x\|$. Bu durum P nin $K < 1$ normal sabiti ile bir normal konik olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup normal sabiti $K < 1$ olan hiç bir normal konik yoktur.

Ayrıca örneklerle normal sabiti $K = 1$ olan koniklerin olduğunu gösterelim:

3.1. Örnek

$E = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ supremum normuyla tanımlansın ve $P = \{f \in E : f \geq \theta\}$ olsun. P ,

$K = 1$ normal sabiti ile bir koniktir. Öncelikle P bir koniktir. Çünkü;

(i) P kapalı (P kümesi sınırını kapsadığından), $P \neq \emptyset$ (en azından $f = \theta \in P$),

$P \neq \{\theta\}$ ($f = 1 \in P$ olduğundan).

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ ve $f, g \in P \Rightarrow f \geq \theta$ ve $g \geq \theta$ dir. Her $x \in [0, 1]$ için

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ ve } g(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow af(x) \geq 0 \text{ ve } bg(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow (af)(x) + (bg)(y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (af + bg)(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow af + bg \geq \theta$$

$$\Rightarrow af + bg \in P$$

olduğu görülür.

(iii) f ve $-f \in P \Rightarrow f \geq \theta$ ve $-f \geq \theta$ dır. Her $x \in [0,1]$ için

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ ve } -f(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f = \theta$$

olup konik olma koşulları sağlanır.

Şimdi P nin $K = 1$ normal sabiti ile bir normal konik olduğunu gösterelim;

$\theta \leq f \leq g$ olacak şekilde herhangi $f, g \in E$ elemanlarını alalım.

Bu durumda $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ ve $\|g\| = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|$ dur. $\theta \leq f \leq g$ olduğundan $g - f \in P$,

yani $g - f \geq \theta$ dır.

Her $t \in [0,1]$ için $f(t) \leq g(t) \Rightarrow |f(t)| \leq |g(t)|$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \|g\|.$$

Böylece $K = 1$ olmak üzere $\|f\| \leq K \|g\|$ olduğu görülür. Yani P , $K = 1$ normal sabiti ile bir normal koniktir.

Şimdi bu P normal koniğinin bir regüler konik olmadığını gösterelim;

E nin elemanlarının $x \in [0,1]$ olmak üzere $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlı alttan sınırlı azalan bir $\{f_n(x)\}$ dizisini alalım. $x \geq x^2 \geq x^3 \geq \dots \geq \theta$ olduğundan bu dizi alttan θ ile sınırlıdır. Fakat bu dizi E içinde yakınsak değildir.

Kabul edelim ki bu dizi E içinde θ ya yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $\|f_n(x) - \theta\| = \|x^n - \theta\| < \varepsilon$ olmalıdır.

Fakat $f_n(1) = 1^n = 1 \in E$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa $\|f_n(1) - \theta\| = 1 < \frac{1}{2}$ olur.

Bu durum kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla da bu dizi E de θ ya yakınsak değildir. Burada θ yerine diğer $y \in E$ elemanları alınarak seçilen bu dizinin E deki hiç bir noktaya yakınsamadığı görülebilir. Böylece P koniğinin regüler konik olmadığı yani normal konik olmanın regüler konik olmayı gerektirmediği görülür.

3.2. Örnek

$E = l^1$ ve $P = \left\{ \{x_n\}_{n \geq 1} \in E : x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ olmak üzere P , $K = 1$ normal sabiti ile bir normal koniktir.

Öncelikle P bir koniktir. Çünkü;

(i) P kapalı (P kümesi sınırını kapsadığından), $P \neq \emptyset$ (en azından $\{x_n\}_{n \geq 1} = (0, 0, \dots, 0, \dots) = \theta \in P$ olduğundan), $P \neq \{\theta\}$ ($\{x_n\}_{n \geq 1} = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \in P$ olduğundan).

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ ve $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ ve $y = \{y_n\}_{n \geq 1} \in P$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}^+$, her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $y_n \geq 0 \Rightarrow ax_n \geq 0$ ve $by_n \geq 0$

$$\Rightarrow ax_n + by_n \geq 0$$

$$\Rightarrow a\{x_n\}_{n \geq 1} + b\{y_n\}_{n \geq 1} \in P$$

$$\Rightarrow ax + by \in P.$$

(iii) $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ ve $-x = \{-x_n\}_{n \geq 1} \in P$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $-x_n \geq 0 \Rightarrow x_n = 0$
 $\Rightarrow x = \theta$

olup konik olma koşulları sağlanır.

Şimdi P nin $K = 1$ normal sabiti ile bir normal konik olduğunu gösterelim:

$\theta \leq x \leq y$ olacak şekilde keyfi $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ ve $y = \{y_n\}_{n \geq 1} \in E$ alalım. O zaman

$$y - x \in P.$$

Bu durumda

$$y_n - x_n \geq 0 \Rightarrow x_n \leq y_n \Rightarrow |x_n| \leq |y_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1 \Rightarrow \|x\|_1 \leq K \|y\|_1$$

Yani $K = 1$. O halde P , $K = 1$ normal sabiti ile bir normal koniktir.

3.3. Lemma

Her regüler konik normaldir [26].

İspat

Kabul edelim ki P normal olmayan bir regüler konik olsun. Her bir $n \geq 1$ için $t_n, s_n \in P$ olduğunda $t_n - s_n \in P$ ve $n^2 \|t_n\| < \|s_n\|$ olacak şekilde $t_n, s_n \in P$ elemanlarını seçebiliriz. Çünkü P normal konik olmadığından $s_n \leq t_n$ iken $K \geq 1$ için $K \|t_n\| < \|s_n\|$.

Şimdi her bir $n \geq 1$ için $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ ve $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ olarak seçelim. $t_n, s_n, t_n - s_n \in P$ olduğundan, $x_n, y_n, y_n - x_n \in P$, her $n \geq 1$ için $\|y_n\| = 1$ ve $n^2 < \|x_n\|$.

Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\|$ serisi yakınsaktır. Çünkü $\|y_n\| = 1$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $p = 2 > 1$ olan p -serisi yakınsaktır.

Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ olacak şekilde y elemanı vardır.

$P \subseteq E$ ve E bir reel Banach uzayı iken normlu uzay dolayısıyla metrik uzay olduğundan 2.17. Tanım ve 2.2. Önerme nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ iken bu serinin kısmi toplamlar dizisi de y ye yakınsar ve P konik iken kapalı olduğundan $y \in P$.

Diğer taraftan $y_n - x_n \in P$, yani $x_n \leq y_n$.

Böylece $0 \leq y_1 \leq y_1 + \frac{1}{2^2} y_2 \leq y_1 + \frac{1}{2^2} y_2 + \frac{1}{3^2} y_3 \leq \dots \leq y$ ve $\forall n \geq 1$ için $x_n \leq y_n$ iken

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2} x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2} x_2 + \frac{1}{3^2} x_3 \leq \dots \leq y.$$

Yani $\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} x_n = S_k$ kısmi toplamlar dizisi üstten y ile sınırlı, artan bir dizidir.

P koniği regüler olduğundan bu dizi yakınsaktır dolayısıyla da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$ serisi yakınsaktır.

2.5. Önermeden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|}{n^2} = 0$.

Bu durum her $n \geq 1$ için $n^2 \leq \|x_n\| \Rightarrow 1 < \frac{\|x_n\|}{n^2}$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla da kabulümüz yanlış olup P koniği regüler iken normaldir.

3.4. Lemma

Her bir $k > 1$ sayısı için $K > k$ olacak şekilde bir K normal sabitine sahip bir normal konik vardır [26].

İspat

Keyfi $k > 1$ verilsin.

$E = \left\{ ax + b : a, b \in \mathbb{R}, x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1 \right] \right\}$ reel vektör uzayını supremum normu ile gözönüne alalım ve $P = \{ ax + b \in E : a \leq 0, b \geq 0 \}$ da E içinde bir konik olsun. P koniği regülerdir. Gerçekten;

Şimdi $\{a_n x + b_n\}_{n \geq 1}$ üstten sınırlı, artan bir dizi ve $c x + d \in E$ de üst sınır olsun. Yani her $x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1 \right]$ için $a_1 x + b_1 \leq a_2 x + b_2 \leq \dots \leq a_n x + b_n \leq \dots \leq c x + d$ olsun.

Bu durumda $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ve $\{b_n\}_{n \geq 1}$, $\mathbb{R}$ içinde öyle iki dizidir ki $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq d$ ve $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq c$. Böylece $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ve $\{b_n\}_{n \geq 1}$ dizileri yakınsaktır. Çünkü $\mathbb{R}$ de üstten

sınırlı her artan dizi üst sınırına ve alttan sınırlı her azalan dizi de alt sınırına yakınsar.

Öyleyse $a_n \rightarrow c$ ve $b_n \rightarrow d$.

Bu durumda $cx + d \in P$ ve $a_n x + b_n \rightarrow cx + d$. Çünkü E reel vektör uzayı, $a_n \rightarrow c$ ve $b_n \rightarrow d$ iken $a_n x + b_n \rightarrow cx + d$.

Gösterelim:

$$\begin{aligned} \|(a_n x + b_n) - (cx + d)\|_E &= \|(a_n - c)x + (b_n - d)\|_E \\ &= \sup \{ |(a_n - c)x + (b_n - d)| : n \in \mathbb{N}^+ \} \\ &\leq \sup \{ |a_n - c||x| + |b_n - d| : n \in \mathbb{N}^+ \} \\ &\leq |x| \sup \{ |a_n - c| : n \in \mathbb{N}^+ \} + \sup \{ |b_n - d| : n \in \mathbb{N}^+ \} \\ &< |x| \frac{\varepsilon}{2|x|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{dur. } (\mathbb{R} \text{ sonlu boyutlu iken bütün normlar} \end{aligned}$$

denk olduğundan)

Böylece P regülerdir. Dolayısıyla 3.2. Lemmasından P normaldir. O halde 3.1. Lemmasından $\theta \leq g \leq f$ olacak şekilde her $f, g \in E$ için en az bir $K \geq 1$ normal sabiti var öyle ki $\|g\| \leq K\|f\|$.

Şimdi $K \geq k$ olduğunu göstermeliyiz:

Öncelikle $f(x) = -kx + k \in P$, $g(x) = k \in P$ alalım. O halde $f - g \in P$ yani $\theta \leq g \leq f$.

Bu nedenle de

$$\begin{aligned}
\|g\| &= \sup \left\{ |g(x)| : x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right] \right\} \\
&= \sup \left\{ |k| : x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right] \right\} \\
&= k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup \left\{ |f(x)| : x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right] \right\} \\
&= \sup \left\{ |-kx + k| : x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right] \right\} \\
&= -k \left(1 - \frac{1}{k}\right) + k \quad (\text{x küçüldükçe ifade büyüdüğünden}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

İken $k = \|g\| \leq K \|f\| = K$.

Diğer taraftan eğer $f(x) = -\left(k + \frac{1}{k}\right)x + k$ ve $g(x) = k$ olarak alırsak $f, g, f - g \in P$

Ayrıca $\|g\| = k$ ve $\|f\| = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$.

Böylece

$$k = \|g\| \leq K \|f\| = K \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) \text{ ise } \frac{k}{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} \leq K.$$

$$0 < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} < 1 \text{ olduğundan } \frac{k}{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} < \frac{k}{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} \leq K \text{ yani } k < K.$$

Şimdi normal olmayan koniklerin de bulunduğuna dair bir örnek verelim [26].

3.3. Örnek

$E = C_{\mathbb{R}}^2([0,1])$ reel Banach uzayı, $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ normuyla tanımlı ve $P = \{f \in E : f \geq \theta\}$ da E içinde bir konik olsun.

Şimdi her bir $k \geq 1$ için $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{2k}$ dönüşümlerini alalım. Bu durumda

$$\theta \leq g \leq f.$$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} \\ &= \sup\{|x| : x \in [0,1]\} + \sup\{|1| : x \in [0,1]\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|g\| &= \|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} \\ &= \sup\{|x^{2k}| : x \in [0,1], k \geq 1\} + \sup\{|2kx^{2k-1}| : x \in [0,1], k \geq 1\} \\ &= 1 + 2k \end{aligned}$$

olduğundan ,

$$2k = k\|f\| < \|g\| = 1 + 2k.$$

Yani $\|g\| \leq K\|f\|$ olacak şekilde hiç bir $K \geq 1$ yoktur. Dolayısıyla da P normal olmayan bir koniktir.

3. bölümün devamı, 4. ve 5. bölümlerde E bir reel Banach uzayı ; P , $\text{int } P \neq \emptyset$ olacak şekilde E içinde bir konik ve $\leq$ bağıntısı da P üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olarak kabul edilecektir [20].

3.2. Konik Metrik Uzaylarda Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde konik metrik uzayı tanımlayacak ve bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz.

3.5. Tanım

$X \neq \emptyset$, E bir reel Banach uzayı olmak üzere $d : X \times X \rightarrow E$ dönüşümü

(d_1) Her $x, y \in X$ için $\theta < d(x, y)$ ve $d(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$

(d_2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

(d_3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$,

koşullarını sağlıyorsa, d dönüşümüne X üzerinde bir *konik metrik* ve (X, d) ye de *konik metrik uzay* denir [20].

Konik metrik uzaylar metrik uzayların bir genellemesidir.

3.4. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$ ve $d : X \times X \rightarrow E$ fonksiyonu $\alpha \geq 0$ olmak üzere $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ olsun. Bu durumda (X, d) bir konik metrik uzaydır.

Gerçekten;

Öncelikle P nin konik olduğunu gösterelim:

(i) P kapalı (P kümesi sınırını kapsadığından), $P \neq \emptyset$ ($\theta \in P$ olduğundan), $P \neq \{\theta\}$ ($(x, y) = (1, 0) \in P$ olduğundan).

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ ve $z = (x_1, y_1)$ ve $t = (x_2, y_2) \in P$ olsun.

Bu durumda $x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2, y_2 \geq 0 \Rightarrow ax_1 \geq 0, ay_1 \geq 0, bx_2 \geq 0, by_2 \geq 0$

$$\Rightarrow ax_1 + bx_2 \geq 0 \text{ ve } ay_1 + by_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow az + bt = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$$

$$= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) \in P.$$

(iii) $z = (x, y), -z = (-x, -y) \in P$ olsun.

Bu durumda $x, y \geq 0$ ve $-x, -y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, -x \geq 0$ ve $y \geq 0, -y \geq 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } y = 0$$

$$\Rightarrow z = (0, 0) = \theta.$$

olup konik olma koşulları sağlanır.

Böylece P, E içinde bir koniktir.

