

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU
İÇİN HİPERBOLİK TEORİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Tezi Hazırlayan: **Yusuf Şamil YILDIZ**

İstanbul, 2010

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU
İÇİN HİPERBOLİK TEORİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan:

Yusuf Şamil YILDIZ

Öğrenci NO:

080860003

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İstanbul, 2010

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum " Konveks düzlem eğrilerinin evölüsyonu için hiperbolik teori" başlıklı çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım kaynakların tamamını kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. **08/07/2010**

Yusuf Şamil YILDIZ

KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU İÇİN HİPERBOLİK TEORİ

Tezi Hazırlayan: Yusuf Şamil YILDIZ

ÖZET

Bu tez çalışması 8 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, düzlemsel eğrilerinin hiperbolik evolüsyon problemi tanımlandı.

İkinci bölümde, eğrilerin lokal teorileri, eğriliğin farklı şekillerdeki tanımları ve uzay eğrilerinin Frenet-Serre denklemleri verildi ve eğriler teorisinin temel teoremi ifade edildi. Bu bölümün ikinci kısmında ise düzlemsel bir eğrinin zamana göre hareketi incelenerek evolüsyon denklemleri elde edildi.

Üçüncü bölümde, genel bir düzlem eğrisinin eğriliği, uzunluğu ve sınırladığı alanın evolüsyon denklemleri elde edildi ve bulunan denklemlerin eğrinin zamana göre hız vektörünün teğetsel bileşeninden bağımsız olduğu gösterildi.

Dördüncü bölümde başlangıç eğrisi konveks olan evolüsyon eğrisinin evolüsyon sürecince konveksliğini koruduğu ve evolüsyonun nihai şeklinin Hausdorff metriğine göre bir çember olduğu gösterildi.

Beşinci bölümde normal evolüsyon tanımlanarak parametre değişimi altında normal evolüsyonun korunduğu gösterildi ve hiperbolik Monge-Ampere denklemi elde edildi.

Altıncı bölümde normal hiperbolik eğri akışı bir örnek ele alınarak sonlu bir zaman sonunda eğrinin bir noktaya indirgendiği kanıtlandı. Bu bölümde tezdeki iddiamızı destekleyen bazı önemli sonuçlara da yer verildi.

Yedinci bölümde $R^{1,1}$ Minkowski uzayında hiperbolik eğrilik akışı ile dizisel evolüsyon denklemi arasındaki bağıntılar incelenerek bir dizinin hareketinin genel normal hiperbolik ortalama eğriliğin akışına ait bir uygulama olduğu gösterildi.

Sekizinci ve son bölüm ise Örnek 6.1 ve diğer bölümlerde ele alınan teoremlerin sonucu olarak tezin esasını oluşturan Teorem 1.1 in ispatını ve genel bir değerlendirmeyi içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Konveks düzlem eğrileri, Hiperbolik teori

HYPERBOLIC THEORY FOR THE EVOLUTION OF CONVEX PLANE CURVES

Presented by: Yusuf Şamil YILDIZ

ABSTRACT

This study consists of eight chapters.

In the first chapter, we define the hyperbolic evolution problem of plane curves.

In the second chapter, we state the fundamental theorem of the local theory of curves, different definitions of curvature of a curve, Frenet-Serre equations of the curves and further more we investigate the motion of a plane curve with respect to time variable and obtain its evolution equations.

In the third chapter, we deal with the general evolution equation of embedded planar curves and obtain the evolution equations for the length of the curve and the area it bounds and prove that the tangential components of the evolution vector do not effect the length and area during the evolution process.

Fourth chapter is devoted to proving that the evolving curve remain convex during the evolution process and the final shape is a circle in the Hausdorff metric if the initial curve is convex.

In the fifth chapter, It is defined the normal evolution and shown that this property is preserved during the evolution. Moreover, in the end of chapter it is obtained a hyperbolic Monge-Ampere equation.

In the sixth chapter, a hyperbolic normal curvature evolution is considered with an example and proved that after a finite time the evolution curve evolves into a single point. This chapter also includes some crucial results which support our assertion in the thesis.

In the seventh chapter, we search the close relationship between the hyperbolic mean curve flow and the evolution equation for relativistic string in the Minkowski space time $\mathbb{R}^{1,1}$.

Finally, the last chapter covers proof of the Theorem 1.1 as the result of the Example 6.1 and the theorems in the other chapters and a general evaluation of the thesis.

Key Words: Convex Plane Curves, Hyperbolic Theory

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO.

YEMİN METNİ

JÜRİ SAYFASI

ÖZET

ABSTRACT

1.GİRİŞ	1
2. EĞRİLERİN LOKAL TEORİSİ VE DÜZLEMSEL EĞRİ HAREKETLERİ	3
2.1 Eğrilikler ve Frenet-Serre Denklemleri	3
2.2 Düzlemsel eğrilerin Zamansal Evolüsyonu.....	10
3. BASİT KAPALI EĞRİLERİN UZUNLUK VE ALANLARININ ZAMANAGÖREEVOLÜSYONU.....	17
3.1 Basit kapalı düzlem Eğrilerinin Uzunluk ve Alan Evolüsyonları	17
4. KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU.....	21
4.1 Kapalı Konveks Düzlem Eğrilerinin Evolüsyonu	21
4.2 Konveks Düzlem Eğrilerinin Evolüsyonunun Son Şekli	22
5. HİPERBOLİK MONGE -AMPERE DENKLEMİ	27
6. BİR ÖRNEK VE BAZI ÖNERMELER.....	33
7. $\mathbb{R}^{1,1}$ MINKOWSKI UZAYINDA HİPERBOLİK EĞRİLİK AKIŞI İLE DİZİSEL EVOLÜSYON DENKLEMİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR.....	41
8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	44
KAYNAKLAR	46

DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU İÇİN HİPERBOLİK TEORİ

1.Giriş

Bu tez çalışmasında kapalı düzlem eğrileri için bir boyutlu hiperbolik ortalama eğrilik akışını ele alacağız. Bunun için evolüsyon denklemi aşağıdaki gibi verilen kapalı eğrilerin

$$F : S^1 \times [0, T) \rightarrow R^2$$

Şeklinde bir ailesini göz önüne alacağız:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(u, t) = k(u, t) \vec{N}(u, t) - \nabla \rho(u, t), \quad \forall (u, t) \in S^1 \times [0, T) \\ F(u, 0) = F_0(u) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(u, 0) = f(u) \vec{N}_0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Burada k ortalama eğrilik iken $\vec{N}$, $F(u, t)$ düzlem eğrisinin iç tarafına yönlendirilmiş olan birim normal vektörüdür. $f(u) (\geq 0)$ ve $\vec{N}_0$ ise konveks kapalı F_0 başlangıç eğrisinin sırasıyla başlangıç hızı ve iç birim normal vektörüdür. Benzer şekilde, $\nabla \rho$ ise T birim tanjant vektör ve s yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\nabla \rho \triangleq \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) \vec{T}, \quad (1.1.2)$$

şeklinde verilir.

Bu problem F için ifade edilen bir kısmi türevli denklem sistemi için verilen bir başlangıç değer problemidir ve bu problem tam olarak F nin destek fonksiyonu için birtek kısmi türevli denklem için ifade edilmiş bir başlangıç değer problemine indirgenebilir. (1.1.2) denklemi hiperbolik Monge-Ampere denklemi adını alır.

Bu tez kapsamında aşağıdaki önemli sonucu kanıtlamak istiyoruz. Bunu ifade edelim.

Teorem.1.1 F_0 düzgün kesin konveks kapalı bir eğri olsun. O takdirde F_0 ve f sırasıyla başlangıç eğrisi ve başlangıç hızı olmak üzere (1.1.1) denkleminin çözümü

olan başlangıç eğrilerinin bir sınıfı sadece $[0, T_{\max})$ şeklinde sonlu bir zaman aralığında mevcuttur. Üstelik $t \rightarrow T_{\max}$ iken aşağıdakilerden birisi doğru olmak zorundadır:

- 1) $F(., t)$ çözümü bir noktaya yakınsar, yani $t \rightarrow T_{\max}$ iken limit eğrisinin eğriliği sonsuza yaklaşır (sınırsız olur).
- 2) Eğrinin k eğriliği $t \rightarrow T_{\max}$ iken süreksizdir, öyleki çözüm parçalı düzgün bir eğriye yakınsar.

Bir sonraki bölümde düzlemsel eğrilerin lokal teorisini ele alacağız ve onların zamana göre evolüsyon denklemlerini inceleyeceğiz.

2. EĞRİLERİN LOKAL TEORİSİ VE DÜZLEMSEL EĞRİLERİN ZAMANSAL EVOLÜSYONU

2.1. Eğrilikler ve Frenet-Serre Denklemleri

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ deki eğrilerin temel tanım ve geometrik özellikleri verilecektir. $\mathbb{R}^3$ de bir eğri, $\mathbb{R}^3$ de bir parçacığın hareketi ile izlenen yolun bir t parametresine göre parametrik olarak ifade edilmiş noktaların bir kümesidir.

Tanım. 2.1.1 $\mathbb{R}^3$ de düzgün bir eğri $\alpha: I=(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde $C^k, k \geq 1$, sınıfından olmak üzere $\forall t \in (a,b)$ için $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ eğrinin bu noktadaki durum vektörünü gösterir.

Tanım. 2.1.2 Düzgün $\alpha(t)$ eğrisinin bir $t=t_0$ noktasındaki $\frac{d\alpha}{dt}(t_0)$ türevi eğrinin bu noktadaki hız vektörü adını alır. $\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$ ye eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı ve vektör değerli $\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)$ vektör alanına ise eğrinin hız(tanjant) vektör alanı adını vereceğiz.

$T(t) = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|}$ Vektör değerli fonksiyonuna ise $\alpha(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı diyeceğiz.

Tanım. 2.1.3 Düzgün $\alpha(t)$ eğrisinin bir $t=t_0$ noktasında

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt \quad (2.1)$$

Şeklindeki s fonksiyonuna eğrinin yay uzunluğu fonksiyonu adı verilir. Eğer $s=t$ ise eğriye yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiştir deriz, bu durumda $\frac{d\alpha}{ds}$ birim vektör ve $\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1$ dir. Böyle bir eğriye birim hızlıdır diyeceğiz. Bir t parametresi ile verilmiş bir eğriyi $s(t)$ yay uzunluğu fonksiyonu ile $(\alpha \circ t)(s)$ bileşke

fonksiyonu sayesinde yeniden parametrelendirebiliriz. Yay uzunluğu ile verilmiş eğrilerin geometrisini çalışmak bize kolaylık sağlayacaktır.

Tanım. 2.1.4 Yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş yani birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\forall s \in I$ için

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır

Örneğin, $\alpha(s) = as + b$, a ve $b \in \mathbb{R}^3$ de sabit vektörler, şeklinde bir doğrunun eğriliği,

$$\frac{d\alpha}{ds} = a \text{ ve } \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = 0 \text{ olduğundan } \kappa(s) = 0 \text{ dır.}$$

$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$ Şeklindeki r yarıçaplı çemberin yay uzunluğu

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt \quad \text{ifadesinde} \quad \frac{d\alpha}{dt} = (-r \sin t, r \cos t, 0) \quad \text{ve}$$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \text{ yazarsak } s(t) = \int_0^t r dt = rt \text{ şeklinde bulunur, buradan}$$

$$t = \frac{s}{r} \text{ elde ederiz. O halde}$$

$$\alpha(s) = (\alpha \circ t)(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(s/r) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r), 0)$$

ve

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(-\frac{1}{r} \sin(s/r), \frac{1}{r} \cos(s/r), 0 \right)$$

buluruz. Böylece r yarıçaplı çemberin eğriliği $\kappa(s) = \left\| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right\| = \frac{1}{r}$ bulunur.

Diğer taraftan, $\mathbb{R}^3$ de sabit hızlı bir $T(s)$ vektörünün $\frac{dT}{ds}$ türevine dik olduğunu

kolayca kanıtlayabiliriz. Şöyle ki; $\|T(s)\|$ sabit olduğundan bunu s ye türetirsek

$$2T(s) \cdot \frac{dT}{ds} = 0 \text{ olduğundan } T(s) \perp \frac{dT}{ds} \text{ elde ederiz.}$$

Tanım. 2.1.5 Birim hızlı $N = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisinin birim normal

vektör alanı, $B(s) = T(s) \times N(s)$ vektör alanına da $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektör alanı adı verilir.

