

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI ÖZEL EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERDAL TURSUN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi M. Aykut AKGÜN

ADİYAMAN, 2024

ÖZET

KONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI ÖZEL EĞRİLER

Erdal TURSUN

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Şubat/2024

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi M. Aykut AKGÜN

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde konunun daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde Riemann manifold, Kontakt manifold, Kontakt Lorentzian manifold ve Sasakian manifoldların temel özelliklerine değinilmiştir.

Son bölümde ise δ -Lorentzian trans-Sasakian manifoldlar üzerinde Frenet eğrileri incelenerek Frenet elemanları hesaplanmıştır. Daha sonra bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için gerekli şartlar verilmiştir. Sonrasında 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt manifoldlar üzerinde eğrilerin Frenet eğrisi verilerek Frenet elemanları hesaplanmıştır. Bu hesaplardan sonra bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için gerekli şartlar verilmiştir.

Son olarak da 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldlar üzerindeki bazı eğrilerin Frenet denklemleri ve elemanları hesaplanmıştır. Bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için gerekli şartlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontakt manifold; Sasakian manifold; Frenet eğrisi.

ABSTRACT

SOME SPECIAL CURVES IN CONTACT MANIFOLDS

Erdal TURSUN

Department of Mathematics

Adıyaman University, Graduate Education School, February/2024

Supervisor: Asst. Prof. M. Aykut AKGÜN

In the first part of this three-part study, some basic concepts are given to better understand the subject.

In the second chapter, the basic properties of Riemann manifold, Contact manifold, Contact Lorentzian manifold and Sasakian manifolds are mentioned.

In the last section, Frenet elements were calculated by examining Frenet curves on δ -Lorentzian trans-Sasakian manifolds. Then, the necessary conditions for these curves to remain in some subspaces are given. Afterwards, Frenet elements were calculated by giving the Frenet curve of the curves on 3-dimensional normal almost contact manifolds. After this calculation, the necessary conditions for these curves to remain in some subspaces are given.

Finally, Frenet equations and elements of some curves on a 3-dimensional normal almost contact pseudo-metric manifolds were calculated. Necessary conditions for these curves to remain in some subspaces are given.

Keywords: Contact manifold; Sasakian manifold; Frenet curve.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans döneminde hazırlamış olduğum “Kontakt Manifolddlarda Bazı Özel Eğriler” adlı çalışmayı bitirmenin heyecanını ve gururunu yaşamaktayım. Tez aşamasında öncelikle danışmanlığımı üstlenen, konu seçiminden araştırmanın yürütülmesine kadar beni sınırlamayıp özgür bırakan, bana her daim yardımcı olan hocam Dr. Öğr. Üyesi M. Aykut AKGÜN’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez aşamasında bana yardımcı olan hocalarıma ve arkadaşlarıma destekleri için teşekkür ederim. Ayrıca beni yetiştirip büyüten aileme şükranlarımı sunmaktayım.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

ERDAL TURSUN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Eğriler	3
2.2. Riemann Manifoldlar	5
2.3.Kontakt (Değme) Manifoldlar	8
2.4. Sasakian Manifoldlar	12
2.5. Lorentzian Trans–Sasakian Manifoldlar	16
2.6. 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Manifoldlar	18
2.7. Normal Almost Kontakt Pseudo-Metrik Manifoldlar.....	20
2.8. 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Pseudo-Metrik Manifoldlar.....	21
3. KONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI ÖZEL EĞRİLER.....	23
3.1 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Manifold Üzerinde Eğriler	23
3.1.1. Frenet eğrisi	23
3.1.2. Frenet elemanları	24
3.1.3. 3-boyutlu normal almost kontakt manifoldlar üzerinde yatan eğriler	26
3.2. Lorentzian Trans-Sasakian Manifoldlar Üzerinde Eğriler	32
3.2.1. Frenet eğrileri.....	32
3.2.2. ζ eğrisinin Frenet elemanları	34
3.2.3 Lorentzian trans-Sasakian manifoldlar üzerinde yatan eğriler	37
3.3. Kontakt Pseudo Metrik Manifoldlar Üzerinde Eğriler.....	44
3.3.1. Frenet eğrileri.....	44
3.3.2. Frenet elemanları	46

3.3.3. Kontakt pseudo-metrik manifoldlar üzerinde yatan eğriler.....	48
KAYNAKÇA.....	55
ÖZGEÇMİŞ	



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\ X\ $	: Norm
M	: Manifold
$[\cdot, \cdot]$	: Lie braket(parantez) operatörü
∇	: Lineer konneksiyon
$\otimes$	: Tensör çarpımı
$\wedge$	: Dış çarpım
R	: Riemann eğrilik tensörü
T	: Torsiyon tensörü
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
ζ	: Eğri
D	: Distrübüsyon
t, n, b	: Frenet elemanları
Γ_{ij}^k	: Christoffel sembolü
$\chi(M)$	: Vektör alanları uzayı
TM	: Tanjant vektörleri uzayı

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi diferansiyel geometride ve fen bilimlerinin diğer alanlarında sıkça kullanılan bir teoridir. Aynı zamanda bu yapı mühendisliğin birçok alanında ihtiyaç duyulan matematiksel bir yapıdır. Klasik diferansiyel geometride eğriler Öklid uzayında araştırılır. Bu uzayda eğri sınıflandırmaları çoğunlukla Frenet çatısı kullanılarak elde edilir ve buna göre de özellikleri incelenir.

Kontakt manifoldlar üzerinde eğrilerin diferansiyel geometrisi birçok yazar tarafından çalışılmıştır.

B. Olzsak [13], bir M manifoldu üzerindeki bir hemen hemen kontakt metrik yapının normal olması için gerekli ve yeterli şartları vermiştir. Olzsak, uygun örnekler ile bu manifold üzerindeki normal hemen hemen kontakt metrik yapının lokal koordinatlardaki denklemlerini göstermiştir.

A. T. Ali ve M. Önder, Minkowski uzayında rektifiye spacelike eğrileri eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize etmişlerdir [6]. M. Önder, H. Kocayigit ve M. Kazaz Minkowski uzayında spacelike helisler ile ilgili bazı sonuçlar vermiş ve Minkowski 4-uzayında spacelike helisleri karakterize eden diferansiyel denklemler elde etmişlerdir [14].

J. Welyczko [18], üç boyuttaki normal almost kontak metrik manifold üzerindeki Legendre eğrileri için bazı sonuçları genelleştirmiştir.

B. E. Acet ve S. Y. Perkaş [1], 3-boyutlu (ε, δ) trans-Sasakian manifold üzerindeki Legendre eğrilerinin eğrilik ve torsiyonlarını elde etmişlerdir.

Ji-Eun Li [10], 3-boyutlu hemen hemen kontakt Lorentzian manifold üzerinde Lorentz çarpımını tanımlamıştır. Daha sonra bu çarpımı kullanarak 3-boyutlu Sasakian Lorentzian manifold üzerindeki bir slant Frenet eğrisi boyunca $\frac{\kappa}{\tau-1}$ oranının sabit olduğunu göstermiştir.

A. Yıldırım [19], 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt manifoldlar üzerindeki non-geodezik Frenet eğrilerinin eğriliklerini α ve β dan bağımsız olarak hesaplamıştır.

U. C. De ve K. De [17], bir manifold üzerinde Lorentz metrik kullanarak trans-Sasakian yapı üzerinde çalışmışlardır.

M. A. Akgün [3], 3-boyutlu normal hemen hemen kontakt pseudo-metrik manifoldlar üzerinde Frenet eğrilerini incelemiş ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar vermiştir. 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifoldlar üzerinde Frenet eğrileri için Frenet denklemlerini hesaplamış ve bu eğriler için Frenet elemanlarını vermiştir [4]. Yine 3-boyutlu

kontakt Lorentzian manifoldlar üzerinde bazı eğrilerin Frenet denklemlerini vermiş ve bu eğriler için bazı karakterizasyonlar sunmuştur [5].

Bu tez çalışmasında öncelikle 3-boyutlu normal almost kontakt manifoldlar üzerinde Frenet eğrileri incelenmiştir ve bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için gerekli şartlar verilmiştir. Sonraki bölümde, Lorentzian trans-Sasakian manifoldlar üzerinde Frenet eğrileri ile ilgili karakterizasyonlar incelenmiş ve bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için bazı teoremler verilmiştir. Son olarak da kontakt pseudo-metrik manifoldlar üzerinde bulunan Frenet eğrileri için Frenet elemanları incelenmiş ve bu eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için gerek ve yeter şartlar belirtilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Eğriler

Tanım 2.1.1. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, J: (a, b) \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde

$$\zeta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sürekli dönüşümü $\mathbb{R}^3$ de bir eğridir. Bu dönüşüm bir diferansiyellenebilir dönüşüm ise eğriye bir diferansiyellenebilir eğri denir. $s \in (a, b)$ için $\zeta'(s) = \frac{d\zeta}{ds}$ vektörü, ζ nın teğet vektörü ile adlandırılır ve T harfi ile ifade edilir. $\|\zeta'(s)\| = 1$ olduğunda bu eğri yay parametresi ile verilmiştir. Tüm reguler eğriler yay parametresi ile ifade edilebilir. Dolayısıyla bu parametre ile ifade edilebilirler [12].

Tanım 2.1.2. $\zeta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ yay parametresiyle verilen bir eğri olmak üzere $\kappa(s) = \|\zeta''(s)\|$ pozitif değerli reel sayısı ζ eğrisinin s noktasındaki eğriliği şeklinde adlandırılır [12].

Eğer ζ eğrisi $\mathbb{R}^3$ de bir doğru, ayrıca x ve w, $\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler ve $\|x\| = 1$ olmak üzere,

$$\zeta(s) = xs + w$$

tipindedir ve ζ doğrusunun eğriliği sıfırdır ($\kappa = 0$). Eğriliğin sıfırdan farklı olduğu noktalarda ise,

$$\zeta''(s) = \kappa(s).N(s)$$

denklemleri ile verilen $\zeta''(s)$ ile aynı yönde tanımlı $N(s)$ birim vektörü mevcuttur.

$$\|\zeta'(s)\| = 1$$

olduğu için $\zeta'(s)$ ve $N(s)$ birbirine diktir. Buradan $\langle \zeta'(s), N(s) \rangle = 0$ gelir. $N(s)$ vektörü ζ eğrisinin birim normali diye adlandırılır. $\{T, N\}$ çiftinin gerdiği düzlem ise ζ nın oskülatör düzlemi olarak adlandırılır.

Eğriliğin sıfır olduğu ($\kappa = 0$) noktalarda birim normal vektörü tanımsız olduğu için oskülatör düzlem tanımsızdır.

$\zeta''(s) = 0$ olan $s \in J$ noktası birinci dereceden tekil nokta olarak ifade edilir.

Biz bundan sonrası için birinci dereceden tekil noktaya sahip olmayan eğriler ile üzerinde çalışacağız. Bu durumda

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad (2.1)$$

ile ifade edilebilir. $\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpım $\wedge$ olmak üzere,

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

vektörü oskulator düzleme ortogonaldır. $B(s)$ vektörü ζ eğrisinin binormal vektörüdür.

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olduğu için,

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$$

denklemini elde edilir. $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$, $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$ eşitliklerinden $B'(s)$ vektörünün $N(s)$ vektörüne paralel olduğu sonucuna ulaşırız.

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlayan bir $\tau(s)$ fonksiyonu bulunabilir. Bu $\tau(s)$ fonksiyonu ζ eğrisinin, $\zeta(s)$ noktasındaki burulması şeklinde adlandırılır.

$B(s) = T(s) \wedge N(s)$ eşitliğinde her iki tarafta $T(s)$ ile sağdan vektörel çarpım uygulanırsa, $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ eşitliği gelir. Buradan $N(s)$ nin türevi alınır;

$$N'(s) = B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s)$$

bulunur. (2.1) ve (2.2) kullanılınc;

$$N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. (2.1), (2.2), (2.3) denklemlerinden

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = \tau N$$

olarak bulunur. Bu formüllere ζ eğrisinin Frenet formülleri adı verilir.

$\{T, B\}$ ikilisi tarafından gerilen düzlem rektifiyan düzlem olarak adlandırılır. $\{N, B\}$ ikilisi tarafından gerilen düzleme de normal düzlem adı verilir. N vektörüne ζ nın asli normalı denir. B vektörüne ise ζ nın binormalı adı verilir.

$R = \frac{1}{\kappa}$ ya, ζ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki eğrilik yarıçapı adı verilir. Eğrilik sıfır ise ($\kappa = 0$) $\mathbb{R}^3$ de eğri geodezik olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^3$ de doğrular geodeziklerdir. Burulma sıfır ise ($\tau = 0$) ζ eğrisi düzlemsel olarak adlandırılır.