Şimdi (X, d) nin bir konik metrik uzay olduğunu gösterelim;

(d₁) $d(x, y) - \theta = (|x - y|, \alpha|x - y|) - (0, 0) = (|x - y|, \alpha|x - y|) \in P$ (P tanımı gereği)

olduğundan $\theta \leq d(x, y)$ ve

$$d(x, y) = \theta \Leftrightarrow (|x - y|, \alpha|x - y|) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow |x-y|=0 \text{ ve } \alpha|x-y|=0$$

$$\Leftrightarrow x=y \text{ ve } (\alpha=0 \text{ veya } x=y)$$

$$\Leftrightarrow x=y.$$

$$\begin{aligned} (d_2) \text{ Her } x, y \in E \text{ için } d(x, y) &= (|x-y|, \alpha|x-y|) \\ &= (|y-x|, \alpha|y-x|) \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_3) \text{ Her } x, y, z \in E \text{ için } d(x, y) &= (|x-y|, \alpha|x-y|) \\ &= (|x-z+z-y|, \alpha|x-z+z-y|) \\ &\leq (|x-z|+|z-y|, \alpha(|x-z|+|z-y|)) \\ &= (|x-z|, \alpha|x-z|) + (|z-y|, \alpha|z-y|) \\ &= d(x, z) + d(z, y) \\ &= d(x, z) + d(y, z). \end{aligned}$$

koşulları sağlandığından d , X üzerinde bir konik metrik ve (X, d) bir konik metrik uzaydır.

3.6. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x ' e yakınsar veya $\{x_n\}$ dizisinin limiti x dir denir ve bu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ya da $x_n \rightarrow x \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$ ile gösterilir [20].

3.5. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve her bir $c \in E$ de $\theta \ll c$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in \text{int } P$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

İspat

$\theta \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ verildiğinde $c \in \text{int } P$.

$N_\delta(c) = \{x \in E : \|x - c\| < \delta\} \subset \text{int } P$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır. (En az bir $c \in E$ için $c \in N_\delta(c)$ olduğundan $N_\delta(c) \neq \emptyset$.)

Şimdi hipotezden $\|x\| < \delta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x - c + c\| < \delta &\Rightarrow |-1|\|x - c + c\| < \delta \Rightarrow \|-x + c - c\| < \delta \Rightarrow \|(c - x) - c\| < \delta \\ \Rightarrow c - x &\in N_\delta(c) \subset \text{int } P \Rightarrow c - x \in \text{int } P. \end{aligned}$$

3.6. Lemma

(X, d) konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun. $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin x ' e yakınsak olması için gerek ve yeter şart $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow \infty$) olmasıdır.

Yani

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow \theta \quad (n \rightarrow \infty) \quad [20].$$

İspat

$(\Rightarrow)$ $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ olduğunu gösterelim;

Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekildeki $c \in E$ yi seçelim. $x_n \rightarrow x$

olduğundan en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ dolayısıyla da

$$c - d(x_n, x) \in \text{int } P \subset P \text{ olup } \theta < d(x_n, x) \leq c.$$

Böylece $d(x_n, x), c \in E$ ve P de K normal sabiti ile bir normal konik iken $\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\|$. Yani en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$.

Öyleyse $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow \infty$).

($\Leftarrow$): Tersine $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu kabul edelim. 3.5. Lemmasından $\theta \ll c$ olacak şekilde herhangi $c \in E$ için $\|x\| < \delta$ iken $c - x \in \text{int } P$ olan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan $\delta > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n > N$ için $\|d(x_n, x)\| < \delta$. $\delta > 0$ sayısının seçilişinden $c - d(x_n, x) \in \text{int } P$. Yani $d(x_n, x) \ll c$.

Dolayısıyla $\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$. Dolayısıyla da $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).

3.7. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun. $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) ve $x_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) ise $x = y$. Yani $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir [20].

İspat

$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ ve $x_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu durumda $\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(x_n, y) \ll c$.

Böylece p, K normal sabiti ile bir normal konik olup $\theta < d(x, y) \leq 2c$ ve $d(x, y), 2c \in E$ olduğundan $\|d(x, y)\| \leq 2K\|c\|$ dur. c keyfi olduğu için $d(x, y) = \theta$ dolayısıyla da $x = y$.

3.7. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $d(x_n, x_m) \ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir *Cauchy dizisi* denir [20].

3.8. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay olsun. Eğer X içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda (X, d) konik metrik uzayına *tam konik metrik uzay* denir [20].

3.8. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve $\{x_n\}$ X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi x elemanına yakınsıyorsa, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Yani konik metrik uzaylarda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir [20].

İspat

$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu durumda $\theta \ll c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}$ ve $d(x_m, x) \ll \frac{c}{2}$.

Böylece

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Yani $\{x_n\}_X$ de bir Cauchy dizisidir.

3.9. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun. $\{x_n\}_X$ de bir dizi olsun.

Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ [20].

İspat

$(\Rightarrow:)$ $\{x_n\}_X$ de bir Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. $\{x_n\}_X$ de bir Cauchy dizisi olduğundan en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $d(x_n, x_m) \ll c$. P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $\theta < d(x_n, x_m) \leq c$ ve $d(x_n, x_m), c \in E$ iken $\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$.

Yani $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$.

$(\Leftarrow:)$ Tersine $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ olsun. 3.5. Lemmasından $\theta \ll c$ olacak şekilde herhangi $c \in E$ için $\|x\| < \delta$ iken $c - x \in \text{int } P$ olan bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ olduğundan $\delta > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$. δ nın seçilişinden dolayı $c - d(x_n, x_m) \in \text{int } P$.

Böylece $\theta \ll c$ olacak şekildeki Her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ için $d(x_n, x_m) \ll c$. Yani $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir.

3.10. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X içinde iki dizi ve $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu durumda $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y) (n \rightarrow \infty)$ [20].

İspat

Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ olduğundan en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(y_n, y) \ll c$. Bu durumda

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + 2c \quad (3.1)$$

ve

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c \quad (3.2)$$

Eş. 3.1 den $\theta \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)$ ve Eş. 3.2 den de

$$d(x, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c.$$

$$\begin{aligned}
\text{O halde } \theta &\leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \\
&\leq d(x_n, y_n) + 2c + 2c - d(x_n, y_n) \\
&= 4c .
\end{aligned}$$

$$\text{Yani } \theta \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c .$$

P, K normal sabiti ile bir normal konik ve en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > N$ için $\theta < d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$ olduğundan $d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n), 4c \in E$ iken

$$\|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| \leq K \|4c\| = 4K \|c\| .$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| &\leq \|d(x_n, y_n) - d(x, y) - 2c\| + \|2c\| \\
&= |-1| \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \\
&= \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \\
&\leq 4K \|c\| + 2\|c\| \\
&= (4K + 2)\|c\| \\
&< \varepsilon .
\end{aligned}$$

Bu nedenle de $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y) (n \rightarrow \infty)$ dur.

3.9. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay olsun. X içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin, X içinde yakınsak bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi varsa bu durumda (X, d) konik metrik uzayına, *dizisel kompakt konik metrik uzay* denir [20].

4. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde büzülme şartını sağlayan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini önce P nin K normal sabiti ile bir normal konik olması varsayımı altında ve sonra da mümkünse normallik varsayımını ihmal ederek genelleştirilmiş halini inceleyeceğiz [20, 26].

4.1. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme şartını sağlasın. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti olsun. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}$ bu sabit noktaya yakınsar [20].

İspat

$x_0 \in X$ seçelim. Ve $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Bundan dolayı $n > m$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

(Burada $k < 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1-m} = \frac{1 - k^{n-1-m}}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$ olmasını kullandık.)

P, K normal sabiti ile bir konik, $n > m$ için $\theta < d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0)$ ve $d(x_n, x_m), \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in E$ olduğundan $\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$. $k \in [0, 1)$ olduğundan $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$. Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından bir $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \text{ (Büzülme şartı ve } \{T^n x\} \text{ tanımı) olup;} \end{aligned}$$

P, K normal sabiti ile bir normal konik,

$$\theta < d(Tx^*, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \text{ ve } d(Tx^*, x^*), kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \in E$$

olduğundan,

$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. ($x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$ iken $d(x_n, x^*) \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$ ve $d(x_{n+1}, x^*) \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$ olduğundan)

Böylece $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ dolayısıyla da $Tx^* = x^*$ olur. Yani x^* , T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki y^* da T nin bir diğer sabit noktası olsun. Yani $x^* \neq y^*$ dolayısıyla da $\theta < d(x^*, y^*)$. Bu durumda

$\theta < d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$ olup bu durum çelişkilidir. O halde kabulümüz yanlış olup $d(x^*, y^*) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Böylece T nin sabit noktası tektir. Keyfi $x_0 \in X$ için $T^n x_0 = x_n \rightarrow x^*$ olduğundan $\{T^n x\}$ iterasyon dizisinin x^* a yakınsadığı açıktır.

Şimdi 4.1. Teoremini normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.2. Teorem

(X, d) tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme şartını sağlasın.

Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti olsun. Bu durumda T , X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi bir $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}$ bu sabit noktaya yakınsar [26].

İspat

$x_0 \in X$ seçelim ve $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda

$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^nd(x_1, x_0)$ olur ve böylece $n > m$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

(Burada $k < 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1-m} = \frac{1 - k^{n-1-m}}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$ olmasını kullandık.)

$\theta \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ verilsin. Bu durumda $c \in \text{int } P$.

Diğer taraftan $N_\delta(\theta) = \{y \in E : \|y\| < \delta\}$ olduğunda $c + N_\delta(\theta) \subset P$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim.

$$\left\| \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \right\| = \frac{k^m}{1-k} \|d(x_1, x_0)\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Dolayısıyla da $\delta > 0$ iken $\left\| \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \right\| < \delta$. Diğer taraftan δ nin seçilişinden

dolayı $c - \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in \text{int } P$ yani $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c \quad (m \rightarrow \infty)$.

O halde en az bir $N_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $m \geq N_1$ için $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$. Böylece her $n \geq m$ için $d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$. Bu nedenle de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dizisi (X, d) içinde bir Cauchy dizisidir.

(X, d) tam konik metrik uzay olduğundan en az bir $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^*$.

O halde en az bir $N_2 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N_2$ için $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{2}$. Böylece her $n \geq N_2$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c. \end{aligned}$$

$m \geq 1$ iken $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olup $\lambda \text{int } P \subset \text{int } P (0 < \lambda \leq 1)$ olduğundan $\frac{c}{m} \in \text{int } P$ iken

$\frac{c}{m} \in \text{int } P$ bulunur. Dolayısıyla da her $n \geq N_2$ ve $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$.

$\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$ ve $\frac{c}{m} \rightarrow \theta (m \rightarrow \infty)$ olup P kapalı iken 2. 2. Önermesinden

$$\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P \text{ iken } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \right) \in P.$$

Bu durumda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c}{m} - \lim_{m \rightarrow \infty} d(Tx^*, x^*) \in P \Rightarrow \theta - d(Tx^*, x^*) \in P \Rightarrow -d(Tx^*, x^*) \in P \text{ bulunur.}$$

Fakat $\theta \leq d(Tx^*, x^*)$ olduğundan $d(Tx^*, x^*) \in P$. Öyleyse (P3)

den $d(Tx^*, x^*) = \theta \Rightarrow Tx^* = x^*$. Ayrıca bu x^* noktası tektir.

Gerçekten;

Kabul edelim ki y^* da T nin bir diğer sabit noktası olsun. Yani $x^* \neq y^*$ dolayısıyla da $\theta < d(x^*, y^*)$.

Bu durumda $\theta < d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$ olup bu durum çelişkilidir. O halde kabulümüz yanlış olup $d(x^*, y^*) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Böylece T nin sabit noktası tektir.

4.1. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ ve $x_0 \in X$ için $B(x_0, c) = \{x \in X : d(x_0, x) \ll c\}$ olsun.

Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme şartını sağlasın. Yani her

$x, y \in B(x_0, c)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0, 1)$ sabiti var ve $d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)c$ olsun. Bu durumda T

dönüşümü $B(x_0, c)$ içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [20].

İspat

$B(x_0, c) \subset X$ in tam ve her $x \in B(x_0, c)$ için $Tx \in B(x_0, c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece 4.1. Teoreminde X yerine $B(x_0, c)$ alınmış olur ve ispat biter.

Kabul edelim ki $\{x_n\}$, $B(x_0, c)$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$, X

içinde de bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından, $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

Böylece $d(x_0, x) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, x) \leq d(x_n, x) + c$ gerçekleşir.

($x_n \in B(x_0, c)$ olduğundan $d(x_n, x_0) \leq c$.)

Ayrıca $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla da

$d(x_0, x) \leq d(x_n, x) + c \leq c$. Yani $x \in B(x_0, c)$. Bu nedenle de $B(x_0, c)$ tamdır. Diğer taraftan her $x \in B(x_0, c)$ için;

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx) &\leq d(Tx_0, x_0) + d(Tx_0, Tx) \\ &\leq (1-k)c + kd(x_0, x) \\ &\leq (1-k)c + kc \\ &= c. \end{aligned}$$

Yani $Tx \in B(x_0, c)$.

Şimdi 4.1. Sonucunu normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.2. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay olsun. $\theta \ll c$ olacak şekilde her $c \in E$ ve $x_0 \in X$ için $B(x_0, c) = \{x \in X : d(x_0, x) \ll c\}$ olsun. Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme şartını sağlasın. Yani her $(x, y) \in B(x_0, c)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ sabiti var ve $d(Tx_0, x_0) \leq (1-k)c$ olsun. Bu durumda T dönüşümü $B(x_0, c)$ içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [26].

İspat

4.1. Sonucunun ispatı yeterlidir. Böylece 4.2. Teoreminde X yerine $B(x_0, c)$ alınmış olur ve ispat biter.

4.3. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü bazı pozitif n tamsayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [20].

İspat

Hipotez gereği 4.1. Teoreminden T^n dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır. Şimdi bundan yararlanarak T nin de X içinde bir tek sabit noktasının olduğunu göstermeliyiz.

Yani x, T nin bir sabit noktasıdır $\Leftrightarrow x, T^n$ nin bir sabit noktasıdır, olduğunu göstermeliyiz.

($\Rightarrow$): x , T nin bir sabit noktası olsun. Bu durumda $Tx = x$. O halde $T^n x = T^{n-1}(Tx) = T^{n-1}x = T^{n-2}(Tx) = T^{n-2}x = \dots = Tx = x$ olup $x \in X$ noktası T^n nin de bir sabit noktasıdır. O halde T nin her x sabit noktası T^n nin de bir sabit noktasıdır.