$\alpha(s)$ Eğrisinin bi-normal vektör alanı $B(s)$ de birimdir, çünkü

$$\|B(s)\|^2 = \|T(s) \times N(s)\|^2 = \langle T(s) \times N(s), T(s) \times N(s) \rangle = \begin{vmatrix} \langle T, T \rangle & \langle N, T \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

üstelik $N = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ ve $\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ den

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \quad (2.3)$$

elde ederiz. Yukarıda $\|B(s)\|=1$ elde etmiştik, o halde $B(s) \perp \frac{dB}{ds}$ (i) dir.

$B(s) = T(s) \times N(s)$ Eşitliğini s ye göre türetirsek

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N(s) + T(s) \times \frac{dN}{ds} = \kappa N \times N + T(s) \times \frac{dN}{ds} = T(s) \times \frac{dN}{ds} \quad \text{Bulunur ki buradan}$$

$$\frac{dB}{ds} \perp T(s) \quad \text{(ii) olduğu görülür, o halde (i) ve (ii) den } \frac{dB}{ds} \text{ nin } N(s) \text{ yönünde}$$

olduğunu, böylece

$$\frac{dB}{ds} = \tau(s)N(s) \quad (2.4)$$

ifadesini elde ederiz.

Tanım. 2.1.6 Yukarıda (2.4) ile verilen $\tau(s) = \frac{dB}{ds} \cdot N(s)$ fonksiyonuna $\alpha(s)$ eğrisinin vektörel burulma (Torsiyon) fonksiyonu adı verilir. Bu vektörün uzunluğu eğrinin burulması olarak tanımlanır. Yani $\tau = \left\| \frac{dB}{ds} \right\|$ dir.

Diğer taraftan, $B(s) = T(s) \times N(s)$ ifadesinden $N(s) = B(s) \times T(s)$ elde ederiz. Bu ifadeyi s ye göre türetirsek

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \times T(s) + B(s) \times \frac{dT}{ds} = \tau(s)(N \times T) + \kappa(s)(B \times N) = -\tau(s)B - \kappa(s)T$$

$$\text{bulunur ki bu bize } \frac{dN}{ds} = -\kappa T - \tau B$$

verir. Literatürde çoğunlukla $\tau(s)$ yerine $-\tau(s)$ alınır, o nedenle bizde buna uyarak

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B \quad (2.5)$$

yazacağız.

Tanım. 2.1.7 Yukarıdaki bir $\alpha(s)$ eğrisi sayesinde tanımladığımız ortonormal vektör alanlarının $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine $\mathbb{R}^3$ için Frenet-Serre çatısı adı verilir. (2.3), (2.4) ve (2.5) denklemlerine ise yani

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{dT}{ds} = \kappa N \\ \dot{B} &= \frac{dB}{ds} = \tau(s)N(s) \\ \dot{N} &= \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B\end{aligned}\tag{2.6}$$

denklemlerine de $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet-Serre denklemleri adı verilir.

Frenet-Serre denklemlerinin daha kapalı ancak daha kullanışlı olabilen matris şeklini verebiliriz. Eğer $E = (T, N, B)^t$ dersek

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\tag{2.7}$$

matrisini oluşturabiliriz. Dikkat edilirse Ω anti-simetrik ve izi sıfır olan bir matristir. Böylece Frenet-Serre denklemleri bunlar cinsinden basitçe

$$\frac{dE}{ds} = \Omega E\tag{2.8}$$

biçiminde yazılabilir. Biz daha çok düzgün eğrilerle ilgileneceğimizden buradaki κ ve τ fonksiyonlarını her mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu kabul edeceğiz. Düzlemsel eğriler için $\tau = 0$ olduğundan yukarıdaki (2.7) denklemleri basit bir hal alır. Pek çok integre edilebilir denklemler için düzlemsel eğriler yeterli olacağından (2.7) denklemleri yalın olarak

$$\left. \begin{aligned}\dot{T} &= \frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N \\ \dot{N} &= \frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T \\ \dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial s} = 0\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

biçiminde yazılır. Eğer $\mathbb{R}^3$ yerine 3-boyutlu Minkowski uzayı M^3 ü almış olsa idik yukarıdaki denklemler biraz farklı olurdu. Eğer $\langle , \rangle$, M^3 deki iç çarpım ise, burada ortonormal $\{T(s), N(s), B(s)\}$ bazı

$$\langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = -1, \quad \langle B, B \rangle = -1$$

şeklindeki ortogonallik koşulunu sağlar ve buna göre Frenet-Serre denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{dT}{ds} = \kappa N \\ \dot{B} &= \frac{dB}{ds} = \tau N \\ \dot{N} &= \frac{dN}{ds} = \kappa T - \tau B\end{aligned}\tag{2.10}$$

şeklinde olurdu, [8].

Teorem.2.1.1 C^1 sınıfından $\kappa(s)$ ve bir aralıktaki bütün s ler için pozitif $\tau(s)$ fonksiyonları verilmiş olsun. O takdirde yay uzunluğu s ve eğrilikleri her s için verilen $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olan bir tek $\alpha(s)$ eğrisi bir katı hareket (bir dönme ve öteleme hareketinin bileşkesi) farkı ile daima bulunabilir.

Yukarıdaki teorem nedeni ile $\kappa = \kappa(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ fonksiyonlarına $\alpha(s)$ eğrisinin doğal (intrinsic) denklemleri adı verilir. Bir eğrinin kartezyen koordinatlardaki $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ şeklindeki parametrik denklemlerini bulma işlemine doğal denklemlerin integrasyonu diyeceğiz. Bunu verilen $\kappa = \kappa(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ fonksiyonlarını Frenet-Serre denklemlerinde yerine koyup integral alma yoluyla sonuçlandırırız.

Örnek.2.2 C^3 sınıfından bir $\kappa = \kappa(s)$ fonksiyonu ve $\tau = \tau(s) = 0$ verilsin. Şimdi eğrilikleri verilen $\kappa = \kappa(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ fonksiyonları olan eğriyi kartezyen koordinatlarda bulacağız. (1.10) denklemleri ile $\dot{B} = \frac{dB}{ds} = 0$ dan $B = B_0 = sbt.$

bulunur. O halde $\mathbb{R}^3$ de $e_3 \equiv B_0$ olacak şekilde bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ sabit ortonormal bazını göz önüne alalım. Bu durumda e_1, e_2 vektörleri $B(s)$ vektörüne dik olurlar. Diğer taraftan $T(s)$ ve $N(s)$ teğet ve normal vektörler binormal vektör diyeceğimiz $B(s)$ vektörüne dik olduğundan sabitlediğimiz e_1, e_2 vektörlerinin gerdiği düzlem içinde bulunurlar. Böylece $T(s)$ ile e_1 vektörlerinin belirttiği açıyı $\theta(s)$ ile gösterirsek $T(s)$ ve $N(s)$ birim vektörlerini e_1, e_2 ortonormal bazı cinsinden

$$\left. \begin{aligned}T(s) &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \\ N(s) &= -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2\end{aligned} \right\}\tag{2.11}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemleri s ye göre türetirsek

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= (-\sin \theta \, e_1 + \cos \theta \, e_2) \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dN}{ds} &= (-\cos \theta \, e_1 - \sin \theta \, e_2) \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

yazarız. Bu denklemleri $\dot{T} = \kappa(s)N$, $\dot{N} = -\kappa(s)T$ şeklindeki Frenet-Serre denklemleri ile karşılaştırsak

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa(s)$$

elde ederiz. O halde bu denklemi integrallemek suretiyle

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t) dt + \theta_0, \quad \theta_0 = \theta(0)$$

bulunur. Burada θ_0 sabiti başlangıç değeridir. Eğer aradığımız eğriyi $\alpha(s)$ ile gösterirsek

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s) = \cos \left(\int_0^s \kappa(t) dt + \theta_0 \right) e_1 + \sin \left(\int_0^s \kappa(t) dt + \theta_0 \right) e_2$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \left(\cos \left(\int_0^s \kappa(t) dt \right) \cos \theta_0 - \sin \left(\int_0^s \kappa(t) dt \right) \sin \theta_0 \right) e_1 \\ &\quad + \left(\sin \left(\int_0^s \kappa(t) dt \right) \cos \theta_0 + \cos \left(\int_0^s \kappa(t) dt \right) \sin \theta_0 \right) e_2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. $x'(s) = \int_0^s \cos \left(\int_0^r \kappa(r) dr \right) dt$, $y'(s) = \int_0^s \sin \left(\int_0^r \kappa(r) dr \right) dt$ olmak üzere

yukarıdaki denklemi integre edersek ve elde edeceğimiz integral sabitini $\alpha_0 = (x_0, y_0)$ ile gösterirsek,

$$x(s) = x'(s) \cos \theta_0 + y'(s) \sin \theta_0 + x_0$$

$$y(s) = y'(s) \cos \theta_0 + x'(s) \sin \theta_0 + y_0$$

şeklinde bileşenler olmak üzere düzlemsel eğriyi

$$\alpha(s) = x(s)e_1 + y(s)e_2$$

olarak buluruz.

Ayrıca eğrinin toplam eğriliği

$$\oint \kappa ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

dir. Eğer kapalı bir eğri keyfi r parametresi ile $\alpha(r)$ şeklinde verilmiş ise eğriyi $b-a$ periyotlu olarak periyodik bir fonksiyon gibi düşünmemizde yarar vardır. Eğer eğriyi

θ parametresi ile parametrelendirdiğimizi düşünürsek bu durumda $\alpha(\theta)$ eğrisi 2π periyotlu bir eğri olacağından T , N ve κ eğriliğini de 2π periyotlu fonksiyonlar olarak düşünmemiz gerekecektir. Bu durumda konveks $\alpha(\theta)$ eğrisini

$$\alpha(\theta) = \alpha(0) + \left(\int_0^\theta \frac{\cos \varphi}{\kappa(\varphi)} d\varphi, \int_0^\theta \frac{\sin \varphi}{\kappa(\varphi)} d\varphi \right). \quad (2.13)$$

$\alpha(\theta)$ Eğrisinin uzunluk ve alanını sırasıyla

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\kappa(\theta)} \quad (2.14)$$

ve

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \alpha(\theta), N(\theta) \rangle \frac{d\theta}{\kappa(\theta)} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlarız. Şimdi tezimizde yaralı olacak ve kanıtları sırasıyla [8] ve [12] daki kaynaklarda bulunan iki teoremi ifade edelim.

Teorem.2.1.2 2π periyotlu bir pozitif periyodik fonksiyon $\kappa(\theta)$ olsun. $\kappa(\theta)$ nın kapalı konveks bir eğrinin eğriliğini göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{\kappa(\theta)} d\theta = 0 \quad (2.16)$$

denklemini sağlamasıdır.

Teorem.2.1.3 (Gage eşitsizliği) κ kapalı konveks bir α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve sırasıyla L ve A da bu eğrinin uzunluğu ve onun sınırladığı alanı göstermek üzere

$$\int_0^L \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A} \quad (2.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem.2.1.4 (İzoperimetrik eşitsizlik) Uzunluğu L olan basit kapalı bir α eğrisinin sınırladığı alan A ise

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin bir çember eğrisi olmasıdır. İspatı [8] de bulunabilir.

Bu teorem literatürde klasik izoperimetri eşitsizliği olarak bilinmektedir

Eğrinin keyfi bir t parametresi sayesinde verilmiş olması durumunda

$$\alpha(t) = \alpha(s(t)), \quad \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| > 0$$

olsun. t parametresine göre türevleri

$$\alpha' \equiv \frac{d\alpha}{dt}, \quad \alpha'' \equiv \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \alpha''' \equiv \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

biçiminde gösterirsek aşağıdaki teoremi kolayca kanıtlayabiliriz, [12].