$\zeta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere ζ eğrisinin $t \in J$ noktasındaki eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{\|\zeta' \wedge \zeta''\|}{\|\zeta'\|^3}$$

şeklinde bulunur ve burulması

$$\tau(t) = \frac{\det(\zeta', \zeta'', \zeta''')}{\|\zeta' \wedge \zeta''\|^2}$$

dır. $\zeta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\zeta(t) = (x(t), y(t))$ ile verilen bir eğri olmak üzere, ζ nın eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

ile bulunur [11].

ζ Frenet eğrisi ikinci dereceden olmak üzere $\kappa = \text{sabit} > 0$ şartı sağlanıyorsa ζ ya $\bar{M}$ de bir çember adı verilir. Ayrıca üçüncü dereceden bir Frenet eğrisinde $\kappa = \text{sabit}$ ve $\tau = \text{sabit}$ ise ζ ya bir helis adı verilir. $\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$ ise ζ ya genelleştirilmiş helis adı verilir [12].

2.2. Rieman Manifoldlar

Tanım 2.2.1 $\bar{M}$, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(\bar{M})$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\bar{g}: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-linear ve pozitif tanımlı bir $\bar{g}$ dönüşümüne $\bar{M}$ üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve $(\bar{M}, \bar{g})$ ikiliyle verilen manifolda Riemann manifold denir [16]. $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifoldu için bir p noktasındaki yerel koordinat sistemi $(x^1, \dots, x^n)$ şeklinde verilsin.

$$W_1 = \sum W_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W_2 = \sum W_2^j \frac{\partial}{\partial x^j}, p \in \bar{M} \text{ noktasındaki tanjant vektörler olmak üzere,}$$

$$g(W_1, W_2) = \sum_{i,j=1}^n W_1^i W_2^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum g_{ij} dx^i(W_1) dx^j(W_2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$dx^i(W_1) = W_1(x^i) = W_1^i \text{ ve } dx^j(W_2) = W_2(x^j) = W_2^j$$

dir. İlâveten $g^{ij} = g(dx^i, dy^j)$ olmak üzere $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ dır [16].

Tanım 2.2.2. $\bar{M}$, diferansiyellenebilir bir manifold olsun. ∇ ise $\bar{M}$ de lineer bir koneksiyon olmak üzere her $W_1, W_2 \in \chi(\bar{M})$ için

$$T(W_1, W_2) = \nabla_{W_1} W_2 - \nabla_{W_2} W_1 - [W_1, W_2]$$

şeklinde tanımlanan $T: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$ ifadesi torsiyon tensörü olarak adlandırılır. T torsiyon tensörü anti-simetriktir yani;

$$T(W_1, W_2) = -T(W_2, W_1)$$

eşitliği vardır. İlâveten her $W_1, W_2 \in \chi(\bar{M})$ ve $f, g \in C^\infty$ fonksiyonları için

$$T(fW_1, gW_2) = fgT(W_1, W_2)$$

olur [16].

Tanım 2.2.3. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir Rieman manifold olmak üzere, $\bar{M}$ de ∇ yı lineer konneksiyon olarak tanımlayalım. Bu durumda her $W_1, W_2, W_3 \in \chi(\bar{M})$ için,

$$(\nabla_{W_1} \bar{g})(W_2, W_3) = W_1 \bar{g}(W_2, W_3) - \bar{g}(\nabla_{W_1} W_2, W_3) - \bar{g}(W_2, \nabla_{W_1} W_3)$$

dir. $(\nabla_{W_1} \bar{g}) = 0$ oluyorsa ∇ ya metrik konneksiyon adı verilir. $\bar{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı torsiyonsuz metrik konneksiyona ise Levi-Civita konneksiyonu adı verilir [15].

Tanım 2.2.4. $\bar{M}$ bir Rieman manifold olmak üzere her $W_1, W_2, W_3 \in \chi(\bar{M})$ için,

$$R(W_1, W_2)W_3 = \nabla_{W_1} \nabla_{W_2} W_3 - \nabla_{W_2} \nabla_{W_1} W_3 - \nabla_{[W_1, W_2]} W_3 \quad (2.4)$$

ile tanımlı $R(W_1, W_2): \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$ dönüşümü ise $\bar{M}$ Riemann manifoldunun eğrilik tensörü olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.2.5. $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifold olsun. Eğer $\bar{M}$, c sabit eğrilikli ise her W_1, W_2 ve W_3 vektör alanları için

$$R(W_1, W_2)W_3 = c[\bar{g}(W_2, W_3)W_1 - \bar{g}(W_1, W_3)W_2]$$

dir [16].

Tanım 2.2.6. $(\bar{M}, \bar{g})$, n -boyutlu Riemann manifold olmak üzere, $\bar{M}$ manifoldunun herhangi p noktasındaki tanjant uzayı $T_p\bar{M}$ ile verilsin. $T_p\bar{M}$ uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı ise Q olsun. Q düzlemi u ve v birim vektörleri tarafından gerilmek üzere,

$$K(Q) = K(u, v) = \frac{\bar{g}(R(u, v)v, u)}{\bar{g}(u, u)\bar{g}(v, v) - \bar{g}(u, v)^2}$$

ifadesine $\bar{M}$ manifoldunun Q ya göre kesit eğriliği adı verilir [15].

Teorem 2.2.7. $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifold olmak üzere, K Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu verilsin. Her $W_1, W_2 \in \chi(\bar{M})$ için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır [15]:

- 1) $R(W_1, W_2)W_3 + R(W_3, W_1)W_2 + R(W_2, W_3)W_1 = 0$ (I. Bianchi özdeşliği)
- 2) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = -K(W_2, W_1, W_3, W_4)$
- 3) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = -K(W_1, W_2, W_4, W_3)$
- 4) $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = K(W_3, W_4, W_1, W_2)$.

Tanım 2.2.8. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir Riemann manifold olsun. R yi $\bar{M}$ nin eğrilik tensör alanı olarak tanımlayalım. Her $W_1, W_2 \in \chi(\bar{M})$ için R nin izi

$$S = \text{iz}\{R \rightarrow R(W_1, \cdot)W_2\}$$

değerine $\bar{M}$ manifoldunun ∇ ya göre Ricci eğriliği adı verilir [16].

Tanım 2.2.9. $\bar{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $q \in \bar{M}$ noktasına $T_q\bar{M}$ nin bir D_q alt uzayını karşılık olarak getiren

$$\begin{aligned} D: \bar{M} &\rightarrow \cup T_q\bar{M} \\ q &\rightarrow D_q \subset T_q\bar{M} \end{aligned}$$

dönüşümüne distribüsyon adı verilir. $W_1, \dots, W_n$ vektör alanları ile gerilen D_q varsa D ye diferansiyellenebilir distribüsyon denir. $D_q = T_q\bar{M}$ şartı sağlanıyorsa D ye

integrallenebilir denir. Her $W_1, W_2 \in \Gamma(D)$ için $[W_1, W_2] \in \Gamma(D)$ ise D ye involutive denir. $\bar{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $M, \bar{M}$ nin bir alt manifoldu olsun.

$\forall p \in M$ için D nin bir p noktasını ihtiva eden bir maksimal integral manifoldu varsa D integrallenebilir olarak tanımlanır [15].

Tanım 2.2.10. $\bar{M}$ bir manifold, W_1 ise $\bar{M}$ de bir vektör olmak üzere, ϕ_t 1-parametreye sahip dönüşüm grubu olsun.

$$(L_{W_1}K)_{w_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_{w_1} - (\phi_t K)_{w_1}]$$

ifadesini K tensör alanının W_1 vektör alanına göre Lie türevi şeklinde ifade edilir [16].

Tanım 2.2.11. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir Riemann manifold olsun. $\bar{M}$ manifoldu üzerinde bir W_1 vektör alanı alalım. $\bar{g}, W_1$ in bir parametrelili dönüşüm grubu altında değişmez(invariant), yani

$$L_{W_1} \bar{g} = 0$$

ise W_1 vektör alanına $\bar{g}$ Riemann metriğinin bir Killing vektör alanı adı verilir. W_1 bir Killing vektör alanı olarak alınırsa $\bar{M}$ de W_2 ve W_3 vektör alanları için

$$(L_{W_1} \bar{g})(W_2, W_3) = \bar{g}(\nabla_{W_1} W_2, W_3) + \bar{g}(\nabla_{W_3} W_1, W_2) = 0$$

şartı sağlanır [15].

2.3.Kontak (Değme) Manifoldlar

Tanım 2.3.1. $\bar{M}$, $(2n + 1)$ -boyutlu ve türevlenebilir bir manifold olmak üzere; $\bar{M}$ manifoldu üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlayan η 1-formu varsa $\bar{M}$ manifolduna kontakt manifold denir. η formuna ise bir kontakt form adı verilir [16].

Tanım 2.3.2. $(\bar{M}, \eta)$ ikilisi kontakt (değme) manifold olmak üzere,

$$D = \{W_1 \in T\bar{M} | \eta(W_1) = 0\}$$

şeklinde ifade edilen distribüsyona kontakt distribüsyon denir [16].

Tanım 2.3.3. $\bar{M}$ yönlendirilebilir bir manifold olmak üzere, $(\bar{M}, \eta)$ kontakt manifoldu üzerinde

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, W_1) = 0$$

şeklinde bir tek ξ vektörü varsa bu vektör alanını ise η kontakt yapısının karakteristik vektör alanı şeklinde ifade ederiz. $\bar{M}$ üzerinde,

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \quad (2.5)$$

koşullarını gerçekleyen φ (1,1) tensörü, η 1-formu ve ξ vektörü mevcutsa (φ, ξ, η) üçlüsüne $\bar{M}$ de hemen hemen kontakt yapı adı verilir [16].

$(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontakt manifold olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır [11].

$$\xi\eta = 0$$

$$\eta \circ \varphi = 0$$

$$\text{rank} \varphi = 2n.$$

Tanım 2.3.4. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ almost kontak manifold olmak üzere, $\bar{M}$ üzerinde herhangi W_1, W_2 vektör alanları için

$$\bar{g}(\varphi W_1, \varphi W_2) = \bar{g}(W_1, W_2) - \eta(W_1)\eta(W_2) \quad (2.6)$$

koşulunu sağlayan bir $\bar{g}$ Riemann metriği varsa $\bar{M}$ ye $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ almost kontak metrik yapısındadır veya $\bar{M}$ ye almost kontak metrik manifolddur denir. Burada $\bar{g}$ metriği almost kontak yapıya uyumlu metrik adı verilir [16].

Tanım 2.3.5. $\bar{M}$ üzerinde $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ almost kontak yapısı verilsin. $\bar{M}$ üzerinde herhangi W_1, W_2 vektör alanları için

$$\phi(W_1, W_2) = g(W_1, \varphi W_2)$$

ile tanımlanan (0,2)-tipindeki ϕ dönüşümüne $\bar{M}$ nin temel iki formu denir [16].

$(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$, $(2n + 1)$ -boyutlu almost kontak manifold olmak üzere, $\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu ele alınsın. $\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldundaki vektör alanı $\left(W_1, f \frac{d}{dt}\right)$ ile ifade edilir. Burada W_1 , $\bar{M}$ de vektör; $t, \mathbb{R}$ için koordinat; f de $\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda tanımlı bir fonksiyonu ifade eder.

$\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunun herhangi bir tanjant uzayı üzerinde J lineer dönüşümü;

$$J\left(W_1, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi W_1 - f\xi, \eta(W_1) \frac{d}{dt}\right)$$

ile ifade edelim. Bu şekilde tanımlanan J , $J^2 = -I$ dır ve J , $\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda bir almost kompleks yapıdır.

J almost kompleks yapısı için Nijenhuis tensörü

$$N_J(W_1, W_2) = J^2[W_1, W_2] + [JW_1, JW_2] - J[JW_1, W_2] - J[W_1, JW_2]$$

ile tanımlıdır [11].

Tanım 2.3.6. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ bir almost kontak manifold olmak üzere, $N_J = 0$ ise J almost kompleks yapısına integrallenebilirdir adı verilir. $\bar{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda J almost kompleks yapısı integrallenebilir olduğunda, (φ, ξ, η) almost kontak yapısı normaldir şeklinde adlandırılır [16].