($\Leftarrow$): x , T^n nin bir sabit noktası olsun. Bu durumda $T^n x = x$. O halde $T^n(Tx) = T(T^n x) = Tx$ olup Tx de T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin X içinde bir tek sabit noktası olduğundan $Tx = x$. Yani x , T nin de bir sabit noktasıdır.

Böylece T ile T^n nin sabit noktaları aynıdır. T^n nin bir tek sabit noktası olduğuna göre T nin de bir tek sabit noktası vardır.

Şimdi 4.3. Sonucunu normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.4. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü bazı pozitif n tamsayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabatine sahip olsun.

Bu durumda T , X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [26].

İspat

Hipotez gereği 4.2. Teoreminden T^n dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır. İspatın devamı 4.3. Sonucunun ispatı ile aynıdır. Böylece ispat biter.

4.3. Teorem

(X, d) bir dizisel kompakt konik metrik uzay ve P de bir regüler konik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

olacak şekilde *zayıf büzülme* şartını sağlasın. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [20].

İspat

Keyfi $x_0 \in X$ seçelim. $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olsun. Eğer bazı n tamsayıları için $x_{n+1} = x_n$ ise $Tx_n = x_n$. Dolayısıyla da T bir sabit noktaya sahiptir.

Kabul edelim ki her n tamsayısı için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun. Eğer $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ dersek, bu durumda zayıf büzülme şartı gereği

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}) = d_n.$$

Yani $\{d_n\}_{n \geq 1}$ alttan θ ile sınırlı bir azalan dizidir.

P bir regüler konik olduğundan $d^* \in E$ var öyle ki $d_n \rightarrow d^* (n \rightarrow \infty)$. X in dizisel kompaktlığından, X içindeki $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi var ve bir $x^* \in X$ için $x_{n_i} \rightarrow x^* (i \rightarrow \infty)$.

Zayıf büzülme şartı gereği, $d(Tx_{n_i}, Tx^*) < d(x_{n_i}, x^*), i = 1, 2, \dots$.

Bu durumda P regüler konik iken normal de olduğundan P nin K normal sabiti için,

$$\|d(Tx_{n_i}, Tx^*)\| \leq K \|d(x_{n_i}, x^*)\| \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty) \text{ dur. Böylece } Tx_{n_i} \rightarrow Tx^* (i \rightarrow \infty).$$

Benzer şekilde $T^2x_{n_i} \rightarrow T^2x^* (i \rightarrow \infty)$. 3.10. Lemmasını kullanırsak,

$$d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) \rightarrow d(Tx^*, x^*) (i \rightarrow \infty)$$

ve

$$d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) \rightarrow d(T^2x^*, Tx^*) (i \rightarrow \infty) \text{ olduğu görülür.}$$

$$\text{Yani } d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \rightarrow d^* = d(Tx^*, x^*) (i \rightarrow \infty).$$

Şimdi $Tx^* = x^*$ olduğunu ispatlamalıyız.

Eğer $Tx^* \neq x^*$ ise $d^* \neq \theta$.

Bu durumda

$$\theta < d^* = d(Tx^*, x^*) > d(T^2x^*, Tx^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_{n_i+1} = d^*.$$

Bu durum çelişkilidir. Çünkü dizi azalandı fakat $d(T^2x^*, Tx^*) > d^*$ yani $d^{**1} > d^*$ bulundu.

Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $Tx^* = x^*$. Yani x^* , T nin bir sabit noktasıdır. x^* sabit noktasının tekliği açıktır. Çünkü $x^* \neq y^*$ iken $Tx^* = x^*$ ve $Ty^* = y^*$ ise

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) < d(x^*, y^*) \text{ bulunur fakat bu durum çelişkilidir.}$$

Öyleyse kabulümüz yanlış olup T nin bir tek sabit noktası x^* .

4.4. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, x) + d(Ty, y))$$

şartını sağlayacak şekilde $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve keyfi $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}$ bu sabit noktaya yakınsar [20].

İspat

$x_0 \in X$ seçelim. $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olsun.

Bu durumda,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})) = k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}))$$

$$\Rightarrow (1-k)d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1})$$

$$\Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \text{ öyle ki } h = \frac{k}{1-k} \text{ dır. } n > m \text{ için;}$$

$$\theta < d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0).$$

P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan $\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|.$

$k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $h \in [0, 1)$ olup $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ olduğu görülür.

Öyleyse $\{x_n\}_{n \geq 1}$ X içinde bir Cauchy dizisidir. X tam konik metrik uzay olduğundan bir $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Bu durumda } d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\Rightarrow (1-k)d(Tx^*, x^*) \leq kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\Rightarrow d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k}(kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)). \end{aligned}$$

P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan,

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k} (k \|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|).$$

Böylece $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. Yani $Tx^* = x^*$.

Dolayısıyla da x^*, T nin X içindeki bir sabit noktasıdır. Bu sabit noktanın tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki y^*, T nin bir diğer sabit noktası olsun.

Bu durumda $\theta \leq d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)) = \theta$. Böylece

$d(x^*, y^*) = \theta$ olmak zorundadır. Yani $x^* = y^*$.

Dolayısıyla da T nin X içinde bir tek x^* sabit noktası vardır.

Şimdi 4.4. Teoremini normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.5. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, x) + d(Ty, y))$$

şartını sağlayacak şekilde $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve her bir $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}$ bu sabit noktaya yakınsar [26].

İspat

Her bir $x_0 \in X$ ve $n \geq 1$ için, $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \text{ öyle ki } h = \frac{k}{1-k}.$$

$n > m$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0).$$

Şimdi $\theta \ll c$ olacak şekilde keyfi $c \in E$ verilsin. Bu durumda her $m \geq N_1$ için

$$\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \ll c \text{ olacak şekilde } N_1 \in \mathbb{N} \text{ yi seçebiliriz.}$$

Böylece her $n > m$ için $d(x_n, x_m) \ll c$. Bu nedenle de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dizisi (X, d) içinde bir Cauchy dizisidir.

(X, d) bir tam konik metrik uzay olduğu için $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^*$. Şimdi bir

$$N_2 \in \mathbb{N} \text{ seçelim öyle ki her } n \geq N_2 \text{ için } d(x_{n+1}, x_n) \ll \frac{c(1-k)}{2k} \text{ ve}$$

$$d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c(1-k)}{2} \text{ olsun.}$$

Böylece her $n \geq N_2$ için;

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*).$$

O halde

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k} (kd(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Yani her $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$. Bu nedenle de her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$.

$$\frac{c}{m} \rightarrow \theta (m \rightarrow \infty) \text{ ve } P \text{ kapalı olduğundan } -d(Tx^*, x^*) \in P.$$

Diğer taraftan $d(Tx^*, x^*) \in P$ olduğunu da biliyoruz. P konik olduğundan, $(P3)$ den $d(Tx^*, x^*) = \theta$ yani $Tx^* = x^*$. Böylece x^*, T nin X içinde bir sabit noktasıdır. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki y^* da T nin bir diğer sabit noktası olsun. O zaman $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Böylece T nin X içinde bir tek sabit noktası vardır.

4.6. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, y) + d(Ty, x))$$

şartını sağlayacak şekilde $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve keyfi $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}_{n \geq 1}$ bu sabit noktaya yakınsar [20].

İspat

$x_0 \in X$ seçelim. $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Yani $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$ öyle ki $h = \frac{k}{1-k}$.

Böylece $n > m$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

P , K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan,

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|.$$

$k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ iken $h \in [0, 1)$ olduğundan $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$.

Böylece $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından bir $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$. Bu nedenle

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq k(d(Tx_n, x^*) + d(Tx^*, x_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x^*) + d(Tx^*, x^*) + d(x^*, x_n)) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

Yani

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k} (k(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*)).$$

P , K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan,

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k} \left(k (\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\| \right).$$

Yani $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0 \Rightarrow Tx^* = x^*$. Dolayısıyla da x^* , T nin X içinde bir sabit noktasıdır.

Bu sabit noktanın tekliğini gösterelim:

y^* , T nin bir diğer sabit noktası olsun. O halde,

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)) \\ &= k(d(x^*, y^*) + d(y^*, x^*)) \\ &= 2kd(x^*, y^*) \\ &< d(x^*, y^*). \end{aligned}$$

Bu durum çelişkilidir. Dolayısıyla da $d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$. Yani T , X içinde bir tek x^* sabit noktasına sahiptir.

Şimdi 4.6. Teoremini normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.7. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, y) + d(x, Ty))$$

olacak şekilde $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T , X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ve her bir $x \in X$ için iterasyon dizisi $\{T^n x\}$ bu sabit noktaya yakınsar [26].

İspat

Her bir $x_0 \in X$ ve $n \geq 1$ için $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0, \dots$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Yani $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$ öyle ki $h = \frac{k}{1-k}$.

Böylece $n > m$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Şimdi $\theta \ll c$ olacak şekilde bir $c \in E$ verilsin. Bir $N_1 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki her $m \geq N_1$ için $\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \ll c$ olsun. Böylece her $n > m$ için $d(x_n, x_m) \ll c$.

Bu nedenle de $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. Ve (X, d) bir tam konik metrik uzay olduğu için $x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^*$. Bir $N_2 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N_2$ için $d(x_n, x^*) \ll \frac{c(1-k)}{3}$.

Böylece her $n \geq N_2$ için,

$$\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\
&\leq k(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&\leq k(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*)
\end{aligned}$$

dolayısıyla da

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k} (kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c.$$

Böylece her $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$. Yani her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$.

Bu durumda $\frac{c}{m} \rightarrow \theta (m \rightarrow \infty)$ ve P kapalı olduğundan $d(Tx^*, x^*) \in P$. Fakat $d(Tx^*, x^*) \in P$ idi. O halde $(P3)$ den $d(Tx^*, x^*) = \theta$ olup $Tx^* = x^*$ elde edilir. Yani x^* , T nin X içinde bir sabit noktasıdır.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim:

y^* , T nin bir diğer sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned}
\text{Bu durumda } d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)) \\
&= 2kd(x^*, y^*) \\
&< d(x^*, y^*) \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Bu durum çelişkilidir. Dolayısıyla da $d(x^*, y^*) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Yani T , X içinde bir tek x^* sabit noktasına sahiptir.

4.8. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + ld(y, Tx)$$

olacak şekilde $k, l \in [0, 1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T dönüşümü X içinde bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $k + l < 1$ olduğunda ise T nin bu sabit noktası tektir [20].

İspat

Her bir $x_0 \in X$ ve $n \geq 1$ için $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olsun.

Bu durumda,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(x_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) = kd(x_n, x_{n-1}) = \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Böylece $n > m$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan,

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{k^m}{1-k} \|d(x_1, x_0)\|.$$

$k \in [0, 1)$ olduğundan $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta (n, m \rightarrow \infty)$ olduğu görülür.

Öyleyse $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X tam konik metrik uzay olduğundan bir $x^* \in X$ var $\ni x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(x_n, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\ &= d(Tx_{n-1}, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x^*) + ld(Tx_{n-1}, x^*) + d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

P , K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan,

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_{n-1}, x^*)\| + l\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_n, x^*)\|).$$

Böylece $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0 \Rightarrow Tx^* = x^*$. Yani x^* , T nin X içinde bir sabit noktasıdır.

Şimdi $k + l < 1$ olduğunda bu sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim: y^* , T nin bir diğer sabit noktası ve $k + l < 1$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{Bu durumda } d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*) + ld(y^*, Tx^*) \\ &= kd(x^*, y^*) + ld(x^*, y^*) \\ &= (k + l)d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*) \end{aligned}$$

olup bu durum çelişkilidir. O halde $d(x^*, y^*) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Böylece $k + l < 1$ olduğunda T nin bir tek x^* sabit noktası vardır.

Şimdi 4.8. Teoremini normallik şartını ihmal ederek genelleştirmesini inceleyelim:

4.9. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + ld(y, Tx)$$

olacak şekilde $k, l \in [0, 1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda T dönüşümü X içinde bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $k + l < 1$ olduğunda T nin bu sabit noktası tektir [26].

İspat

Her bir $x_0 \in X$ ve $n \geq 1$ için $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ olsun.

Bu durumda,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(x_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) = kd(x_n, x_{n-1}) = \dots \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Böylece $n > m$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Şimdi $\theta \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ verilsin. $N_1 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki her $m \geq N_1$ için

$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$ olsun. Bu durumda her $n > m$ için $d(x_n, x_m) \ll c$. Böylece $\{x_n\}$,

(X, d) içinde bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam konik metrik uzay olduğu için

$x^* \in X$ var öyle ki $x_n \rightarrow x^*$. Şimdi $N_2 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki her $n \geq N_2$ için

$$d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{3}.$$

$$\begin{aligned}
\text{O halde her } n \geq N_2 \text{ için } d(Tx^*, x^*) &\leq d(x_n, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\
&= d(Tx_{n-1}, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\
&< d(x_{n-1}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_n, x^*) \\
&\ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c.
\end{aligned}$$

Böylece her $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$. Yani her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$.

Bu durumda $\frac{c}{m} \rightarrow \theta (m \rightarrow \infty)$ ve P kapalı olduğu için $-d(Tx^*, x^*) \in P$. Fakat

$d(Tx^*, x^*) \in P$ idi. O halde $(P3)$ den $d(Tx^*, x^*) = \theta$ yani $Tx^* = x^*$ elde edilir.

Böylece x^* , T nin bir sabit noktasıdır. Şimdi $k + l < 1$ olduğunda bu sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim:

y^* , T nin bir diğer sabit noktası ve $k + l < 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*) + ld(Tx^*, y^*) \\
&= kd(x^*, y^*) + ld(x^*, y^*) \\
&= (k + l)d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)
\end{aligned}$$

olup bu durum çelişkilidir. O halde $d(x^*, y^*) = \theta$ yani $x^* = y^*$. Böylece $k + l < 1$ olduğunda T nin bir tek x^* sabit noktası vardır.

Bu bölümü, daha iyi anlaşılması için, bir örnek ile sonlandıralım:

4.1. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$ yani Öklid düzlemi, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ da E de bir normal konik olsun.

$X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ olsun.

$d : X \times X \rightarrow E$ dönüşümünü;

$$d((x, 0), (y, 0)) = \left(\frac{4}{3}|x - y|, |x - y| \right),$$

$$d((0, x), (0, y)) = \left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right),$$

$$d((x, 0), (0, y)) = d((0, y), (x, 0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right)$$

olarak tanımlayalım.

Bu durumda (X, d) bir tam konik metrik uzaydır.

Ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $T((x, 0)) = (0, x)$ ve $T((0, x)) = \left(\frac{1}{2}x, 0 \right)$ olarak tanımlandığında;

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ için,

$$d(T((x_1, x_2)), T((y_1, y_2))) \leq kd((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

şartını sağlayacak şekilde bir $k = \frac{3}{4} \in [0, 1)$ sabitine sahiptir. Gösterelim:

1) X bir konik metrik uzaydır.

$$(d_1) \quad \forall x^*, y^* \in X \quad \text{için} \quad d(x^*, y^*) \geq \theta \quad \text{ve} \quad d(x^*, y^*) = \theta \Leftrightarrow x^* = y^*.$$

$$(d_2) \quad \forall x^*, y^* \in X \quad \text{için} \quad d(x^*, y^*) = d(y^*, x^*).$$

$(d_3) \quad \forall x^*, y^*, z^* \in X$ için;

$$(1) \quad x^* = (x, 0), y^* = (y, 0) \Rightarrow d(x^*, y^*) = \left(\frac{4}{3} |x - y|, |x - y| \right) \quad (4.1)$$

$$(a) \quad z^* \in X \text{ iken eğer } z^* = (z, 0) \text{ ise } d(x^*, z^*) = \left(\frac{4}{3} |x - z|, |x - z| \right),$$

$$d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3} |z - y|, |z - y| \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3} (|x - z| + |z - y|), |x - z| + |z - y| \right) \quad (4.2)$$

bulunur. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 den $d(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*)$.

$$(b) \quad z^* \in X \text{ iken eğer } z^* = (0, z) \text{ ise } d(x^*, z^*) = \left(\frac{4}{3} x + z, x + \frac{2}{3} z \right),$$

$$d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3} y + z, y + \frac{2}{3} z \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3} x + z + \frac{4}{3} y + z, x + \frac{2}{3} z + y + \frac{2}{3} z \right) \quad (4.3)$$

bulunur. Eş. 4.1 ve Eş. 4.3 den $d(x^*, y^*) \leq \left(\frac{4}{3} (|x| + |y|), |x| + |y| \right)$
 $\leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*)$.

$$(2) \quad x^* = (0, x), y^* = (0, y) \Rightarrow d(x^*, y^*) = \left(|x - y|, \frac{2}{3} |x - y| \right) \quad (4.4)$$

$$(a) \quad z^* \in X \quad \text{iken eğer } z^* = (z, 0) \text{ ise } d(x^*, z^*) = \left(\frac{4}{3}z + x, z + \frac{2}{3}x \right),$$

$$d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}z + y, z + \frac{2}{3}y \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}z + x + \frac{4}{3}z + y, z + \frac{2}{3}x + z + \frac{2}{3}y \right) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{bulunur. Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 den } d(x^*, y^*) &\leq \left(|x| + |y|, \frac{2}{3}(|x| + |y|) \right) \\ &\leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*). \end{aligned}$$

$$(b) \quad z^* \in X \quad \text{iken eğer } z^* = (0, z) \text{ ise } d(x^*, z^*) = \left(|x - z|, \frac{2}{3}|x - z| \right),$$

$$d(z^*, y^*) = \left(|z - y|, \frac{2}{3}|z - y| \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(|x - z| + |z - y|, \frac{2}{3}(|x - z| + |z - y|) \right) \quad (4.6)$$

bulunur. Eş. 4.4 ve 4.6 dan

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &\leq \left(|x - z| + |z - y|, \frac{2}{3}(|x - z| + |z - y|) \right) \\ &= d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*). \end{aligned}$$

$$(3) \quad x^* = (x, 0), y^* = (0, y) \Rightarrow d(x^*, y^*) = d(y^*, x^*) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right) \quad (4.7)$$

(a) $z^* \in X$ iken eğer $z^* = (z, 0)$ ise

$$d(x^*, z^*) = \left(\frac{4}{3}|x-z|, |x-z| \right), d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}z + y, z + \frac{2}{3}y \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}|x-z| + \frac{4}{3}z + y, |x-z| + z + \frac{2}{3}y \right) \quad (4.8)$$

bulunur.

Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 den

$$(i) \quad x \geq z \text{ ise } |x-z| = x-z$$

$$\text{olacağından } d(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right) \text{ ve}$$

$$(ii) \quad x \leq z \text{ ise } |x-z| = z-x \text{ olacağından}$$

$$d(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}z + y, -x + 2z + \frac{2}{3}y \right).$$

$$(b) \quad z^* \in X \text{ iken eğer } z^* = (0, z) \text{ ise } d(x^*, z^*) = \left(\frac{4}{3}x + z, x + \frac{2}{3}z \right),$$

$$d(z^*, y^*) = \left(|z-y|, \frac{2}{3}|z-y| \right) \text{ olup}$$

$$d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}x + z + |z-y|, x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}|z-y| \right) \quad (4.9)$$

bulunur. Eş. 4.7 ve Eş. 4.9 dan

(i) $z \geq y$ ise $|z - y| = z - y$ olacağından

$$d(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}x + 2z - y, x + \frac{4}{3}z - \frac{2}{3}y \right)$$

ve

(ii) $z \leq y$ ise $|z - y| = -z + y$ olacağından

$$d(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right).$$

Öyleyse gerçekten $(d_1), (d_2)$ ve (d_3) şartları sağlanır ve böylece (X, d) bir konik metrik uzaydır.

2) (X, d) konik metrik uzayı tamdır. Çünkü $\mathbb{R}^2$ tam ve $X \subseteq \mathbb{R}^2$ kapalı olduğundan

2.3. Önermesinden (X, d) bir tam konik metrik uzaydır.

3) Verilen şekilde tanımlı $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için her $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ verildiğinde,

$$d(T((x_1, x_2)), T((y_1, y_2))) \leq kd((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

şartını sağlayacak şekilde bir $k = \frac{3}{4} \in [0, 1)$ sabiti vardır. Gerçekten

(a) $(x, 0), (y, 0) \in X$ iken

$$d(T((x, 0)), T((y, 0))) = d((0, x), (0, y)) = \left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right) \quad (4.10)$$

ve

$$d((x, 0), (y, 0)) = \left(\frac{4}{3}|x - y|, |x - y| \right) \quad (4.11)$$

olup Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 den $\left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right) \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}|x - y|, |x - y| \right)$.

Yani gerçekten $k = \frac{3}{4}$ sabiti bu şartı sağlar.

(b) $(0, x), (0, y) \in X$ iken

$$d(T((0, x)), T((0, y))) = d\left(\left(\frac{1}{2}x, 0\right), \left(\frac{1}{2}y, 0\right)\right) = \left(\frac{4}{3}\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right|, \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right|\right) \quad (4.12)$$

ve

$$d((0, x), (0, y)) = \left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right) \quad (4.13)$$

olup Eş. 4.12 ve Eş. 4.13 den $\left(\frac{2}{3}|x - y|, \frac{1}{2}|x - y| \right) \leq \frac{3}{4} \left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right)$.

Yani gerçekten $k = \frac{3}{4}$ sabiti bu şartı sağlar.

(d) $(x, 0), (0, y) \in X$ iken

$$d(T((x, 0)), T((0, y))) = d\left((0, x), \left(\frac{1}{2}y, 0\right)\right) = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{2}y + x, \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}x\right) \quad (4.14)$$

ve

$$d((x, 0), (0, y)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right) \quad (4.15)$$

olup Eş. 4.14 ve Eş. 4.15 den $\left(\frac{2}{3}y + x, \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}x \right) \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right)$.

Yani gerçekten $k = \frac{3}{4}$ sabiti bu şartı sağlar.

T, X üzerinde öklid metriğine göre büzülebilir bir dönüşüm değildir. Çünkü ,

$$\begin{aligned} d^{\mathbb{R}^2}(T((x, 0)), T((y, 0))) &= d^{\mathbb{R}^2}((0, x), (0, y)) = \sqrt{0^2 + (x - y)^2} \\ &\leq k d^{\mathbb{R}^2}((x, 0), (y, 0)) \\ &= k \sqrt{(x - y)^2 + 0^2} \end{aligned}$$

olup bu şartın sağlanması için $k \geq 1$ olmalıdır.

Bu ise T nin öklid metriğine göre büzülebilir dönüşüm olmadığını gösterir.

4.2. Konik Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde konik metrik uzaylarda büzülebilirlik şartlarını sağlayan dönüşümlerin çakışık ve ortak sabit noktalarının varlığını inceleyeceğiz [21].

4.10. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik

olsun. Kabul edelim ki $g, f : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olduğunda

$$d(fx, gy) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, fx) + d(y, gy)] + \gamma [d(x, gy) + d(y, fx)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda f ve g , X içinde bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca f nin herhangi bir sabit noktası g nin de sabit noktası ve g nin herhangi bir sabit noktası f nin de sabit noktasıdır [21].

İspat

Keyfi $x_0 \in X$ seçelim ve $\{x_n\}$ dizisini de $x_{2n+1} = fx_{2n}, x_{2n+2} = gx_{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ &\leq \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta [d(x_{2n}, fx_{2n}) + d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})] \\ &\quad + \gamma [d(x_{2n}, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx_{2n})] \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) d(x_{2n}, x_{2n+1}) + (\beta + \gamma) d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \end{aligned}$$

olup bu durumda

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \delta d(x_{2n}, x_{2n+1}) \quad \ni \delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - (\beta + \gamma)} < 1.$$

Benzer şekilde

$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq \delta d(x_{2n+2}, x_{2n+1})$ olduğu da gösterilebilir. Gerçekten;

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) = d(fx_{2n+2}, gx_{2n+1})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta [d(x_{2n+2}, fx_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})] \\
&\quad + \gamma [d(x_{2n+2}, gx_{2n+1}) + d(gx_{2n+1}, fx_{2n+2})] \\
&= \alpha d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta [d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\
&\quad + \gamma [d(x_{2n+2}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+3})] \\
&= (\alpha + \beta) d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + (\beta + \gamma) d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \\
&\Rightarrow (1 - (\beta + \gamma)) d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq (\alpha + \beta) d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \\
&\Rightarrow d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - (\beta + \gamma)} d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \\
&\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{1 - (\beta + \gamma)} \leq \delta \text{ olduğundan;}
\end{aligned}$$

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq \delta d(x_{2n+2}, x_{2n+1}).$$

Bu nedenle de her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \delta d(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq \dots \leq \delta^{n+1} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Ve her $m > n$ için;

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq [\delta^n + \delta^{n-1} + \dots + \delta^{m-1}] d(x_1, x_0) \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

olup P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan;

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} K \|d(x_1, x_0)\|.$$

Dolayısıyla da $n, m \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x_m) \rightarrow \theta$. Böylece $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. Ve X tam konik metrik uzay olduğundan bir $p \in X$ için $x_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$.

Şimdi hipotezdeki şartı kullanarak;

$$\begin{aligned}
 d(p, gp) &\leq d(p, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, gp) \\
 &= d(p, x_{2n+1}) + d(fx_{2n}, gp) \\
 &\leq d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta [d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(p, gp)] \\
 &\quad + \gamma [d(x_{2n}, gp) + d(p, x_{2n+1})] \\
 &\leq d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta [d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(p, gp)] \\
 &\quad + \gamma [d(x_{2n}, p) + d(p, gp) + d(p, x_{2n+1})] \\
 &\Rightarrow (1 - \beta - \gamma) d(p, gp) \leq d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \gamma (d(x_{2n}, p) + d(p, x_{2n+1})) \\
 &\Rightarrow d(p, gp) \leq \frac{1}{1 - \beta - \gamma} [d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \gamma (d(x_{2n}, p) + d(p, x_{2n+1}))]
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu durumda p , K normal sabiti ile bir normal konik olduğu için;

$$\|d(p, gp)\| \leq K \frac{1}{1 - \beta - \gamma} \{\|d(x_{n+1}, p)\| + \alpha \|d(x_{n+1}, p)\| + \beta \|d(x_{n+1}, x_n)\| + \gamma \|d(x_n, p)\| + \gamma \|d(x_{n+1}, p)\|\}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ yanı $n \rightarrow \infty$ için θ ya yakınsar. Dolayısıyla da $\|d(p, gp)\| = 0$. Yani $p = gp$.

$$\begin{aligned}
 \text{Şimdi } d(fp, p) &= d(fp, gp) \\
 &\leq \alpha d(p, p) + \beta [d(p, fp) + d(p, gp)] + \gamma [d(p, gp) + d(p, fp)] \\
 &= (\beta + \gamma) d(p, fp)
 \end{aligned}$$

$$< d(p, fp).$$

O halde $d(fp, p) = \theta$ olup $fp = p$ elde edilir.

Bu ortak sabit noktanın tekliğini göstermek için kabul edelim ki f ve g nin bir diğer ortak sabit noktası q olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \theta < d(p, q) &= d(fp, gq) \\ &\leq \alpha d(p, q) + \beta [d(p, fp) + d(q, gq)] + \gamma [d(p, gq) + d(q, fp)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(p, q) &\leq (\alpha + 2\gamma) d(p, q) \\ &< d(p, q). \end{aligned}$$

O halde $d(p, q) = \theta$ yani $p = q$ bulunur.

Burada p nin g nin sabit noktası olması halinde f nin de sabit noktası olduğu gösterildi. Benzer şekilde p, f nin sabit noktası iken g nin de sabit noktası olacaktır.

4.5. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olduğunda

$$d(f^p x, f^q y) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, f^p x) + d(y, f^q y)] + \gamma [d(x, f^q y) + d(y, f^p x)]$$

şartını sağlasın. (Burada p ve q sabit pozitif tamsayılardır.) Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

Hipotezde verilen eşitsizlikte $f = f^p$ ve $g = f^q$ yazıldığında f ve g dönüşümleri 4.10. Teoreminin şartlarını sağlayacaktır. Dolayısıyla da f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktaları vardır. Açık ki f dönüşümünün her sabit noktası f^p ve f^q dönüşümlerinin de bir sabit noktasıdır. f^p ve f^q dönüşümlerinin her ortak sabit noktası da f dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Böylece f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

4.6. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

$f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olduğunda

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, fx) + d(y, fy)] + \gamma [d(x, fy) + d(y, fx)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

4.5. Sonucunda $p = q = 1$ alınırsa f dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktaya sahip olduğu görülür.

4.7. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal

konik olsun. $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $a_i \geq 0$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) ve

$$\sum_{i=1}^5 a_i < 1 \text{ olan yerde}$$

$$d(fx, fy) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, fx) + a_3 d(y, fy) + a_4 d(x, fy) + a_5 d(y, fx)$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

Hipotezde verilen eşitsizlikte x ve y nin yerlerini değiştirerek eşitsizliği tekrar yazalım.

$$d(fy, fx) \leq a_1 d(y, x) + a_2 d(y, fy) + a_3 d(x, fx) + a_4 d(y, fx) + a_5 d(x, fy)$$

Şimdi de hipotezdeki eşitsizlik ile son eşitsizliği toplayalım:

$$\begin{aligned} 2d(fx, fy) &\leq 2a_1 d(x, y) + (a_2 + a_3) d(x, fx) + (a_2 + a_3) d(y, fy) \\ &\quad + (a_4 + a_5) d(y, fx) + (a_4 + a_5) d(x, fy) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(fx, fy) \leq \frac{2a_1}{a_2} d(x, y) + \left(\frac{a_2 + a_3}{2} \right) [d(x, fx) + d(y, fy)] + \left(\frac{a_4 + a_5}{2} \right) [d(x, fy) + d(y, fx)]$$

olup $\alpha = a_1$, $\beta = \frac{a_2 + a_3}{2}$ ve $\gamma = \frac{a_4 + a_5}{2}$ alınırsa 4.6. Sonucunun tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla da f nin X içinde bir tek sabit noktası vardır.