Teorem.2.1.5 $\mathbb{R}^3$ de bir t parametresi ile verilmiş bir $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-serre çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t)$$

denklemleri ile, eğrilikleri ise

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

şeklinde verilir. Burada $[\alpha', \alpha'', \alpha''']$ vektörlerin karma çarpımlarını göstermektedir.

$\mathbb{R}^3$ de bir t parametresi ile verilmiş bir $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-serre denklemleri ise

$$\frac{dT}{dt} = \kappa v N, \quad \frac{dT}{dt} = -\kappa v T + \tau v B, \quad \frac{dT}{dt} = -\tau v N$$

biçiminde olur, burada $v = \|\alpha'(t)\|$ dir.

2.2 Düzlemsel Eğrilerin Zamansal Evolüsyonu(Evrimi)

Bu kısımda bir düzlemsel eğrinin zamana göre hareketini inceliyeceğiz.

$$\alpha_0(r): I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisini ve

$$\alpha(r, t): I \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(r, 0) = \alpha_0(r)$$

eğri ailesini göz önüne alalım. Burada t zamanı r ise eğrilerin parametresini gösterebiliriz.

Sabit bir t anında $\mathbb{R}^3$ de düzgün bir eğriyi $\alpha(r, t)$ vektörel denklemi ile göstereceğiz.

Eğrinin s yay uzunluğu

$$s(r, t) = \int_0^r \sqrt{g(\xi, t)} d\xi \quad (2.18)$$

ve eğri üstünde 1-boyutlu Riemann metriği ise

$$g(r,t) = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\rangle \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. (2.19) den $ds = \sqrt{g(r,t)} dr$, böylece

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} \text{ ve } \frac{\partial s}{\partial r} = \sqrt{g}$$

olduğu açıktır, [10]. (2.18) ve (2.19) den eğrinin teğet vektörü

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Üstelik $\{T(s,t), N(s,t), B(s,t)\}$ eğrinin Frenet-Serre şeklindedir ve bir t anında s yay uzunluğu parametresine göre aşağıdaki Frenet-Serre denklemleri sağlanır.

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N, \quad \frac{\partial B}{\partial s} = -\tau N, \quad \frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T + \tau B \quad (2.21).$$

burada $\kappa = \kappa(s,t)$, $\tau = \tau(s,t)$ eğrinin bir t anındaki eğrilikleridir. Şimdi eğri üstündeki bir noktanın hareketini $\alpha(r,t)$ vektörel denkleminin zamana göre evolüsyon eğrisini

$$\alpha_t = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = U(r,t)N(r,t) + V(r,t)B(r,t) + W(r,t)T(r,t), \quad \alpha(r,0) = \alpha_0(r) \quad (2.22)$$

şeklindeki vektörel denklemi ile tanımlarız. Ancak, (2.22) denklemi eğrinin Frenet-Serre denklemleri ile bağdaşmalıdır, yani aşağıdaki bağdaşabilirlik koşulları sağlanmalıdır, [1]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial N(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial N(r,t)}{\partial r} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial B(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B(r,t)}{\partial r} \quad (2.26).$$

eğer r parametresi yerine yay uzunluğu parametresini alırsak yukarıdaki denklemlerde $\frac{\partial}{\partial r}$ yerine $\sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s}$ yazmalıyız.

Şimdi düzlemsel eğrilerin hareketlerini ve zamana göre evrimsel denklemlerini ifade edelim. Düzlemsel eğrilerin hareketleri

$$\alpha_t = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = U(r,t)N(r,t) + W(r,t)T(r,t), \quad \alpha(r,0) = \alpha_0(r) \quad (2.27)$$

denklemleri tarafından verilir. Bu kısımda T teğeti, N normali, g metriği, s yay uzunluğu ile κ eğriliğinin zamana göre evolüsyon denklemlerini elde edeceğiz.

(2.27) denkleminde $\frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s}$ yazmak suretiyle

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s} (UN + WT)$$

buluruz. Bu denklemde türevin Leibniz kuralı ile düzlemsel halde yay uzunluğu cinsinden verilmiş olan (2.10) Frenet-Serre denklemlerini yerine yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N + \sqrt{g} \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa \right) T \quad (2.28)$$

elde ederiz. Üstelik $\frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)$$

veya $\frac{\partial \alpha}{\partial s} = T$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} T + \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.29)$$

sonucunu elde ederiz. Buradan $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t}$ şeklindeki bağdaşabilirlik

koşulu ile (2.28) den

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N + \sqrt{g} \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa \right) T$$

ve (2.28) den

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} T + \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial t}$$

olduğundan bu iki ifadenin T üzerine olan izdüşümlerini eşitlemek suretiyle

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} = \sqrt{g} \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa \right)$$

denkleminde

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2g \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa \right) \quad (2.30)$$

sonucunu elde ederiz. Yine $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s}$ bağdaşabilirlik koşulundan

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = T \text{ olduğunu dikkate alarak}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} (UN + WT)$$

veya

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} (UN + WT) = \left(\frac{\partial U}{\partial s} N + U \frac{\partial N}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial s} T + W \frac{\partial T}{\partial s} \right)$$

buluruz. Buradan Frenet-Serre denklemlerini kullanarak

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} N + U(-\kappa T + \tau B) \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial s} T + W(\kappa N) \right)$$

veya

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N + \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa \right) T \quad (2.31)$$

şeklindeki T teğet vektörünün evolüsyon denklemini elde ederiz. Bu denklemi biraz daha basitleştirebiliriz. (2.31) nin her iki yanının T teğet vektörü ile iç çarpımını yaparsak

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, T \right\rangle = \langle N, T \rangle = 0, \quad \langle T, T \rangle \neq 0$$

olduğundan

$$\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa = 0 \Rightarrow W = \int_0^s U\kappa d\xi \quad (2.32)$$

ve böylece T teğet vektörünün evolüsyon denklemini olarak

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N \quad (2.33)$$

buluruz. (2.34) dan r ye göre türeterek

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N \right) \\ &= \sqrt{g} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s} \kappa + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N + \sqrt{g} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) \frac{\partial N}{\partial s} \end{aligned}$$

veya $\frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \sqrt{g} \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s} \kappa + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N + \left(\frac{\partial U}{\partial s} \kappa + W \kappa^2 \right) T \right) \quad (2.34)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $\frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial s}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial s} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial s} + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial s} + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$$

buluruz. Burada (2.30) dan $\frac{\partial g}{\partial t} = 2g \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U \kappa \right)$ olduğunu $\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{g}} 2g \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U \kappa \right) \kappa N + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial t} (\kappa N) \\ &= \sqrt{g} \left(\frac{\partial W}{\partial s} - U \kappa \right) \kappa N + \sqrt{g} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} N + \kappa \frac{\partial N}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = \sqrt{g} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial s} \kappa - U \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) N + \kappa \frac{\partial N}{\partial t} \right) \quad (2.35)$$

elde ederiz. Bağdaşabilirlik koşulundan (2.34) ve (2.35) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan sağ taraflarında eşitleyip her iki tarafın N normal doğrultusundaki ve T teğet doğrultusundaki katsayılarını eşitlersek $\langle N, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial W}{\partial s} \kappa - U \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s} \kappa + W \frac{\partial \kappa}{\partial s}$$

veya

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} + U \kappa^2 \quad (2.36)$$

şeklindeki eğriliğin evolüsyon denklemini elde ederiz, [22,23]. Aynı şekilde T teğet doğrultusundaki katsayılarını da eşitlersek

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \kappa W \right) T \quad (2.37)$$

denklemini buluruz ki bu da bize N normalinin t zamanına göre evolüsyon denklemini verir.

(2.30) ve (2.32) denklemlerinden s yay uzunluğu fonksiyonunun zamana göre evolüsyon denklemini elde edebiliriz. (1.1) den

$$s(r, t) = \int_0^r \sqrt{g \left(\frac{d\alpha}{dt'}, \frac{d\alpha}{dt'} \right)} dt' = \int_0^r \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t'} \right\| dt' \text{ denklemini } t \text{ ye}$$

göre türetirsek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \int_0^r \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} dt' = \int_0^r \frac{\partial g}{2\sqrt{g} \partial t} dt' \\ &= \int_0^r \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} dt' = \int_0^r \frac{1}{2\sqrt{g}} 2g \left(\frac{dW}{ds} - U\kappa \right) dt' \\ &= \int_0^r \sqrt{g} \left(\frac{dW}{ds} - U\kappa \right) dt' \\ &= \int_0^r \frac{dW}{dt'} dt' - \int_0^s U\kappa dt' \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial s}{\partial t} = W - \int_0^s U\kappa dt' \quad (2.38)$$

şeklinde yay uzunluğunun zamana göre evolüsyon denklemini elde ederiz. (2.33) ve (2.37) denklemlerini yeniden yazalım;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = - \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \kappa W \right) T$$

denklemleri matris gösterimi ile yeniden

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \\ -\frac{\partial U}{\partial s} - W\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

biçiminde yazılabilir, diğer taraftan (2.10) düzlemsel Frenet-Serre denklemlerini matris gösterimi ile

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

biçiminde yazabiliriz. Literatürde Pauli matrisi adı verilen

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (1.39) ve (1.40) matrislerini

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = i\sigma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = i\sigma_2 \kappa \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

biçiminde yazdıktan sonra

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$$

bağdaşabilirlik koşulunu göz önüne alarak

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \kappa i\sigma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s} \kappa + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) + \kappa i\sigma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right)$$

ifadesini veya (1.32) den $\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa = 0 \Rightarrow W = \int_0^s U(t')\kappa(t')dt'$ olduğunu dikkate

alarak

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + U\kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \int_0^s \kappa(t')U(t')dt' \right)$$

veya

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \int_0^s \kappa(t')dt' \right) U \quad (2.43)$$

sonucunu elde ederiz. (2.44) denkleminde parentez içinde verilen

$$Rec = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \int_0^s \kappa(t')dt' \quad (2.44)$$

operatörüne literatürde mKdV oluşumunun Recursion operatörü adı verilir, [1,17].

3. BASİT KAPALI EĞRİLERİN UZUNLUK VE ALANLARININ ZAMANA GÖRE EVOLÜSYONU

3.1. Basit kapalı düzlem eğrilerinin uzunluk ve alan evolüsyonları

Bu kısımda basit kapalı düzlem eğrilerinin uzunlukları ve bu eğriler tarafından çevrelenen alanların zamana göre evolüsyonlarını inceleyeceğiz ve bunların eğrinin evolüsyonundaki teğetsel bileşeni olan W den etkilenmeyeceğini göstereceğiz.

$$\alpha_0(r):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

düzlemde basit kapalı bir eğri olsun. $\alpha(r,0)=\alpha_0(r)$ olmak üzere zamana göre değişen düzlemsel bir eğri ailesi

$$\alpha(r,t):[a,b] \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

olsun. Bu eğri ailesinin zamana göre evolüsyonu önceki bölümdeki gibi

$$\alpha_t = W(r,t)T(r,t) + U(r,t)N(r,t) , \quad \alpha(r,0) = \alpha_0(r) \quad (3.1)$$

denklemleri sayesinde verilsin, [11]. Burada $\alpha(r,t)$ bir t anındaki eğrinin vektörel ifadesi, T ve N sırasıyla eğrinin t anındaki teğet vektörünü ve içe doğru olan normal vektörünü gösterecek, W ve U ise r ye göre periyodu $b-a$ olan keyfi fonksiyonlar olsun.

Eğri boyunca metrik tensör $g = g(r,t) = \|\alpha_r\| = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$; x ve y $\mathbb{R}^2$ nin koordinat

fonksiyonları ve $s(r,t) = \int_0^r g(\xi,t) d\xi$ yay uzunluğu olmak üzere $ds = g(r,t)dr$ veya

formal olarak

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial r} , \quad \frac{\partial s}{\partial r} = g \quad (3.2)$$

biçiminde gösterebiliriz. T teğeti, N normali, $\theta = \angle(T, x)$ oryantasyonu, κ eğriliği, eğrinin L uzunluğu ve çevrelediği A alanı standart şekilde aşağıdaki denklemlerle verilebilir.

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (3.3)$$

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{\kappa g} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.4)$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (3.5)$$

$$L(t) = \int_a^b g(r, t) dr = \oint ds \quad (3.6)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x \frac{\partial y}{\partial r} - y \frac{\partial x}{\partial r} \right) dr = -\frac{1}{2} \int_a^b \langle \alpha, gN \rangle dr = -\frac{1}{2} \oint \langle \alpha, N \rangle ds . \quad (3.7)$$

bu eğriler için Frenet-Serre denklemleri

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \kappa g N, \quad \frac{\partial N}{\partial r} = -\kappa g T, \quad (3.8)$$

g Riemann metriğinin evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial r} - U \kappa g, \quad (3.9)$$

teğet ve normalin evolüsyon denklemleri ise

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(W \kappa + \frac{\partial U}{\partial s} \right) N = \left(W \kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r} \right) N \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \left(W \kappa + \frac{\partial U}{\partial s} \right) T = - \left(W \kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r} \right) T \quad (3.11)$$

denklemleri ile daha önce verilmişti.

Teorem 3.1 Basit kapalı bir α eğrisinin t anındaki $\alpha_t = \alpha(r, t)$ evolüsyonunun $L(t)$ uzunluğunun ve bu eğrinin çevrelediği $A(t)$ alanının zamana göre evolüsyonu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \oint U \kappa ds, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = - \oint U ds \quad (3.12)$$

denklemleri ile verilir.

Kanıt. $L(t) = \int_a^b g(r, t) dr = \oint ds$ ifadesini t ye göre türetirsek (3.9) dan ve

$\int_a^b \frac{\partial W}{\partial r} dr = 0$ olduğunu kullanarak ilk denklemi

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t} dr = \int_a^b \left(\frac{\partial W}{\partial r} - U \kappa g \right) dr = \int_a^b \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) dr - \int_a^b (U \kappa g) dr = - \oint U \kappa ds$$

biçiminde elde ederiz. İkinci denklemi elde etmek için (3.7) denklemini t ye göre türetelim;

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha, gN \rangle dr = -\frac{1}{2} \int_a^b (\langle \alpha_t, gN \rangle + \langle \alpha, g_t N + g N_t \rangle) dr$$

ifadesinde $g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g$ ve $\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(W\kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r}\right)T$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_a^b \left(\langle WT + UN, gN \rangle + \langle \alpha, \left(\frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g \right) N - g \left(W\kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r} \right) T \rangle \right) dr \\ &= -\frac{1}{2} \int (Ug + \langle \alpha, N \rangle W_r - \langle \alpha, N \rangle \kappa g U - \langle \alpha, T \rangle Wg\kappa - \langle \alpha, T \rangle U_r) dr\end{aligned}$$

buluruz. Bu ifadeden kısmi integrasyon olarak (3.3) ve (3.8) den

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

ve

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \kappa g N, \quad \frac{\partial N}{\partial r} = -\kappa g T$$

denklemlerini kullanıp ve ayrıca

$$\langle T, N \rangle = 0, \quad \langle \alpha, N \rangle W \Big|_a^b = 0, \quad \langle \alpha, T \rangle U \Big|_a^b = 0$$

ifadelerini de dikkate alırsak aşağıdaki gibi sonuca ulaşırız, [5]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int \left[Ug - W(\langle \alpha_r, N \rangle + \langle \alpha, N_r \rangle) - \langle \alpha, N \rangle \kappa g U - \langle \alpha, T \rangle Wg\kappa + U(\langle \alpha_r, T \rangle + \langle \alpha, T_r \rangle) \right] dr$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int \left[Ug - W\langle \alpha, -\kappa g T \rangle - \langle \alpha, N \rangle \kappa g U - \langle \alpha, T \rangle Wg\kappa + U(g + \langle \alpha, \kappa g N \rangle) \right] dr$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\int_a^b Ug dr = -\oint U ds$$

elde ederizki bu teoremin ikinci denklemini kanıtlar.

Diğer taraftan, (3.2) , (3.10) ve $\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s}$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = W\kappa + \frac{\partial U}{\partial s} = W\kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3.13)$$

ve

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \kappa g \quad (3.14)$$

elde ederiz. Böylece κ eğriliğinin evolüsyon denklemi olarak

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} + U\kappa^2 = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{W}{g} \frac{\partial \kappa}{\partial r} + U\kappa^2 \quad (3.15)$$

buluruz. Bu denklem basit olmayıp sabit bir t anında $0 \leq s \leq L(t)$ şeklinde serbest sınıra sahip olmak üzere $s = s(r, t)$, hem r ye ve hemde t zamanının bir fonksiyonudur. Sabit bir t anı için yönlendirilmiş θ açısının 0 ve 2π aralığında değiştiği dikkate alınarak θ yı bir parametre olarak kullanabiliriz. θ yı bir parametre olarak kullanırsak eğriliğin evolüsyon denklemini belirlemek için zaman değişkenini yeniden $\tau = t$ olarak alırız ve θ yı da diğer parametre olarak kullanırız.

Kısaca (r, t) den (θ, τ) ya bir dönüşüm tanımlamış oluruz. Şu halde r sabit iken $\frac{\partial}{\partial t}$

kısmi türevi gösterecek, θ sabit iken $\frac{\partial}{\partial \tau}$ kısmi türevi gösterecektir. Böylece (θ, τ) için (3.15) evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + U \kappa^2 \quad (3.16)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç. 3.1 Teorem 3.1 den ve (3.16) denkleminde eğrilik, uzunluk ve alan için elde edilen evolüsyon denklemlerinin α_t hız vektörünün teğetsel bileşeninden bağımsız olduğu, dolayısıyla eğrinin zamana bağlı evolüsyonunun şeklinin teğetsel bileşenden etkilenmediğini böylece, bu bileşen W yi uygun seçilde istediğimiz gibi işlemleri kolaylaştıracak biçimde seçebiliriz,[8].

4. KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU

Bu bölümde 2. ve 3. bölümlerde verilenler doğrultusunda düzlemde kapalı konveks bir eğrinin evolüsyonunun son şeklini elde etmek istiyoruz.

4.1. Kapalı konveks düzlem eğrilerinin evolüsyonu

$$\alpha_0(r): I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

kapalı ve konveks eğrisini ve kapalı

$$\alpha(r, t): I \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(r, 0) = \alpha_0(r)$$

eğri ailesini göz önüne alalım. Aşağıdaki evolüsyon problemini göz önüne alalım:

$$\alpha_t = \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \quad (4.1)$$

$$L(t) = \int_a^b |\alpha_r| dr = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2} dr \quad (4.2)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x \frac{\partial y}{\partial r} - y \frac{\partial x}{\partial r} \right) dr \quad (4.3)$$

$$\alpha(r, 0) = \alpha_0(r) \quad (4.4)$$

burada $x = x(r, t)$ ve $y = y(r, t)$ $\alpha(r, t)$ yer vektörünün koordinat fonksiyonlarını, κ evolüsyon eğrisinin işaretli eğriliğini $L(t)$ ve $A(t)$ de evolüsyon eğrisinin t zamanındaki uzunluğu ile bu anda çevrelediği alanı göstermektedir. Evolüsyon eğrisinin geometrik olarak davranışını teğetsel bileşen etkilemeyeceğinden evolüsyon denklemini eşdeğer biçimde aşağıdaki şekilde seçebiliriz:

$$\alpha_t = WT + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \quad (4.5)$$

burada T eğrinin birim teğet vektörüdür. x -ekseni ile T teğeti arasındaki açı θ olmak üzere T , N ve θ , t zaman değişkeninden bağımsız olduklarından yukarıdaki evolüsyon problemini eşdeğer biçimde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\alpha_t = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} T + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \quad (4.6)$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha_\theta| d\theta \quad (4.7)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \quad (4.8)$$

$$\alpha(\theta, 0) = \alpha_0(\theta) . \quad (4.9)$$

eğrinin t zamanındaki uzunluk ve çevrelediği alan ise

$$L_t = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} = -\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A} \quad (4.10)$$

$$A_t = -2\pi + \frac{L^2}{2A} \quad (4.11)$$

biçiminde verilebilir. İleride bunları ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile İzoperimetrik eşitsizliği kullanarak $\frac{L}{A}$ oranının evolüsyon esnasında azalacağını, yani payının küçülüp paydasının artacağını, dolayısıyla konveks bir eğrinin bu akış sürecinde konveksliğinin değişmeyeceğini kanıtlayacağız.

4.2. Konveks düzlem eğrilerinin evolüsyonunun son şekli

Önceki kısımlarda verdiğimiz bilgileri kullanarak ve $W=0$ ve $U = \kappa - \frac{L}{2A}$ olduğunu göz önünde tutarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. 4.1 Önceki kısımda verilenler ışığında bir eğrinin evolüsyon denklemlerini aşağıdaki gibi verebiliriz;

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= -\left(\kappa - \frac{L}{2A}\right) \kappa g , \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa}{\partial s} N , \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{\partial \kappa}{\partial s} T , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial \kappa}{\partial r} , \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \left(\kappa - \frac{L}{2A}\right) \kappa^2 \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\oint \left(\kappa - \frac{L}{2A}\right) \kappa ds = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= -\oint \left(\kappa - \frac{L}{2A}\right) \kappa ds = -2\pi + \frac{L^2}{2A} . \end{aligned}$$

yukarıdaki evolüsyon denklemlerinde s yay uzunluğu fonksiyonu hem r ve hemde t zaman değişkenine bağlı olduğundan bu denklemleri çalışmak zordur ancak yukarıda

ifade ettiğimiz gibi evolüsyonun $W = W(r, t)$ teğetsel bileşenini uygun bir şekilde seçerek yukarıdaki denklemleri basitleştirebiliriz. Böylece, (4.1)-(4.4) denklemlerine eşdeğer olarak aşağıdaki denklemleri ele alabiliriz.

$$\alpha_t = WT + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \quad (4.12)$$

$$L = \int_a^b |\alpha_r| dr \quad (4.13)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b x dy - y dx, \quad (4.14)$$

$$\alpha(r, 0) = \alpha_0(r). \quad (4.15)$$

Teorem.4.1 deki denklemlerde

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \alpha_r - \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) \kappa g, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \left(W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) T, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} = W\kappa + \frac{1}{g} \frac{\partial \kappa}{\partial r}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + W \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) \kappa^2 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi + \frac{L^2}{2A}. \quad (4.22)$$

bu denklemlerden L ve A nın evolüsyon denklemlerinin W den bağımsız olduğunu görüyoruz. Genel olarak θ , r ve t nin fonksiyonudur, o halde θ yı t den bağımsız yapmak için W teğetsel bileşenini (4.19) a göre

$$W = - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial s} = - \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \quad (4.23)$$

şeklinde seçmemiz gerekir. Bu seçime göre (4.17) ve (4.18) den ayrıca T ve N nin de t den bağımsız olduğu görülür. O halde θ ve t yeni koordinatlar olarak seçilirse eğrilik, uzunluk ve alan için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. 4.2 θ ve t koordinatlarına göre

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 - \frac{L}{2A} \kappa^2 \quad (4.24)$$

$$\frac{dL}{dt} = - \int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A} \quad (4.25)$$

$$\frac{dA}{dt} = -2\pi + \frac{L^2}{2A} . \quad (4.26)$$

bundan sonraki kısımda aşağıdaki denklemleri ele alacağız.

$$\alpha_t = - \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} T + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \quad (4.27)$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha_\theta| d\theta \quad (4.28)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \quad (4.29)$$

$$\alpha(\theta, 0) = \alpha_0(\theta) . \quad (4.30)$$

burada $\alpha(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ eğrinin yer vektörü olarak alınacaktır.

Teorem. 4.3 $\alpha(\theta, t): [0, 2\pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisinin evolüsyon denklemleri (4.27)-

(4.30) daki gibi olsun. Bu durumda evolüsyon süreci boyunca $\frac{L}{A}$ oranı azalır.