φ için Nijenhuis tensörü

$$N_\varphi(W_1, W_2) = \varphi^2[W_1, W_2] + [\varphi W_1, \varphi W_2] - \varphi[\varphi W_1, W_2] - \varphi[W_1, \varphi W_2]$$

şeklinde tanımlanır. $\bar{M}$ üzerinde W_1, W_2 vektör alanları için

$$N_J((W_1, 0), (W_2, 0)) = \left(N_\varphi(W_1, W_2) + 2d\eta(W_1, W_2)\xi, ((L_{\varphi W_1}\eta)W_2 - (L_{\varphi W_2}\eta)W_1) \frac{d}{dt}\right)$$

dır ve

$$N_J\left((W_1, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) = \left((L_\xi \varphi)W_1, (L_\xi \eta)W_1 \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde bulunur. Eğer

$$N^{(1)}(W_1, W_2) = N_\varphi(W_1, W_2) + 2d\eta(W_1, W_2)\xi$$

$$N^{(2)}(W_1, W_2) = (L_{\varphi W_1}\eta)W_1 - (L_{\varphi W_2}\eta)W_1$$

$$N^{(3)}(W_1) = (L_\xi \varphi)W_1$$

$$N^{(4)}(W_1) = (L_\xi \eta)W_1$$

alınırsa $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ tensörlerinin sıfır olduğunda $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ almost kontak manifoldu normaldir. Bunun yanında belirtelim ki $N^{(1)} = 0$ olduğu zaman $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olur. O halde $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ almost kontak manifoldunun normal olması demek $N^{(1)} = 0$ olması demektir [8].

Önerme 2.3.7. $2n+1$ -boyutlu $\bar{M}$ manifoldu üzerinde verilen (φ, ξ, η) almost kontak yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

şartını sağlamasıdır [16].

Önerme 2.3.8. $\bar{M}^{2n+1}$, her bölgede

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0$$

şartını sağlayan bir genel η 1-formu ve genel Φ 2-formu ile uyumlu diferansiyellenebilir manifold olsun. O halde $\bar{M}^{2n+1}$ için almost kontak yapısı vardır. Eğer $\bar{M}^{2n+1}$ için bir η kontak formu bulunabiliyorsa,

$$\Phi = d\eta$$

olacak şekilde bir $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ almost kontak metrik yapısına sahiptir [16].

Lemma 2.3.9. $\bar{M}$ nin bir $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ almost kontak metrik yapısı için φ ye göre kovaryant türev

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\nabla_{W_1}\varphi)W_2, W_3) &= 3d\Phi(W_1, \varphi W_2, \varphi W_3) - 3d\Phi(W_1, W_2, W_3) \\ &+ \bar{g}(N^{(1)}(W_2, W_3), \varphi W_1) + \eta(W_1)N^{(2)}(W_2, W_3) \\ &+ 2d\eta(\varphi W_2, W_1)\eta(W_3) - 2d\eta(\varphi W_3, W_1)\eta(W_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ile verilir. Burada W_1, W_2 ve W_3 , $\bar{M}$ üzerindeki vektörler, ξ karakteristik vektörü ve Φ temel 2-formdur [8].

Bir kontak metrik manifoldda $N^{(2)} = 0$ olacağından ve (2.7) kullanılırsa, (2.8) denklemi

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\nabla_{W_1}\varphi)W_2, W_3) &= \bar{g}(N^{(1)}(W_2, W_3), \varphi W_1) + 2d\eta(\varphi W_2, W_1)\eta(W_3) \\ &- 2d\eta(\varphi W_3, W_1)\eta(W_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. (2.5) eşitliğinde W_1 yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned}
2\bar{g}\left((\nabla_{\xi}\varphi)W_2, W_3\right) &= \bar{g}(N^{(1)}(W_2, W_3), \varphi\xi) + 2d\eta(\varphi W_2, \xi)\eta(W_3) \\
&\quad - 2d\eta(\varphi W_3, \xi)\eta(W_2) \\
&= 2\bar{g}(\varphi Y, \varphi\xi)\eta(Z) - 2\bar{g}(\varphi Z, \varphi\xi)\eta(Z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan bir kontak metrik manifoldda

$$\nabla_{\xi}\varphi = 0 \quad (2.10)$$

sonucu elde edilir [16].

2.4. Sasakian Manifolds

Tanım 2.4.1. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontak metrik manifold ve $\bar{M}$ nin yapısı normalse $\bar{M}$ için Sasakian yapı vardır. Burada $\bar{M}$ ye Sasakian manifold adı verilir [16].

Teorem 2.4.2. $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir almost kontak metrik manifold olmak üzere $\bar{M}$ bir Sasakian yapıya sahiptir ancak ve ancak $\bar{M}$ üzerinde tanımlı W_1 ve W_2 vektör alanları için

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_2 = \bar{g}(W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)W_1 \quad (2.11)$$

sağlanmasıdır [8].

$\bar{M}$ için (2.11) den

$$\nabla_{W_1}\xi = -\varphi W_1$$

dir [16].

Lemma 2.4.3. $\bar{M}$ Sasakian manifoldunda, ξ vektörüne ortogonal olan W_1 birim vektörü için

$$R_{W_1\xi}W_1 = -\xi$$

şartı sağlanır [16].

Önerme 2.4.4. $\bar{M}$ Sasakian manifoldunda,

$$R_{W_1 W_2} \xi = \eta(W_2)W_1 - \eta(W_1)W_2 \quad (2.12)$$

şartı sağlanır [16].

Örnek 2.4.5. (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ ün standart koordinat sistemi $\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$ ve $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayında φ dönüşümünün matrisi $\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı göz önüne alınarak

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2}(dz - ydx) \left(2\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1$$

dir.

$$W_1 = W_{11}\frac{\partial}{\partial x} + W_{12}\frac{\partial}{\partial y} + W_{13}\frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere

$$\varphi W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ W_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{12} \\ -W_{11} \\ yW_{12} \end{pmatrix}$$

dir. Tekrar φ uygulanırsa

$$\varphi^2 W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{12} \\ -W_{11} \\ yW_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{11} \\ -W_{12} \\ -yW_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi^2 W_1 &= (-W_{11}, -W_{12}, -yW_{11}) \\ &= (-W_{11}, -W_{12}, -W_{13} + W_{13} - yW_{11}) \\ &= (-W_{11}, -W_{12}, -W_{13}) + (0, 0, W_{13} - yW_{11}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\eta(W_1) = \frac{1}{2}(dz - ydx) \left(W_{11}\frac{\partial}{\partial x} + W_{12}\frac{\partial}{\partial y} + W_{13}\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(W_{13} - yW_{11})$$

olduğundan

$$\varphi^2 W_1 = -W_1 + \eta(W_1)\xi$$

elde edilir. Buradan (φ, ξ, η) yapısının $\mathbb{R}^3$ de tanımlı bir hemen hemen kontakt yapı olduğu görülür. Eğer $\bar{g}$ metriği

$$\bar{g} = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \eta \otimes \eta$$

şeklinde alırsak standart baza göre $\bar{g}$ nin matrisi

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bar{g}(W_1, \xi) &= \frac{1}{4} (W_{11} \quad W_{12} \quad W_{13}) \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (W_{11} \quad W_{12} \quad W_{13}) \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (-2yW_{11} + 2W_{13}) \\ &= \frac{1}{2} (-yW_{11} + W_{13}) \\ &= \eta(W_1) \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} d\eta(W_1, W_2) &= \frac{1}{2} \{W_1\eta(W_2) - W_2\eta(W_1) - \eta([W_1, W_2])\} \\ &= \frac{1}{2} \{(\nabla_{W_1}\eta)(W_2) - (\nabla_{W_2}\eta)(W_1)\} \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{g}(\nabla_{W_1}\xi, W_2) - \bar{g}(\nabla_{W_2}\xi, W_1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{ \bar{g}(\nabla_{W_1} \xi, W_2) + \bar{g}(W_2, \nabla_{W_1} \xi) \} \\
&= \bar{g}(\nabla_{W_1} \xi, W_2) \\
&= \bar{g}(-\varphi W_1, W_2) \\
&= \bar{g}(W_1, \varphi W_2)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ki $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ manifoldu bir kontakt metrik manifold olur.

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{g}^{kr} \left\{ \frac{\partial \bar{g}_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x_r} \right\} \quad (2.13)$$

ile tanımlanan konneksiyon katsayılarından

$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}y, \quad \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{13}^2 = -\frac{1}{2}, \Gamma_{11}^2 = -y, \quad \Gamma_{12}^3 = -\frac{(1-y^2)}{2}$$

olarak bulunur. $E_1 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), E_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ olmak üzere $\{E_1, E_2, \xi\}, \bar{g}$ ye göre bir ortonormal bazdır ve ayrıca

$$\varphi E_1 = -E_2, \varphi E_2 = E_1, \varphi \xi = 0$$

dır. Elde edilen eşitlikleri kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} E_2 &= -\xi, \nabla_{E_2} E_1 = \xi \\
\nabla_{E_2} \xi &= \nabla_{\xi} E_2 = -E_1, \quad \nabla_{E_1} \xi = \nabla_{\xi} E_1 = E_2
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Şimdi

$$W_1 = aE_1 + bE_2 + c\xi$$

$$W_2 = \bar{a}E_1 + \bar{b}E_2 + \bar{c}\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\nabla_{W_1} \varphi)W_2 &= \nabla_{W_1} \varphi W_2 - \varphi \nabla_{W_1} W_2 \\
&= (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c})\xi - a\bar{c}X - b\bar{c}Y - c\bar{c}\xi
\end{aligned}$$

$$= \bar{g}(W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)W_1$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ manifoldu Sasakian manifolddur [7].

$(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$, üç boyutlu almost kontak metrik manifold ise $\bar{M}$ üzerindeki herhangi W_1, W_2 vektör alanları için

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_2 = \bar{g}(\varphi\nabla_{W_1}\xi, W_2)\xi - \eta(W_2)\varphi\nabla_{W_1}\xi \quad (2.14)$$

bulunur. ∇ , $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyondur.

Üç boyutlu almost kontak metrik manifoldu normaldir ancak ve ancak

$$\nabla_{\varphi W_1}\xi = \varphi\nabla_{W_1}\xi \quad (2.15)$$

olmasıdır. Bu eşitliğin eş değeri olarak,

$$\nabla_{W_1}\xi = \alpha(W_1 - \eta(W_1)\xi) - \beta\varphi W_1 \quad (2.16)$$

olmasıdır. Burada α, β fonksiyonları

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{iz}\{W_1 \rightarrow \nabla_{W_1}\xi\}, \beta = \frac{1}{2} \text{iz}\{W_1 \rightarrow \varphi\nabla_{W_1}\xi\}$$

şeklindedir. (2.16) eşitliği (2.14) eşitliğinde yerine yazarsak;

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_2 = \beta(\bar{g}(W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)W_1) + \alpha(\bar{g}(\varphi W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)\varphi W_1) \quad (2.17)$$

elde edilir.

$\bar{M}$ normal almost kontak metrik manifoldunu ele alalım. $\bar{M}$ manifoldunda tanımlı temel 2-form kapalı ise $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı quasi-Sasakian bir yapıdır ve $\bar{M}$ manifolduna da bir quasi-Sasakian manifold adı verilir.

Bu manifoldda $\alpha = 0$ olması durumunda $\bar{M}$ quasi-Sasakian manifold olur. O halde (2.16) dan

$$\nabla_{W_1}\xi = -\beta\varphi W_1 \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir. O halde quasi-Sasakian manifoldlarda $\beta = 1$ olduğunda $\bar{M}$ bir Sasakian manifold olarak tanımlanır[18].

2.5. Lorentzian Trans-Sasakian Manifolds

Bu bölümde $\bar{N}$ 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifoldu inceleyeceğiz. $\bar{N}$, $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g}, \delta)$ δ -almost kontakt metrik yapısı ile verilen bir δ -almost kontakt metrik

manifold olsun. Burada φ , (1,1)-tipinde tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1-formdur. $\bar{g}$ indefinite metriği her $U, V \in \bar{N}$ için aşağıdaki şartları sağlar [4].

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= U + \eta(U)\xi, & \eta(\xi) &= -1 \\ \varphi(\xi) &= 0, & \eta \circ \varphi &= 0 \\ \bar{g}(\xi, \xi) &= -\delta, & \eta(U) &= \delta \bar{g}(U, \xi) \\ \bar{g}(\varphi U, \varphi V) &= \bar{g}(U, V) + \delta \eta(U)\eta(V)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Burada $\delta^2 = 1$ dir. Yani $\delta = \pm 1$ dir. Yukarıda verilen ξ yapısı $\bar{N}$ üzerinde δ -Lorentzian yapı olarak tanımlıdır. Eğer $\delta = 1$ ise manifold alışılmış Lorentzian yapı olur ve ξ vektör alanı timelike olur.