4.8. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun. Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $0 \leq \alpha < 1$ olduğunda

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

4.6. Sonucunda $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ alınması durumunda ispat elde edilir.

4.9. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

olduğundan

$$d(fx, fy) \leq \beta [d(x, fx) + d(y, fy)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

4.6. Sonucunda $\alpha = 0$ ve $\gamma = 0$ alınması durumunda ispat elde edilir.

4.10. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğunda

$$d(fx, fy) \leq \gamma [d(x, fy) + d(y, fx)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

4.6. Sonucunda $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ alınması durumunda ispat elde edilir.

4.11. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de K normal sabiti ile bir normal konik olsun.

Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olup her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ olduğunda

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, fx) + d(y, fy)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda f, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [21].

İspat

4.6. Sonucunda $\gamma = 0$ alınması durumunda ispat elde edilir.

4.11. Teorem

(X, ρ) bir tam metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ve $g : X \rightarrow X$ dönüşümü f ile değişmeli olan keyfî bir dönüşüm olsun. Ayrıca f ve g , $g(X) \subset f(X)$ olmasını sağlasın ve bir $\lambda \in (0,1)$ sabiti var öyle ki her $x, y \in X$ için

$$\rho(gx, gy) \leq \lambda \rho(fx, fy)$$

olsun. Bu durumda f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir [21].

4.12. Teorem

(X, ρ) bir tam metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ve $g : X \rightarrow X$ dönüşümü de f ile değişmeli olan keyfî bir dönüşüm olsun. Ayrıca f ve g için $g(X) \subset f(X)$ ve bir $\lambda \in (0,1)$ sabiti var öyle ki her $x, y \in X$ için

$M_\rho(x, y) = \max\{\rho(fx, fy), \rho(fx, gx), \rho(fx, gy), \rho(fy, gy), \rho(fy, gx)\}$ olduğunda

$$\rho(gx, gy) \leq \lambda M_\rho(x, y)$$

olsun. Bu durumda f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir [21].

4.1. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay ve $g, f : X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Bazı $\lambda \in (0,1)$ sabitleri ve her $x, y \in X$ için

$u \in C(f; x; y) \equiv \{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\}$ var ve

$$d(gx, gy) \leq \lambda u$$

oluyorsa bu durumda g dönüşümüne f -büzülebilir dönüşüm denir [21].

4.1. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay ve P de bir normal konik olsun. $g, f : X \rightarrow X$, g ile f değişmeli, $g(X) \subset f(X)$ ve g, f -büzülebilir dönüşüm olsun.

Ayrıca $x_0 \in X$ ve $x_1 \in X$ olmak üzere $g(x_0) = f(x_1)$ olduğunu kabul edelim. Yani

$x_n, x_{n+1} \in X$ için $g(x_n) = f(x_{n+1}) = y_n$ olsun. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için;

$O(x_0; n) = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ve $O(x_0; \infty) = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ kümelerini oluşturalım.

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır:

(i) Eğer $i, j, n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ ve $n_0 < i, j \leq n$ ise bu durumda

$$\|d(y_i, y_j)\| < \delta(O(x_0; n)).$$

(ii) Eğer $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ ise bu durumda

$$\delta(O(x_0, n)) = \max \left\{ \|d(y_0, k)\|, \|d(y_i, y_j)\| : 1 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n_0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

(iii) Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $n > n_0$ ise bu durumda

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \max \left\{ \frac{K}{1 - K^2 \lambda^{n_0}} \|d(y_0, y_{n_0+1})\|, \lambda K \delta(O(x_0; n_0)), \|d(y_0, y_l)\| : 1 \leq l \leq n_0 \right\}.$$

$$(iv) \delta(O(x_0; \infty)) \leq \max \left\{ \frac{K}{1-K^2 \lambda^{n_0}} \|d(y_0, y_{n_0+1})\|, \lambda K \delta(O(x_0; n_0)), \|d(y_0, y_l)\| : 1 \leq l \leq n_0 \right\}.$$

$$(v) \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ve} \quad n \geq n_0 + 1 \quad \text{için} \quad \|d(y_n, y_{n-1})\| \leq K \lambda^{n_0} \delta(O(x_0; \infty)).$$

(vi) $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisi ve $m > n > n_0 + 1$ olmak üzere

$$\|d(y_n, y_m)\| \leq K \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \delta(O(x_0; \infty)) \quad [21].$$

İspat

$n_0 \in \mathbb{N}$ yi $\max \{ \lambda^{n_0} K, \lambda^{n_0} K^2 \} < 1$ olacak şekilde seçelim.

(i) Kabul edelim ki $i, j, n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ ve $n_0 < i, j \leq n$ olsun. O halde hipotezden g dönüşümü f -büzülebilir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} s_1 &\in \{d(fx_i, fx_j), d(fx_i, gx_i), d(fx_i, gx_j), d(fx_j, gx_j), d(fx_j, gx_i)\} \\ &= \{d(gx_{i-1}, gx_{j-1}), d(gx_{i-1}, gx_i), d(gx_{i-1}, gx_j), d(gx_{j-1}, gx_j), d(gx_{j-1}, gx_i)\} \\ &= \{d(y_{i-1}, y_{j-1}), d(y_{i-1}, y_i), d(y_{i-1}, y_j), d(y_{j-1}, y_j), d(y_{j-1}, y_i)\} \end{aligned}$$

var öyle ki bazı $\lambda \in (0, 1)$ için $d(y_i, y_j) = d(gx_i, gx_j) \leq \lambda s_1$.

Şimdi öyle bir $s_2 \in C(f; x_i, x_j)$ vardır ki $s_1 \leq \lambda s_2$ ve $d(y_i, y_j) \leq \lambda^2 s_2$. Böylece

$d(y_i, y_j) \leq \lambda^{n_0} s_{n_0}$ öyle ki $s_{n_0} \in C(f; x_i, x_j)$ olduğu görülür. P normal konik olduğundan;

$$\|d(y_i, y_j)\| \leq K \lambda^{n_0} \|s_{n_0}\| < \delta(O(x_0, n)) \quad (4.16)$$

Yani gerçekten eğer $i, j, n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ ve $n_0 < i, j \leq n$ ise bu durumda

$$\|d(y_i, y_j)\| < \delta(O(x_0; n)).$$

(ii) Biz biliyoruz ki normalde

$\delta(O(x_0; n)) = \sup \{\|d(x, y)\| : x, y \in O(x_0, n)\}$. (i) den açıktır ki $n_0 < i, j \leq n$ olacak şekilde i, j lerin tamamı yerine $n_0 < i, j \leq n$ dışında kalan i, j leri inceleyip supremumunu (küme sonlu eleman sayısına sahip olduğundan maksimumunu) almak yeterli olacaktır. Öyleyse gerçekten;

$$\delta(O(x_0, n)) = \max \{\|d(y_0, y_k)\|, \|d(y_i, y_j)\| : 1 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n_0\}.$$

(iii) (ii) den $\delta(O(x_0; n))$ yi bildiğimizden ilgilenmemiz gereken üç durum olduğu açıktır:

Durum 1 : Eğer $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_0, y_k)\|$, $k \in \mathbb{N} \ni 1 \leq k \leq n_0$ ise bu durumda

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \max \{\|d(y_0, y_l)\| : 1 \leq l \leq n_0\}.$$

Durum 2 : Eğer $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_0, y_k)\|$, $k \in \mathbb{N} \ni n_0 < k \leq n$ ise bu durumda

$d(y_0, y_k) \leq d(y_0, y_{n_0+1}) + d(y_{n_0+1}, y_k)$ olup P normal konik olduğundan;

$$\|d(y_0, y_k)\| \leq K(\|d(y_0, y_{n_0+1})\| + \|d(y_{n_0+1}, y_k)\|).$$

Diğer taraftan $n_0 < n_0 + 1$, $k \leq n$ olduğundan Eş. 4.16 dan

$$\|d(y_{n_0+1}, y_k)\| \leq K\lambda^{n_0}\delta(O(x_0; n)).$$

$$\begin{aligned} \text{O halde } \delta(O(x_0; n)) &\leq K\|d(y_0, y_{n_0+1})\| + K(K\lambda^{n_0}\delta(O(x_0; n))) \\ &= K\|d(y_0, y_{n_0+1})\| + K^2\lambda^{n_0}\delta(O(x_0; n)). \end{aligned}$$

Böylece $(1 - K^2\lambda^{n_0})\delta(O(x_0; n)) \leq K\|d(y_0, y_{n_0+1})\|$ olup $1 - K^2\lambda^{n_0} > 0$ olduğundan

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \frac{K}{1 - K^2\lambda^{n_0}}\|d(y_0, y_{n_0+1})\| \text{ bulunur.}$$

Durum 3 : Eğer $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_i, y_j)\|$ olacak şekilde $i, j \in \mathbb{N}$ $\ni 1 \leq i, j \leq n_0$ ise bu durumda $d(y_i, y_j) \leq \lambda s_1$ olacak şekilde $s_1 \in \{d(a, b) : a, b \in O(x_0; n_0)\}$ vardır. P normal konik olduğundan;

$$\|d(y_i, y_j)\| \leq \lambda K \|s_1\| \text{ olacak şekilde } K > 0 \text{ vardır. Bu durumda}$$

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \lambda K \|s_1\| \leq \lambda K \delta(O(x_0; n_0)). \text{ Böylece (iii) nin ispatı elde edilir.}$$

(iv) (iii) nin ispatında $n \rightarrow \infty$ alınırsa (iv) nin doğruluğu da açıktır.

(v) $n \geq n_0 + 1$ için, $d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda s_{n, n-1}$ öyle ki

$$s_{n, n-1} \in \{d(y_{n+1}, y_n), d(y_{n+1}, y_{n-1}), d(y_n, y_{n-1}), \theta\}.$$

(Çünkü

$$\begin{aligned} d(gx_n, g_{x_{n-1}}) &\leq \lambda \{d(fx_n, fx_{n-1}), d(fx_n, gx_n), d(fx_n, gx_{n-1}), d(fx_{n-1}, gx_{n-1}), d(f(x_{n-1}, gx_n))\} \\ &= \lambda \{d(y_{n-1}, y_{n-2}), d(y_{n-1}, y_n), d(y_{n-1}, y_{n-1}), d(y_{n-2}, y_{n-1}), d(y_{n-2}, y_n)\} \end{aligned}$$

olup $d(y_{n+1}, y_n)$; $d(y_{n-1}, y_{n-2})$ ve $d(y_{n-1}, y_n)$ yerine yazılmış, $d(y_{n+1}, y_{n-1})$; $d(y_{n-2}, y_n)$ yerine yazılmış, $d(y_n, y_{n-1})$ ve θ ise kendi yerlerine yazılmıştır.)

Ayrıca benzer şekilde, $d(y_{n+1}, y_n) \leq \lambda s_{n,n+1}$ öyle ki

$$s_{n,n+1} \in \{d(y_{n+2}, y_{n+1}), d(y_{n+2}, y_n), d(y_{n+1}, y_n), \theta\}.$$

Ve yine benzer şekilde $d(y_{n+1}, y_{n-1}) \leq \lambda s_{n-1,n+1}$ öyle ki

$$s_{n-1,n+1} \in \{d(y_{n+2}, y_n), d(y_{n+2}, y_{n+1}), d(y_{n+2}, y_{n-1}), d(y_n, y_{n+1}), d(y_n, y_{n-1})\} \text{ bulunur.}$$

Böylece $d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda^2 s_{n,n-1}^{(2)}$ öyle ki

$$s_{n,n-1}^{(2)} \in \{d(y_n, y_{n-1}), d(y_{n+1}, y_n), d(y_{n+1}, y_{n-1}), d(y_{n+2}, y_{n+1}), d(y_{n+2}, y_n), d(y_{n+2}, y_{n-1}), \theta\} \quad (4.17)$$

Bu şekilde devam edecek olursak, n_0 adım sonra

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda^{n_0} s_{n,n-1}^{(n_0)} \text{ öyle ki } s_{n,n-1}^{(n_0)} \in \bigcup_{j=0}^{n_0} \bigcup_{i=0}^j \{d(y_{n+j}, y_{n-1+i})\} \text{ olduğu görülür.}$$

Böylece $\|d(y_n, y_{n-1})\| \leq K \lambda^{n_0} \delta(O(x_0; \infty))$ bulunur.

(vi) Eş. 4.17` den dolayı $m > n > n_0 + 1$ için

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + d(y_{m-1}, y_m) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} s_{n+k+1, n+k}^{(n+k)} \text{ bulunur.}$$

Ve p normal konik olduğundan;

$$\|d(y_n, y_m)\| \leq K \lambda^n \left\| \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^k s_{n+k+1, n+k}^{(n+k)} \right\| \leq K \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \delta(O(x_0; \infty)) \text{ olduğu görülür.}$$

Ve $n, m \rightarrow \infty$ için $d(y_n, y_m) \rightarrow \theta$ olduğu için $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Şimdi bu lemma yardımıyla aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

4.13. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de bir normal konik olsun. $g, f : X \rightarrow X$ dönüşümler ; f ile g değişmeli (yani her $x \in X$ için $(fog)(x) = (gof)(x)$); f ve g sürekli, $g(X) \subset f(X)$ ve $d(gx, gy) \leq \lambda u$ öyle ki

$$u \in C(f; x; y) \equiv \{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\} \text{ ve } \lambda \in (0, 1)$$

olsun. Ayrıca $\{y_n\}$ dizisi 4.1. Lemmada tanımlandığı gibi tanımlanmış ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in X$ olan bir dizi olsun. Bu durumda f ve g, X içinde bir tek u ortak sabit noktasına sahiptir. Ve f dönüşümünün sürekli olması durumunda $u = gy = fy$; g dönüşümünün sürekli olması durumunda ise $u = y$ gerçekleşir [21].