Kanıt. Yukarıdaki Teorem 4.2 de $\frac{dL}{dt} = - \int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A}$ ve $\frac{dA}{dt} = -2\pi + \frac{L^2}{2A}$ olduğu

gösterilmişti, bu denklemlerde $\oint \kappa ds = 2\pi$ olduğunu göz önüne alarak, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile izoperimetri eşitsizliğini kullanmak suretiyle

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L}{A} \right) &= \frac{1}{A} \left(- \oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \right) - \frac{L}{A^2} \left(-2\pi + \frac{L^2}{2A} \right) \\ &\leq \frac{1}{A} \left(- \frac{4\pi^2}{L} + \frac{\pi L}{A} \right) - \frac{L}{A^2} \left(-2\pi + \frac{L^2}{2A} \right) \\ &= \frac{\pi}{A} \frac{L^2 - 4\pi A}{AL} - \frac{L}{A^2} \frac{L^2 - 4\pi A}{2A} \\ &= \frac{(L^2 - 4\pi A)(2\pi A - L^2)}{2A^2 L} \leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{L}{A}$ oranının t ye göre azalan olduğu kanıtlanmış olur.

Teorem. 4.4 Evolüsyon denklemleri (4.27)-(4.30) ile verilen kuvvetli konveks bir eğrinin konveksliği evolüsyon süreci boyunca korunur.

Kanıt. Başlangıçta eğriliği pozitif olan eğrinin bu eğriliğinin daima pozitif kalacağını göstermek için maksimum prensibini kullanacağız.

Şimdi μ daha sonra uygun şekilde tespit edilecek olan bir sabiti göstermek üzere $\beta(\theta, t) = \kappa(\theta, t)e^{\mu t}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. O takdirde β fonksiyonu

$$\beta_t = \kappa^2 \beta_{\theta\theta} + \left(\kappa^2 - \frac{L}{2A} \kappa + \mu \right) \beta \quad (4.32)$$

denklemini sağlar. Burada β nın katsayısı κ ya göre diskriminantı $\frac{L^2}{4A^2} - 4\mu$ olan

ikinci dereceden bir polinomdur. Teorem 4.3 den $\forall t > 0$ için $\frac{L}{A} \leq \frac{L_0}{A_0}$ elde ederiz.

Burada L_0 ve A_0 eğrinin başlangıçtaki uzunluğunu ve onun çevrelediği alanı göstermektedir. Şimdi eğer $\mu > \frac{L_0^2}{16A_0^2}$ seçersek bu durumda diskriminant negatif

olacağından β nın katsayısı daima pozitif olacaktır. O nedenle $\mu > \frac{L_0^2}{16A_0^2}$ seçelim.

ayrıca,

$$\beta_{\min}(t) = \inf \{ \beta(\theta, t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

tanımlayalım. Kabul edelim ki bir $t > 0$ için $\beta_{\min}(t) = \eta$ olduğunda $0 < \eta < \beta_{\min}(0) = \kappa_{\min}(0)$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ pozitif sayısı mevcuttur. $t_0 = \inf \{ t : \beta_{\min}(t) = \eta \}$ ile gösterelim, bu durumda β nın sürekli olmasından dolayı η minimumu başlangıç anında yani (θ_0, t_0) noktasında alınır ve bu noktada

$$\beta_t \leq 0, \quad \beta_{\theta\theta} \geq 0, \quad \beta = \eta > 0$$

dır. Bu sonuç ise (4.32) ile çelişir, o halde kabulümüz yanlıştır yani, $t > 0$, $\beta_{\min}(t) \geq \beta_{\min}(0)$ olmalıdır. Böylece her $t > 0$ için

$$\kappa(\theta, t) \geq \kappa_{\min}(t) = \beta_{\min}(t)e^{-\mu t} = \kappa_{\min}(0)e^{-\mu t} > 0$$

elde ederiz ki böylece teorem kanıtlanır.

Teorem. 4.5 Evolüsyon denklemleri aşağıdaki (4.27), (4.28), (4.29) ve (4.30)

$$\alpha_t = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} T + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha_\theta| d\theta$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta$$

$$\alpha(\theta, 0) = \alpha_0(\theta)$$

denklemleri ile verilen başlangıç eğrisinin konveks olduğu bir evolüsyon süreci boyunca evolüsyon eğrisinin uzunluğu azaldıkça bu eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanı artar.

Kanıt. Teorem 4.4 den dolayı evolüsyon süreci boyunca (2.18) ile verdiğimiz Gage eşitsizliği her bir eğri için sağlanır. (4.25) eşitliği olan $\frac{dL}{dt} = -\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A}$ ve (2.18)

Gage eşitsizliğinden

$$L_t = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \leq 0$$

Elde ederiz ki bu ilk iddiamızı kanıtlar, yani eğrinin uzunluğu evolüsyon süreci boyunca azalır. Diğer taraftan (4.26) dan $\frac{dA}{dt} = -2\pi + \frac{L^2}{2A}$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemlerle izoperimetri eşitsizliğinden $L^2 - 4\pi A \geq 0$ olduğundan

$$A_t = \frac{L^2 - 4\pi A}{2A} \geq 0$$

elde ederiz ki bu eşitsizlikte evolüsyon eğrisinin sınırladığı alanın evolüsyon süreci boyunca arttığını kanıtlar,[8].

5. HİPERBOLİK MONGE -AMPERE DENKLEMİ

Bir evolüsyon eğrisi $u \in S^1$ ve $t \in [0, T)$ olmak üzere $u \rightarrow F(u, t)$ şeklinde verilen bir eğri ailesidir. Burada T , F nin süresidir. Verilen bir $F(., t)$ eğrisi için fiziksel özellikler u parametresinin seçiminden bağımsız olmalıdır ki bu F nin eğrilik, normal ivme ve normal hız gibi geometrik çoklukları seçilen parametreden bağımsız olarak içerebilmesini sağlar. Bu değişmezlik uygun bir parametre seçerek çalışmamıza olanak sağlar.

Tanım 5.1 Bir $F : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi her $(u, t) \in S^1 \times [0, T)$ için

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u} \right) = 0 \quad (5.1)$$

koşulunu sağlıyor ise bu eğriye normal bir evrime (evolüsyona) sahiptir deriz.

Biz burada normal evolüsyon eğrilerini ele alacağız ve aşağıdaki teoremi ispatsız ifade edeceğiz. Bu teoremin ispatı [4] de yapılmıştır.

Teorem 5.1. C evolüsyon eğrisi kapalı ise bu durumda C nin bir ϕ parametre değişimi $C \circ \phi$ eğrisi bir normal evolüsyon eğrisi olacak şekilde vardır, [4]

(1.1.1) ile verilen başlangıç değer probleminde başlangıç hız vektör alanı eğriye normal olduğundan evolüsyon süresince elde edilecek eğrilerin hepsinin normal şekilde evolüsyon eğrileri olduğu sonucuna varılır, yani

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \sigma(u, t) \bar{N} \\ F(u, 0) = F_0(u) \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklindeki akış bir normal akıştır. Burada,

$$\sigma(u, t) = f(u) + \int_0^t k(u, \xi) d\xi$$

eşitliği geçerli olduğundan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = k(u, t), \quad \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) \quad (5.3)$$

yazabiliriz, burada

$$s = s(., t), \quad F(., t) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

eğrisinin yay uzunluğu parametresidir.

$$v = \sqrt{(\partial x / \partial u)^2 + (\partial y / \partial u)^2} = |\partial F / \partial u|$$

olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s}$ operatörü u cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$$

ile verilir. Frenet-Serre formülleri düzlem eğrileri için

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial s} = k \vec{N}, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = -k \vec{T}$$

denklemleri şeklinde verildiğini biliyoruz,[7,9].

Bu durumda $\{\vec{T}, \vec{N}\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin ortogonal bir bazıdır. $F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Eğrisinin birim dış normal açısını θ ile gösterelim, bu halde

$$\vec{N} = (-\cos \theta, -\sin \theta), \quad \vec{T} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

yazabiliriz ve Frenet formülleri ilede $\frac{\partial \theta}{\partial s} = k$ elde ederiz. Üstelik,

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \vec{T}, \quad \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \vec{N}$$

denklemlerini de yazabiliriz.

Bir önceki tanımı kullanarak

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} = k \sigma \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t},$$

elde ederiz ve

$$\vec{T}(u, t) = \frac{\partial F}{\partial s}(u, t),$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \vec{N}$$

ve

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial s} \vec{T}$$

yazabiliriz, böylelikle aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}.$$

şimdi,

$F(u, t): S^1 \times [0, T] \rightarrow R^2$ nin eğri kısaltan (1.1.1) akış denklemlerini sağlayan konveks eğriler ailesi olduğunu varsayalım. Her $F(., t)$ konveks eğriyi parametrelendirmek için normal açığı kullanalım. Yani,

$$F(\theta, \tau) = F(u(\theta, \tau), t(\theta, \tau))$$

olsun, burada $t(\theta, \tau) = \tau$ dır. Ayrıca, $\vec{N}$ ve $\vec{T}$, τ parametresinden bağımsızdır, bunu aşağıdaki şekilde kanıtlayabiliriz:

$$0 = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -kv \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

olur ve buradan

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \vec{N} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + kv \frac{\partial u}{\partial t} \right) \vec{N} = 0$$

ve

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \vec{T} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + kv \frac{\partial u}{\partial t} \right) \vec{T} = 0$$

elde ederiz. Zincir kuralı ile

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

ve

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

elde edilir.

F nin destek fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$S(\theta, \tau) = (F(\theta, \tau), -\vec{N}) = (F(\theta, \tau), (\cos \theta, \sin \theta)) = x(\theta, \tau) \cos \theta + y(\theta, \tau) \sin \theta$$

S nin türevi aşağıdaki denklemi sağlar;

$$\begin{aligned} S_\theta(\theta, \tau) &= -x(\theta, \tau) \sin \theta + y(\theta, \tau) \cos \theta + (F(\theta, \tau), (\cos \theta, \sin \theta)) \\ &= -x(\theta, \tau) \sin \theta + y(\theta, \tau) \cos \theta = (F(\theta, \tau), \vec{T}) \end{aligned}$$

burada

$$(F(\theta, \tau), (\cos \theta, \sin \theta)) = 0$$

yani tanjant vektör birim normal vektöre diktir. Böylece eğri aşağıdaki destek fonksiyonu ile temsil edilebilir, [3,6].

$$\begin{cases} x = S \cos \theta - S_{\theta} \sin \theta \\ y = S \sin \theta + S_{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad (5.4)$$

böylece eğrinin tüm geometrik özellikleri destek fonksiyonu sayesinde ifade edilebilir. Özel olarak eğrinin eğriliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$k = \frac{1}{S_{\theta\theta} + S}.$$

gerçekten, destek fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} + S &= -x_{\theta} \sin \theta + y_{\theta} \cos \theta - x \cos \theta - y \sin \theta + x \cos \theta + y \sin \theta \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}, \vec{T} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta}, \vec{T} \right) = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

yazabiliriz.

diğer yandan destek fonksiyonu

$$S(\theta, \tau) = (F(\theta, \tau), -\vec{N})$$

aşağıdakini eşitliği sağlar:

$$S_{\tau} = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}, -\vec{N} \right) + \left(F(\theta, \tau), \frac{\partial \vec{N}}{\partial \tau} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial t}, -\vec{N} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, -\vec{N} \right) = -\sigma(\theta, \tau),$$

burada

$$\left(F(\theta, \tau), \frac{\partial \vec{N}}{\partial \tau} \right) = 0 \quad \text{Olduğu} \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial \tau} = 0$$

denklemden elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} S_{\tau\tau} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \tau^2}, -\vec{N} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}, -\frac{\partial \vec{N}}{\partial \tau} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, -\vec{N} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, -\vec{N} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau}, -\vec{N} \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, -\vec{N} \right) \\
&= \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_\tau, -\vec{N} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, -\vec{N} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau}, -\vec{N} \right) - k
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Normal evolüsyon eğrisi söz konusu olduğundan

$$\forall t \in [0, T) \quad \text{İçin} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \vec{T} \right) \equiv 0 \quad \text{dir.}$$

$$S_\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, -\vec{N} \right)$$

formülünden

$$\begin{aligned}
S_{\theta\tau} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta}, -\vec{N} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}, -\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta}, -\vec{N} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \vec{T} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \theta}, -\vec{N} \right) = \frac{1}{\partial \theta / \partial u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}, -\vec{N} \right) \\
&= \frac{1}{(\partial u / \partial s)(\partial s / \partial u)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}, -\vec{N} \right) = \frac{1}{kv} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}, -\vec{N} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$S_\theta = (F, \vec{T})$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
S_{\tau\theta} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}, \vec{T} \right) + \left(F, \frac{\partial \vec{T}}{\partial \tau} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}, \vec{T} \right) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial t}, \vec{T} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \vec{T} \right) = v \frac{\partial u}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece S destek fonksiyonu

$$S_{\tau\tau} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau}, -\vec{N} \right) - k = kv \frac{\partial u}{\partial \tau} S_{\theta\tau} - k = k S_{\theta\tau}^2 - k = (S_{\theta\tau}^2 - 1)k$$

(5.5)

denklemini sağlar, yani

$$S_{\tau\tau} = \frac{S_{\theta\tau}^2 - 1}{S_{\theta\theta} + S}, \forall (\theta, \tau) \in S^1 \times [0, T) \quad (5.6)$$

yazabiliriz.

Bu durumda , (1.1,1)' den

$$\begin{cases} SS_{\tau\tau} + S_{\tau\tau}S_{\theta\theta} - S_{\theta\tau}^2 + 1 = 0 \\ S(\theta, 0) = h(0), \\ S_{\tau}(\theta, 0) = -f(0) \end{cases} \quad (5.7)$$

elde ederiz. Yukarıdaki (5.7) denklemi S üstünde hiperbolikMonge-Ampre denklemi olarak bilinir. Burada h , F_0 a ait destek fonksiyonu ve $\tilde{f}$, F_0 başlangıç eğrisinin ilk hızıdır.[2].

6. ÖRNEK VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, normal hiperbolik eğrilik akışını daha iyi anlayabilmek için bir örnek vereceğiz. Basitlik için τ yerine t yazacağız..

Örnek 6.1. $F(.,t)$ yarı çapı $R(t)$ olan orijin merkezli çemberlerin ailesi olsun.

Destek fonksiyonu ve eğrilik, sırası ile $S(\theta, t) = R(t)$ ve $k(\theta, t) = \frac{1}{R(t)}$ ile verilsin.

Bunları (1,1) de yerine yazarsak

$$\begin{cases} R_t = -\frac{1}{R}, \\ R(0) = r_0 > 0, R_t(0) = r_1 \end{cases} \quad (6.1)$$

elde ederiz.

Bu başlangıç değer problemi için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 6.1, [11] $r_0 > 0$ keyfi bir başlangıç olmak üzere eğer $r_1 \leq 0$ başlangıç hızı

ise $R = R(t)$ çözümü gitgide azalır ve $r_1 = 0$ için $T^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}} r_0$ olmak üzere bir T^*

zamanında eğri bir noktaya büzülür. Başlangıç hızı pozitif ise $R = R(t)$ çözümü önce artar, ancak sonra sonlu bir zaman sonunda bir noktaya büzülür.

UYARI: Bu teoremdeki gerçeği fiziksel kurallarlada yorumlayabiliriz. Şöyleki; (5.7) den ivme doğrultusunun iç normal vektör ile daima aynı doğrultuda olduğunu görebiliriz. Böylece, eğer $R(t) \leq 0$ ise yani başlangıç hızı birim iç normal vektör ile uyuyorsa o zaman evolüsyon çemberi sonlu bir zaman içinde bir noktaya büzülecektir. Eğer $R(t) > 0$ ise yani başlangıç hızı dış birim normal vektörle uyuyorsa o zaman evolüsyon eğrisi önce genişleyecek ve sonlu bir zaman sonunda bir noktaya çökecektir. (5.7) denkleminde biz $S_t(\theta, 0) = -\tilde{f} \leq 0$ varsaydığımızdan yani başlangıç hızının daima başlangıçtaki birim iç normalle uyumlu kabul ettiğimizde ikinci durum ortaya çıkmayıp sadece birinci durum gerçekleşecektir.

Şimdi, hiperbolik ortalama eğrilik akışının sağladığı bazı özellikleri elde edeceğiz. Bunun için aşağıdaki genel ikinci mertebeden operatörü göz önüne alalım:

$$L[w] \triangleq aw_{\theta\theta} + 2bw_{\theta t} + cw_{tt} + dw_{\theta} + ew_t \quad (6.2)$$

burada, a , b ve c , θ ve t nin ikinci meriteden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları iken d ve e , θ ve t nin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. L operatörü, aşağıdaki durumda (θ, t) noktasında hiperbolik tiptendir deriz;

$$b^2 - a.c > 0.$$

eğer L , D nin her noktasında hiperbolik ise D tanım bölgesinde hiperboliktir ve eğer D 'de $b^2 - a.c \geq \mu > 0$ olacak şekilde sabit bir μ reel sayısı mevcut ise operatöre D bölgesinde düzgün hiperboliktir deriz.

$t=0$ noktasında w ve normal türevi

$$\frac{\partial w}{\partial v} \triangleq -b \frac{\partial w}{\partial \theta} - c \frac{\partial w}{\partial t}$$

şeklinde verilsin.

L nin ek(adjoint) operatörünü aşağıda tanımlayalım:

$$\begin{aligned} L^*[w] &\triangleq (aw)_{\theta\theta} + 2(bw)_{\theta t} + (cw)_{tt} - (dw)_{\theta} - (ew)_t \\ &= aw_{\theta\theta} + 2bw_{\theta t} + cw_{tt} + (2a_{\theta} + 2b_t - d)w_{\theta} + (2b_{\theta} + 2c_t - 3)w_t \\ &\quad + (a_{\theta\theta} + 2b_{\theta t} + c_{tt} - d_{\theta} - c_t)w \end{aligned}$$

şimdi, her hiperbolik L operatörü için, yeteri kadar dar bir $0 \leq t \leq t_0$ şeridi içinde aşağıdaki koşulu sağlayan bir l fonksiyonunun var olduğunu gösterelim

$$\begin{cases} 2\sqrt{b^2 - ac} \left[l_t - \frac{1}{c} (\sqrt{b^2 - ac} - b) l_{\theta} \right] + lK_+ \geq 0, \\ 2\sqrt{b^2 - ac} \left[l_t + \frac{1}{c} (\sqrt{b^2 - ac} - b) l_{\theta} \right] + lK_- \geq 0, \\ (L^* + g)[w] \geq 0, \end{cases}$$

burada,

$$\begin{aligned} K_+ &\triangleq K_+(\theta, t) \triangleq \left(\sqrt{b^2 - ac} \right)_{\theta} + \frac{b}{c} \left(\sqrt{b^2 - ac} \right)_{\theta} + \frac{1}{c} (b_{\theta} + c_t - e) \sqrt{b^2 - ac} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2c} (b^2 - ac)_{\theta} + a_{\theta} + b_t - d - \frac{b}{c} (b_{\theta} + c_t - e) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_- &\triangleq K_-(\theta, t) \triangleq \left(\sqrt{b^2 - ac} \right)_{\theta} + \frac{b}{c} \left(\sqrt{b^2 - ac} \right)_{\theta} + \frac{1}{c} (b_{\theta} + c_t - e) \sqrt{b^2 - ac} \\ &\quad - \left[-\frac{1}{2c} (b^2 - ac)_{\theta} + a_{\theta} + b_t - d - \frac{b}{c} (b_{\theta} + c_t - e) \right] \end{aligned}$$

şeklinde verilmektedir.

$$L(0,t) \triangleq 1 + \alpha t - \beta t^2 \quad (6.3)$$

olsun.

Yukarıdaki koşulun aşağıdaki gibi verilebileceği kolayca gösterilebilir;

$$\begin{cases} 2\sqrt{b^2 - ac}(\alpha - 2\beta t) + (1 + \alpha t - \beta t^2)K_+ \geq 0, \\ 2\sqrt{b^2 - ac}(\alpha - 2\beta t) + (1 + \alpha t - \beta t^2)K_- \geq 0, \\ -2c\beta + (2b_\theta + 2c_t - e)(\alpha - 2\beta t) \\ + (a_{\theta\theta} + 2b_{\theta t} + c_{tt} - d_\theta - e_t + g)(1 + \alpha t - \beta t^2) \geq 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

yukarıdaki ifadelerde tüm katsayılar ve türevleri sınırlı olarak varsayıldığından ve $-c$ ile $\sqrt{b^2 - ac}$ pozitif alt sınırlara sahip olduklarından α yeteri kadar büyük seçilirse $t=0$ 'da ilk iki ifade pozitif olur. Eğer β yeteri kadar büyük seçilirse üçüncü ifadede $t=0$ da pozitiftir. Bu α ve β değerleri için bir $t_0 > 0$ sayısı $l(\theta, t) > 0$ eşitsizliği ve tüm diğer eşitsizlikler $0 \leq t \leq t_0$ için sağlanacak şekilde bulunabilir.

(6.3) ' de verilen l ile birlikte normal türevdeki koşul

$$\frac{\partial w}{\partial v} + (b_\theta + c_t - e + c\alpha)w \leq 0 \quad t=0$$

şeklinde yazılır. Eğer aşağıdaki şekilde sabit bir M sayısını Γ_0 üstünde

$$M \geq -[b_\theta + c_t - e + c\alpha] \Gamma_0 \quad (6.5)$$

olacak biçimde yeteri kadar büyük seçersek o zaman θ -eksenine bitişik olan şerit için aşağıdaki maksimum prensibini elde ederiz ,[24]

Yardımcı Teorem 6.2: 6.2 de verilen L operatörünün katsayılarının ve birinci ve ikinci türevlerinin sınırlı olduğunu farzedelim. D uygun bir bölge olsun. Eğer t_0 ve M , (6.4) ve (6.5) ile uygun seçilirse o takdirde

$$\begin{cases} (L + g)[w] \geq 0 \text{ D içinde} \\ \frac{\partial w}{\partial v} - Mw \leq 0 \quad \Gamma_0 \text{ üstünde} \\ w \leq 0 \quad \Gamma_0 \text{ üstünde} \end{cases}$$

ifadelerini sağlayan herhangi bir w fonksiyonu aynı zamanda D nin $0 \leq t \leq t_0$ şeridinde yatan bir

$w \leq 0$ Fonksiyonu içinde sağlanır. t_0 ve M sabitleri $-c$ ve $\sqrt{b^2 - ac}$ nin en küçük alt sınırı ve L nin katsayıları ile onların türevleri tarafından sınırlıdır.

Önerme 6.1. (Konveksliğin Korunması) F_0 in ortalama eğriliği k_0 ve $\delta = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \{k_0(\theta)\} > 0$ olsun. Bu durumda (5.7) nin C^4 sınıfından bir S çözümü, $t \in [0, T_{\max})$ için $k(\theta, t) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlar, burada $[0, T_{\max})$ (1.1) in bir $F(., t)$ çözümü için maksimum zaman Aralığıdır, [13,16].

Kanıt. Başlangıç eğrisi kesin konveks olduğundan Teorem (5.1) ile (5.7) nin çözümü $T < T_{\max}$ olacak şekildeki bir $[0, T)$ kısa zaman aralığında kesin konveks olur ve onun destek fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonu

$$\forall (\theta, t) \in S^1 \times [0, T) \quad \text{İçin } S_{tt} = (S_{\theta t}^2 - 1)k = \frac{S_{\theta t}^2 - 1}{S_{\theta\theta} + S}$$

denklemini sağlar. t ye göre türev alırsak

$$k_t = \left(\frac{1}{S_{\theta\theta} + S} \right)_t = -\frac{1}{(S_{\theta\theta} + S)^2} [S_{\theta\theta t} + S_t] = -k^2 [S_{\theta\theta t} + S_t] = k^2 [\sigma_{\theta\theta} + \sigma]$$

elde ederiz, böylece;

$$S_{\theta\theta t} + S_t = -(S_{\theta\theta} + S)^2 k_t = -\frac{1}{k^2} k_t$$

$$S_{\theta\theta\theta t} + S_{\theta t} = \left(-\frac{1}{k^2} k_t \right)_\theta = \frac{2}{k^3} k_t k_\theta - \frac{1}{k^2} k_{\theta t}$$

ve

$$\begin{aligned} k_{tt} &= \frac{1}{(S_{\theta\theta} + S)^3} [S_{\theta\theta t} + S_t]^2 - \frac{1}{(S_{\theta\theta} + S)^2} [S_{\theta\theta t} + S_{tt}] \\ &= 2k^3 \left(-\frac{1}{k^2} k_t \right)^2 - k^2 \{ [(S_{\theta t}^2 - 1)k]_{\theta\theta} + (S_{\theta t}^2 - 1)k \} \\ &= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 \{ (S_{\theta t}^2 - 1)_{\theta\theta} k + 2(S_{\theta t}^2 - 1)_\theta k_\theta + (S_{\theta t}^2 - 1)k_{\theta\theta} + (S_{\theta t}^2 - 1)k \} \\ &= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1)(k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ 2(S_{\theta t} S_{\theta\theta t})_\theta k + 4S_{\theta t} S_{\theta\theta t} k_\theta \} \\ &= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1)(k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ 2(S_{\theta t}^2 + S_{\theta t} S_{\theta\theta t}) k + 4S_{\theta t} (S_{\theta\theta} + S - S)_t k_\theta \} \\ &= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1)(k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ 2[(S_{\theta\theta t} + S_t)^2 - 2S_{\theta\theta t} S_t - S_t^2 + S_{\theta t} (S_{\theta\theta} + S)_{\theta t} \\ &\quad - S_{\theta t}^2] k - 4S_{\theta t} \frac{1}{k^2} k_t k_\theta - 4S_{\theta t} S_t S_\theta \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1) (k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ 2[(S_{\theta\theta t} + S_t)^2 - 2(S_{\theta\theta t} + S_t)S_t + S_t^2] \\
&\quad - S_{\theta t}^2 + S_{\theta t}(\frac{1}{k})_{\theta t} \} k - 4S_{\theta t} \frac{1}{k^2} k_t k_{\theta} - 4S_{\theta t} S_t S_{\theta} \} \\
&= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1) (k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ 2[(-\frac{1}{k^2} k_t)^2 - 2(-\frac{1}{k^2} k_t)S_t + S_t^2 - S_{\theta t}^2] \\
&\quad + S_{\theta t}(\frac{2}{k^3} k_t k_{\theta} - \frac{1}{k^2} k_{\theta t}) \} k - 4S_{\theta t} \frac{1}{k^2} k_t k_{\theta} - 4S_{\theta t} S_t S_{\theta} \} \\
&= \frac{2}{k} k_t^2 - k^2 (S_{\theta t}^2 - 1) (k_{\theta\theta} + k) - k^2 \{ \frac{2}{k^3} k_t^2 + \frac{4}{k} S_t k_t + 2S_t^2 - 2S_{\theta t}^2 k \\
&\quad + \frac{4}{k^2} S_{\theta t} k_t k_{\theta} - \frac{2}{k} S_{\theta t} k_{\theta t} - 4S_{\theta t} \frac{1}{k^2} k_t k_{\theta} - 4S_{\theta t} S_t k_{\theta} \} \\
&= k^2 (1 - S_{\theta t}^2) k_{\theta\theta} + 2k S_{\theta t} k_{\theta t} + 4k^2 S_{\theta t} S_t k_{\theta} - 4k S_t k_t + (S_{\theta t}^2 + 1 - 2S_t^2) k^3
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece k eğriliği, aşağıdaki denklemi sağlar.

$$k_{tt} = k^2 (1 - S_{\theta t}^2) k_{\theta\theta} + 2k S_{\theta t} k_{\theta t} + 4k^2 S_{\theta t} S_t k_{\theta} - 4k S_t k_t + (S_{\theta t}^2 + 1 - 2S_t^2) k^3 \quad (6.8)$$

L operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$L[k] \triangleq k^2 (1 - S_{\theta t}^2) k_{\theta\theta} + 2k S_{\theta t} k_{\theta t} - k_{tt} + 4k^2 S_{\theta t} S_t k_{\theta} - 4k S_t k_t. \quad (6.9)$$

(6.6) vasıtasıyla

$$a = k^2 (1 - S_{\theta t}^2), \quad b = k S_{\theta t} \quad \text{Ve} \quad c = -1$$

şeklindeki a, b ve c nin θ ve t ye göre ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir ve

$$d = 4k^2 S_{\theta t} S_t \quad \text{ve} \quad e = -4k S_t$$

olmak üzere d ve e ninde θ ve t ye göre sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduğu elde edilir. Direk bir hesaplama ile

$$b^2 - a.c = (k S_{\theta t})^2 - k^2 (1 - S_{\theta t}^2) . (-1) = k^2 > 0$$

olduğunu görürüz, böylece (6.9) ile tanımlanan L operatörü $S^1 x[0, T)$ bölgesinde hiperboliktir.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (L+h)[k] \triangleq k^2(1-S_{\theta t}^2)k_{\theta\theta} + 2kS_{\theta t}k_{\theta t} - k_{tt} + 4k^2S_{\theta t}S_t k_{\theta} - 4kS_t k_t \\ \quad + k^2(S_{\theta t}^2 + 1 - 2S_t^2)k=0 & , \quad S^1x[0,T) \\ k(\theta,0) = k_0(\theta) & , \quad \Gamma_0 \\ 0 \leq \frac{\partial k}{\partial v} \triangleq -bk_0 - ck_t \triangleq \beta(\theta) & , \quad \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (6.10)$$

koşullarını sağlayan bir $k(\theta, t)$ fonksiyonunu belirleme problemini göz önüne alalım.

Bir $k(\theta, 0) = \delta = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \{k_0(\theta)\}$ fonksiyonunu aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bulabiliriz;

$$\left\{ \begin{array}{ll} (L+h)[k] \triangleq 0 & S^1x[0,T) \\ k(\theta, 0) \leq k_0(\theta) & \Gamma_0 \\ \frac{\partial k}{\partial v} - Mk \leq \beta(\theta) - Mk_0(\theta) & \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (6.11)$$

burada Γ_0 başlangıçtaki tanım kümesi ve M ise (6.5) ile verilen bir sabittir. Eğer k ve k (6.11)'i sağlar ise (6.2) deki yardımcı teoremi $k - k$ ye uygulayabiliriz ve $t_0 \leq T$ olmak üzere $S^1 \times [0, t_0)$ üstünde $k \leq k(\theta, t)$ dır. Bu $F(., t)$ çözümünün $[0, T_{\max})$ üstünde konveks olmasını gerektirir. Üstelik $F(., t)$ çözümü $S^1 \times [0, T_{\max})$ üstünde $\min_{\theta \in S^1} \{k_0(\theta)\}$

şeklinde bir pozitif düzgün bir en küçük alt sınıra sahiptir. Bu ispatı tamamlar, [14,15].

Aşağıdaki yardımcı teoremi daha sonra kullanacağız.

Yardımcı Teorem 6.3. Kapalı bir $F(., t)$ eğrisinin $L(t)$ yay uzunluğu

$$\frac{dL(t)}{dt} = - \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, t) d\theta$$

ve

$$\frac{d^2L(t)}{dt^2} = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 k - k \right] d\theta$$

denklemlerini sağlar.

Kanıt: Yay uzunluğu tanımı ile

$$L(t) = \int_0^{2\pi} v(\theta, t) d\theta$$

yazarız.

Direk hesapla

$$\frac{dL(t)}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial t} d\theta = \int_0^{2\pi} -\sigma(\theta, t)k(\theta, t)v(\theta, t) d\theta = - \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, t) d\theta$$

yazabiliriz ve buradan

$$\frac{d^2 L(t)}{dt^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma(\theta, t)) d\theta = \int_0^{2\pi} (S_{\theta t}^2 - 1)k d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 k - k \right] d\theta$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 6.4: Kapalı bir $F(., t)$ tarafından sınırlanan bölgenin $A(t)$ alanı

$$\frac{dA(t)}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{d^2 A(t)}{dt^2} = -2\pi + \int_0^{2\pi} S_{\theta t}^2 d\theta, \quad \frac{d^3 A(t)}{dt^3} = \int_0^{2\pi} (S_{\theta t}^2 - 1) k S_t d\theta$$

ifadesini sağlar,[18].

Kanıt: Konveks bir eğri tarafından sınırlanan $A(t)$ alanı

$$A(t) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle F(\theta, t), v(\theta, t) N(\theta, t) \rangle d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{S}{k} d\theta$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_t}{k} - \frac{S}{k^2} k_t \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_t}{k} + S(S_{\theta\theta t} + S_t) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_t}{k} + (S_{\theta\theta} + S)S_t \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_t}{k} + \frac{S_t}{k} \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{S_t}{k} d\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A(t)}{dt^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_t}{k} d\theta \right) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_{tt}}{k} - \frac{S_t}{k^2} k_t \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [S_{\theta t}^2 - 1 + S_t(S_{\theta\theta t} + S_t)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (S_{\theta t}^2 - 1 + S_t^2 - S_{\theta t}^2) d\theta = -2\pi + \int_0^{2\pi} S_t^2 d\theta \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\frac{d^3 A(t)}{dt^3} = 2 \int_0^{2\pi} S_t S_{tt} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} S_t (S_{\theta t}^2 - 1) k d\theta$$

bulunur ki ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 6.5 Önerme 3.2 deki koşullar altında

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 - 1 < 0 \quad \forall t \in [0, T_{\max})$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Kanıt. $\forall t \in [0, T_{\max})$ için $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = k > 0$

olduğundan

$$\forall t \in [0, T_{\max}) \text{ için } \sigma(u, t) > \sigma(u, 0)$$

yazabiliriz, yani

$$\forall t \in [0, T_{\max}) \text{ için } \sigma(\theta, t) = \sigma(u, t) > \sigma(u, 0) = \sigma(\theta, 0)$$

yazabiliriz, böylece

$$\forall t \in [0, T_{\max}) \text{ için } \frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0$$

elde ederiz.[16]. Diğer yandan, zincir kuralı ile

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

yazabiliriz ki bu nedenle

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left[1 - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 \right] k > 0$$

yazarız ve böylece

$$\forall t \in [0, T_{\max}) \text{ için } \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)^2 - 1 < 0$$

elde ederiz, bu ise ispatı tamamlar.[24,25].

7. $\mathbb{R}^{1,1}$ MINKOWSKI UZAYINDA HİPERBOLİK EĞRİLİK AKIŞI İLE DİZİSEL EVOLÜSYON DENKLEMİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde $\mathbb{R}^{1,1}$ Minkowski uzayındaki hiperbolik eğrilik akışı ile dizisel evolüsyon denklemi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. İki boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}^{1,1}$ de bir noktanın yer vektörü $z = (z_0, z_1)$ şeklinde verilsin. $z = (z_0, z_1)$ ve $w = (w_0, w_1)$ vektörlerinin skaler çarpımı ise $(z, w) = -z_0 w_0 + z_1 w_1$ şeklinde tanımlanır $\mathbb{R}^{1,1}$ in Lorentz metriği

$$ds^2 = -dt^2 + du^2$$

şeklinde gösterilir,[21].

İki boyutlu Minkowski uzayında hareket eden kütesiz kapalı bir eğri, Minkowski uzayında hareket eden bu eğrinin süpürdüğü alanla orantılı olarak tanımlanabilir. $\mathbb{R}^{1,2}$ de aşağıda parametrisasyonu tanımlanan bir-boyutlu Riemannian manifoldunun hareketini araştıracağız:

$$(t, u) \rightarrow X = (t, X(t, u)) \quad (7.1)$$

burada $u \in M$ ve $X(., t)$ Minkowski uzayı $\mathbb{R}^{1,2}$ deki bir noktanın yer vektörüdür. Böylece doğurulan Lorentz metriği aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \left(\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \\ g_{01} = g_{10} = \left(\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial u} \right) \\ g_{11} = g_{11} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right) \end{cases} \quad (7.2)$$

O halde Lorentz metriği aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$ds^2 = (dt, du)A(dt, du)^T.$$

burada

$$A = \begin{pmatrix} |X_t|^2 & \langle X_t, X_u \rangle \\ \langle X_t, X_u \rangle & |X_u|^2 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

şeklindedir ve

$$|X_t|^2 = \langle X_t, X_t \rangle \quad |X_u|^2 = \langle X_u, X_u \rangle$$

skaler çarpımları sayesinde verilir.

varyasyonel metotlarla aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$|X_u|^2 X_u - 2\langle X_t, X_u \rangle X_u + (|X_t|^2 - 1)X_{uu} = 0 \quad (7.4)$$

varyasyonel yöntem haricinde, alt manifold M nin ortalama eğriliğini sıfır yapmak suretiyle Minkowski uzayı $\mathbb{R}^{1,2}$ de M nin hareketi için aşağıdaki denklemi elde edebiliriz.

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta X = g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial X}{\partial r^\gamma} \right) = 0, \quad (7.5)$$

burada $\alpha, \beta = 0, 1$ dir. Aşağıdaki kısıtlamayı yaparak parametrizasyonu kısmen sabit tutmak uygundur:[2,25]

$$g_{01} = g_{10} = \left(\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial u} \right) = 0 \quad (7.6)$$

ihtiyaç duyduğumuz bu koşul dizisel teğet doğrultusunu dizisel hız vektörüne ortogonal yapan ilave bir Gauge koşuludur. Yüzeyin C^2 -sınıfından zamansal bir yüzey olduğunu kabul edelim, yani

$$(|X_t|^2 - 1)|X_u|^2 - \langle X_t, X_u \rangle^2 < 0$$

veya eşdeğer olarak

$$(1 - |X_t|^2) > 0$$

olsun. (6.5) denkleminin aşağıdaki ile eşdeğer olduğu açıktır,[19].

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) - g^{11}(|X_t|^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right) = 0, \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + g^{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} \right) (|X_t|^2 - 1) - \frac{1}{|X_t|^2 - 1} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial X}{\partial t} \\ + g^{11} \frac{\partial X}{\partial t} + g^{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

(7.7) ve (7.8) sisteminin (7.7) ve aşağıdaki denkleme eşdeğer olduğunu kolayca gösterebiliriz:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + g^{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} \right) (|X_t|^2 - 1) + g^{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial X}{\partial u} = 0$$

yani;

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \left(1 - |X_t|^2\right) k \vec{N} - \frac{1}{|X_u|^2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial X}{\partial u} . \quad (7.9)$$

Sonuç.7.1 (7.9) denklemi ile (1.1.1) denklemi benzerdir. Her ikisi de normal evolüsyon denklemleridir, İlerler. Bu iki denklem arasındaki fark, yalnızca evolüsyon eğrisinin normal ivmeleridir. Çünkü

$$1 - |X_t|^2 > 0,$$

bu klasik fizikte, dizinin hızının her zaman ışığın hızından daha az olduğu anlamındadır ve $\mathbb{R}^{1,1}$ Minkowski uzayında bir dizinin hareketinin genel normal hiperbolik ortalama eğriliğin akışının uygulamalarından biri olarak görülebileceği anlamına gelir,[20].

8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu bölümde önceki bölümlerde kanıtladığımız teoremlerin ve Örnek.6.1 sonucunu değerlendireceğiz. Örnek.6.1 den $t \rightarrow T^*$ yaklaşırsa $F(.,t)$ çözümünün bir noktaya yakınsayacağını biliyoruz. Tezin 5, 6 ve 7. bölümlerinde incelediğimiz ve kanıtladığımız teorem, önerme ve yardımcı teoremlerden gerçekte aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk, bu teorem ise tezin ana kısmını oluşturan Teorem.1.1 den ibarettir.

Sonuç Teorem. F_0 Düzgün kesin konveks kapalı bir eğri olsun. O taktirde F_0 ve f sırasıyla başlangıç eğrisi ve başlangıç hızı olmak üzere (1.1.1) denkleminin çözümü olan başlangıç eğrilerinin bir sınıfı sadece $[0, T_{\max})$ şeklinde sonlu bir zaman aralığında mevcuttur. Üstelik $t \rightarrow T_{\max}$ iken aşağıdakilerden birisi doğru olmak zorundadır:

- 1) $F(.,t)$ çözümü bir noktaya yakınsar, yani $t \rightarrow T_{\max}$ iken limit eğrisinin eğriliği sonsuza yaklaşır (sınırsız olur).
- 2) Eğrinin k eğriliği $t \rightarrow T_{\max}$ iken süreksizdir, öyleki çözüm parçalı düzgün bir eğriye yakınsar.

Kanıt. F_0 ve f sırasıyla başlangıç eğrisi ve başlangıç hızı olmak üzere (1.1.1) denkleminin $F(.,t)$ çözümünün maksimal zaman aralığı $[0, T_{\max})$ olsun. Kanıtı 4 aşamada ele alalım:

1. Adım. Konveksliğin korunması

Önerme 6.1 den $[0, T_{\max})$ üstünde $F(.,t)$ çözümünün kesin konveks kalacağını ve $F(.,t)$ eğrisinin eğriliğinin $S^1 \times [0, T)$

Üstünde $\delta = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \{k_0(\theta)\} > 0$ şeklinde bir düzgün pozitif bir en küçük alt sınıra sahip olduğunu biliyoruz.

2. Adım. Sonlu zamanın varlığı

F_0 Başlangıç eğrisini kendisinin normal başlangıç hızına eşit bir normal başlangıç hızı olan daha geniş bir γ_0 çemberiyle çevreleyelim ve γ_0 çemberini (1.1.1) akışı ile evolüsyona tabi tutarak bir $\gamma(.,t)$ çözümünü elde edelim. Örnek.6.1

den $\gamma(.,t)$ çözümü sadece $[0, T^*)$ şeklinde sonlu bir zaman aralığında mevcuttur ve $\gamma(.,t)$, $t \rightarrow T^*$ iken $(-\infty, +\infty)$ bir noktaya yakınsar ve $F(.,t)$ yi $\forall t \in [0, T^*)$ için daima geniş bir $\gamma(.,t)$ çemberi ile çevreleyebiliriz. Böylece $F(.,t)$ çözümü bir $T_{\max} \leq T^*$ anında singüler olmak zorundadır.

3. Adım. Hausdorff Yakınsaması

$t_2 > t_1$ Olmak üzere (1.1.1) evolüsyon denklemi ile $F(.,t_2)$ yi her zaman bir $F(.,t)$ ile çevreleyebiliriz. Yani $F(.,t)$ sürekli büzülebilir. Böylece $F(.,t)$ eğrisi, Hausdorff metriği kullanılarak, zayıf konveks bir $F(.,T_{\max})$ eğrisine yakınsak yapılabilir.

4. Adım. Bir noktaya veya süreksiz eğriliğe sahip bir limit eğriye büzülme

$\forall t \in [0, T_{\max})$ için $\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \theta}\right)^2 - 1 < 0$ olduğuna göz önüne alırsak Yardımcı Teorem 6.2

den $\forall t \in [0, T_{\max})$ için $\frac{d^2 L(t)}{dt^2} < 0$, $\frac{dL(t)}{dt} < 0$ elde ederiz. Böylece $L(T_0) = 0$ olacak

şekilde sonlu bir T_0 zamanı mevcuttur. Şimdi iki durum söz konusudur:

1. Durum: $T_0 \leq T_{\max}$. Bir tarafta (1.1.1) Cauchy probleminin $[0, T_0)$ aralığı üstünde klasik bir tek çözümü vardır, diğer taraftan $t \rightarrow T_0$ iken $L(t)$ sıfıra yaklaşır. Bu durumda $t \rightarrow T_0$ iken k eğriliği sonsuza yaklaşır ve çözüm T_0 anında çöker. Böylece $T_{\max}$ in tanımından $T_0 = T_{\max}$ buluruz, yani $t \rightarrow T_{\max}$ iken $F(.,t)$ çözümü bir noktaya yakınsar.

2. durum: $T_0 > T_{\max}$. Bu durumda $L(T_{\max}) > 0$ dır ve bu $F(.,T_{\max})$ çözümünün düzgün olmaması (nonsmooth) demektir. Bu durumların ortaya çıkabileceği durumlar ayrı ayrı incelenebilir, bu halleri burada ele almıyoruz.

KAYNAKLAR

- [1] Akıncı F., Geometry of Moving Curves and Soliton Equations, A Dissertation for M.S. Degree, Dept. of Maths., İzmir Institute of Technology, Oct. 2004, İzmir, Turkey.
- [2] Albrecht A, Tuok, N.Evolution of cosmic string. Physics Review Letters,1985,54:1868-1871.
- [3] Alvarez L, Guuichard F , Lions P L, Morel J M., Axioms and fundamental equations of image processing. Arch Rational Mech Anal, 1993,123:199-257.
- [4] Angenent S, Gurtin M E., Multiphase thermomechanics with an interfacial structure 2.evolution of anisothermal interface. Arch Rational Mech Anal. 1989,108:32339.
- [5] Cao F., Geometric Curve Evolution and Image Processing. Lecture Notes in Mathematics 1805.,Berlin Springer, 2003.
- [6] Carmo M. Do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice- Hall Inc. Englewood, New Jersey, 1976.
- [7] Christodoulou D.,Global solution of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. Comm pure Appl Math.1986,39:367-282.
- [8] Dalbudak H., Konveks düzlem eğrilerinin evolüsyonu, Yüksek Lisans Tezi, Beykent Üniv., Fen Bilimleri Enst., 2009, İstanbul.
- [9] DeTurck D., Some regularity theorems in Riemann geometry.Ann Scient Ecole Norm Sup Paris.1981,14:249-260.
- [10] Dexing K., Kefeng L., Zenggui W., Hyperbolic mean curvature flow: evolution of plane curves, Acta Math. Scientia, 2009, 29B(3), 493-514.
- [11] Erdoğan M., Diferansiyel Geometri Ders Notları, İstanbul Üniversitesi, 2010.
- [12] Gage M.E. , An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening, Duke Math. J. 50(1983), 1225-1229.
- [13] Gage M.E. , Curve Shortening Makes Convex Curves Circular, Invent.Math.,76(1984), 357-364.
- [14] Gage M.E. , On an Area-preserving Evolution Equation for Plane Curves, in “ Nonlinear Problems in Geometry” (D. M. DeTurck edited), Contemp. Math., Vol.51(1986), 51- 62.

- [15] Gage M.E.& Hamilton R.S. , The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves, J. Diff. Geom., 23(1986), 69-96.
- [16] Grayson M., The heat equation shrinks embedded plane curve to round points, J. Diff. Geom. 26 (1987), 285-314.
- [17] Hasimoto H. , A Soliton on a Vertex Filament, J. Fluid Mech., 51(1972), 477-485.
- [18] He C-L.Kong D-X.Liu K-F.,Hyperbolic mean curvature flow.J Differ Eqs.,2009, 246: 473-390.
- [19] Jiang L.& Pan S. , On An Evolution Problem for Convex Curves, East China Normal University Preprints; 2003-016.
- [20] Kong D-X., Hu H-R., Geometric approach for finding exact solutions to nonlinear partial differential equations, Physics Letters, A, 1998, 246, 105-112.
- [21] Kong D-X., Zhang Q., Zhou Q., The dynamics of relativistic string moving in the Minkowski space R^{1+n} , Commun Math. Phys., 2007, 269, 153-174.
- [22] Langer J. , Straightening Soliton Curves, Appl. Math. Lett., 14(2000), 387-391.
- [23] Nakayama K. , Segur H. , Wadati M., Integrability and the Motion of Curves, Phys. Rev.Lett., 69 (1992), 2603-2606.
- [24] Protter M H, Weinberger H F., Maximum Principles in Differential Equations, New York, Springer –Verlag, 1984.
- [25] Turok N, Bhattacharjee P., Stretching cosmic strings, Physical Rewiev D,1983,29, 1557-1562.

ÖZ GEÇMİŞ

01.01.1981 tarihinde Kayseri de doğdum. İlk ve orta tahsilimi sırasıyla Yavuz Selim İlkokulu, Sebahat Hıfzı Gözü Büyük Orta Okulu ve lise eğitimimi de Kocasinan Lisesi' nde tamamlayıp Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldum. Tezsiz Yüksek Lisans Eğitimimi Başkent Üniversitesinde 2004 yılında bitirdim. 2004 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı özel bir okulda Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Programına Eylül 2008 tarihinde yüksek lisans öğrencisi olarak kaydoldum.