Almost Hermitian manifoldların sınıflandırılmasında, Hermitian manifoldların konformal Kaehler manifoldlarla yakın ilişkili olan bir W_4 sınıfı ortaya çıkar. $C_6 \oplus C_5$ sınıfı (α, β) tipindeki trans-Sasakian yapı ile çakışır. Aslında bu iki alt sınıfın yerel yapısı, yani trans-Sasakian yapının C_6 ve C_5 sınıfı tamamen karakterize edilmiştir. Eğer $(\bar{N} \times \mathbb{R}, J, G)$, W_4 sınıfına ait ise $\bar{N}$ üzerindeki almost kontakt metrik yapıya trans-Sasakian denir. Burada J , $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerinde almost kompleks yapıdır ve $\bar{N}$ üzerindeki her U vektör alanı ile $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerindeki her diferensiyellenebilir fonksiyon

$$J\left(U, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi U - f\xi, \eta(U) \frac{d}{dt}\right)$$

dir [4].

Burada G , $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerinde çarpım metriğidir. Bu durum $\bar{N}$ üzerindeki her U ve V vektör alanları için

$$(\nabla_U \varphi)V = \alpha(\bar{g}(U, V)\xi - \delta\eta(V)U) + \beta(\bar{g}(\varphi U, V)\xi - \delta\eta(V)\varphi U)$$

ile açıklanabilir. Burada ∇ , $\bar{g}$ ye göre Levi-Civita konneksiyonu, α ve β ise N üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

Tanım 2.7.1. $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g}, \delta)$ yapısı ile birlikte bir δ -Lorentzian manifoldu aşağıdaki şartı sağlıyorsa (α, β) tipinde δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold denir.

$$(\nabla_U \varphi)V = \alpha(\bar{g}(U, V)\xi - \delta\eta(V)U) + \beta(\bar{g}(\varphi U, V)\xi - \delta\eta(V)\varphi U)$$

Eğer $\delta = 1$ ise δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold (α, β) tipinde alışılmış Lorentzian trans-Sasakian manifold olur. $(0,0), (0,\beta), (\alpha, 0)$ tipindeki δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold sırasıyla, Lorentzian cosymplectic, Lorentzian β -Kenmotsu ve Lorentzian α -Sasakian manifold olur. Özel olarak $\alpha = 1, \beta = 0$ ve $\alpha = 0, \beta = 1$ olursa δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold, δ -Lorentzian Sasakian manifold ve δ -Lorentzian Kenmotsu manifoldda indirgenir. (2.19) dan

$$\nabla_U \xi = \delta(-\alpha\varphi(U) - \beta(U + \eta(U)\xi))$$

ve

$$(\nabla_U \eta)V = \alpha(\bar{g}(\varphi U, V) + \beta(\bar{g}(U, V) + \delta\eta(U)\eta(V))$$

elde edilir [4].

2.6. 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Manifoldlar

$\tilde{M}$ manifoldunda φ, ξ, η sırasıyla $(1,1), (1,0), (0,1)$ tipinde tensörler olsun. Her $W_1, W_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\varphi^2 W_1 = -W_1 + \eta(W_1)\xi, \quad \eta(\varphi) = 0, \eta(\xi) = 1$$

denklemleri sağlanıyorsa (φ, ξ, η) ya $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde hemen hemen kontakt yapı denir. $\tilde{M}$ manifolduna da almost kontakt manifold denir. $\tilde{M}$ üzerinde tanımlanan η 1-formu

$$\eta \wedge d(\eta) \neq 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa η kontakt formdur ve

$$D_m = \{W_1 \in T_{\tilde{M}}(m) : \eta(W_1) = 0\}$$

iki boyutlu alt uzayına $\tilde{M}$ nin bir kontakt distribüsyonu denir.

$(\varphi, \xi, \eta), \tilde{M}$ üzerinde bir almost kontakt yapı ve g bir Riemann metriği olacak şekilde her $W_1, W_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$g(\varphi W_1, \varphi W_2) = g(W_1, W_2) - \eta(W_1)\eta(W_2)$$

se (φ, ξ, η, g) yapısına bir almost kontakt metrik yapı denir ve $(\tilde{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de bir almost kontakt metrik manifold denir[9]. Böylece $\tilde{M}$ manifoldu,

$$\eta(W_1) = g(W_1, \xi)$$

koşulunu sağlar ve ϕ 2-formu

$$\phi(W_1, W_2) = g(W_1, \phi W_2)$$

şeklinde tanımlanır [13].

$$\chi(\tilde{M}) \times R$$

üzerinde bir J almost kontakt yapısı,

$$J\left(W_1, \lambda \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi W_1 - \lambda \xi, \eta(W_1) \frac{d}{dt}\right),$$

şeklinde tanımlanır. Öyle ki $\left(W_1, \lambda \frac{d}{dt}\right)$, $\tilde{M} \times R$ üzerinde bir teğettir. Burada W_1 ve $\lambda \frac{d}{dt}$ sırasıyla $\tilde{M}$ ve R üzerinde teğettir [13]. Eğer J integrallenebilir veya buna denk olarak,

$$[\phi, \phi](W_1, W_2) + 2d\eta(W_1, W_2)\xi = 0$$

ise $\tilde{M}$ ve (ϕ, ξ, η) normaldir denir. Burada ϕ nin $[\phi, \phi]$ Nijenhuis torsiyonu,

$$[\phi, \phi](W_1, W_2) = [\phi W_1, \phi W_2] + \phi^2[W_1, W_2] - \phi[\phi W_1, W_2] - \phi[W_1, \phi W_2]$$

şeklinde tanımlanır[8].

Herhangi bir $\tilde{M}$ 3-boyutlu hemen hemen kontakt metrik manifoldu için,

$$(\nabla_{W_1} \phi)W_2 = g(\phi \nabla_{W_1} \xi, W_2)\xi - \eta(W_2)\phi \nabla_{W_1} \xi, \quad (2.20)$$

denklemini sağlanır. Burada ∇ , $\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur [13]. Bu $\tilde{M}$ manifoldunun normal olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\nabla_{\phi W_1} \xi = \phi \nabla_{W_1} \xi, \quad (2.21)$$

şartını sağlamasıdır.

$$\nabla_{W_1} \xi = -\alpha \phi^2(W_1) - \beta \phi(W_1) = \alpha(W_1 - \eta(W_1)\xi) - \beta \phi(W_1), \quad (2.22)$$

denklemini (2.21) denkleminde denktir. Burada α ve β fonksiyondur ve

$$\alpha = \frac{1}{2}iz(\nabla\xi), \quad \beta = \frac{1}{2}iz(\varphi\nabla\xi)$$

dir.

(α, β) çifti 3-boyutlu $\tilde{M}$ normal almost kontakt metrik manifoldunun tipi olarak tanımlanır.

Uyarı 1. (2.21) ve (2.22) denklemlerine göre $\nabla_\xi\xi = 0$ dır. Yani ξ bir geodezik eğrinin tanjant vektörüdür.

(2.20) ve (2.22) denklemleri kullanılarak 3-boyutlu $\tilde{M}$ normal almost kontakt metrik manifoldu üzerindeki ∇_φ nin kovaryant diferensiyeli

$$(\nabla_{W_1}\varphi)W_2 = \beta(g(W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)W_1) + \alpha(g(\varphi W_1, W_2)\xi - \eta(W_2)\varphi W_1) \quad (2.23)$$

şeklinde bulunur. $\tilde{M}$ manifoldu

$$2\alpha\beta + \xi[\beta] = 0$$

denklemini sağlar [9].

2.7. Normal Almost Kontakt Pseudo-Metrik Manifolds

$(2n+1)$ -boyutlu smooth bağlantılı $\bar{N}$ manifolduna eğer $\bar{N}$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir φ (1,1) tensör alanı, bir ξ vektör alanı ve bir η 1-formu varsa bir almost kontakt manifold denir [11].

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \eta(\xi) = 1 \quad (2.24)$$

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0.$$

Eğer bir $\bar{g}$ pseudo-Riemann metrik ile uyumlu bir almost kontakt manifold

$$\bar{g}(\varphi W_1, \varphi W_2) = \bar{g}(W_1, W_2) - \eta(W_1)\eta(W_2), \quad (2.25)$$

şartını sağlıyorsa $(\bar{N}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ ye bir almost kontakt pseudo-metrik manifold denir[5].

Burada her $W_1, W_2 \in T\bar{N}$ için $\varepsilon = \mp 1$ dir. (2.20) denkleminde

$$\eta(W_1) = \varepsilon \bar{g}(W_1, \xi) \text{ ve } \bar{g}(\varphi W_1, W_2) = -\bar{g}(W_1, \varphi W_2) \quad (2.26)$$

olduğu görülür.

Özel olarak, bir almost kontakt pseudo-metrik manifold için $\bar{g}(\xi, \xi) = \varepsilon$ dir. Böylece, ξ karakteristik vektör alanı spacelike veya timelike olan ancak lightlike olmayan

bir birim vektör alanıdır. Bir $(\bar{N}, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ almost kontakt pseudo-metrik manifoldun temel 2-formu

$$\phi(W_1, W_2) = \bar{g}(W_1, \varphi(W_2)), \quad (2.27)$$

şeklindedir. Burada $\eta \wedge \phi^n \neq 0$ dır[5]. Bir almost kontakt pseudo-metrik manifold $d\eta = \phi$ olduğunda kontakt pseudo-metrik manifold olarak adlandırılır. Burada

$$d\eta(W_1, W_2) = \frac{1}{2} (W_1\eta(W_2) - W_2\eta(W_1) - \eta([W_1, W_2])) \quad (2.28)$$

dir[16]. Bir $(\bar{N}, \varphi, \xi, \eta, g)$ almost kontakt pseudo-metrik manifoldunda her zaman özel bir $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^n$ yerel pseudo ortonormal bazı vardır. Bu baz yerel φ -bazı olarak adlandırılır. $\bar{N}$, (φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ -boyutlu almost kontakt pseudo metrik manifold olsun ve $\bar{N} \times \mathbb{R}$ manifoldunu göz önüne alalım. $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir vektör alanı $(W_1, f \frac{d}{dt})$ ile gösterilir. Burada $W_1 \in T\bar{N}$, t , $\mathbb{R}$ üzerinde koordinat ve f , $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur. O halde $\bar{N} \times \mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan J yapısı

$$J\left(W_1, f \frac{d}{dt}\right) = (\varphi W_1 - f\xi, \eta(W_1) \frac{d}{dt}), \quad (2.29)$$

bir almost kompleks yapıdır. J almost kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) almost kontakt pseudo-metrik yapısı normaldir denir. J nin integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0, \quad (2.30)$$

olmasıdır. Burada $[\varphi, \varphi]$, φ nin Nijenhuis torsiyonudur [16].

Önerme 2.7.1 Bir almost kontakt pseudo-metrik manifoldun normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(\nabla_{\varphi W_1} \varphi)W_2 - \varphi(\nabla_{W_1} \varphi)W_2 + (\nabla_{W_1} \eta)(W_2)\xi = 0$$

olmasıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonudur [5].

2.8. 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Pseudo-Metrik Manifoldlar

Lemma2.8.1. Bir $\bar{N}$, 3-boyutlu normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldunun normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\nabla_{\varphi W_1} \xi = \varphi \nabla_{W_1} \xi$$

olmasıdır [5].

Teorem 2.8.2. $\bar{N}$, 3-boyutlu normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldu için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $\bar{N}$ normaldir.
- (2) $\bar{N}$ üzerinde

$$\nabla_{W_1} \xi = \alpha \{W_1 - \eta(W_1)\xi\} - \beta \varphi W_1 \quad (2.31)$$

olacak şekilde α, β smooth fonksiyonlarının var olmasıdır.

- (3) $\bar{N}$ üzerinde

$$\begin{aligned} (\nabla_{W_1} \varphi) W_2 &= \alpha \{ \varepsilon \bar{g}(\varphi W_1, W_2) \xi - \eta(W_2) \varphi W_1 \} \\ &\quad + \beta \{ \varepsilon \bar{g}(W_1, W_2) \xi - \eta(W_2) W_1 \} \end{aligned} \quad (2.32)$$

olacak şekilde α, β smooth fonksiyonlarının var olmasıdır [5]. Özel olarak yukarıdaki fonksiyonlar aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$2\alpha = \text{div}(\xi), 2\beta = \text{tr}(\varphi \nabla_{W_1}). \quad (2.33)$$

Sonuç 2.8.3. $\bar{N}$, 3-boyutlu normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldu için, ξ vektör alanı geodeziktir, yani

$$\nabla_{\xi} \xi = 0 \text{ ve } d\eta = \varepsilon \beta \phi$$

dir [5]. (2.32) denkleminde aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.8.4. 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifolduna

- (i) eğer $\alpha = \beta = 0$ ise cosymplectic denir,
- (ii) eğer $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ ise quasi-Sasakian denir ve eğer $\alpha = 0$ ve β sıfırdan farklı sabit ise β -Sasakian pseudo-metrik manifold denir,

(iii) eğer $\beta = 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise almost α -Kenmotsu pseudo-metrik manifold denir. Eğer $\alpha = 1$ ise Kenmotsu pseudo-metrik manifold denir [5].