İspat

4.1. Lemmasının (vi) şikkından $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Ve X bir tam konik metrik uzay olduğundan bir $y \in X$ var öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Diğer taraftan teoremin hipotezleri 4.11. Teoreminin hipotezlerini sağladığından f ve g, X içinde bir tek u ortak sabit noktasına sahiplerdir.

Şimdi f dönüşümünün sürekli olduğunu kabul edelim. O halde $fy = gy = u$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten;

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = y$ ve f ile g değişmeli olduğundan

$$d(fy, gy) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(fgx_n, gy) = \lim_{n \rightarrow \infty} (gx_n, gy) \quad (4.18)$$

Ayrıca her bir $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} s_n &\in \{d(ffx_n, fy), d(ffx_n, gfx_n), d(ffx, gy), d(fy, gfx_n), d(fy, gy)\} \\ &= \{d(f^2x_n, fy), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gy), d(fy, gfx_n), d(fy, gy)\} \text{ olmak üzere} \end{aligned}$$

$$d(fgx_n, gy) = d(gfx_n, gy) \leq \lambda s_n \quad (4.19)$$

bulunur.

Buradan da açıktır ki $\{s_n\}$ dizisinin elemanları $d(f^2x_n, fy), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gy), d(fy, gfx_n)$ veya $d(fy, gy)$ den biri biçimindedir.

Şimdi bu $\{s_n\}$ dizisinin $\{s_{n,i}\}, i=1,2,3,4,5$ olan alt dizilerini alırsak; bunlar da

$d(f^2x_n, fy), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gy), d(fy, gfx_n)$ veya $d(fy, gy)$ nin yeniden düzenlenmiş biçimleridir.

Açıktır ki $i = 1, 2, 4$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,i} = \theta$.

Gerçekten; $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^2x_n, fy) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(ffx_n, fy) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(fgx_{n-1}, fy) = d(fy, fy) = \theta$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^2 x_n, g f x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f f x_n, g f x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f g x_{n-1}, g f x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f g x_{n-1}, f g x_n) \\ &= d(f y, f y) = \theta,\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f y, g f x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f y, f g x_n) = d(f y, f y) = \theta.$$

Diğer taraftan $i = 3, 5$ için ise $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,i} = d(f y, g y)$. Gerçekten;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^2 x_n, g y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f f x_n, g y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f g x_{n-1}, g y) = d(f y, g y),$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f y, g y) = d(f y, g y)$. Böylece Eş. 4.18 ve Eş. 4.19 dan;

$$\theta \leq d(f y, g y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f g x_n, g y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g f x_n, g y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda s_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \theta. \text{ Yani}$$

$$f y = g y.$$

Bu durumda $d(g g y, g y) \leq \lambda v$ öyle ki

$$v \in \{d(f g y, f y), d(f g y, g g y), d(f g y, g y), d(f y, g y), d(f y, g g y)\} = \{d(g g y, g y), \theta\}$$

olduğu görülür.

Böylece $\theta \leq d(g g y, g y) \leq \lambda v = \theta$ ($v \in \{d(g g y, g y), \theta\}$ olduğundan) olup

$$d(g g y, g y) = \theta \Rightarrow g g y = g y \quad (4.20)$$

Şimdi

$$f g y = g f y = g g y = g y \quad (4.21)$$

olduğundan Eş. 4.20 ve 4.21 den açıktır ki $g \circ f$ ile g nin bir ortak sabit noktasıdır.

Şimdi de g dönüşümünün sürekli dönüşüm olduğunu ele alalım:

Bu durumda y nin f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu ispatlayabiliriz.

Biliyoruz ki $f x_n \rightarrow y$ ve $g x_n \rightarrow y \cdot g$ sürekli bir dönüşüm olduğu için $g f x_n \rightarrow g y$ ve f ile g değişmeli olduğundan da $f g x_n \rightarrow g y$.

Şimdi $f y = g y$ olduğunu ispatladığımız duruma benzer yolla ispat edersek,

$d(gy, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g^2 x_n, g x_n) = \theta$ bulunur. Böylece $gy = y$ olduğu bulunur.

Ayrıca $g(X) \subset f(X)$ olduğundan, bir $y' \in X$ öyle ki $y = gy = f y'$. Şimdi

$s \in \{d(fg x_n, f y'), d(fg x_n, g^2 x_n), d(fg x_n, g y'), d(f y', g^2 x_n), d(f y', g y')\}$ ve $\lambda \in (0, 1)$

olmak üzere $d(g^2 x_n, g y') \leq \lambda s$. Tekrar $f y = g y$ olduğunu ispatladığımız duruma benzer yolla ispat edersek;

$d(g^2 x_n, g y') \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow \infty$) bulunur. Ayrıca $d(g^2 x_n, g y) = d(g^2 x_n, y) \rightarrow \theta$ bulunur.

Öyleyse konik metrik uzaylarda, P normal konik iken dizinin yakınsadığı nokta tek olduğundan $g y' = g y = y$ olduğu görülür.

Bu durumda $f y = f g y' = g f y' = g y = y \cdot f$ ve g nin ortak sabit noktası varken bir tek olacağından; $gy = y = u$ olduğu açıkça görülür.

4.12. Teoreminde $E = \mathbb{R}$, $P = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ alırsak 4.11.

Teoreminin bir genelleştirmesini elde ederiz. Ve bu durumda f ve g dönüşümlerinin

sürekli olmasını kabul etmek yerine, sadece f dönüşümünün sürekli olduğunu kabul etmek yeterlidir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

4.12. Sonuç

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de bir normal konik olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü her $\lambda \in [0, 1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \lambda d(x, y)$$

büzülme şartını sağlasın. Bu durumda f dönüşümü X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

4.14. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve P de bir normal konik olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşüm, f^2 sürekli, $g : f(X) \rightarrow X$ bir dönüşüm öyle ki $g(f(X)) \subseteq f^2(X)$ ve her iki tarafın tanımlı olduğu yerlerde $f(gx) = g(fx)$ olsun. Ayrıca her $x, y \in f(X)$ için;

$$u \in C(f; x, y) = \{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\}$$

olmak üzere $d(gx, gy) \leq \lambda u$ olacak şekilde $\lambda \in (0, 1)$ bulunsun. Bu durumda f ve g dönüşümleri X içinde bir tek u ortak sabit noktasına sahiptir [21].

İspat

Kabul edelim ki $x_0 \in f(X)$ olsun. 4.13. Teoreminin ispatındaki gibi $f(X)$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Öyle ki $fx_{n+1} = gx_n = y_n$ olsun.

Bu durumda

$fy_n = fgx_n = gfx_n = gy_{n-1} = z_n$ olarak seçelim.

4.1. Lemmadan, $n < m$ olacak şekilde her $m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\|d(z_n, z_m)\| \leq K \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \delta(O(x_0; \infty)).$$

4.13. Teoreminin ispatındaki gibi $\{z_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisi olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in X.$$

Şimdi f ve g dönüşümlerinin X içindeki bir tek u ortak sabit noktasının

$f^2z = gfgz = u$ eşitliğini sağlayacak şekilde olduğunu gösterelim:

Hipotezden $\lambda \in (0,1)$ için, $d(f^2z_n, gfz_n) = d(gfz_{n-1}, gfz_n) \leq \lambda s_1$ öyle ki

$$\begin{aligned} s_1 &\in \{d(ffz_{n-1}, ffz_n), d(ffz_{n-1}, gfz_{n-1}), d(ffz_{n-1}, gfz_n), d(ffz_n, gfz_n), d(ffz_n, gfz_{n-1})\} \\ &= \{d(fgz_{n-2}, fgz_{n-1}), d(fgz_{n-2}, fgz_{n-1}), d(fgz_{n-2}, gfz_n), d(fgz_{n-1}, gfz_n), d(fgz_{n-1}, fgz_{n-1})\} \\ &= \{d(gfz_{n-2}, gfz_{n-1}), d(fgz_{n-2}, gfz_n), d(gfz_{n-1}, gfz_n), \theta\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu durumda 4.1. Lemmasının ispatındaki gibi her bir $n \in \mathbb{N}$;

$$d(f^2z_n, gfz_n) = d(gfz_{n-1}, gfz_n) \leq \lambda^{n-2} s_{n-2} \text{ öyle ki}$$

$$s_{n-2} \in \left\{ d(gfz_i, gfz_j) : 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Böylece

$$d(f^2 z_n, gfz_n) \rightarrow \theta \quad (n \rightarrow \infty) \text{ ve dolayısıyla da,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^2 z_n, gfz_n) = \theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^2 z_n = gfz_n$$

$$\Rightarrow f^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) = gf(z_n) \quad (f^2 \text{ sürekli olduğundan})$$

$$\Rightarrow f^2 z = gf \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) = gfz$$

($gf(X) \subset f^2(X)$ olup f^2 sürekli iken gf de sürekli dönüşümdür.)

$$\Rightarrow f^2 z = gfz.$$

Ayrıca yine hipotezden $\lambda \in (0,1)$ için, $d(g(gfz), gfz) \leq \lambda s_2$ öyle ki

$$\begin{aligned} s_2 &\in \{d(fgfz, ffz), d(fgfz, ggfz), d(fgfz, gfz), d(ffz, gfz), d(ffz, ggfz)\} \\ &= \{d(gf^2 z, f^2 z), d(gf^2 z, ggfz), d(gf^2 z, gfz), d(f^2 z, gfz), d(f^2 z, ggfz)\} \\ &= \{d(ggfz, gfz), d(ggfz, ggfz), d(ggfz, gfz), d(gfz, gfz), d(gfz, ggfz)\} \\ &= \{d(ggfz, gfz), \theta\}. \end{aligned}$$

$$\text{O halde } \theta \leq d(ggfz, gfz) \leq \lambda s_2 = \theta.$$

Yani $g(gfz) = gfz$ dolayısıyla da gfz , g dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Ayrıca

$f(gfz) = g(f^2 z) = g(gfz) = gfz$ yani gfz , f dönüşümünün de bir sabit noktasıdır.

Böylece $gfz = gfz = u$ noktası f ve g dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasıdır.

4.11. Teoremi ve 4.12. Teoreminden f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktası varken bir tektir. Her metrik uzay bir konik metrik uzay olduğundan aşağıdaki sonuç açıktır.

4.13. Sonuç

(X, ρ) bir tam metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşüm, f^2 sürekli, $g : f(X) \rightarrow X$ bir dönüşüm öyle ki $g(f(X)) \subseteq f^2(X)$ ve her iki tarafın tanımlı olduğu yerlerde $f(gx) = g(fx)$ olsun. Ayrıca her $x, y \in f(X)$ için;

$$\mu_\rho(x, y) = \max\{\rho(fx, fy), \rho(fx, gx), \rho(fx, gy), \rho(fy, gy), \rho(fy, gx)\}$$

olmak üzere

$$\rho(gx, gy) \leq \lambda \mu_\rho(x, y)$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, 1)$ bulunsun. Bu durumda f ve g dönüşümleri X içinde bir tek u ortak sabit noktasına sahiptir.

Aşağıda vereceğimiz örnek 4.12. Teoreminin, 4.11. Teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

4.2. Örnek

$X = (-\infty, \infty)$ bilinen metrik (yani $d(x, y) = |x - y|$) ile tanımlansın. $f, g : X \rightarrow X$ öyle ki

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (-\infty, -1] \\ x, x \in (-1, 1) \\ -1, x \in [1, \infty) \end{cases} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2}, x \in (-1, 0] \\ \frac{1-x}{2}, x \in (-1, 1) \\ 0, x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \end{cases} \text{ olsun.}$$

Burada f süreksiz bir dönüşümdür fakat 4.11. Teoreminin diğer tüm hipotezleri sağlanmaktadır. Bu durumda bu teoremi uygulayamayız ancak f^2 sürekli olduğu için 4.14. Teoreminden f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasının $\frac{1}{3}$ olduğu görülür. Ayrıca daha önceki çalışmalarımızda f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktaya sahip olması için, f^2 dönüşümünün sürekli olması gerekmediği, g sürekli ise yine f ve g dönüşümünün bir tek ortak sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir.

5. KONİK METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKLAŞIMLAR VE KÜME DEĞERLİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTALAR

5.1. Konik Metrik Uzaylarda En İyi Yaklaşımlar

5.1. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay ve $B \subset X$ olsun. B içindeki her dizinin, B de yakınsak bir alt dizisi varsa, B ye X in dizisel kompakt bir alt kümesi denir [25].

5.2. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay, G , X in boş olmayan bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Bir $x \in X$ için bir $g_0 \in G$ var öyle ki her $g \in G$ için $d(x, g_0) \leq d(x, g)$ oluyorsa g_0 elemanına x in en iyi yaklaşımı denir. Ve x in G içindeki en iyi yaklaşımları kümesi $P_G(x)$ ile gösterilir [25].

5.3. Tanım

(X, d) bir konik metrik uzay ve G de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için $P_G(x)$, G kümesinin tek elemanlı bir alt kümesi ise G kümesine x in bir Chebyshev alt kümesi denir. Ayrıca her $x \in X$ için $P_G(x)$, X in dizisel kompakt bir alt kümesi ise bu durumda da G kümesine x in quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesi denir [25].

5.4. Tanım

X bir reel vektör uzayı, (X, d) bir konik metrik uzay ve G de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer hiç bir $x \in X$ için $P_G(x)$, sonsuz çoklukta lineer bağımsız

eleman içermiyorsa bu durumda G kümesine X in pseudo (yarı) Chebyshev alt kümesi denir [25].

5.1. Örnek

$E = l^1$, $P = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in E : x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$, $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, G , X in bir quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesi olsun ve $d : X \times X \rightarrow E$ dönüşüm $d(x, y) = \left\{ \frac{\|x - y\|}{2^n} \right\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda G , (X, d) nin de bir quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesidir. Gerçekten;

$x \in X$ in (X, d) içindeki en iyi yaklaşımları kümesi $P_G(x)$, olsun. O halde $x \in X$ ve her $g \in G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x, g_0) = \frac{\|x - g_0\|}{2^n} \leq \frac{\|x - g\|}{2^n} = d(x, g)$ olup, $x \in X$ in $(X, \|\cdot\|)$ içindeki en iyi yaklaşımları kümesi de $P_G(x)$ olarak bulunur. Diğer taraftan G , $(X, \|\cdot\|)$ un quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesi olduğu için her $x \in X$ için $P_G(x)$, $(X, \|\cdot\|)$ un dizisel kompakt bir alt kümesidir. O halde her $\{g_n\} \subset P_G(x)$ dizisinin en az bir $\{g_{n_i}\} \subset \{g_n\}$ alt dizisi var öyle ki $g_{n_i} \xrightarrow{\|\cdot\|} g_0$ olacak şekilde $g_0 \in P_G(x)$ bulunur. Şimdi G kümesinin (X, d) nin de bir quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesi olduğunu görelim:

Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin. $g_{n_i} \xrightarrow{\|\cdot\|} g_0$ olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n_i \geq n_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|g_{n_i} - g_0\| < \varepsilon \cdot 2^n$. Bu durumda

$$d(g_{n_i}, g_0) = \frac{\|g_{n_i} - g_0\|}{2^n} < \frac{\varepsilon \cdot 2^n}{2^n} = \varepsilon \text{ gerçeklenir. O halde } G, (X, d) \text{ nin de bir quasi}$$

(hemen hemen) Chebyshev alt kümesidir.

5.1. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay, G, X in boş olmayan bir alt kümesi, $g_0 \in G$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $g_0 \in P_G(x)$ gerek ve yeter şart bir $f : X \rightarrow E$ dönüşümü var öyle ki $f(g_0) = d(x, g_0)$ ve her $g \in G$ için $f_{g_0}(g) = f(g) - f(g_0) \in P$ ve $f_d(g) = d(x, g) - f(g) \in P$ [25].

İspat

$(\Rightarrow)$ $g_0 \in P_G(x)$ ve $f : X \rightarrow E$, $f(t) = d(x, t)$ olsun. Bu durumda f dönüşümünün tanımından $f(g_0) = d(x, g_0)$. Ayrıca her $g \in G$ için $f(g) = d(x, g)$ ve $f(g_0) = d(x, g_0)$ iken $g_0 \in P_G(x)$ olduğundan $d(x, g_0) \leq d(x, g)$ yani $f(g) - f(g_0) \in P$. Böylece $f_{g_0}(G) \subset P$.

Benzer şekilde f dönüşümünün tanımından her $g \in G$ için $d(x, g) = f(g)$ olup $d(x, g) - f(g) = \theta$ ve $\theta \in P$. Böylece $f_d(G) = \{\theta\} \subset P$.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki $f : X \rightarrow E$, $f(g_0) = d(x, g_0)$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ve her $g \in G$ için $f_{g_0}(g) \in P$ ve $f_d(g) \in P$ olsun. Böylece her $g \in G$ için $d(x, g_0) = f(g_0) \leq f(g) \leq d(x, g)$, yani $g_0 \in P_G(x)$.

5.1. Teorem

(X, d) bir konik metrik uzay, G, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $M \subset P_G(x)$ gerekli ve yeterli şart bir $f : X \rightarrow E$ dönüşümü var öyle ki her $m \in M$ için $f(m) = d(x, m)$, $f_m(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olmasıdır [25].

İspat

($\Rightarrow$): Kabul edelim ki $M \subset P_G(x)$ olsun. Ve keyfi $m_1 \in M$ alalım. Bu durumda 5.1. Lemmasından bir $f : X \rightarrow E$ dönüşümü var öyle ki $f(m_1) = d(x, m_1)$, $f_{m_1}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$. Şimdi $m \in M$ olsun. Bu durumda $f_{m_1}(m) \in P$ ve $f_d(m) \in P$. Yani $f(m_1) \leq f(m)$ ve $f(m) \leq d(x, m)$. $m \in M \subset P_G(x)$ olduğu için $d(x, m) \leq d(x, m_1) = f(m_1) \leq f(m) \leq d(x, m)$. Dolayısıyla da $f(m) = d(x, m)$.

$m_1 \in M$ ve $m \in M$ iken $d(x, m_1) \leq d(x, m)$ ve $d(x, m) \leq d(x, m_1)$ olup $d(x, m) - d(x, m_1) = 0$ yani $d(x, m) = d(x, m_1)$. Böylece her $g \in G$ için $f_m(g) = f(g) - f(m) = f(g) - d(x, m) = f(g) - d(x, m_1) = f_{m_1}(g) \in P$.

Yani her $m \in M$ için $f(m) = d(x, m)$, $f_m(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$.

($\Leftarrow$): $f : X \rightarrow E$, $f(m) = d(x, m)$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm, her $m \in M$ için $f_m(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olsun. Bu durumda 5.1. Lemmasının ($\Leftarrow$) yönünden her $m \in M$ için $m \in P_G(x)$. Böylece $M \subset P_G(x)$.

5.1. Sonuç

(X, d) bir konik metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda G, X in bir Chebyshev alt kümesidir gerekli ve yeterli şart $g_1, g_2 \in G$ farklı elemanlar olmak üzere $i = 1, 2$ için $f : X \rightarrow E$, $f(g_i) = d(x, g_i)$, $f_{g_i}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ yoktur [25].

5.2. Teorem

(X, d) bir konik metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda G, X in bir quasi

(hemen hemen) Chebyshev alt kümesidir gerekli ve yeterli şart $\{g_n\}$, G içinde yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ yoktur [25].

İspat

($\Rightarrow$;) Kabul edelim ki $\{g_n\}$, G içinde yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunsun.

Bu durumda 5.1. Teoreminden her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in P_G(x)$. Yani $P_G(x)$ dizisel kompakt değildir. Bu durum G nin X in quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesi olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $\{g_n\}$, G içinde yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ yoktur.

($\Leftarrow$;) Kabul edelim ki G, X in quasi (hemen hemen) Chebyshev olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda bir $x \in X$ için $P_G(x)$ içinde yakınsak alt dizisi olmayan bir $\{g_n\}$ dizisi vardır. Bu durumda 5.1. Teoreminden bir $f : X \rightarrow E$ dönüşümü var öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$. Bu durum hipotezdeki $\{g_n\}$ nin G içinde yakınsak alt dizisi olmayan bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ olmaması ile çelişir.

O halde kabulümüz yanlış olup G, X in bir quasi (hemen hemen) Chebyshev alt kümesidir.

5.3. Teorem

X bir reel vektör uzayı, (X, d) bir konik metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda G, X in pseudo (yarı) Chebyshev alt kümesidir gerekli ve yeterli şart $\{g_n\}, G$ içinde sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahip bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ yoktur[25].

İspat

($\Rightarrow$): Kabul edelim ki $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}, G$ içinde sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahip bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunsun.

Bu durumda 5.1. Teoreminden her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in P_G(x)$. Yani bir $x \in X$ için $P_G(x)$ sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahiptir. Bu durum G kümesinin X in pseudo (yarı) Chebyshev alt kümesi olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $\{g_n\}, G$ içinde sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahip bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$ olacak şekilde hiç bir $x \in X$ yoktur.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki G, X in pseudo (yarı) Chebyshev olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda bir $x \in X$ için $P_G(x)$ içinde sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahip bir M alt kümesi vardır.

Bu durumda 5.1. Teoreminden bir $f : X \rightarrow E$ dönüşümü var öyle ki her $m \in M$ ve $x \in X$ için $f(m) = d(x, m)$, $f_m(G) \subset P$ ve $f_d(G) \subset P$. Böylece hipotezdeki $\{g_n\}, G$ içinde sonsuz çoklukta lineer bağımsız elemana sahip bir dizi ve $f : X \rightarrow E$, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(g_n) = d(x, g_n)$, $f_{g_n}(G) \subset P$

O halde kabulümüz yanlış olup G, X in bir pseudo (yarı) Chebyshev alt kümesidir.

5.2. Konik Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Noktaları

5.5. Tanım

(M, d) bir konik metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. A içindeki her $\{x_n\}$ dizisi, bir $x \in A$ noktasına yakınsıyorsa A kümesine M içinde *kapalı bir küme* denir.

Bir M konik metrik uzayı içindeki boş olmayan alt kümelerin ailesini $N(M)$, boş olmayan kapalı alt kümelerin ailesini $C(M)$ ve boş olmayan dizisel kompakt alt kümelerin ailesini de $K(M)$ ile göstermekteyiz [25].

5.6. Tanım

M bir konik metrik uzay, $x \in M$ ve $T : M \rightarrow N(M)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $x \in Tx$ ise bu durumda x elemanına T küme değerli dönüşümünün *sabit noktası* denir ve T nin sabit noktalarının kümesi $Fix(T) = \{x \in M : x \in Tx\}$ ile gösterilir [25].

5.7. Tanım

M bir konik metrik uzay, $x \in M$ ve $T : M \rightarrow N(M)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = \{x\}$ ise bu durumda x elemanına T küme değerli dönüşümünün *son noktası* denir. Ve T nin son noktalarının kümesi $End(T) = \{x \in M : Tx = \{x\}\}$ ile gösterilir [25].

5.8. Tanım

M bir konik metrik uzay ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\{x_n\} \subset M$ olup bir $x \in M$ noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ oluyorsa f dönüşümüne *alt yarı sürekli dönüşüm* denir [25].

(M, d) bir konik metrik uzay ve $T : M \rightarrow C(M)$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $x \in M$ olmak üzere sonraki teorem ve sonuçlarda kullanılacak olan

$$D(x, Tx) = \{d(x, z) : z \in Tx\}$$

ve

$$S(x, Tx) = \{u \in D(x, Tx) : \|u\| = \inf \{\|v\| : v \in D(x, Tx)\}\} \text{ kümelerini tanımlayalım [23].}$$

5.4. Teorem

(M, d) bir tam konik metrik uzay, P, K normal sabiti ile bir normal konik ve $T : M \rightarrow C(M)$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ve $x \in M$ olmak üzere $I(x) = \inf_{y \in Tx} \|d(x, y)\|$ şeklinde tanımlanmış bir alt yarı sürekli dönüşüm olmak üzere her $x \in M$ için en az bir $y \in Tx$ var öyle ki en az bir $v \in D(y, Ty)$ ve her $u \in D(x, Tx)$ için $bd(x, y) \leq u$ ve $v \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$ ve $b \in (\lambda, 1]$ varsa $Fix(T) \neq \emptyset$ olmalıdır [25].

İspat

Keyfi ve sabit bir $x_0 \in M$ noktasını ve keyfi $u_0 \in D(x_0, Tx_0)$ elemanını alalım. Hipotezden bir $x_1 \in Tx_0$ ile $bd(x_0, x_1) \leq u_0$ şartını sağlayan bir $u_1 \in D(x_1, Tx_1)$ elemanı var öyle ki $u_1 \leq \lambda d(x_0, x_1)$.

Ayrıca $x_1 \in Tx_0$ için $x_2 \in Tx_1$ ile $bd(x_1, x_2) \leq u_1$ şartını sağlayan bir $u_2 \in D(x_2, Tx_2)$ elemanı var öyle ki $u_2 \leq \lambda d(x_1, x_2)$.

Benzer şekilde devam edilirse $x_n \in Tx_{n-1}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ile $bd(x_n, x_{n+1}) \leq u_n$ şartını sağlayan bir $u_{n+1} \in D(x_{n+1}, Tx_{n+1})$ elemanı var öyle ki $u_{n+1} \leq \lambda d(x_n, x_{n+1})$.

$bd(x_n, x_{n+1}) \leq u_n$ ve $u_{n+1} \in D(x_{n+1}, Tx_{n+1})$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_{n+1} \leq \lambda d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\lambda}{b} u_n \leq \frac{\lambda^2}{b} d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \frac{\lambda^{n+1}}{b^n} d(x_0, x_1) \leq \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{n+1} u_0 \quad (5.1)$$

Eş. 5.1 ve P nin K normal sabiti ile bir normal konik olmasından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|u_{n+1}\| \leq K \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{n+1} \|u_0\| \quad (5.2)$$

Eş. 5.2 den $n \rightarrow \infty$ iken $\|u_n\| \rightarrow 0$ olup $\{u_n\}$ dizisi θ ya yakınsar. Ayrıca

$bd(x_n, x_{n+1}) \leq u_n$ ve $u_{n+1} \in D(x_{n+1}, Tx_{n+1})$ den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(b - \lambda) d(x_n, x_{n+1}) = bd(x_n, x_{n+1}) - \lambda d(x_n, x_{n+1}) \leq u_n - u_{n+1} \quad (5.3)$$

Şimdi $n < m$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ yi seçelim. Bu durumda Eş. 5.3 den

$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \frac{1}{b-\lambda} \sum_{j=n}^{m-1} (u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{b-\lambda} (u_n - u_m)$. P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan $\|d(x_m, x_n)\| \leq \frac{K}{b-\lambda} \|u_n - u_m\|$. $\{u_n\}$ dizisi θ ya yakınsayan bir dizi olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

(M, d) bir tam konik metrik uzay olduğundan bir $x^* \in M$ var öyle ki $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x^*$.

Diğer taraftan $u_n \in D(x_n, Tx_n)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in Tx_n$ olacak şekilde bir $\{z_n\}$ dizisi var öyle ki $u_n = d(x_n, z_n)$. $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığından ve I dönüşümünün alt yarı sürekli bir dönüşüm olmasından

$$\inf_{y \in Tx^*} \|d(x^*, y)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|d(x_n, y)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|d(x_n, z_n)\| = 0.$$

$$\text{Böylece } \inf_{y \in Tx^*} \|d(x^*, y)\| = 0.$$

Şimdi kabul edelim ki $x^* \notin Tx^*$ olsun. $\inf_{y \in Tx^*} \|d(x^*, y)\| = 0$ olduğundan bir $\{y_n\} \subset Tx^*$

dizisi vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|d(x^*, y_n)\| = 0$. Bu durumda keyfi $m, n \geq 0$ için

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x^*) + d(x^*, y_n) \text{ olup, } P, K \text{ normal sabiti ile bir normal konik olduğundan } \|d(y_m, y_n)\| \leq K \|d(y_m, x^*)\| + K \|d(x^*, y_n)\|.$$

Böylece $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (M, d) konik metrik uzayının tamlığından bir $y^* \in M$ var öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$. Tx^* kapalı olduğundan $y^* \in Tx^*$.

Şimdi keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $d(x^*, y^*) \leq d(x^*, y_n) + d(y_n, y^*)$ olup P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğundan $\|d(x^*, y^*)\| \leq K\|d(x^*, y_n)\| + K\|d(y_n, y^*)\|$. Böylece $x^* = y^*$ olup bu durum çelişkilidir. O halde kabulümüz yanlış olup $x^* \in Tx^*$.

5.5. Teorem

(M, d) bir tam konik metrik uzay, P, K normal sabiti ile bir normal konik ve $T: M \rightarrow K(M)$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $I: M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ve $x \in M$ olmak üzere $I(x) = \inf_{y \in Tx} \|d(x, y)\|$ şeklinde tanımlanmış bir alt yarı sürekli dönüşüm olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $x \in M$ için en az bir $y \in Tx$ var öyle ki en az bir $v \in S(y, Ty)$ ve her $u \in S(x, Tx)$ için $bd(x, y) \leq u$ ve $v \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ ve $b \in (\lambda, 1]$ varsa $Fix(T) \neq \emptyset$.