Lemma 2.8.5. 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold için $\xi(\beta) + 2\alpha\beta = 0$ denklemi sağlanır [5].

3. KONTAKT MANİFOLDLARDA BAZI ÖZEL EĞRİLER

3.1 3-Boyutlu Normal Almost Kontakt Manifold Üzerinde Eğriler

3.1.1. Frenet eğrisi

$\tilde{M}$, 3-boyutlu normal almost kontakt metrik manifold olsun. $\gamma: I \rightarrow \tilde{M}$, s yay parametresiyle verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) Frenet eğrisi ve ∇ , $\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\{\gamma', \varphi\gamma', \xi\}$ bazı kullanılarak aşağıdaki ortonormal baz elde edilebilir.

$$\{e_1 = \gamma', e_2 = \frac{\varphi\gamma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}, e_3 = \frac{\xi - \sigma\gamma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}\} \quad (3.1)$$

dir. Burada,

$$\sigma = g(\gamma', \xi) = \eta(\gamma') \quad (3.2)$$

dir. γ' 'nün kovaryant diferansiyeli,

$$\nabla_{\gamma'} e_1 = \delta e_2 + b e_3 \quad (3.3)$$

dir. Öyle ki,

$$\delta = g(\nabla_{\gamma'} e_1, e_2) \quad (3.4)$$

bir fonksiyondur. Diğer taraftan (3.2) denklemini kullanılarak,

$$b = g(\nabla_{\gamma'} e_1, e_3) = \frac{\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \alpha\sqrt{1-\sigma^2}, \quad (3.5)$$

bulunur.

Burada $\sigma'(s) = \frac{d\sigma(\gamma(s))}{ds}$ dir. Böylece (2.33) ve (3.3) denklemleri kullanılarak

$$\nabla_{\gamma'} e_2 = -\delta e_1 + \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) e_3 \quad (3.6)$$

ve

$$\nabla_{\gamma'} e_3 = -b e_1 - \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) e_2 \quad (3.7)$$

elde edilir. γ' tanjant vektörünün (3.1) denklemindeki baza göre temel formları

$$[\omega_{ij}(\gamma')] = \begin{pmatrix} 0 & \delta & b \\ -\delta & 0 & \beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \\ -b & -\beta - \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

dir ve γ' vektörüne bağlı Darboux vektörü,

$$\omega(\gamma') = \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) e_1 - b e_2 + \delta e_3,$$

dir. Böylece,

$$\nabla_{\gamma'} e_i = \omega(\gamma') \wedge e_i, (1 \leq i \leq 3)$$

denklemini yazılır. Üstelik herhangi bir $Z = \sum_{i=1}^3 \theta^i e_i \in \chi(\tilde{M})$ vektörü için $\tilde{M}$ üzerinde γ' eğrisi bu vektöre bağlıdır. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\nabla_{\gamma'} Z = \omega(\gamma') \wedge Z + \sum_{i=1}^3 e_i [\theta^i] e_i. \quad (3.8)$$

Bu eşitlik $\tilde{M}$ 3-boyutlu normal almost kontakt metrik manifold üzerindeki her ortonormal baz için sağlanır [19].

3.1.2. Frenet elemanları

$\gamma: I \rightarrow \tilde{M}$ eğrisi s yay parametresi ve $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ elemanları ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir Frenet eğrisi olsun. Bu eğrinin Frenet elemanları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$T = \gamma'$ olduğu biliniyor. O halde (3.3) denklemi kullanılarak,

$$\kappa N = \nabla_{\gamma'} e_1 = \delta e_2 + b e_3 \quad (3.9)$$

yazılabilir. (3.5) ve (3.9) denklemleri kullanılarak,

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \alpha \sqrt{1-\sigma^2} \right)^2} \quad (3.10)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\nabla_{\gamma'} N = \left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' e_2 + \frac{\delta}{\kappa} \nabla_{\gamma'} e_2 + \left(\frac{b}{\kappa} \right)' e_3 + \frac{b}{\kappa} \nabla_{\gamma'} e_3 = -\kappa T + \tau B$$

dir. (3.6) ve (3.7) denklemleri düşünülürse,

$$\begin{aligned}\tau B &= \left[\left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' - \frac{b}{\kappa} \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) \right] e_2 \\ &+ \left[\left(\frac{b}{\kappa} \right)' - \frac{\delta}{\kappa} \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) \right] e_3\end{aligned}\quad (3.11)$$

elde edilir. Doğrudan bir hesaplamayla

$$\left[\left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{b}{\kappa} \right)' \right]^2 = \left[\left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' \frac{b}{\kappa} - \frac{\delta}{\kappa} \left(\frac{b}{\kappa} \right)' \right]^2 \quad (3.12)$$

bulunur [19].

(3.11) denkleminde her iki tarafın normu alınır ve (3.11) denkleminde (3.5) ve (3.12) yerine yazılırsa,

$$\tau = \left| \beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \sqrt{\left[\left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{b}{\kappa} \right)' - \frac{\frac{\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \alpha\sqrt{1-\sigma^2}}{\kappa} \right]^2} \right| \quad (3.13)$$

bulunur. Böylece γ eğrisinin Frenet vektör alanları

$$T = \gamma' = e_1, \quad (3.14)$$

$$N = \frac{\delta}{\kappa} e_2 + \frac{b}{\kappa} e_3, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{\delta}{\kappa} \right)' - \frac{b}{\kappa} \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) \right] e_2 \\ &+ \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{b}{\kappa} \right)' - \frac{\delta}{\kappa} \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) \right] e_3\end{aligned}\quad (3.16)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\xi = \sigma T + \frac{b\sqrt{1-\sigma^2}}{\kappa} N + \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\tau} \left[\left(\frac{b}{\kappa} \right)' - \frac{\delta}{\kappa} \left(\beta + \frac{\sigma\delta}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) \right] B \quad (3.17)$$

elde edilir [19].

3.1.3. 3-boyutlu normal almost kontakt manifoldlar üzerinde yatan eğriler

Şimdi 3-boyutlu normal almost kontakt metrik manifoldunun bazı alt uzaylarında yatan Frenet eğrilerinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Bu alt uzaylar $Sp\{e_1, e_2\}$, $Sp\{e_1, e_3\}$ ve $Sp\{e_2, e_3\}$ dir. $\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir slant eğri ve ∇ , $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\{\zeta', \varphi\zeta', \xi\}$ bazından $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını elde ederiz ve bu bazın tanımını ilk bölümde vermiştik.

Durum 3.1.1 Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta = m(s)e_1 + n(s)e_2 \quad (3.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n, s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.18) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.3) ve (3.6) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta' = (m' - n\delta)e_1 + (m\delta + n')e_2 + \left(m\beta + n\left(\beta + \frac{\cos\theta\delta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\right)\right)e_3 \quad (3.19)$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$ ve $\mu = -\alpha\sqrt{1-\cos^2\theta}$. Daha sonra;

$$\begin{cases} m' - n\delta = 1 \\ m\delta + n' = 0 \\ m\beta + n\left(\beta + \frac{\cos\theta\delta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\right) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $m = -\frac{n'}{\delta}$ ve m'nin değeri yukarıdaki diferensiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\delta}\frac{dn}{ds}\right) + n\delta = -1$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $t = \int_0^s \delta ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2n}{ds^2} + n = -1$$

denklemini elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü yapılırsa,

$$n = c_1 \cos\left(\int_0^s \delta ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \delta ds\right) - 1 \quad (3.20)$$

şeklindedir.

$$m\delta + n' = 0$$

denkleminde;

$$m = c_1 \sin\left(\int_0^s \delta ds\right) + c_2 \cos\left(\int_0^s \delta ds\right) \quad (3.21)$$

bulunur.

Teorem 3.1.2. $\bar{N}$, üç boyutlu bir normal almost kontak metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= (c_1 \sin \int_0^s \delta ds + c_2 \cos \int_0^s \delta ds)e_1 \\ &\quad + (c_1 \cos \int_0^s \delta ds + c_2 \sin \int_0^s \delta ds - 1)e_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.1.3. Şimdi ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.23)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.23) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.3) ve (3.7) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= (m' - nb)e_1 + \left(m\delta - n\left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}\right)\right)e_2 \\ &\quad + (mb + n')e_3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ dır.

Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m' - nb = 1 \\ m\delta + n\left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}\right) = 0, \\ mb + n' = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $m = \frac{-n'}{b}$ denklemi m de yerine yazılırsa;

$$n = c_1 \cos\left(\int_0^s bds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s bds\right) - 1 \quad (3.25)$$

$$m = c_1 \sin\left(\int_0^s bds\right) + c_2 \cos\left(\int_0^s bds\right) \quad (3.26)$$

bulunur.

Teorem 3.1.4. $\bar{N}$, üç boyutlu bir normal almost kontak metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left(c_1 \sin \int_0^s bds + c_2 \cos \int_0^s bds \right) e_1 \\ & + (c_1 \cos \int_0^s bds + c_2 \sin \int_0^s bds - 1) e_3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.1.5. Burada ise ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.28)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n, s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.28) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.6) ve (3.7) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & (-m\delta - nb)e_1 + \left(m' - n \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) \right) e_2 \\ & + \left(m \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) + n' \right) e_3 \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} -m\delta - nb = 1 \\ m' - n \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) = 0 \\ m \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) + n' = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Yukarıdaki diferensiyel denklemler çözülürse;

$$n = c_1 \cos \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) + c_2 \sin \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) \quad (3.31)$$

ve

$$m = c_1 \sin \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) + c_2 \cos \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) \quad (3.32)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart,

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left[c_1 \sin \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) \right. \\ & \left. + c_2 \cos \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) \right] e_2 \\ & + \left[c_1 \cos \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) + c_2 \sin \left(\int_0^s \left(\beta + \frac{\cos \theta \delta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) ds \right) \right] e_3 \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir Legendre eğri ve $\bar{V}$, $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. O halde aşağıdaki durumlar oluşur.

Durum 3.1.7. Bu durumda ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_2 \quad (3.34)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.34) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.3) ve (3.6) denklemlerini kullanırsak,

$$\zeta'(s) = (m'(s) - n(s)\delta)e_1 + (m(s)\delta + n'(s))e_2 + (m(s)b + \beta)e_3 \quad (3.35)$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha$ dır. Daha sonra

$$\begin{cases} m' - n\delta = 1 \\ m\delta + n' = 0 \\ mb + \beta = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Yukarıdaki diferensiyel denklemler çözülürse,

$$m = -\frac{1}{b}, \quad \beta = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.36)$$

ve

$$n = \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)' - 1 \right] \frac{1}{\delta} \quad (3.37)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\zeta(s) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) e_1 + \frac{1}{\delta} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)' - 1 \right] e_2 \quad (3.38)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.1.9. Şimdi ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.39)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.39) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.3) ve (3.7) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= (m'(s) - n(s)\mu)e_1 + (m(s)v - n(s)\beta)e_2 \\ &\quad + (m(s)\mu + n'(s))e_3 \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1, \mu = -\alpha$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m' - nb = 1 \\ m\delta + n\beta = 0, \\ mb + n' = 0, \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{\delta}n\beta \Rightarrow m = \frac{\beta}{\delta}n.$$

Yukarıdaki diferensiyel denklem çözülürse,

$$n = e^{\int \frac{\beta\alpha}{\delta} dt} \quad (3.41)$$

$$m = \left(\frac{\beta}{\delta} e^{\int \frac{\beta\alpha}{\delta} dt} \right) \quad (3.42)$$

bulunur.

Teorem 3.1.10. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\zeta = \left(\frac{\beta}{\delta} e^{\int \frac{\beta\alpha}{\delta} dt} \right) e_1 + \left(e^{\int \frac{\beta\alpha}{\delta} dt} \right) e_3 \quad (3.43)$$

şeklinde olmasıdır.

Durum 3.1.11. Burada ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.44)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.44) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.6) ve (3.7) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (-m(s)\delta - n(s)b)e_1 + (m'(s) - n(s)\beta)e_2 + (m(s)\beta + n'(s))e_3 \quad (3.45)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} -m\delta - nb = 1 \\ m' - n\beta = 0 \\ m\beta + n' = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-n'}{\beta}, \quad \left(-\frac{n'}{\beta} \right)' - n\beta = 0.$$

Yukarıdaki diferensiyel denklemler çözülürse,

$$n(s) = c_1 \cos\left(\int_0^s \beta ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \beta ds\right) \quad (3.46)$$

ve

$$m(s) = -\frac{1}{\delta} \left[1 - b(c_1 \cos\left(\int_0^s \beta ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \beta ds\right)) \right] \quad (3.47)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.12. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart,

$$\zeta(s) = -\frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \left(1 + bc_1(\cos \int_0^s \beta ds) + bc_2(\sin \int_0^s \beta ds)\right) e_2 \\ + (c_1 \cos(\int_0^s \beta ds) + c_2 \sin(\int_0^s \beta ds)) e_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

3.2. Lorentzian Trans-Sasakian Manifoldlar Üzerinde Eğriler

3.2.1. Frenet eğrileri

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi 3-boyutlu $\bar{N}$ Lorentzian manifold üzerinde birim hızlı bir eğri olsun öyle ki, $\bar{g}(\zeta', \zeta') = \varepsilon_1 = \pm 1$ dir. ε_1 sabiti ζ eğrisinin casual karakteridir. $\bar{g}(n, n) = \varepsilon_2$ ve $\bar{g}(b, b) = \varepsilon_3$ ifadeleri ζ eğrisinin 2. ve 3. casual karakterleridir. Böylece $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -\varepsilon_3$ dir.

Birim hızlı bir ζ eğrisinin casual karakteri 1 olursa eğri spacelike olur, -1 olursa eğri timelike olur. Birim hızlı bir ζ eğrisi $\bar{g}(\zeta', \zeta') \neq 0$ şartını sağlıyorsa Frenet eğrisi olarak adlandırılır. Bir ζ Frenet eğrisi boyunca $\{t = \zeta', n, b\}$ ortonormal çatısı vardır. O halde Frenet-Serret denklemleri aşağıdaki gibidir [4].

$$\nabla_{\zeta'} t = \varepsilon_2 \kappa n$$

$$\nabla_{\zeta'} n = -\varepsilon_1 \kappa t - \varepsilon_3 \tau b$$

$$\nabla_{\zeta'} b = \varepsilon_2 \tau n$$

Burada $\kappa = |\nabla_{\zeta'} \zeta'|$ birinci eğrilik ve τ ise ikinci eğriliktir. t, n, b vektör alanları sırasıyla tanjant vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı olarak adlandırılır.

Bir ζ Frenet eğrisinin geodezik olması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = 0$ olmasıdır. Bir ζ Frenet eğrisinin birinci eğriliği sabit ve ikinci eğriliği sıfır ise eğri bir pseudo-çember olur. Eğer eğrilikleri sabit ise pseudo-helis olarak adlandırılır.

Lorentzian 3-manifoldu üzerindeki bir eğrinin tanjant vektör alanı ile Reeb vektör alanı arasındaki açı sabitse yani $\eta(\zeta') = -\bar{g}(\zeta', \xi) = \text{sabit}$ ise bu eğriye slant eğri denir. Eğer $\eta(\zeta') = -\bar{g}(\zeta', \xi) = 0$ ise bu eğri bir Legendre eğrisidir [12].

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$, s parametresiyle verilen bir non-geodezik ($\kappa \neq 0$) Frenet eğrisi olsun. $\bar{\nabla}$, $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $(\zeta', \varphi\zeta', \xi)$ bazını kullanarak $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı;

$$\begin{aligned} e_1 &= \zeta', \\ e_2 &= \frac{\varphi\zeta'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}}, \\ e_3 &= \frac{-\varepsilon_1\xi + \delta\rho\zeta'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

şeklinde bulunur öyle ki,

$$\eta(\zeta') = \delta\bar{g}(\zeta', \xi) = \delta\rho, \quad (3.50)$$

dur. ζ' nün kovaryant türevi alındığında

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1 = v e_2 + \mu e_3 \quad (3.51)$$

elde edilir. Burada v bir fonksiyondur.

$$v = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1, e_2). \quad (3.52)$$

Üstelik,

$$\mu = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1, e_3) = \frac{\delta\rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} - \varepsilon_1\delta\beta\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}, \quad (3.53)$$

elde edilir. Buradan $\rho'(s) = \frac{d\rho(\zeta(s))}{ds}$ dir. Daha sonra

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} e_2 = -v e_1 + \delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) e_3 \quad (3.54)$$

ve

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} e_3 = -\mu e_1 - \delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) e_2 \quad (3.55)$$

elde edilir.

ζ' nün (3.49) eşitliğindeki baza göre temel formu

$$[\omega_{ij}(\zeta')] = \begin{pmatrix} 0 & v & \mu \\ -v & 0 & \delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \\ -\mu & -\delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

ve ζ' ne bağı Darboux vektörü

$$\omega(\zeta') = \delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) e_1 - \mu e_2 + v e_3 \quad (3.57)$$

dir. Böylece

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} e_i = \omega(\zeta') \wedge \varepsilon_i e_i (1 \leq i \leq 3), \quad (3.58)$$

şeklinde yazılabilir [4]. Üstelik herhangi bir $Z = \sum_{i=1}^3 \theta^i e_i \in \chi(\bar{N})$ vektörü için $\bar{N}$ üzerindeki ζ' eğrisi bu vektöre bağlıdır. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} Z = \omega(\zeta') \wedge Z + \delta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i e_i [\theta^i] e_i \quad (3.59)$$

3.2.2. ζ eğrisinin Frenet elemanları

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ yay parametresi ve $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ elemanları ile verilen non-geodezik bir Frenet eğrisi olsun. Bu eğrinin Frenet elemanları aşağıdaki şekilde gibi hesaplanabilir. (3.49) denklemi kullanılarak,

$$\varepsilon_2 \kappa n = \bar{\nabla}_{\zeta'} e_1 = v e_2 + \mu e_3 \quad (3.60)$$

elde edilir.(3.53) ve (3.60) denklemlerinden,

$$\kappa = \sqrt{v^2 + \left(\frac{\delta \rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} - \varepsilon_1 \delta \beta \sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2} \right)^2} \quad (3.61)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\zeta'} n &= \left(\frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' e_2 + \frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \nabla_{\zeta'} e_2 + \left(\frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' e_3 + \frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \nabla_{\zeta'} e_3 \\ &= -\varepsilon_1 \kappa t - \varepsilon_3 \tau B \end{aligned} \quad (3.62)$$

dir. (3.54) ve (3.55) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_3 \tau B &= \left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2} \right)' - \frac{\delta \mu}{\varepsilon_2 \kappa} \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \right] e_2 \\
&+ \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' + \frac{\delta v}{\varepsilon_2 \kappa} \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \right] e_3
\end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir. Doğrudan bir hesaplama ile,

$$\left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \right]^2 = \left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} - \frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \right]^2 \tag{3.64}$$

bulunur. Son denklemin normu alınarak (3.53) ve (3.54) denklemleri (3.63) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\tau = \frac{\left| \delta \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \right|}{\sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{\delta \rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} - \varepsilon_1 \delta \beta \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' \right]^2}} \tag{3.65}$$

bulunur [4]. Üstelik ζ eğrisinin Frenet vektörlerini aşağıdaki teorem ile bulabiliriz.

Teorem 3.2.1. $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold olsun ve ζ bir Frenet eğrisi olsun. t , n ve b Frenet vektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
t &= \zeta' = e_1, \\
n &= \frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} e_2 + \frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} e_3, \\
b &= -\frac{1}{\varepsilon_3 \tau} \left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' - \frac{\delta \mu}{\varepsilon_2 \kappa} \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \right] e_2 \\
&- \frac{1}{\varepsilon_3 \tau} \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2 \kappa} \right)' - \frac{\delta v}{\varepsilon_2 \kappa} \left(-\varepsilon_1 \alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) \right] e_3.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Üstelik,

$$\zeta = \delta \varepsilon_1 \rho t + \frac{\delta \mu \sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}}{\varepsilon_2 \kappa} n$$

$$-\frac{\delta\sqrt{\varepsilon_1+\delta\rho^2}}{\varepsilon_3\tau}\left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2\kappa}\right)' - \frac{\delta v}{\varepsilon_2\kappa}\left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1+\delta\rho^2}}\right)\right]b \quad (3.67)$$

yazılabilir [4].

Teorem 3.2.2. $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold olsun ve ζ bir Frenet eğrisi olsun. ζ eğrisinin bir slant eğri ($\rho = \eta(\zeta') = \cos \theta = \text{sabit}$) olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarının aşağıdaki gibi olmasıdır [4].

$$\begin{aligned} t &= e_1 = \zeta', \\ n &= e_2 = \frac{\varphi\zeta'}{\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}, \\ b &= e_3 = \frac{-\varepsilon_1\zeta + \delta\cos\theta\zeta'}{\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}, \\ \kappa &= \sqrt{\beta^2(\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta) + v^2}, \\ \tau &= \left| \frac{\delta\left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\cos\theta v}{\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}\right)}{-\sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2\kappa}\right)'\right]^2} + \left[\left(\frac{-\varepsilon_1\delta\beta\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}{\varepsilon_2\kappa}\right)'\right]^2} \right| \end{aligned} \quad (3.68)$$

Önerme 3.2.3. $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold olsun ve ζ bir slant eğri olsun. Eğer κ sıfırdan farklı bir sabit ise ζ bir pseudo-helistir ve

$$\tau = \left| \delta\left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\cos\theta v}{\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}\right) \right|$$

dır [4].

Önerme 3.2.4. $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold olsun ve ζ bir slant eğri olsun. Eğer κ sabit değil ve $\tau = 0$ ise ζ eğrisi bir düzlem eğrisidir ve aşağıdaki denklem sağlanır [4].

$$\bar{g}(\nabla_{\zeta'}e_2, e_3) = \frac{v^2\left(\frac{\beta}{v}\right)'\sqrt{\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta}}{v^2+\beta^2(\varepsilon_1+\delta\cos^2\theta)} \quad (3.69)$$

Teorem 3.2.5. $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ bir spacelike Frenet eğrisi olsun. ζ eğrisinin bir Legendre eğri ($\rho = \eta(\zeta') = 0$) olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarının aşağıdaki şekilde olmasıdır[4].

$$\begin{aligned} t &= e_1 = \zeta', \\ n &= e_2 = \varphi\zeta', \\ b &= e_3 = -\xi, \\ \kappa &= \sqrt{v^2 + \beta^2}, \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\tau = \left| \delta\alpha + \sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon_2\kappa}\right)'\right]^2 + \left[\left(\frac{\beta}{\varepsilon_2\kappa}\right)'\right]^2} \right|$$

3.2.3 Lorentzian trans-Sasakian manifoldlar üzerinde yatan eğriler

Şimdi $\bar{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifoldunun bazı alt uzaylarında yatan Frenet eğrilerinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Bu alt uzaylar $Sp\{e_1, e_2\}$, $Sp\{e_1, e_3\}$ ve $Sp\{e_2, e_3\}$ dir. $\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir slant eğri ve ∇ , $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\{\zeta', \varphi\zeta', \xi\}$ bazından $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını elde ederiz ve bu bazın tanımını ilk bölümde vermiştik.

Durum 3.2.6. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta = m(s)e_1 + n(s)e_2 \tag{3.71}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n, s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.71) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.51) ve (3.54) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta' = (m' - nv)e_1 + (mv + n')e_2 + \left(m\mu + n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) \right) e_3 \tag{3.72}$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$ ve $\mu = \frac{\delta\rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} - \varepsilon_1\delta\beta\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}$ dir. Daha sonra;

$$\begin{cases} m' - nv = \delta \\ mv + n' = 0 \\ m\mu + n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $m = -\frac{n'}{v}$ ve m 'nin değeri yukarıdaki diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \frac{dn}{ds} \right) + nv = -\delta$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $t = \int_0^s v ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2 n}{ds^2} + n = -\delta$$

denklemini elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü yapılırsa;

$$n = c_1 \cos\left(\int_0^s v ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - \delta \quad (3.73)$$

şeklindedir.

$$mv + n' = 0$$

denkleminde;

$$m = c_1 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - c_2 \cos\left(\int_0^s v ds\right) \quad (3.74)$$

bulunur.

Teorem 3.2.7. $\overline{N}$, 3-boyutlu δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left(c_1 \sin \int_0^s v ds - c_2 \cos \int_0^s v ds \right) e_1 \\ & + (c_1 \cos \int_0^s v ds + c_2 \sin \int_0^s v ds - \delta) e_2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.2.8. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.76)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.76) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.51) ve (3.55) denklemlerini kullanırsak,

$$\zeta' = (m' - n\mu)e_1 + \left(mv - n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) \right) e_2 + (m\mu + n')e_3 \quad (3.77)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = \frac{\delta\rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} - \varepsilon_1\delta\beta\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} mv - n\mu = \delta \\ mv - n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) = 0 \\ m\mu + n' = 0 \end{cases}$$

Burada $m = \frac{-n'}{\mu}$ eşitliği yukarıdaki denklemde m 'de yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\mu} \frac{dn}{ds} \right) + n\mu = -\delta$$

elde edilir. Bu denklemde $t = \int_0^s \mu ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2n}{ds^2} + n = -\delta$$

denklemini elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü yapılırsa;

$$n = c_1 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right) - \delta \quad (3.78)$$

bulunur.

$$mv + n' = 0$$

denkleminde;

$$m = c_1 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right) - c_2 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) \quad (3.79)$$

bulunur.

Teorem 3.2.9. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\zeta(s) = & \left(c_1 \sin \left(\int_0^s \mu ds \right) - c_2 \cos \left(\int_0^s \mu ds \right) \right) e_1 \\ & + (c_1 \cos(\int_0^s \mu ds) + c_2 \sin(\int_0^s \mu ds) - \delta) e_3\end{aligned}\quad (3.80)$$

şeklinde olmalıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.2.10. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.81)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.81) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.54) ve (3.55) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = & (-mv - n\mu)e_1 + \left(m' - n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) \right) e_2 \\ & + \left(m\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) + n' \right) e_3\end{aligned}\quad (3.82)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = \frac{\delta\rho'}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} - \varepsilon_1\delta\beta\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} -mv - n\mu = \delta, \\ m' - n\delta \left(-\varepsilon_1\alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) = 0, \\ m\delta \left(-\varepsilon_1\alpha + \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}} \right) + n' = 0. \end{cases} \quad (3.83)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemlerde;

$c = -\varepsilon_1\alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta\rho^2}}$ şeklinde alınırsa $m' - nc = 0$ ve $mc + n' = 0$ elde edilir. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir. Burada $m = \frac{-n'}{c}$ eşitliği yukarıdaki denklemde m 'de yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dn}{ds} \right) + nc = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $t = \int_0^s c ds$ değişken değişirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2 n}{ds^2} + n = 0$$

denklemini elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü yapılırsa;

$$n = c_1 \cos \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) + c_2 \sin \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) \quad (3.84)$$

ve

$$m = c_1 \sin \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) - c_2 \cos \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) \quad (3.85)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.11. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \begin{bmatrix} c_1 \sin \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) \\ -c_2 \cos \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) \end{bmatrix} e_2 \\ & + \begin{bmatrix} c_1 \cos \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) + \\ c_2 \sin \left(\int_0^s \left(-\varepsilon_1 \alpha - \frac{\rho v}{\sqrt{\varepsilon_1 + \delta \rho^2}} \right) ds \right) \end{bmatrix} e_3 \end{aligned} \quad (3.86)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir Legendre eğrisi ($\rho = \eta(\zeta') = 0$) ve $\bar{V}, \bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. O halde aşağıdaki durumlar oluşur.

Durum 3.2.12. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_2 \quad (3.87)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.87) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.51) ve (3.54) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (m' - nv)e_1 + (mv + n')e_2 + (m\mu + n\delta(-\varepsilon_1\alpha))e_3 \quad (3.88)$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\delta\varepsilon_1\beta$ dır. Daha sonra

$$\begin{cases} m' - nv = \delta \\ mv + n' = 0 \\ m\mu + n\delta(-\varepsilon_1\alpha) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $m = \frac{-n'}{v}$ eşitliği yukarıdaki denklemde m'de yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \frac{dn}{ds} \right) + nv = -\delta$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $t = \int_0^s v ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\frac{d^2 n}{ds^2} + n = -\delta$$

denklemini elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü yapılırsa;

$$n = c_1 \cos\left(\int_0^s v ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - \delta \quad (3.89)$$

ve

$$m = c_1 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - c_2 \cos\left(\int_0^s v ds\right) \quad (3.90)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.13. $\overline{N}$, 3-boyutlu bir δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left(c_1 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - c_2 \cos\left(\int_0^s v ds\right) \right) e_1 \\ & + (c_1 \cos\left(\int_0^s v ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s v ds\right) - \delta) e_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.2.14. Şimdi ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.92)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.92) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.51) ve (3.55) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (m' - n\mu)e_1 + (mv - n\delta(-\varepsilon_1\alpha))e_2 + (m\mu + n')e_3 \quad (3.93)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\delta\varepsilon_1\beta$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m' - n\mu = \delta, \\ mv - n\delta(-\varepsilon_1\alpha) = 0 \\ m\mu + n' = 0 \end{cases}$$

$n = e^{-\int \frac{c}{v} dt} = e^{-\int \frac{\delta\varepsilon_1\alpha}{v} dt}$ ve $m = \frac{1}{v}nc$ yukarıdaki denklemlerde yerine yazılırsa;

$$n = e^{-\int \frac{c}{v} dt} = e^{-\int \frac{\delta\varepsilon_1\alpha}{v} dt} \quad (3.94)$$

ve

$$m = \frac{1}{v} \left(e^{-\int \frac{\delta\varepsilon_1\alpha}{v} dt} \right) \quad (3.95)$$

bulunur.

Teorem 3.2.15. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\zeta = \left(\frac{1}{v} \left(e^{-\int \frac{\delta\varepsilon_1\alpha}{v} dt} \right) \right) e_1 + \left(e^{-\int \frac{\delta\varepsilon_1\alpha}{v} dt} \right) e_3 \quad (3.96)$$

şeklinde olmasıdır.

Durum 3.2.16. Şimdi ise ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.97)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.97) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.54) ve (3.55) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (-m\delta - n\mu)e_1 + (m' - n\delta\varepsilon_1\alpha)e_2 + (-m\delta\varepsilon_1\alpha + n')e_3 \quad (3.98)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\delta\varepsilon_1\beta$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} -mv - n\mu = \delta \\ m' + n\delta(\varepsilon_1\alpha) = 0 \\ -m\delta(\varepsilon_1\alpha) + n' = 0 \end{cases}$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemler çözülürse,

$$n(s) = c_1 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right) \quad (3.99)$$

ve

$$m(s) = c_1 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right) + c_2 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) \quad (3.100)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.17. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir δ -Lorentzian trans-Sasakian manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta = & \left(c_1 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right) + c_2 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) \right) e_2 \\ & + [c_1 \cos\left(\int_0^s \mu ds\right) + c_2 \sin\left(\int_0^s \mu ds\right)] e_3 \end{aligned} \quad (3.101)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

3.3. Kontakt Pseudo-Metrik Manifoldlar Üzerinde Eğriler

3.3.1. Frenet eğrileri

$\bar{N}$, ∇ Levi-Civita konneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve $\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ yay parametresi ile verilmiş bir birim hızlı eğri olsun. Burada I bir açık aralıktır. Birim hızlı bir ζ eğrisinin casual karakterinin -1 veya 1 olmasına göre sırasıyla timelike veya spacelike denir. Ayrıca, ζ eğrisi için $\bar{g}(\zeta', \zeta') \neq 0$ eşitliği sağlanırsa Frenet eğrisi olarak adlandırılır. ζ eğrisi için aşağıdaki Frenet denklemleri sağlanır.

$$\nabla_{\zeta'} t = \kappa n$$

$$\nabla_{\zeta'} n = -\kappa t + \varepsilon \tau b$$

$$\nabla_{\zeta'} b = -\varepsilon \tau n$$

Burada $\kappa = |\nabla_{\zeta'} \zeta'|$, ζ nın geodezik eğriliğidir ve τ geodezik torsiyonudur. t , n ve b vektör alanları ζ eğrisinin sırasıyla tanjant vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı olarak adlandırılır.

Bir ζ Frenet eğrisinin geodezik olması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = 0$ olmasıdır. Bir Frenet eğrisinin geodezik eğriliği sabitse ve geodezik torsiyonu sıfır ise bir pseudo-çember olarak adlandırılır. Bir pseudo-helis ise ζ Frenet eğrisinin geodezik eğriliği ve torsiyonunun sabit olmasıyla elde edilir.

3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldu üzerindeki bir eğri slant ise tantant vektörü ile Reeb vektör alanı arasındaki açı sabittir yani, $\eta(\zeta') = \varepsilon \bar{g}(\zeta', \zeta') = \cos \theta = \text{sabit}$ dir. Eğer $\eta(\zeta') = \varepsilon \bar{g}(\zeta', \zeta') = 0$ şartı sağlanıyorsa ζ bir Legendre eğridir [5].

Bu bölümde bir $\bar{N}$, 3-boyutlu normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldu ele alacağız. $\zeta: I \rightarrow \bar{N}$, s yay parametresi ile verilen bir non-geodezik ($\kappa \neq 0$) Frenet eğrisi ve $\bar{\nabla}$, $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $(\zeta', \varphi \zeta', \xi)$ bazından $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını elde ederiz. Bu baz aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned} e_1 &= \zeta', \\ e_2 &= \frac{\varphi \zeta'}{\sqrt{1 - \varepsilon \rho^2}}, \\ e_3 &= \frac{\xi - \varepsilon \rho \zeta'}{\sqrt{1 - \varepsilon \rho^2}}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

burada

$$\eta(\zeta') = \varepsilon \bar{g}(\zeta', \zeta') = \varepsilon \rho \quad (3.103)$$

dir. Ayrıca,

$$\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1 = v e_2 + \mu e_3 \quad (3.104)$$

yazılabilir. Öyle ki

$$v = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1, e_2) \quad (3.105)$$

bir fonksiyondur. Üstelik μ yü

$$\mu = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\zeta'} e_1, e_2) = \frac{\varepsilon \rho'}{\sqrt{1 - \varepsilon \rho^2}} - \alpha \sqrt{1 - \varepsilon \rho^2} \quad (3.106)$$

şeklinde elde ederiz. Böylece,

$$\bar{V}_\zeta' e_2 = -v e_1 + \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon \rho^2}} \right) e_3 \quad (3.107)$$

ve

$$\bar{V}_\zeta' e_3 = -\mu e_1 - \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon \rho^2}} \right) e_2 \quad (3.108)$$

elde edilir [5].

3.3.2. Frenet elemanları

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir Frenet eğrisi ve $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanları olsun. Bu eğrisinin Frenet elemanları aşağıdaki gibi hesaplanır. (3.104) denkleminde

$$\kappa n = \bar{V}_\zeta' e_1 = v e_2 + \mu e_3 \quad (3.109)$$

elde edilir. (3.106) ve (3.109) denklemlerinden

$$\kappa = \sqrt{v^2 + \left(\frac{\varepsilon \rho'}{\sqrt{1-\varepsilon \rho^2}} - \alpha \sqrt{1-\varepsilon \rho^2} \right)^2} \quad (3.110)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \bar{V}_\zeta' n &= \left(\frac{v}{\varepsilon \kappa} \right)' e_2 + \frac{v}{\varepsilon \kappa} \bar{V}_\zeta' e_2 + \left(\frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \right)' e_3 + \frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \bar{V}_\zeta' e_3 \\ &= -\kappa \tau + \varepsilon \tau b \end{aligned} \quad (3.111)$$

dır. (3.107) ve (3.108) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \tau b &= \left[\left(\frac{v}{\varepsilon \kappa} \right)' + \frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon \rho^2}} \right) \right] e_2 \\ &\quad + \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \right)' + \frac{v}{\varepsilon \kappa} \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon \rho^2}} \right) \right] e_3 \end{aligned} \quad (3.112)$$

elde edilir. Doğrudan bir hesaplama ile aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\left[\left(\frac{v}{\varepsilon \kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \right)' \right]^2 = \left[- \left(\frac{v}{\varepsilon \kappa} \right)' \frac{\mu}{\varepsilon \kappa} + \left(\frac{\mu}{\varepsilon \kappa} \right)' \frac{v}{\varepsilon \kappa} \right]^2 \quad (3.113)$$

Bu denklemin normu alınarak (3.106) ve (3.113) denklemleri (3.112) denkleminde kullanılırsa,

$$\tau = \left| \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}} \right) - \sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon\kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{\frac{\varepsilon\rho'}{\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}} - \alpha\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}}{\varepsilon\kappa} \right)' \right]^2} \right| \quad (3.114)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \xi = \varepsilon\rho t + \frac{\mu\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}}{\kappa} n \\ - \varepsilon \frac{\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}}{\tau} \left[\left(\frac{\mu}{\kappa} \right)' + \frac{v}{\kappa} \left(\beta - \varepsilon \frac{\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\rho^2}} \right) \right] b \end{aligned} \quad (3.115)$$

dır [5].

Teorem 3.3.1. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ , $\bar{N}$ üzerinde bir Frenet eğrisi olsun. ζ nın $\bar{N}$ üzerinde bir slant eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarının aşağıdaki şekilde olmasıdır [5]:

$$\begin{aligned} t &= e_1 = \zeta', \\ n &= e_2 = \frac{\varphi\zeta'}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}, \\ b &= e_3 = \frac{\xi - \varepsilon\cos\theta\zeta'}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}, \\ \kappa &= \sqrt{\alpha^2(1-\varepsilon\cos^2\theta) + v^2}, \\ \tau &= \left| \left(\beta - \varepsilon \frac{\cos\theta v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}} \right) - \sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon\kappa} \right)' \right]^2 + \left[\left(\frac{\alpha\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}{\varepsilon\kappa} \right)' \right]^2} \right| \end{aligned} \quad (3.116)$$

İspat: ζ eğrisi $\bar{N}$ üzerinde bir slant eğri olsun. $\rho = \eta(\zeta') = \cos\theta = \text{sabit}$ şartını sağlayan (3.102), (3.110) ve (3.114) denklemlerinde düşünersek (3.116) denkleminde ulaşırız. Eğer (3.116) denklemi sağlanıyorsa, slant eğri tanımına göre ζ bir slant eğri olur.

Teorem 3.3.2. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ , $\bar{N}$ üzerinde bir Frenet eğrisi olsun. ζ nın $\bar{N}$ üzerinde bir Legendre eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarının aşağıdaki şekilde olmasıdır [5]:

$$\begin{aligned}
t &= e_1 = \zeta', \\
n &= e_2 = \varphi \zeta', \\
b &= e_3 = \xi, \\
\kappa &= \sqrt{\alpha^2 + v^2}, \\
\tau &= \left| \beta - \sqrt{\left[\left(\frac{v}{\varepsilon \kappa} \right)^2 + \left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon \kappa} \right)^2 \right]^2} \right|}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

İspat. ζ eğrisi $\bar{N}$ üzerinde bir Legendre eğrisi olsun. $\rho = \eta(\zeta') = 0$, şartını sağlayan (3.102), (3.110) ve (3.114) denklemlerinde düşünersek (3.117) denkleminde ulaşırız. Eğer (3.117) denklemi sağlanıyorsa, slant eğri tanımına göre ζ bir Legendre eğri olur.

3.3.3. Kontakt pseudo-metrik manifoldlar üzerinde yatan eğriler

Şimdi 3-boyutlu normal almost kontakt pseudo-metrik manifoldunun bazı alt uzaylarında yatan Frenet eğrilerinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Bu alt uzaylar $Sp\{e_1, e_2\}$, $Sp\{e_1, e_3\}$, $Sp\{e_2, e_3\}$ dır.

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir slant eğri ve $\bar{V}$, $\bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $(\zeta', \varphi \zeta', \xi)$ bazından $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazını elde ederiz ve bu bazın tanımını ilk bölümde vermiştik.

Durum 3.3.3. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_2 \tag{3.118}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n, s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.118) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.104) ve (3.107) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\zeta'(s) &= (m'(s) - n(s))e_1 + (m(s) - n'(s))e_2 \\
&\quad + (m(s)\mu + n(s)\left(\beta - \frac{\varepsilon \rho v}{\sqrt{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}}\right))e_3
\end{aligned} \tag{3.119}$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha\sqrt{1 - \varepsilon \cos^2 \theta}$ dır.

$$\begin{cases} m' - n = \varepsilon \\ m - n' = 0 \\ m\mu + n\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) = 0 \end{cases}$$

denklemler çözülürse;

$$n(s) = c_1 \cos \int_0^s v ds + c_2 \sin \int_0^s v ds - \varepsilon \quad (3.120)$$

ve

$$m(s) = c_1 \sin \int_0^s v ds - c_2 \cos \int_0^s v ds \quad (3.121)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.4. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left(c_1 \sin \int_0^s v ds - c_2 \cos \int_0^s v ds \right) e_1 \\ & + (c_1 \cos \int_0^s v ds + c_2 \sin \int_0^s v ds - \varepsilon) e_2 \end{aligned} \quad (3.122)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.3.5. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.123)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.123) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.104) ve (3.108) denklemlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & (m'(s) - n(s)\mu) e_1 \\ & + \left(m(s)v - n(s) \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}} \right) \right) e_2 \\ & + (m(s)\mu + n'(s)) e_3 \end{aligned} \quad (3.124)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}$ dir. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m' - n = \varepsilon \\ m\mu - n'v = 0 \\ mv - n\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) = 0 \end{cases}$$

yukarıdaki diferansiyel denklem çözülürse,

$$n(s) = c_1 \cos \int_0^s \mu ds + c_2 \sin \int_0^s \mu ds - \varepsilon \quad (3.125)$$

$$m(s) = c_1 \sin \int_0^s \mu ds - c_2 \cos \int_0^s \mu ds \quad (3.126)$$

bulunur.

Teorem 3.3.6. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left(c_1 \sin \int_0^s \mu ds - c_2 \cos \int_0^s \mu ds \right) e_1 \\ & + \left(c_1 \cos \int_0^s \mu ds + c_2 \sin \int_0^s \mu ds - \varepsilon \right) e_3 \end{aligned} \quad (3.127)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.3.7. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.128)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.128) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.107) ve (3.108) denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & (m(s) - n(s)\mu)e_1 + (m'(s)v - n(s)\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right))e_2 \\ & + \left(m(s)\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) + n'(s)\right)e_3 \end{aligned} \quad (3.129)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m(s)v - n(s)\mu = -\varepsilon, \\ m'(s)v - n(s)\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) = 0, \\ m(s)\left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) + n'(s) = 0. \end{cases},$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemler çözülürse,

$$n(s) = c_1 \cos \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds + c_2 \sin \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \quad (3.130)$$

ve

$$m(s) = c_1 \sin \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds - c_2 \cos \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \quad (3.131)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.8. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ slant eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \begin{bmatrix} c_1 \sin \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \\ -c_2 \cos \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \end{bmatrix} e_2 \\ & + \begin{bmatrix} c_1 \cos \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \\ +c_2 \sin \theta \int_0^s \left(\beta - \frac{\varepsilon\rho v}{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}}\right) ds \end{bmatrix} e_3 \end{aligned} \quad (3.132)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

$\zeta: I \rightarrow \bar{N}$ eğrisi s yay parametresi ile verilen non-geodezik ($\kappa \neq 0$) bir Legendre eğrisi ve $\bar{V}, \bar{N}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. O halde aşağıdaki durumlar oluşur.

Durum 3.3.9. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_2 \quad (3.133)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.133) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.104) ve (3.107) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (m'(s) - n(s)v)e_1 + (m(s)v + n'(s))e_2 + (m(s)\mu + n(s))e_3 \quad (3.134)$$

elde ederiz. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha$ dır. Daha sonra

$$\begin{cases} m'(s) - n(s)v = \varepsilon \\ m(s)v + n'(s) = 0 \\ m(s)\mu + n(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Yukarıdaki diferansiyel denklemler çözülürse;

$$m(s) = -\frac{1}{\mu}\beta \quad (3.135)$$

ve,

$$n(s) = \frac{1}{v} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)' - \varepsilon \right] \quad (3.136)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.10. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_2\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\zeta(s) = \left[-\frac{1}{\mu}\beta \right] e_1 + \frac{1}{v} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)' - \varepsilon \right] e_2 \quad (3.137)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.3.11. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_1 + n(s)e_3 \quad (3.138)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.138) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.104) ve (3.108) denklemlerini kullanırsak;

$$\zeta'(s) = (m'(s) - n(s)\mu)e_1 + (m(s)v - n(s)\beta)e_2 + (m(s)\mu + n'(s))e_3 \quad (3.139)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m'(s) - n(s)\mu = \varepsilon \\ m(s)v - n(s)\beta = 0 \\ m(s)\mu + n'(s) = 0 \end{cases}$$

Yukarıdaki diferensiyel denklem çözülürse,

$$n(s) = e^{\int \frac{\beta\alpha}{v} ds} \quad (3.140)$$

$$m(s) = \frac{\beta}{v} e^{\int \frac{\beta\alpha}{v} ds} \quad (3.141)$$

bulunur.

Teorem 3.3.12. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart;

$$\zeta(s) = \left[\frac{\beta}{v} e^{\int \frac{\beta\alpha}{v} ds} \right] e_1 + \left[e^{\int \frac{\beta\alpha}{v} ds} \right] e_3 \quad (3.142)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

Durum 3.3.13. Öncelikle ζ eğrisinin hangi şartlarda $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalacağını araştıracağız. O zaman

$$\zeta(s) = m(s)e_2 + n(s)e_3 \quad (3.143)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada m ve n , s parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.143) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak ve (3.107) ve (3.108) denklemlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= (-m(s)v - n(s)\mu)e_1 + (m'(s)v - n(s)\beta)e_2 \\ &\quad + (m(s)\beta + n'(s))e_3 \end{aligned} \quad (3.144)$$

elde edilir. Burada $\zeta' = e_1$, $\mu = -\alpha$ dır. Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} m(s)v + n(s)\mu = -\varepsilon, \\ m'(s)v - n(s)\beta = 0, \\ m(s)\beta + n'(s) = 0. \end{cases}$$

Yukarıdaki diferensiyel denklemler çözülürse,

$$n(s) = c_1 \cos \int_0^s \beta ds + c_2 \sin \int_0^s \beta ds \quad (3.145)$$

ve

$$m(s) = -\frac{1}{v} [\mu c_1 \cos \int_0^s \beta ds + \mu c_2 \sin \int_0^s \beta ds + \varepsilon] \quad (3.146)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.14. $\bar{N}$, 3-boyutlu bir normal almost kontakt pseudo-metrik manifold ve ζ Legendre eğrisinin $\{e_2, e_3\}$ ile gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \left[-\frac{1}{v} \left[\mu c_1 \cos \int_0^s \beta ds + \mu c_2 \sin \int_0^s \beta ds + \varepsilon \right] \right] e_2 \\ & + [c_1 \cos \int_0^s \beta ds + c_2 \sin \int_0^s \beta ds] e_3 \end{aligned} \quad (3.147)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

KAYNAKÇA

- [1] Acet, B. E. ve Perktaş, S. Y. (2018). "Curvature and torsion of a Legendre curve in (ε, δ) trans-Sasakian manifolds". Malaya Journal of Matematik, 6(1), 140-144.
- [2] Acet, E. B. (2014). "Para-Sasakian manifoldların altmanifoldları". Doktora Tezi. Malatya: İnönü Üniversitesi.
- [3] Akgün, M. A. (2022). "Frenet curves in 3-dimensional contact Lorentzian manifolds". Facta Universitatis (NIS)Series Mathematics and Informatics, 37(1), 67-76
- [4] Akgün, M. A. (2022). "Frenet curves in 3-dimensional δ -Lorentzian trans-Sasakian Manifolds". AIMS Mathematics, 7(1), 199-211
- [5] Akgün, M. A. (2022). "Some curves on 3-dimensional normal almost contact pseudo-metric manifolds". Turkish Journal of Science, 7(3), 168-176
- [6] Ali, A. T. ve Önder, M. (2012). "Some characterizations of rectifying spacelike curves in the Minkowski Space-time". Global Journal of Sciences Frontier Research Mathematics, 12(1), 2249-4626
- [7] Belkhef, M., Hrica, I. E., Rosca, R. ve Verstraelen, L. (2002). "On Legendre curves in Riemannian and Lorentzian Sasaki spaces". Soochow Journal of Mathematics, 28(1), 81-91.
- [8] Blair, D. E. (2002). "Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds". Boston: Progress in Mathematics, Birkhauser
- [9] Inoguchi, J. ve Lee, J. (2012). "Almost contact curves in normal almost contact 3-manifolds". Journal of Geometry, 103, 457-474.
- [10] Ji-Eun, L. (2020). "Slant curves in contact Lorentzian manifolds with CR structures". Mathematics, 8, 46.
- [11] Kavuk, E. (2015). "Hemen hemen kontakt eğriler". Yüksek Lisans Tezi. Malatya: İnönü Üniversitesi.
- [12] Manfredo, P. C. (1976). "Differential geometry of curves and surfaces". Brazil.
- [13] Olzsak, Z. (1986). "Normal almost contact metric manifolds of dimension three". Annales Polonici Mathematici, 47, 41-50.
- [14] Önder, M., Kocayigit, H. ve Kazaz, M. (2010). "Spacelike helices in Minkowski 4-space". Annali Dell Universita Ferrara, 56, 335-343

- [15] Şahin, B. (2012). “Manifoldların diferensiyel geometrisi”. İstanbul: Nobel Yayıncılık.
- [16] Şener, S. (2008). “Diferensiyellenebilir manifoldlar üzerindeki kontakt yapılar”. Yüksek Lisans Tezi. Malatya: İnönü Üniversitesi.
- [17] De, U. C. ve De, K. (2013). “On Lorentzian trans-Sasakian manifolds”. Communication Faculty of Sciences University of Ankara Series A1, 62, 37-51.
- [18] Welyczko, J. (2007). “On Legendre curves in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds”. Soochow Journal Mathematics, 33, 929-937.
- [19] Yıldırım, A. (2020). “On curves in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds”. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 1-18.