(ii) Her $x \in M$ ve her $y \in Tx$ için en az bir $v \in S(y, Ty)$ var ve her $u \in S(x, Tx)$ için $bd(x, y) \leq u$ ve $v \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ ve $b \in (\lambda, 1]$ varsa $Fix(T) = End(T) \neq \emptyset$ gerçekleşir [25].

İspat

(i) 5.4. Teoremi ve her $x \in M$ için $S(x, Tx) \subset D(x, Tx)$ olduğundan ispatın tamamlanması için sadece her $x \in M$ için $S(x, Tx) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Keyfi ve sabit $x \in M$ elemanını seçelim. $c = \inf_{z \in Tx} \|d(x, z)\|$ olarak tanımlayalım ve kabul edelim ki hiç bir $z \in Tx$ için $\|d(x, z)\| = c$ olmasın. $\{z_n\} \subset Tx, c_n = \|d(x, z_n)\|$ dizisi c ye yakınsak olan bir dizi olsun. Tx dizisel kompakt olduğu için $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0 \in Tx$ olacak şekilde $\{z_n\}$ dizisinin bir $\{z_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $c < \|d(x, z_0)\| \leq \|d(x, z_0) - d(x, z_{n_k})\| + \|d(x, z_{n_k})\|$ olduğundan $c < \|d(x, z_0)\| \leq c$ bulunur. Yani bir $z_0 \in Tx$ için $\|d(x, z_0)\| = c$ olup bu durum kabulümüzle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $S(x, Tx) \neq \emptyset$.

(ii) $End(T) \neq \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. (i) nin ispatında $x^* \in Tx^*$ olacak şekilde bir x^* bulunduğunu göstermiştik. Şimdi keyfi $y \in Tx^*$ alalım. Bu durumda hipotezden her $u \in S(x^*, Tx^*)$ için $bd(x^*, y) \leq u$. Diğer taraftan $x^* \in Tx^*$ olduğu için $\theta \in S(x^*, Tx^*)$. Bu durumda $bd(x^*, y) \leq \theta$ olup $x^* = y$ bulunur. Yani $Tx^* = \{x^*\}$. Böylece $End(T) \neq \emptyset$ gerçekleşir.

5.4. Teoremini tek değerli dönüşümlere uyarlırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

5.6. Teorem

(M, d) bir tam konik metrik uzay, P, K normal sabiti ile bir normal konik ve $T : M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ve $x \in M$ olmak üzere $I(x) = \|d(x, y)\|$ şeklinde tanımlanmış bir alt yarı sürekli dönüşüm olsun. Eğer her $x \in M$ için $d(Tx, T^2x) \leq \lambda d(x, Tx)$ olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1)$ varsa $Fix(T) \neq \emptyset$ [25].

Aşağıdaki örnek 5.4. Teoreminin bir uygulamasıdır.

5.2. Örnek

$M = [0, 1]$, $E = \mathbb{R}^2$ maksimum norm ile tanımlı bir reel Banach uzayı, $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$ bir normal konik ve $d : M \times M \rightarrow E$, $\beta \in (0, 1)$ için $d(x, y) = (|x - y|, \beta|x - y|)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda (M, d) bir tam konik metrik uzaydır.

$T : M \rightarrow C(M)$ dönüşümünü $Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}x \right\}, x \in [0, 1); \\ \left[\frac{1}{2}, 1 \right], x = 1. \end{cases}$ şeklinde tanımlayalım. Diğer

tarafından $I(x) = \inf_{y \in Tx} \|d(x, y)\| = \begin{cases} \frac{1}{2}x, x \in [0, 1); \\ 0, x = 1. \end{cases}$ şeklinde tanımladığımız I dönüşümü

bir alt yarı sürekli dönüşümdür. Ayrıca keyfi $x \in [0, 1)$ ve $y = \frac{1}{2x}$ için

$$D(x, Tx) = \left\{ d\left(x, \frac{1}{2x}\right) \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2x}, \beta \frac{1}{2x} \right) \right\}$$

ve

$$D(y, Ty) = \left\{ d\left(\frac{1}{2x}, \frac{1}{4x}\right) \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{4x}, \beta \frac{1}{4x} \right) \right\}.$$

Böylece $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $b = 1$ olarak seçersek:

her bir $u \in D(x, Tx)$ için $bd(x, y) \leq u$ ve $v = \left(\frac{1}{4x}, \beta \frac{1}{4x} \right)$ için $v \leq \lambda d(x, y)$ bulunur.

$x = 1$ olması halinde Eş. 5.1 sağlanır. Ayrıca $y = 1$ seçersek her bir $u \in D(x, Tx)$ için $bd(x, y) = 0 \leq u$ ve $v = 0 \in D(y, Ty)$ için $v \leq \lambda d(x, y)$ bulunur.

Böylece 5.4. Teoreminin tüm varsayımları sağlanır dolayısıyla da $Fix(T) = \{0, 1\} \neq \emptyset$.

5.6. Teoreminde konik metrik uzay yerine metrik uzay seçilirse aşağıdaki teorem elde edilir:

5.7. Teorem

(M, ρ) bir tam metrik uzay ve $T : M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x \in M$ için $I(x) = \rho(x, Tx)$ şeklinde tanımlı alt yarı sürekli dönüşüm olsun. Eğer her $x \in M$ için

$$\rho(Tx, T^2x) \leq \lambda \rho(x, Tx) \quad (5.4)$$

şartını sağlayan bir $\lambda \in [0, 1)$ varsa $Fix(T) \neq \emptyset$ olur [25].

Son teoremdeki I alt yarı sürekli dönüşüm olması varsayımı ihmal edilemez. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim:

5.3. Örnek

$M = [0, 1]$ ve $\rho(x, y) = |x - y|$ olmak üzere (M, ρ) metrik uzayını ve

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0; \\ \frac{1}{2}x^2, & x \in [0, 1). \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlı } T : M \rightarrow M \text{ dönüşümünü seçelim. Ayrıca}$$

$I : M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü $I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x = 0; \\ x - \frac{1}{2}x^2, x \in (0, 1]. \end{cases}$ şeklinde tanımlı alt yarı sürekli

olmayan bir dönüşüm olarak seçelim.

Bu durumda T dönüşümü $\lambda = \frac{3}{4}$ için Eş. 5.4 ü sağlar fakat $Fix(T) = \emptyset$ olur.

5.4. Teoremindeki konik metrik uzay olma varsayımı tek değerli dönüşümler için de gereklidir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim:

5.4. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$ Öklid düzlemini ve E içindeki $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$ normal koniğini alalım. $M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ olmak üzere $d : M \times M \rightarrow E$ dönüşümünü her $x, y \in M$ için

$$\begin{aligned} d((0, 1), (0, 0)) &= d((0, 0), (0, 1)) = \left(1, \frac{2}{3}\right) \\ \{d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\} \text{ için } d((1, 0), (0, 0)) &= d((0, 0), (1, 0)) = \left(\frac{4}{3}, 1\right) \\ d((1, 0), (0, 1)) &= d((0, 1), (1, 0)) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda (M, d) bir konik metrik uzaydır. Ayrıca $T : M \rightarrow C(M)$ dönüşümünü

$$\begin{aligned} T((1, 0)) &= \{(0, 0)\} \\ T((0, 0)) &= \{(0, 1)\} \text{ şeklinde tanımlayalım.} \\ T((0, 1)) &= \{(0, 1)\} \end{aligned}$$

Böylece $Fix(T) \neq \emptyset$ ve T dönüşümü $\lambda = \frac{3}{4}$ için 5.6. Teoreminin tüm varsayımlarını sağlar. Diğer taraftan T dönüşümü M üzerindeki ρ Öklid metriğine göre 5.7. Teoreminin şartlarını sağlamamaktadır çünkü $x = (1, 0)$ için $Tx = (0, 0)$ olup,

$$\rho(Tx, T^2x) = \rho((0, 0), (0, 1)) = 1 > \lambda \rho(x, Tx) = \lambda \rho((1, 0), (0, 0)) = \lambda .$$

6. SONUÇ

İlk bölümde metrik uzaylar, sabit nokta teoremleri ve konik metrik uzayların incelenme süreci ve gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde gelecek bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda konik tanımı, çeşitleri ve bazı özellikleri ifade edilmiş, ikinci kısımda ise konik metrik uzay tanımı ve bu uzayın bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm iki kısımdır. Birinci kısımda büzülme şartını sağlayan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri önce P nin K normal sabiti ile bir normal konik olması varsayımı altında ve sonra da mümkünse normallik varsayımını ihmal ederek genelleştirilmiş hali incelenmiştir. İkinci kısımda ise konik metrik uzaylarda büzülebilirlik şartlarını sağlayan dönüşümlerin çakışım ve ortak sabit noktalarının varlığı incelenmiştir.

Benzer şekilde beşinci bölüm de iki kısımdır. Birinci kısımda konik metrik uzaylarda en iyi yaklaşım kavramına yer verilip özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda ise konik metrik uzaylarda küme değerli büzülme dönüşümleri için sabit nokta kavramı ve özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Abbas, M., Jungck, G., “Common fixed point results for non commuting mappings without continuity in cone metric spaces”, **J. Math. Anal. Appl.**, 341(1): 416-420 (2008).
2. Abbas, M., Rhoades, B.E., “Fixed and periodic point results in cone metric spaces”, **Applied Mathematics Letters**, 22(4): 511-515 (2009).
3. Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D., “Fixed Point Theory and Applications”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-112 (2001).
4. Altun, I., Türkoğlu, D., Rhoades B. E., “Fixed points of weakly compatible maps satisfying a general contractive condition of integral type”, **Fixed Point Theory and Applications**, 17301: 1-9 (2007).
5. Altun, İ., Hançer. A. H., Türkoğlu, D., “Fixed point theorems on d -complete topological spaces”, **Carpathian J. Math.** , 24 (1): 1-7 (2008).
6. Altun, I., Damjanovic, B., Djoric, D., “ Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces. ”, **Applied Mathematics Letters**, 23: 310-316 (2010).
7. Azam, A., Arshad, M., Beg, I., “Common fixed points of two maps in cone metric spaces”, **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 57: 433-441 (2008).
8. Banach, S., “Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales”, **Fund. Math.**, 3: 133-181 (1922).
9. Berinde, V., “Iterative Approximation of Fixed Points”, **Springer-verlag**, Berlin Heidelberg, 31-59 (2007).
10. Border, Kim C., “Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 23-38 (1985).
11. Brouwer, L. E. J., “Über abbildung von mannigfaltigkeiten”, **Math. Ann.**, 71: 97-115 (1910).
12. Copson, E. T., “Metric Spaces”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-46 (1968).

13. Cristina B., Vetro, P., “ ϕ -Pairs and common fixed points in cone metric spaces”, **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 57: 279-285 (2008).
14. Ćirić, Lj. B. “Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle”, **Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade**, Beograd, 66-72(2003).
15. Fréchet, M., “Sur quelques points du calcul fonctionnel”, **Rendic. Circ. Mat. Palemo**, (22): 1-74 (1906).
16. Fréchet, M., “Les espaces abstrait topologiquement affine”, **Acta Math.**, 47: 25-52 (1926).
17. Giles, J. R., “Introduction to the Analysis of Metric Spaces”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-103, 160-200 (1987).
18. Goebel, K., “Topics in Metric Fixed Point Theory”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-37 (1990).
19. Hadžić, O., Pap, E., “Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces”, **Kluwer Academic Publishers**, Dordrecht, 47-91 (2001).
20. Huang, L. G., Zhang, X., “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, **J. Math. Anal. Appl.**, 332: 1468-1476 (2007).
21. Ilić, D., Rakoćević, V., “Common fixed points for maps on cone metric space”, **J. Math. Anal. Appl.**, 341: 876-882 (2008).
22. Ilić, D., Rakoćević, V., “Quasi-contraction on cone metric space”, **Applied Mathematics Letters**, 22: 728-731 (2009).
23. Istratescu, V. I., “Fixed Point Theory: An Introduction”, **D. Reidel Publishing Company**, Dordrecht, 1-177 (1981).
24. Kirk, W. A., Sims, B., “Handbook of Metric Fixed Point Theory”, **Kluwer Academic Publishers**, Dordrecht, 1-47 (2001).
25. Rezapour, Sh., “Best approximations in cone metric spaces”, **Mathematica Moravica**, (11): 85-88 (2007).

26. Rezapour, Sh., Hamlbarani, R., "Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings" ", **J. Math. Anal. Appl.** , 345: 719-724 (2008).
27. Rolewicz, S., "Metric Linear Spaces", **D. Reidel Publishing Company**, Dordrecht, 1-77 (1985).
28. Schauder, J., "Der fixpunktsatz in funktionalramen", **Studia Math.**, 2: 171-180 (1930).
29. Searcoid, M., O., "Metric Spaces", **Springer-verlag**, London, 1-18, 103-121 (2007).
30. Shirali, S., Vasudeva, H. L., "Metric Spaces", **Springer-verlag**, London, 23-98 (2006).
31. Smart, D. R., "Fixed Point Theorems", **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-32 (1974).
32. Şahin, İ., Telci, M., "Fixed Points of Contractive mappings on complete cone metric spaces", **Haceteppe Journal of Mathematics and Statistics Volume**, 38 (1): 59-67 (2009).
33. Türkoğlu, D., Abuloha, M., "Cone metric spaces and fixed point theorems in Diametrically contractive mappings", **Acta Math. Sinica English Series**, 5, 9 (2010).
34. Türkoğlu, D., Abuloha, M., Abdeljewad, T., "KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems", **Nonlinear Analysis**, 72: 348-353 (2010).
35. Türkoğlu, D., Altun, İ., "A common fixed point theorem for weakly compatible mappings in symmetric spaces satisfying an implicit relation", **Bul. de la Soc. Math. Mexicana**, 13 (1): 195-205 (2007).
36. Türkoğlu, D., Altun, İ., "A fixed point theorem for multivalued mappings and its applications to integral inclusions", **Appl. Math. Lett.**, 20: 563-570 (2007).
37. Vetro, P., "Common fixed points in cone metric spaces", **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 56: 464-468 (2007).
38. Wardowski, D., "Endpoint and fixed points of set-valued contractions in cone metric spaces", **Nonlinear Analysis**, 71: 512-516 (2009).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : BİLGİLİ, Nurcan
 Uyruğu : TÜRKİYE
 Doğum Tarihi ve Yeri : 20.11.1984 Ankara / TÜRKİYE
 Medeni Hali :Bekar
 Telefon : (0536)7262849
 e-mail : nurcanbilgili13@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2007
Lise	Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi	2003

Başarılar

2006 -2007 Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü Bölüm Birinciliği

Burslar

2007-2009 TÜBİTAK Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu