

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONVEKS OLMAYAN ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON
ve PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ**

İstatistikçi Gülder KEMALBAY

F.B.E İstatistik Anabilim Dalı'nda Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abbas AZİMLİ

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKS ANALİZ	4
2.1 Konveks Kümeler	4
2.2 Konveks Kümelerin Bazı Topolojik Özellikleri	8
2.2.1 Konveks Bir Kümenin İçi ile Kapanışı Arasındaki Noktaları Birleştiren Doğru Parçası	8
2.2.2 Konveks Kümelerin Relatif İçi.....	10
2.3 Konveks Kümeleri Ayırma ve Destekleme	11
2.3.1 Kümeye Ait Olmayan Bir Nokta ile Konveks Kümenin Ayrılması.....	12
2.3.2 Hiperdüzlemler ve İki Kümenin Ayrılması.....	11
2.3.3 Sınır Noktalarında Kümelerin Desteklenmesi.....	16
2.4 Konveks Fonksiyonlar	18
2.4.1 Konveks Fonksiyonların Sürekliliği	20
2.4.2 Konveks Fonksiyonların Yön Türevi ve Subgradienti	21
2.4.3 Diferansiyellenen Konveks Fonksiyonlar.....	24
3. ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON TEORİSİNE GİRİŞ.....	30
3.1 Koniler	31
3.2 İkili Bağntı ve Kısmi Sıralama.....	35
3.3 Pareto Optimal Çözümler.....	39
3.3.1 Zayıf ve Kesin Pareto Optimal Çözümler.....	45
3.3.2 Bir Çözümünden Diğer Çözüme Geçiş	48
3.3.3 Asıl Pareto Optimal Çözümler	49
3.3.4 Pareto Optimal Çözümlerin Değişim Aralığı.....	54
3.4 Karar Verici.....	55
4. ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON PROBLEMİNİ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	56
4.1 Skalerleştirme Yöntemleri	57
4.1.1 Ağırlıklı Toplam Yöntemi	58
4.1.2 ϵ -Kısıt Yöntemi	60
4.1.3 Benson Yöntemi	63

4.1.4	Uzlaşık Programlama Yöntemi	65
4.1.5	Konik Skalerleştirme Yöntemi	69
4.2	Genişletilmiş Sivri Lagrangian Dualite Problemi	73
4.3	Genişletilmiş Sivri Lagrangian Dualite Probleminin Çözümü	78
4.3.1	Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (MSG)	78
4.3.2	Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (F-MSG)	82
5.	PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ	88
5.1	Portföy Seçimi Problemi İçin Önceki Çalışmalar	90
5.2	Portföy Teorisine Giriş	93
5.3	Portföyün Getirisi ve Riski	97
5.3.1	Portföyün Beklenen Değeri	98
5.3.2	Portföyün Varyansı	98
5.3.3	Portföyün Üçüncü Mertebeden Merkezi Momenti	102
5.3.4	Portföyün Dördüncü Mertebeden Merkezi Momenti	104
5.4	Çok Kriterli Portföy Seçimi Problemleri ve Çözüm Yaklaşımları	106
5.4.1	Ortalama-Varyans Modeli [Markowitz, 1952]	106
5.4.2	Ortalama-Varyans-Çarpıklık Modeli [Lai, 1991]	108
5.4.3	Ortalama-Varyans-Çarpıklık-Basıklık Modeli [Lai vd., 2006]	109
5.4.4	Varlık Sayısı Kısıtlı Model [Chang vd., 2000]	110
	SONUÇ ve ÖNERİLER	113
	KAYNAKLAR	115
	ÖZGEÇMİŞ	120

SİMGE LİSTESİ

$\ \cdot \ $	Euclid normu
$\langle \cdot \rangle$	Skaler çarpım
d	Uzaklık fonksiyonu
$B(x; \varepsilon)$	Merkezi x ; yarıçapı ε olan yuvar
int	Kümenin içi
cl	Kümenin kapanışı
∂X	Kümenin sınırı
aff	Afin kabuk
co	Konveks kabuk
H	Hiperdüzlem
ri	Relatif iç
epi	Fonksiyonun epigrafiği
L_α	f 'in seviye kümesi
$f'(x_0; d)$	f 'in yön türevi
x^ξ	f 'in subgradienti
∂f	f 'in subdiferansiyeli
∇	Gradient vektörü
H	Hessian matris
K	Koni
K'	Eşlenik koni
K''	İkinci eşlenik koni
$0^+ X$	X 'in recessive konisi
K^*	K 'nın pozitif dual konisi
$K^\#$	K 'nın kesin-dual konisi
$\Re$	İkili bağıntı
$\Re_K$	Koni bağıntısı
$K_\preceq$	Bağıntı konisi
$\preceq$	Kısmi sıralama
$\leq$	Zayıf Pareto sıralama
$\leq$	Pareto sıralama

SİMGE LİSTESİ (devam)

$<$	Kesin Pareto sıralama
$D(x)$	Baskın küme
X	Uygun küme
$Y = f(X)$	Uygun amaç kümesi
x^*	Pareto optimal çözüm
X_{par}	Pareto optimal çözümler kümesi
$y = f(x^*)$	Etkin değer
Y_{eff}	Etkin küme
X_{w-par}	Zayıf Pareto optimal çözümler kümesi
Y_{w-eff}	Zayıf etkin küme
X_{s-par}	Kesin Pareto optimal çözümler kümesi
Λ_{ij}	Ödünleşim
λ_{ij}	Ödünleşim oranı
T_Y	Tanjant koni
$cone(Y)$	Konik örtü
y_i^0	İdeal nokta
y_i^N	Nadir nokta
y^u	Ütopya noktası
v	Pertürbasyon fonksiyonu
(P)	Asıl (primal) problem
$L(x, u, c)$	Genişletilmiş sivri Lagrangian fonksiyonu
$h(u, c)$	Genişletilmiş sivri Lagrangian dual fonksiyonu
(P^*)	Genişletilmiş sivri Lagrangian dual problemi
$S(P)$	(P^*) probleminin çözüm kümesi
$S(P^*)$	(P) probleminin çözüm kümesi
s_k	Adım uzunluğu parametresi
Δ	Aralık genişliği parametresi

SİMGE LİSTESİ (devam)

U	Fayda fonksiyonu
R_p	Portföy getirisi rassal değişkeni
$E(R_p)$	Portföy getirisinin beklenen değeri
$E(R_i)$	i . menkul kıymetin beklenen değeri
x_i	i . menkul kıymetin yatırım oranı
σ_p^2	Portföy getirisinin varyansı
σ_i	i . menkul kıymetin standart sapması
ρ_{ij}	i . ve j . menkul kıymet arasındaki korelasyon katsayısı
σ_{ij}	i . ve j . menkul kıymetin birinci mertebeden merkezi bileşik momenti
$\sqrt{\beta_1}$	Pearson çarpıklık katsayısı
γ_1	Fisher çarpıklık katsayısı
$S^3(R_p)$	Portföyün üçüncü mertebeden merkezi momenti
S_i^3	i . menkul kıymetin üçüncü merkezi momenti
S_{ijj}, S_{ijj}	i . ve j . menkul kıymetler için merkezi bileşik moment
S_{ijk}	i ., j . ve k . menkul kıymetin merkezi bileşik momenti
β_2	Pearson basıklık katsayısı
γ_2	Fisher basıklık katsayısı
$K^4(R_p)$	Portföyün dördüncü mertebeden merkezi momenti
K_i^4	i . menkul kıymetin dördüncü merkezi momenti
K_{iiij}, K_{ijjj}	i . ve j . menkul kıymetler için merkezi bileşik moment
K_{ijjj}	i . ve j . menkul kıymetler için merkezi bileşik moment
K_{ijkl}	i ., j ., k ve l . menkul kıymetin merkezi bileşik momenti
α	Yatırımcının üstleneceği maksimum risk seviyesi
β	Yatırımcının hedeflediği minimum getiri seviyesi
k	Portföyde bulunması istenen menkul kıymetlerin sayısı
ε_i	i . menkul değer portföye dahil ise portföy içindeki minimum oranı
δ_i	i . menkul değer portföye dahil ise portföy içindeki maksimum oranı

KISALTMA LİSTESİ

ÇKO	Çok Kriterli Optimizasyon
MSG	Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi
F-MSG	Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi
KV	Karar Verici
ATY	Ağırlıklı Toplam Yöntemi
MPT	Modern Portföy Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	$\mathbf{R}^2$ 'de konveks ve konveks olmayan kümeler	4
Şekil 2.2	$\mathbf{R}^2$ 'de keyfi iki kümenin konveks kabuğu	6
Şekil 2.3	Konveks kümenin içi ile kapanışı arasındaki noktaları birleştiren doğru parçası... 8	
Şekil 2.4	Kapalı konveks bir kümeye minimum uzaklık	12
Şekil 2.5	$\mathbf{R}^2$ 'de hiperdüzlem	13
Şekil 2.6	$\mathbf{R}^2$ 'de hiperdüzlemin tanımladığı yarı uzaylar	14
Şekil 2.7	Çeşitli ayırma yöntemleri	15
Şekil 2.8	Hiperdüzlem ile kümelerin sınır noktalarında desteklenmesi.....	17
Şekil 2.9	Konveks kümenin sınır noktasında desteklenmesi	17
Şekil 2.10	Konveks fonksiyon.....	18
Şekil 2.11	Bir fonksiyonun epigrafiği.....	19
Şekil 2.12	Konveks fonksiyonların subgradientinin geometrik yorumu	22
Şekil 2.13	Epigrafiğin, subgradient noktasında desteklenmesi	23
Şekil 3.1	Konilere örnekler.....	32
Şekil 3.2	Pareto optimal çözümlerin geometrik gösterimi	39
Şekil 3.3	Y ve $(Y + \mathbf{R}_+^k)$ kümelerinin etkin noktaları	41
Şekil 3.4	Y 'nin kompakt kesiti.....	43
Şekil 3.5	Zayıf ve kesin pareto minimal noktalar.....	45
Şekil 3.6	Hiperdüzlem ile ayıramayan kümeler	47
Şekil 3.7	Asıl pareto minimal çözümler.....	49
Şekil 4.1	Konveks ve konveks olmayan problem için ağırlıklı toplam yöntemi.....	59
Şekil 4.2	Benson yönteminin grafiksel gösterimi.....	63
Şekil 4.3	Çeşitli normlara göre uzlaşık programlama probleminin geometrik gösterimi.....	65
Şekil 4.4	Konik skalerleştirme yönteminin geometrik gösterimi	71
Şekil 4.5	Genişletilmiş sıvri Lagrangian dualite	76
Şekil 5.1	Yatırımcı kayıtsızlık eğrileri	95
Şekil 5.2	Yatırımcının optimal portföyünün belirlenmesi	96
Şekil 5.3	A ve B menkul kıymetlerinden oluşan portföy için çeşitli korelasyon katsayıları ile risk-getiri ilişkisi.....	99
Şekil 5.4	Bir dağılımın eğilim-değişkenlik-çarpıklık-basıklık ölçüleri	100
Şekil 5.5	Farklı çarpıklık ölçüsüne göre olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri	101
Şekil 5.6	Farklı basıklık ölçüsüne göre olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri	103
Şekil 5.7	Markowitz'in etkin sınır eğrisi	107
Şekil 5.8	Varlık sayısı kısıtlı model için Markowitz'in etkin sınır eğrisi	110

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1 $\mathbf{R}^n$ 'de tanımlı Pareto sıralamalar.....	36
Çizelge 4.1 KV'ye göre ÇKO probleminin çözüm yöntemlerinin sınıflandırılması	55

ÖNSÖZ

Akademik hayata başladığımdan beri kendisinden hem mesleki hem etiksel yönden çok şey öğrendiğim, gerek kişiliği gerek bilimsel yönü ile daima örnek teşkil eden, tez çalışmam boyunca karşılaştığım her zor anda göstermiş olduğu desteği sayesinde çözüme ulaşmamı sağlayan, çok değerli hocam, sayın Prof. Dr. Abbas AZİMLİ'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin ortaya çıkmasında, optimizasyon teorisine yapmış olduğu eşsiz katkılarından dolayı sayın Prof. Dr. Rafail GASIMOV'a minnettarım.

Tez çalışmam boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, sıkıntılarımı benimle birlikte paylaşan sevgili arkadaşlarım Arş. Grv. Fatma NOYAN'a ve Arş. Grv. Elif ÖZTÜRK'e, tüm çalışma arkadaşlarıma ve bölümümüze emek veren değerli hocalarıma çok teşekkür ederim.

Hiç şüphesiz ki beni bugünlere kadar yetiştiren, her türlü fedakârlığı sağlayan çok sevdiğim aileme ne kadar teşekkür etsem azdır. Ayrıca bilgisayar başında geçireceği zamandan fedakârlık edip ablasına destek olan sevgili kardeşime özel teşekkürlerimi sunuyorum:) Elde ettiğim tüm başarıların gerçek sahibi sizsiniz!

KONVEKS OLMAYAN ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON ve PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ

Gülder KEMALBAY
İstatistik, Yüksek Lisans Tezi

Bu çalışmada, konveks olmayan çok kriterli optimizasyon teorisi, temel tanım ve teoremleri ile irdelenmiştir. Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas amaçlarından biri optimal çözümlerin varlığı hakkında koşullar bulmaktır. Gasimov (1992) çalışmasında konveks kümelerin seviye kümeleri yardımı ile lineer olmayan ayırma teoremi geliştirilerek asıl minimal noktalar için gerek koşul bulmuştur. Çalışmamızda, Gasimov'un çalışması geliştirilerek verilen gerek koşulun yeter koşul olması için uzayda sıralama sağlayan koni ile ayırma fonksiyonunun recessive fonksiyonu arasında ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması halinde verilen noktanın asıl minimal nokta olduğu ispat edilmiştir.

Çok kriterli optimizasyon problemini çözmek için skalerleştirme yöntemleri incelenmiş ve konveks olmayan çok kriterli problemin tüm etkin noktalarını elde edebilen konik skalerleştirme tekniğinin üstünlükleri tartışılmıştır. Elde edilen konveks olmayan ve diferansiyellenemeyen yapıdaki konik skaler problemin çözümü için genişletilmiş sivri Lagrangian dualite yaklaşımının ve F-MSG algoritmasının teorisi ve üstünlükleri gösterilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise konveks olmayan çok kriterli optimizasyon teorisinin uygulama alanlarından biri olan finans teorisinde portföy seçimi problemi incelenmiştir. Ortalama-varyans yaklaşımına ilaveten yüksek mertebeli merkezi momentleri ve varlık sayısı kısıtlamalarını göz önüne alan problemin oldukça zor ve karmaşık bir yapıya sahip olduğu gösterilmiş ve bu problemin çözümü ile ilgili gelecekte yapılacak olan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok kriterli optimizasyon, asıl minimal nokta, konveks olmayan ve diferansiyellenemeyen optimizasyon, konik skalerleştirme, genişletilmiş sivri Lagrangian dualite, F-MSG yöntemi, portföy seçimi problemi.

NONCONVEX MULTICRITERIA OPTIMIZATION and PORTFOLIO SELECTION PROBLEM

Gülder KEMALBAY
Statistics, M.S. Thesis

In this study, nonconvex multicriteria optimization theory with main definition and theorems has been investigated thoroughly. One of the fundamental aims of the multicriteria optimization theory is finding conditions about existence of optimal solutions. Gasimov (1992), has found a necessary condition for proper minimal points by developing a nonlinear separation theorem which is based on level set of convex sets. In our study, by developing Gasimov's study the relation between the recessive function of the separation function and the cone which provides an order in space has been found for given necessary condition to be sufficient and in the event of this relation, given point is the proper minimal point of the set has been proved.

Scalarization methods have been investigated to solve multicriteria optimization problem and advantages of the conic scalarization method which can obtain all efficient points of nonconvex multicriteria problem have been dealt with. For solving the obtained nonconvex and nondifferentiable conic scalar problem, the theory and advantages of sharp augmented Lagrangian duality and F-MSG algorithm have been shown.

At the last part of this study, the portfolio selection problem in finance theory which is one of the application area of nonconvex multicriteria optimization theory has been investigated. In addition to mean-variance application, it has shown that the problem which takes into account higher order central moments and cardinality constrained has quite complex and difficult form and it has been informed about future studies concerned with the solution of this problem.

Keywords: Multicriteria optimization, proper minimal point, nonconvex nondifferentiable optimization, conic scalarization, sharp augmented Lagrangian duality, F-MSG algorithm, portfolio selection problem.

1. GİRİŞ

Matematiksel ifade ile tek kriterli optimizasyon probleminin amacı, bir amaç fonksiyonuna minimum veya maksimum değeri veren çözümü bulmaktır; ancak günümüzde karşılaştığımız problemler gelişen teknoloji ve çevresel şartlar gereği genellikle karmaşık bir doğaya sahiptir. Bu nedenle bu tür problemleri tek kriter ile karakterize edip optimal çözümünü bulmanın pek faydası olmayacaktır. Karmaşık problemler genellikle birbiri ile çelişen ve kıyaslanamayan amaç fonksiyonları ile karakterize edilir; örneğin getiri, risk, kar, maliyet, zaman, performans vs... Ancak çok kriterli optimizasyon probleminde bir çözümün tüm kriterlere göre en iyi olması nadir rastlanan bir olaydır. Bu tür çözümler ideal çözüm olarak adlandırılır. Genellikle bir tek çözüm yerine çözüm kümesinden bahsedilir. Bu çözümlere Pareto (veya etkin) çözüm denilmektedir. Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas problemi, etkin olmayan çözümleri çözüm kümesinden eleyerek etkin olan iyi çözümlere ulaşmayı amaçlar.

Optimizasyon teorisinde, optimal çözümler için gerek ve yeter koşulların bulunması ve dualite teoremlerinin ispatı için ayırma teoremleri uygulanmaktadır. Bilindiği üzere, konveks kümelerin ayrılması için uygulanan ayırma teoremlerinde hiperdüzlemlerden yararlanılmaktadır. Klasik ayırma teoreminin, optimizasyon teorisinde uygulanabilmesi için problemlerin konvekslik koşulunu sağlaması gerekmektedir. Benzer olarak, çok kriterli optimizasyonda da Pareto noktalarını bulmak için klasik ayırma teoremlerinin uygulanması durumunda konvekslik şartı önemlidir. Çok kriterli, konveks optimizasyon teorisinde dualite teoremlerinin elde edilmesi için Azimov (2008a, 2008b) çalışmalarına bakılabilir. Ancak ister dualite ister çok kriterli optimizasyon teorisi olsun karşılaşılan problemlerin çoğu konveks olmayan optimizasyon problemleri olmaktadır. Konveks olmayan problemler için dualite teorisinin kurulmasında ve konveks olmayan çok kriterli optimizasyon problemlerinde Pareto çözümünün bulunması için, düzlemler yerine lineer olmayan kümeler aracılığı ile ayırma teoremleri geliştirilmiştir. Burada lineer olmayan kümeler, lineer olmayan fonksiyonların seviye kümesi olarak belirlenir. Konveks bir küme ile konveks olmayan bir kümenin, sürekli konveks fonksiyonlar ile ayrılması Neshe (1981) ve Hildenbrandt (1984) tarafından gösterilmiştir. Bu alanda, hem konveks olmayan dualite teorisinde hem de konveks olmayan çok kriterli optimizasyonu problemlerinde optimal noktaların bulunması için lineer olmayan ayırma teoremlerinin uygulandığı birçok çalışma vardır.

Gasimov (1992), çalışmasında konveks kümelerin seviye kümeleri yardımı ile bir ayırma teoremi geliştirmiş ve çok kriterli optimizasyon alanına uygulamıştır. Gasimov'un çalışmasında, kümenin zayıf ve asıl minimal noktalarının bulunması için gerek koşullar bulunmuştur.

Bu çalışmada ise Gasımov'un ispatlamış olduğu teorem geliştirilerek noktayı kümeden ayıran seviye kümesini veren fonksiyonun recessive fonksiyonu ile uzayda sıralama sağlayan koni arasında bir ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması durumunda verilen noktanın asıl minimal nokta olduğunu gösteren bir teorem ispatlanmıştır.

Çok kriterli optimizasyon problemlerinin çözümü için birinci aşamadaki en temel yaklaşım skalerleştirme yöntemi uygulamaktır. Böylece problem çok kriter yerine tek kriter ile ifade edilebilir. Literatürdeki mevcut skalerleştirme yöntemleri genellikle konveks problemlere hitap etmektedir. Gasımov (2001) tarafından geliştirilen konik skalerleştirme yöntemi, amaç fonksiyonları ve kısıtlamalar üzerinde konvekslik koşulu aramadan çok kriterli problemin etkin yüzeyindeki tüm noktaları elde eder. Elde edilen konik skaler problem diferansiyellenemeyen yapıda olduğundan türev bilgisi gerektiren klasik Lagrangian yöntemleri ile çözülemez. Azimov ve Gasımov (1999, 2002), konveks olmayan optimizasyon problemlerinde sıklıkla karşılaşılan dual aralığı gidermek için asıl problem üzerinde herhangi konvekslik veya diferansiyellenebilirlik şartı gerektirmeyen genişletilmiş sivri Lagrangian yaklaşımını önermişlerdir. İzleyen çalışmalar ile bu dual problemin çözümü için Gasımov tarafından geliştirilen Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (F-MSG), skaler problem üzerinde konvekslik veya diferansiyellenebilirlik koşulları aramadığı için konveks olmayan, kısıtlamalı, çok kriterli optimizasyon problemlerinin çözümünde mevcut yöntemlere göre birçok üstünlük sağlamaktadır.

Çok kriterli optimizasyon teorisine hemen her alanda başvurulmaktadır. Bu alanlardan birisi de finanstır. Finansal karar vermede temel yaklaşım optimum portföy oluşturmaktır. Ancak optimum portföy oluşturmaya yönelik olan birçok normatif karar modelleri, yatırımcının elinde bulundurduğu servetini maksimize etmek için sadece bir amacı göz önüne alıp karar verici için öneme sahip diğer olası amaçların sağlanmasını dikkate almaz. Oysaki karar verici için birbirleri ile çelişebilen pek çok hedefin veya amacın eşanlı olarak sağlanabilmesi veya bu hedefler arası ikame edilebilirliğin belirlenmesi önemlidir. Bu yüzden, finans kelimesinin daha da matematiksel bir anlam kazandığı günümüzde finansal karar verme problemlerine çok kriterli optimizasyon teorisini uygulamak daha yerinde olacaktır.

Portföy oluşturmada iki temel yaklaşım söz konusudur: Geleneksel yaklaşım ve modern yaklaşım. Geleneksel portföy yaklaşımı, portföyde bulunan menkul kıymetler arasındaki ilişkiye dikkat etmeksizin aşırı çeşitlendirmeye gidilerek portföy riskinin azaltılabileceğini öngörmektedir. Ancak bu yaklaşım, Markowitz'in geliştirdiği teori ile beraber geçerliliğini yitirmiştir. Modern portföy teorisinin kurucusu olarak bilinen Harry Markowitz (1952) çalışmasında, ilk defa portföyün riskini ve getirisini matematiksel model ile ifade etmiştir.

Portföy seçimi probleminde klasik ortalama-varyans yaklaşımına ilaveten üçüncü ve dördüncü mertebeden merkezi momentler göz önüne alındığında problem genellikle konveks olmayan, diferansiyellenemeyen, çok kriterli optimizasyon problemi ile ifade edilir. Bu çalışmada, konveks olmayan çok kriterli optimizasyon teorisinin uygulanabileceği bir alanı örnek göstermek için portföy seçimi problemleri önerilmiştir: Optimum portföy oluşturmak için Markowitz'in ortalama-varyans yaklaşımının temel varsayımları ile bu model üzerine başka kriterler ilave edilerek geliştirilen diğer modeller incelenmiş ve mevcut çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir.

Bu tezin amacı, oldukça zengin ve gün geçtikçe gelişen bir alan olan çok kriterli optimizasyon teorisinin dayandığı temel tanımları ve teoremleri; uzayda kısmi sıralama bağıntısı sağlayan koniye göre elde edilen zayıf, kesin ve asıl Pareto optimal çözümleri; bu çözümleri karakterize eden gerek ve yeter koşulları ile bu koşulların bulunabilmesi için faydalanan lineer olmayan ayırma teoremlerini incelemek; çok kriterli problemin çözümü için literatürde mevcut olan skalerleştirme yöntemlerini öğrenmek; bu yöntemler arasında konveks olmayan çok kriterli problemlere hitap eden konik skalerleştirme yönteminin önemini ve diferansiyellenemeyen yapıda olan konik skaler problemin çözümü için geliştirilen genişletilmiş sivri Lagrangian dual problemi ve bu dual problemin çözümü için önerilen F-MSG yönteminin üstünlüklerini tartışmaktır. Ayrıca konveks olmayan çok kriterli optimizasyon teorisinin uygulama alanlarından biri olan finans teorisinin en temel problemlerinden biri olan portföy seçimi problemi için önerilen modelleri incelemek ve problemin çözümü için önerilen çözüm yöntemlerine değinmektir. Bu amaçlar doğrultusunda tez altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde çalışmanın kapsamı ve amaçlarından bahsedilecek; ikinci bölümde optimizasyon teorisinde optimallik koşullarının ve dualite teoremlerinin bulunması için önemli yere sahip olan konveks analiz teorisinin temel tanımlarına ve teoremlerine yer verilecek; üçüncü bölümde çok kriterli optimizasyon teorisine giriş yapılarak temel tanımları ve teoremleri incelenecek; dördüncü bölümde çok kriterli optimizasyon problemin çözümü için skalerleştirme yöntemlerinden bahsedilecek, konveks olmayan çok kriterli problemlere hitap eden konik skalerleştirme tekniğinin ayrıcalıkları gösterilecek, konik skaler problemin dual problemini elde etmek için geliştirilmiş sivri Lagrangian dualite teoremleri anlatılacak ve konveks olmayan, diferansiyellenemeyen dual problemin çözümü için geliştirilen F-MSG yöntemi ile üstünlükleri tartışılacaktır. Beşinci bölümde portföy seçimi problemlerinin matematiksel modelleri ile önerilen çözüm yaklaşımlarına değinilecektir. Son bölümde ise tezin gelecekteki çalışmalara katkısı açıklanarak önerilerde bulunulacaktır.

2. KONVEKS ANALİZ

Konveks analiz, konveks kümeleri ve konveks fonksiyonları inceleyen optimizasyon teorisinin oldukça önemli alanlarından biridir. Optimizasyon teorisinde optimal çözümler ve dualite teoremleri için gerek ve yeter koşulların bulunması hakkında ayırma teoremlerinden yararlanılmaktadır. Bilinen klasik ayırma teoremlerinin uygulanabilmesi için, optimizasyon probleminin konvekslik şartını sağlaması gerekmektedir. Benzer olarak çok kriterli optimizasyon problemlerinde Pareto çözümlerin bulunabilmesi için klasik ayırma teoremlerinden yararlanabilmek için de amaç fonksiyonlarının konvekslik şartını sağlaması gerekmektedir. Buna karşılık çok amaçlı optimizasyon teorisinde karşılaşılan problemlerin birçoğu konvekslik şartını sağlamamaktadır (Azimli ve Kemalbay, 2007). Bu durumda optimallik koşullarının bulunması için konveks analiz teorisinde elde edilen önemli teoremlerden hareketle yeni teoriler ortaya atılmıştır.

Bu bölümde konveks analiz teorisinde önemli tanım ve teoremlere kısaca yer verilecektir.

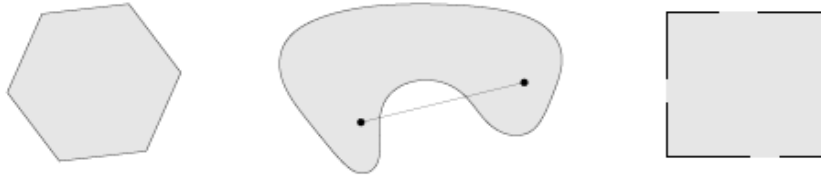
2.1 Konveks Kümeler

Tanım 2.1

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi verilsin. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X \quad (2.1)$$

ise X kümesine *konveks küme* denir.



Şekil 2.1 $\mathbf{R}^2$ 'de konveks ve konveks olmayan kümeler (Boyd vd., 2004).

Şekil 2.1'de altıgen, konveks kümeye bir örnektir. Ortadaki küme, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içermediği için konveks değildir. Karenin bazı sınır noktaları kümeye dâhil olmadığı için konveks küme değildir (Boyd vd., 2004).

Tanım 2.2

$x_1, \dots, x_k \in X$ vektörleri verilsin. $\forall \lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ise $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ vektörüne $x_1, \dots, x_k$

vektörlerinin *konveks kombinasyonu* denir.

Eğer konveks kombinasyon tanımında λ_i çarpanlarının negatif olmama koşulu ihmal edilirse afin kombinasyon, $\forall \lambda_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, k$ koşulu gerçekleşirse lineer kombinasyon tanımı elde edilir.

Teorem 2.1

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks küme olsun. X 'e ait keyfi sayıdaki noktaların konveks kombinasyonu kümeye aittir.

İspat

$$x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ için } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in X$$

$k=2$ için konveks kümenin tanımından teoremin doğruluğu aşikârdır. $k>2$ için teoremin doğruluğunu tümevarım yöntemi ile gösterebiliriz.

$k=2$ için teorem doğrudur.

$k=n$ için teoremin doğruluğunu kabul edelim.

$k=n+1$ için teoremi ispat edelim:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1}) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1}} x_i ; \text{ burada } \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 - \lambda_1$$

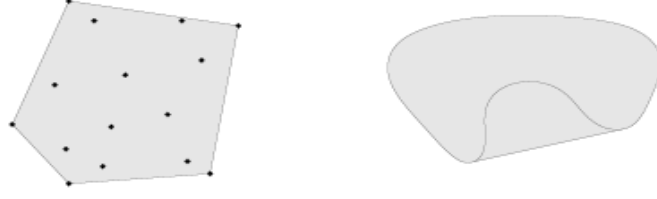
$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i ;$$

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_1} = 1 \text{ ve } \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_1)} \geq 0 \text{ olduğundan } \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i = \hat{x} \in X \text{ 'tir.}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \hat{x} \text{ olup } X \text{ konveks küme olduğundan } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in X \text{ 'tir. } \blacksquare$$

Tanım 3.3

$X \subset \mathbf{R}^n$ keyfi kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine X 'in *konveks kabuğu* denir ve $\mathbf{co}(X)$ veya $\mathbf{H}(X)$ ile gösterilir.



Şekil 2.2 $\mathbf{R}^2$ 'de keyfi iki kümenin konveks kabuğu (Boyd vd., 2004).

Yardımcı Teorem 2.1

$X \subset \mathbf{R}^n$ keyfi kümesini kapsayan en küçük konveks küme $\mathbf{co}(X)$ 'tir. Eğer $X \subset S$ ve S konveks küme ise $\mathbf{co}(X) \subset S$ 'tir. Eğer X konveks küme ise $X = \mathbf{co}(X)$ 'tir.

Teorem 2.2

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi için $\mathbf{co}(X)$, X kümesinin keyfi sayıda konveks kombinasyonları kümesine eşittir.

$$\mathbf{co}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall k \right\} \quad (2.2)$$

Bu teoremin sonucuna göre, konveks kabuğun her elemanının X kümesinin sonlu sayıda elemanlarının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabileceği görülmektedir. Ancak, konveks analiz teorisinde çok önemli teoremlerden biri olarak yer alan Carathéodory Teoremi'ne göre eğer $X \subset \mathbf{R}^n$ ise k sayısı en fazla $n+1$ olabilir.

Teorem 2.3 [Carathéodory's Theorem]

$X \subset \mathbf{R}^n$ keyfi bir küme ve afin boyutu $n+1$ olsun. $\forall x \in \mathbf{co}(X)$, $x \in \mathbf{co}(x_1, \dots, x_{n+1})$ elemanı, X kümesinin en fazla $n+1$ elemanının konveks kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir; yani diğer bir gösterim ile:

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j,$$

$$x_j \in X, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n+1$$

İspat

$x \in \text{co}(X)$ olsun. O halde $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$, $x_j \in X$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, k$. Burada $\lambda_i > 0$

varsayılmaktadır; çünkü aksi halde sıfır olan λ_i 'ler silinebilir ki bu durumda ispat tamamlanmış olur. Eğer $k \leq n+1$ ise ispat tamamdır. $k > n+1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda x elemanının $k-1$ sayıda x_i elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabileceğini göstermeliyiz. $k > n+1$ olması halinde afin kabuğun boyutu $n+1$ olduğundan $x_1, \dots, x_k$ vektörleri afin bağımlı olacaktır. O halde $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ lineer bağımlıdır. Bu durumda hepsi birden sıfır olmayan $\mu_2, \dots, \mu_k$ skalerleri mevcut olmak üzere

$$\sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = 0 \text{ 'dır. } \sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=2}^k \mu_j x_j - x_1 \sum_{j=2}^k \mu_j = 0 \text{ olup } \mu_1 = -\sum_{j=2}^k \mu_j$$

olduğunu göz önüne alırsak buradan μ_j 'lerin hepsi birden sıfır olmamak üzere $\sum_{j=1}^k \mu_j = 0$ ve

$$\sum_{j=1}^k \mu_j x_j = 0 \text{ sonucu elde edilir. Bu sonuçlara göre } x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \text{ vektörünü şu şekilde ifade}$$

edebiliriz:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^k \mu_j x_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j, \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \exists i \in \{1, \dots, k\}. \text{ Şimdi } \alpha \text{ 'nın mevcut durumuna göre } x \text{ 'i inceleyelim:}$$

$\alpha > 0$ olsun. Eğer $\mu_j \leq 0$ ise, $\lambda_j - \alpha \mu_j > 0$; $\mu_j > 0$ ise, $\frac{\lambda_j}{\mu_j} \geq \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \alpha$ olup buradan

$\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ olur. Sonuç olarak, $\forall j = 1, \dots, k$ için $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ sağlanacağından ve α 'nın

tanımından dolayı en az bir j için $\lambda_j - \alpha \mu_j = 0$ olacaktır. $x = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$ olup $j = 1, \dots, k$

için $\sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) = 1$, $\lambda_j - \alpha \mu_j > 0$ ve $j = i$ için $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$ bulundu; yani x 'i en fazla $k-1$

sayıda vektörün konveks kombinasyonu olarak ifade ettik. Eğer $k-1 > n+1$ ise bu işlemler tekrar edilerek x 'in en fazla $n+1$ sayıda vektörün konveks kombinasyonu olarak ifade edilebileceği gösterilir (Rockafellar, 1970; Ben-Tal vd., 2004; Frenk vd., 2004; Bazaraa vd., 1993). ■

2.2 Konveks Kümelerin Bazı Topolojik Özellikleri

Teorem 2.4

Her $X \subset \mathbf{R}^n$ afin kümesi kapalıdır.

Sonuç 2.1

Teorem 2.4'e göre $X \subset \mathbf{R}^n$ herhangi bir küme olmak üzere

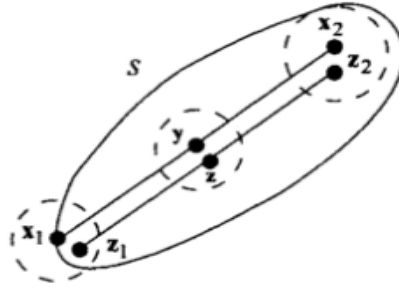
$$\text{cl}X \subset \text{aff}X = \text{aff}(\text{cl}X) \quad (2.3)$$

İspat

Herhangi bir X kümesi için $X \subset \text{cl}X$ her zaman doğrudur. Afin operatörün monoton özelliğinden dolayı $\text{aff}X \subset \text{aff}(\text{cl}X)$ olduğu kolaylıkla görülür. Tersinin de doğru olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.4'e göre afin küme kapalıdır. O halde $\text{cl}X \subset \text{aff}X$ ve buradan tekrar afin operatörü kullanarak $\text{aff}(\text{cl}X) \subset \text{aff}X$ olduğu görülür. Her iki kapsama da gösterildiğinden $\text{aff}X = \text{aff}(\text{cl}X)$ elde edilir.

2.2.1 Konveks Bir Kümenin İçi ile Kapanışı Arasındaki Noktaları Birleştiren Doğru Parçası

İçi boş kümeden farklı olacak şekilde konveks bir küme verildiğinde, kümenin içindeki bir nokta ile kapanışındaki bir noktayı birleştiren doğru parçası (kapanışa dâhil olan nokta haricinde) kümenin içine aittir.



Şekil 2.3 Konveks kümenin içi ile kapanışı arasındaki noktaları birleştiren doğru parçası

(Bazaraa vd., 1993).

Teorem 2.5

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks küme olsun. $x_1 \in \text{cl}X$ ve $x_2 \in \text{int}X$ olmak üzere $\forall \lambda \in (0,1)$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \text{int}X$ 'tir.

İspat

$x_2 \in \mathbf{int}X$ olduğuna göre etrafı X kümesine dâhildir: Bir $\varepsilon > 0$ için $\{z : \|z - x_2\| < \varepsilon\} \subset X$ olacak şekilde bir z elemanı mevcuttur. $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ olsun. $y \in \mathbf{int}X$ olduğunu göstermek için y 'nin etrafının X 'e dâhil olduğunu göstermeliyiz. Özel olarak, y 'nin küçük bir etrafını $\{z : \|z - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım. O halde teoremin ispatı için $\{z : \|z - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon\} \subset X$ olduğunu göstermeliyiz.

$x_1 \in \mathbf{cl}X$ olduğundan $X \cap N_\varepsilon(x_1) \neq \emptyset$ sağlanır. O halde

$$N_\varepsilon(x_1) = \left\{ x \in X : \|x - x_1\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda} \right\} \text{ olmak üzere,}$$

$\left\{ x \in X : \|x - x_1\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda} \right\} \cap X$ kümesi boş kümeden farklıdır. O halde bu özelliği

sağlayan bir $z_1 \in X$ elemanını bulmak mümkündür. Benzer tanım ile $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$

olsun. $z_2 = \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda}$ olmak üzere $z_2 \in X$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \|z_2 - x_2\| &= \left\| \frac{z - \lambda x_1}{1 - \lambda} - x_2 \right\| = \left\| \frac{z - \lambda x_1 - (y - x_1)}{1 - \lambda} \right\| \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} \|(z - y) + \lambda(x_1 - z_1)\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda} \|(z - y)\| + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \|x_1 - z_1\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$z_2 \in X$ olduğu gösterildi. O halde $z_1, z_2 \in X$ ve X konveks küme olduğuna göre z 'nin tanımından $z \in X$ olduğu gösterildi. Öyleyse $\{z : \|z - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon\} \subset X$ olup $y \in \mathbf{int}X$ olduğu ispat edilir. ■

Sonuç 2.2

- i) X kümesi konveks ise $\mathbf{int}X$ kümesi de konvektir.
- ii) $X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme ve $\mathbf{int}X \neq \emptyset$ olsun. O halde $\mathbf{cl}X$ te konvektir.
- iii) $X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme ve $\mathbf{int}X \neq \emptyset$ ise $\mathbf{cl}(\mathbf{int}X) = \mathbf{cl}X$ 'tir.
- iv) $X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme ve $\mathbf{int}X \neq \emptyset$ ise $\mathbf{int}(\mathbf{cl}X) = \mathbf{int}X$ 'tir.

2.2.2 Konveks Kümelerin Relatif İçi

Konveks kümeler için kümenin içi tanımı, daha elverişli bir tanım olan relatif içi tanımına dönüşmektedir.

Tanım 2.4

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer X kümesi, x merkezli yeterince küçük bir yuvar ile afin kabuğunun kesişimini içeriyorsa yani, $\exists \varepsilon > 0$ için,

$$B(x; \varepsilon) \cap \mathbf{aff}X \equiv \{y \mid y \in \mathbf{aff}X, \|y - x\| \leq \varepsilon\} \subset X \quad (2.4)$$

oluyorsa x elemanına, *relatif iç noktası* denir. Tüm relatif iç noktalardan oluşan kümeye *relatif iç* denir ve $\mathbf{ri}X$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.2

Relatif operatör monoton değildir; yani $X_1 \subseteq X_2$ ise $\mathbf{ri}X_1 \subseteq \mathbf{ri}X_2$ her zaman doğru değildir. Ancak $\mathbf{aff}X_1 = \mathbf{aff}X_2$ şartı sağlandığında $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \mathbf{ri}X_1 \subseteq \mathbf{ri}X_2$ doğrudur.

Örnek 2.1

Relatif operatörün monoton olmadığını bir örnek ile gösterelim:

$X_1 = \{0\}$ VE $X_2 = [0,1]$ konveks kümeleri için $\mathbf{ri}X_1 = \{0\}$ ve $\mathbf{ri}X_2 = (0,1)$ 'dir. O halde $X_1 \subseteq X_2$ ve $\mathbf{ri}X_1 \not\subseteq \mathbf{ri}X_2$ olduğu görülmektedir.

Yardımcı Teorem 2.3

$X_1, X_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ boş kümeden farklı kümeler olmak üzere $\forall \lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki özellik sağlanır:

$$(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \cap \mathbf{aff}X_1 \subseteq \lambda X_1 + (1-\lambda)(X_2 \cap \mathbf{aff}X_1) \quad (2.5)$$

Teorem 2.6

$X \subset \mathbf{R}^n$ boş kümeden farklı konveks bir küme olsun. $x_1 \in \mathbf{cl}X$ ve $x_2 \in \mathbf{ri}X$ olmak üzere $\forall \lambda \in [0,1)$ için; $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathbf{ri}X$ (2.6)

İspat

Bu teoremi ispatlamak için $\forall \lambda \in [0,1)$ ve $x_2 \in \mathbf{ri}X$ olmak üzere $\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 \subset \mathbf{ri}X$ yani;

diğer bir gösterim ile $(\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 + \varepsilon B) \cap \mathbf{aff}X \subset X$ olduğunu göstermek gereklidir.

$x_2 \in \mathbf{ri}X \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ için

$$\left(x_2 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \varepsilon B \right) \cap \mathbf{aff}X \subset X \quad (2.7)$$

olduğu relatif iç nokta tanımından kolaylıkla söylenebilir.

Ayrıca $\mathbf{cl}X \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} (X + \varepsilon B)$ olmasından dolayı $\mathbf{cl}X \subset (X + \varepsilon B)$ elde edilir. O halde;

$$\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 + \varepsilon B \subset \lambda X + (1-\lambda)\left(x_2 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \varepsilon B\right) \text{ 'dir.}$$

Şimdi Yardımcı Teorem 2.3'ten yararlanarak

$$(\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 + \varepsilon B) \cap \mathbf{aff}X \subset \lambda X + (1-\lambda)\left((x_2 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \varepsilon B) \cap \mathbf{aff}X\right) \Rightarrow$$

$$(\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 + \varepsilon B) \cap \mathbf{aff}X \subset \lambda X + (1-\lambda)X \Rightarrow X, \text{ konveks küme olduğundan}$$

$$(\lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 + \varepsilon B) \cap \mathbf{aff}X \subset X \text{ elde edilir. O halde } \lambda \mathbf{cl}X + (1-\lambda)x_2 \subset \mathbf{ri}X \text{ 'tir. } \blacksquare$$

Diğer bir yol ise X , n -boyutlu konveks küme olduğundan $\mathbf{ri}X = \mathbf{int}X$ 'tir. Teorem 2.5'te $\mathbf{int}X = \mathbf{ri}X$ alınarak ispat elde edilir. (Frenk vd., 2004)

Teorem 2.7

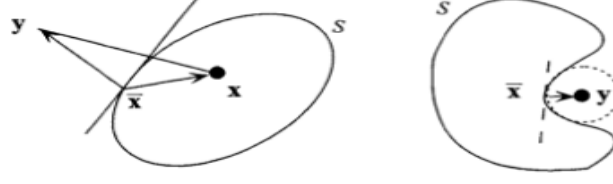
$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme olsun. O halde $\mathbf{cl}X = \mathbf{cl}(\mathbf{ri}X)$ ve $\mathbf{ri}X = \mathbf{ri}(\mathbf{cl}X)$ 'tir.

2.3 Konveks Kümeleri Ayırma ve Destekleme

Optimizasyon teorisinde neredeyse tüm optimallik koşulları ve dualite teoremleri konveks kümelerin ayrılması ve desteklenmesi özelliklerinden faydalanmaktadır. Konveks kümelerin ayrılması temel olarak, kapalı bir konveks küme ile bu kümeye ait olmayan bir noktanın bir hiperdüzlem aracılığı ile ayrılması kavramına dayanmaktadır. Bir nokta ile konveks bir kümenin ayrılması kavramı iki konveks kümenin ayrılmasına genişletilmiştir.

Teorem 2.8 (En Yakın Nokta Teoremi)

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kapalı, konveks bir küme ve $y \notin X$ olsun. O halde X kümesinden y noktasına uzaklığı minimum olan yalnız bir $\bar{x} \in X$ noktası vardır. Ayrıca $\bar{x}$ 'nin kümeden minimum uzaklığı veren nokta olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ için $(y - \bar{x})'(x - \bar{x}) \leq 0$ 'dır.



Şekil 2.4 Kapalı konveks bir kümeye minimum uzaklık (Bazaraa vd., 1993).

2.3.1 Kümeye Ait Olmayan Bir Nokta ile Konveks Kümenin Ayrılması

Teorem 2.9

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kapalı konveks bir küme ve $y \notin X$ olsun. O halde $\forall x \in X$ için $p^t y > \alpha$ ve $p^t x \leq \alpha$ sağlanacak şekilde sıfırdan farklı bir p vektörü ile bir α skaleri bulmak mümkündür.

Teorem 2.10

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi için, $y \notin \text{cl}X$ olsun. O halde $\varepsilon > 0$ sayısı ve sıfırdan farklı öyle $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü vardır ki $\forall x \in X$ için

$$\langle p, x \rangle \geq \langle p, y \rangle + \varepsilon \quad (2.8)$$

sağlanır.

Teorem 2.11

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme ve $y \notin X$ olsun. O halde öyle bir $p \neq 0$ vektörü vardır ki $\forall x \in X$ için $\langle x, p \rangle \leq \langle y, p \rangle$ sağlanır.

İspat

X kümesinin kapalılığından bahsedilmemiş. O halde iki durum söz konusudur:

i) $y \notin \text{cl}X$ veya ii) $y \in \text{cl}X$.

i) $y \notin \text{cl}X$ olsun. O halde Teorem 2.10'a göre y noktası ile X kümesini kuvvetli şekilde ayırmak mümkündür.

ii) $y \in \text{cl}X$ yani y , X 'in bir sınır noktası olsun. X konveks küme olduğundan, X 'in nispi sınır kümesinin her noktasına, kapanışı dışından bir dizi ile yaklaşmak mümkündür; yani öyle bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ki $x_n \notin \text{cl}X$ ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow y$ 'dir. O halde Teorem 2.10'u uygularsak

her $x_n \notin \text{cl}X$ noktası için $\varepsilon > 0$ sayısı ve $p_n \neq 0$ vektörü için

$$\langle x, p_n \rangle \leq \langle x_n, p_n \rangle - \epsilon_n; \quad \forall x \in X, \quad n=1,2,\dots$$

Burada ϵ_n 'i atabiliriz. Eşitsizlik yine sağlanır:

$$\langle x, p_n \rangle \leq \langle x_n, p_n \rangle; \quad \forall x \in X, \quad n=1,2,\dots$$

Diziyi normuna bölelim. Böylece $\frac{p_n}{\|p_n\|} = q_n$; normu 1 olan vektörler dizisi elde edilir. Bu dizi sınırlı olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır ve bu yakınsak alt dizinin bir $p \neq 0$ limiti vardır. O halde her iki tarafı $\|p_n\|$ ile bölüp limite geçerse $\forall x \in X$ için $\langle x, p \rangle \leq \langle y, p \rangle$ elde edilir (Bazaraa vd., 1993). ■

2.3.2 Hiperdüzlemler ve İki Kümenin Ayrılması

Hiperdüzlemler ve Yarı uzaylar

$\mathbf{R}^n$ 'de hiperdüzlem, sıfırdan farklı bir a vektörü ile iç çarpımı sabit bir sayıyı veren noktalardan oluşmaktadır.

$$H = \{x \mid a^T x = b\} \quad (2.9)$$

burada $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ ve $b \in \mathbf{R}$ 'dir.

Tanımından hiperdüzlemin afin bir küme, dolayısıyla da konveks küme olduğu görülür.

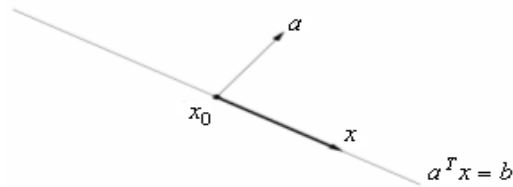
Geometrik olarak, a vektörü hiperdüzlemin normal vektörü olmak üzere, b sabiti hiperdüzlemin orijinden sapmasını belirler. Bunu matematiksel olarak,

$$H = \{x \mid a^T (x - x_0) = 0\}$$

şeklinde ifade ederiz, burada $x_0 \in H$ 'dir. Bu gösterim şu şekilde de ifade edilebilir:

$$H = \{x \mid a^T (x - x_0) = 0\} = x_0 + a^\perp,$$

$a^\perp$, a vektörünün ortogonal bileşenleri kümesi olup, a vektörüne ortogonal olan tüm vektörlerden oluşur: $a^\perp = \{v \mid a^T v = 0\}$.



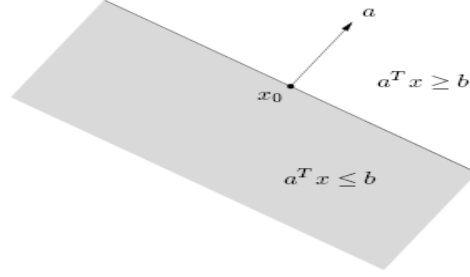
Şekil 2.5 $\mathbf{R}^2$ 'de hiperdüzlem (Boyd vd., 2004).

Şekil 2.5'te görüldüğü gibi, normal vektörü a olan ve x_0 noktasından geçen hiperdüzlemde düzleme ait herhangi bir x noktası için $(x - x_0)$ vektörü a vektörüne ortogonaldır.

Hiperdüzlem, $\mathbf{R}^n$ uzayını iki yarı uzaya böler. H , iki kapalı yarı uzay: $H^+ = \{x \mid a^T x \geq b\}$,

$H^- = \{x \mid a^T x \leq b\}$ ve iki açık yarı uzay: $H^+ = \{x \mid a^T x > b\}$, $H^- = \{x \mid a^T x < b\}$ tanımlar.

Tanımdan görüldüğü gibi yarı uzaylar konvektir; ancak afin değildirler.



Şekil 2.6 $\mathbf{R}^2$ 'de hiperdüzlemin tanımladığı yarı uzaylar (Boyd vd., 2004).

H^- kapalı yarı uzayını şu şekilde de ifade etmek mümkündür:

$$H^- = \{x \mid a^T (x - x_0) \leq 0\}$$

burada $x_0 \in H$; yani $a^T x_0 = b$ 'dir. a vektörü hiperdüzlemin dış normali olup, verilen x_0 noktasına göre $(x - x_0)$ vektörlerinin a normali ile geniş açı yaptıkları görülmektedir. (Boyd vd., 2004)

Tanım 2.5

$\emptyset \neq X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ farklı kümeler olsun. $H = \{x : p^T x = \alpha\}$ verilen hiperdüzlemi için

$$\forall x \in X_1 \text{ için } p^T x \geq \alpha$$

$$\forall x \in X_2 \text{ için } p^T x \leq \alpha$$

sağlanıyor ise X_1 ve X_2 kümeleri hiperdüzlem tarafından *ayrılabilir* denir.

i) Eğer X_1 ve X_2 kümeleri ayrılabilir ve ayrıca

$$\text{bir } x_1 \in X_1 \text{ ve bir } x_2 \in X_2 \text{ için } p^T x_1 > \alpha \text{ ve } p^T x_2 < \alpha$$

sağlanıyor ise X_1 ve X_2 kümelerine *asıl (proper) ayrılabilir* denir.

ii) Eğer

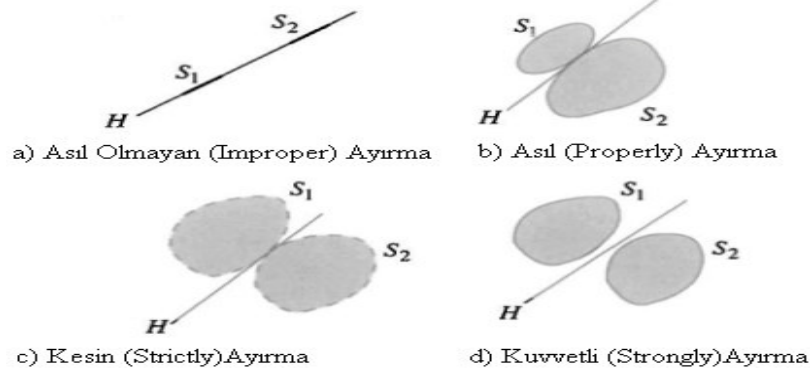
$$\forall x \in X_1 \text{ için } p^T x > \alpha \text{ ve } \forall x \in X_2 \text{ için } p^T x < \alpha$$

sağlanıyor ise X_1 ve X_2 kümeleri *kesin (strictly) ayrılabilir* denir.

iii) Eğer

$$\forall x \in X_1 \text{ için } p^t x \geq \alpha + \varepsilon \text{ ve } \forall x \in X_2 \text{ için } p^t x \leq \alpha$$

sağlanıyor ise X_1 ve X_2 kümeleri *kuvvetli (strongly) ayrılabilir* denir.



Şekil 2.7 Çeşitli ayırma yöntemleri (Bazaraa vd., 1993).

Teorem 2.12

X_1 ve X_2 $\mathbf{R}^n$ 'de verilmiş boş kümeden farklı iki konveks küme ve $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ olsun. O halde X_1 ve X_2 kümelerini ayıran öyle $p \neq 0$, $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü vardır ki

$$\langle x_1, p \rangle \leq \langle x_2, p \rangle; \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2 \quad (2.9)$$

İspat

$X = X_1 - X_2$ olsun. X konveks küme olup, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ olduğundan $0 \notin X$ 'tir. Öyleyse $0 \notin X$ noktası ile X kümesini birbirinden ayırmak mümkündür. O halde sıfırdan farklı bir $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü ile bir α skaleri için

$$p^t 0 \geq \alpha \text{ ve } p^t x \leq \alpha; \forall x \in X$$

sağlanır. Buradan

$$\langle x, p \rangle \leq \langle 0, p \rangle; \forall x \in X$$

olduğu açıktır. $\forall x_1 \in X_1$ ve $\forall x_2 \in X_2$ için $x = x_1 - x_2 \in X$ vektörünü eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\langle x_1 - x_2, p \rangle \leq 0 \Rightarrow$$

$$\langle x_1, p \rangle \leq \langle x_2, p \rangle; \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$$

için ispat edilir. ■

Teorem 2.13

X_1 ve X_2 , $\mathbf{R}^n$ 'de verilmiş konveks kümeler olmak üzere X_1 kompakt, X_2 kapalı küme olsun.

Eğer $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ise, $0 \neq p$ ve $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü ile $\varepsilon > 0$ için

$$\langle x_1, p \rangle \leq \langle x_2, p \rangle - \varepsilon; \quad \forall x_1 \in X_1, \quad \forall x_2 \in X_2 \quad (2.10)$$

İspat

$X = X_1 - X_2$ olsun. X_1 ve X_2 kümeleri konveks olduğundan cebirsel farkları da konveks kümedir; ancak kapalı olmaları X 'in kapalı olmasını gerektirmez. Birinin kompakt küme olmasından dolayı X kümesi kapalıdır. Öncelikle bunu ispat edelim:

X kümesinde x noktasına yakınsayan bir $\{x_k\}$ dizisini göz önüne alalım. $x \in X$ olduğunu göstermeliyiz. X 'in tanımından $x_k = y_k - z_k$ olup burada $y_k \in X_1$; $z_k \in X_2$ 'dir. X_1 kompakt küme olduğundan, limiti $y \in X_1$ olan $\{y_k\}_\kappa$ yakınsak alt dizisi mevcuttur. O halde $y_k - z_k \rightarrow x$ ve $\forall k \in \kappa$ için $y_k \rightarrow y$ olduğundan $z_k \rightarrow z$ $\forall k \in \kappa$ için doğrudur. X_2 kapalı olduğundan $z \in X_2$ 'dir. O halde $x = y - z$, $y \in X_1$ ve $z \in X_2$ olduğundan $x \in X$ doğrudur. Öyleyse X 'in kapalı küme olduğu ispat edilir.

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$ olduğundan $0 \notin X$ olup, Teorem 2.10'a göre sıfırdan farklı bir $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü ile α skaleri için

$$p^t x \geq \varepsilon \text{ ve } p^t 0 < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

sağlanır. $x = x_1 - x_2 \in X$ yerine yazıldığında

$$p^t (x_1 - x_2) \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$p^t x_1 \geq p^t x_2 + \varepsilon; \quad \forall x_1 \in X_1, \quad \forall x_2 \in X_2. \quad \blacksquare$$

2.3.3 Sınır Noktalarında Kümelerin Desteklenmesi**Tanım 2.6**

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ ve $\bar{x} \in \partial X$ olsun. $\forall x \in X$ için

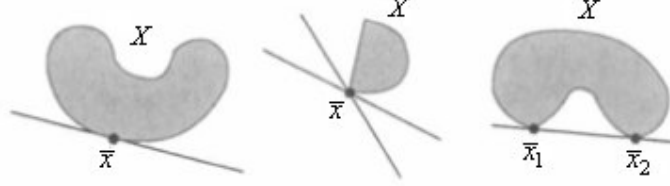
$$\text{i) } p^t (x - \bar{x}) \leq 0 \text{ veya}$$

$$\text{ii) } p^t (x - \bar{x}) \geq 0$$

olacak şekilde $p \neq 0$ ve $p \in \mathbf{R}^n$ vektörü mevcut ise

$H = \{x : p^t(x - \bar{x}) = 0\}$ hiperdüzlemine X 'in $\bar{x}$ noktasındaki destek hiperdüzlemi denir.

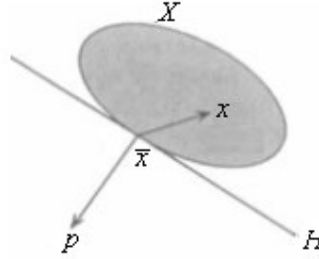
Tanımdan görüldüğü gibi $\bar{x} \in H$ ve i) durumunda $X \subseteq H^-$, ii) durumunda ise $X \subseteq H^+$ 'dır. Bu tanıma ek olarak eğer $X \not\subseteq H$ ise yani H' 'ye X 'in $\bar{x}$ noktasındaki asıl destek hiperdüzlemi denir.



Şekil 2.8 Hiperdüzlem ile kümelerin sınır noktalarında desteklenmesi (Bazaraa vd., 1993)

Teorem 2.14

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme ve $\bar{x} \in \partial X$ olsun. O halde $\forall x \in \text{cl}X$ için sıfırdan farklı bir p vektörü var ki $p^t(x - \bar{x}) \leq 0$ olacak şekilde X 'i $\bar{x}$ noktasında destekleyen bir hiperdüzlem mevcuttur.



Şekil 2.9 Konveks kümenin sınır noktasında desteklenmesi (Bazaraa vd., 1993)

İspat

$\bar{x} \in \partial X$ sınır noktası olsun. X konveks küme olduğundan, X 'in nispi sınır kümesinin her noktasına, kapanışı dışından bir dizi ile yaklaşmak mümkündür; yani öyle bir $\{y_k\}$ dizisi vardır ki $y_k \notin \text{cl}X$ ve $k \rightarrow \infty$ için $y_k \rightarrow \bar{x}$ 'dir. O halde Teorem 2.10'u uygularsak her $y_k \notin \text{cl}X$ noktası için $\varepsilon > 0$ sayısı ve $p_k \neq 0$ vektörü için

$$\langle x, p_k \rangle \leq \langle y_k, p_k \rangle - \varepsilon_k; \quad \forall x \in \text{cl}X, \quad k = 1, 2, \dots$$

Burada ε_k 'yı atabiliriz. Eşitsizlik yine sağlanır:

$$\langle x, p_k \rangle \leq \langle y_k, p_k \rangle; \quad \forall x \in \text{cl}X, \quad k = 1, 2, \dots$$

Diziyi normuna bölelim. Böylece $\frac{p_k}{\|p_k\|} = q_k$; normu 1 olan vektörler dizisi elde edilir. Bu dizi

sınırlı olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır ve bu yakınsak alt dizinin bir $p \neq 0$ limiti mevcuttur. O halde her iki tarafı $\|p_k\|$ ile bölüp limite geçerse $\forall x \in \text{cl}X$ için $\langle x, p \rangle \leq \langle \bar{x}, p \rangle$ elde edilir. Buradan $\bar{x}'p - y'p \leq 0 \Rightarrow p'(\bar{x} - y) \leq 0$ olduğu ispat edilir. ■

Sonuç olarak $X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinin her $\bar{x} \in \partial X$ sınır noktasında destek hiperdüzlemi vardır.

Teorem 2.15

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinin her x_0 relatif sınır noktasında asıl destek hiperdüzlemi vardır.

Teorem 2.16

X_1 ve X_2 , $\mathbf{R}^n$ 'de verilmiş konveks kümelerinin asıl ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\text{ri}X_1 \cap \text{ri}X_2 = \emptyset$ olmasıdır.

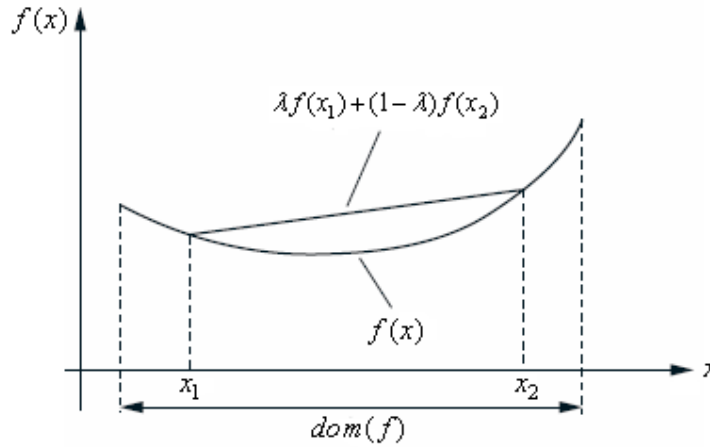
2.4 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.7

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (2.11)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir.



Şekil 2.10 Konveks fonksiyon (<http://ocw.mit.edu>).

Eğer f konveks ise $-f$ fonksiyonuna *konkav fonksiyon* denir.

$f = a^t x + b$ afin fonksiyonu hem konveks hem de konkav fonksiyonlara örnek gösterilebilir.

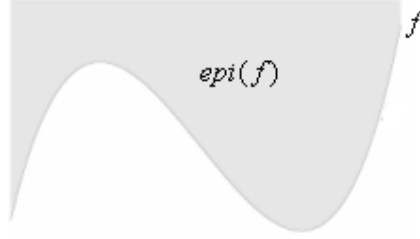
Tanım 2.7'de $x_1 \neq x_2$ ve $0 < \lambda < 1$ için f fonksiyonuna *kesin konveks fonksiyon* denir.

Tanım 2.8

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$epi(f) = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times X \mid f(x) \leq t\} \quad (2.12)$$

kümesine f fonksiyonunun epigrafiği denir. Epigrafik geometrik olarak, fonksiyon grafiğinin üst kısmı anlamındadır.



Şekil 2.11 Bir fonksiyonun epigrafiği (Boyd vd., 2004).

Yardımcı Teorem 2.4

$f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $epi(f) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ kümesinin konveks olmasıdır.

İspat

f konveks fonksiyon olsun. $\forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in epi(f)$ ve $\lambda \in (0,1)$ alalım. O halde $epi(f)$ 'in tanımından $f(x_1) \leq t_1$ ve $f(x_2) \leq t_2$ 'dir. f 'in konveks olmasından ve epigrafiğin tanımından

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Rightarrow$$

$$\leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \Rightarrow$$

$$(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in epi(f) \Rightarrow \lambda(t_1, x_1) + (1-\lambda)(t_2, x_2) \in epi(f) \quad \text{olup} \quad epi(f)\text{'in}$$

konveksliği ispat edilir.

Tersine $epi(f)$ 'in konveks küme olduğunu varsayalım. f 'in konveks olduğunu gösterelim.

$\forall x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in (0,1)$ için $f(x_1) = t_1$, $f(x_2) = t_2$ olsun. O halde $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in epi(f)$ elde edilir. $epi(f)$ konveks küme olduğundan

$$\lambda(t_1, x_1) + (1-\lambda)(t_2, x_2) \in epi(f) \Rightarrow (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in epi(f)$$

olup buradan $epi(f)$ 'in tanımına göre

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

elde edilir. ■

Teorem 2.15 (Jensen Eşitsizliği)

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. O halde $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ve

$x_i \in X$, $i = 1, \dots, m$ için

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (2.13)$$

Görüldüğü üzere Jensen eşitsizliği konveks fonksiyonlar için verilen tanımın genelleştirilmiş halidir; $m=2$ için genel tanımın elde edildiği açıktır.

Tanım 2.9

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin.

$$L_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \quad (2.14)$$

kümesine f 'in *seviye kümesi* denir veya üst seviye kümesi ile karıştırmamak için alt seviye kümesi de denir.

2.4.1 Konveks Fonksiyonların Sürekliliği

Konveks fonksiyonların önemli bir özelliği de iç noktalarında her zaman sürekli olmalarıdır. Konveks fonksiyon bir aralıkta sürekli ise olsa olsa aralığın uç noktalarında süreksiz olabilir. Yani açık bir küme üzerinde konveks fonksiyon daima süreklidir.

Teorem 2.16

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu $x_0 \in \mathbf{ri}X$ noktasının belirli bir etrafında yukarıdan sınırlı olsun. O halde f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Teorem 2.17

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. O halde f fonksiyonu $\mathbf{ri}(X)$ kümesinde süreklidir.

İspat

Keyfi $x_0 \in \mathbf{ri}(X)$ olsun. O halde $x_0 \in \mathbf{ri}(\mathbf{co})\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ olacak şekilde $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbf{ri}(X)$ şeklinde $n+1$ nokta bulunabilir.

$$\mathbf{co}(X) = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

olmak üzere konveks kabuğun her elemanı X 'in en fazla $n+1$ noktasının konveks

kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir. $x \in \mathbf{co}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ vektörü $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ şeklinde

gösterilebilir. f konveks fonksiyon olduğundan

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \text{ 'dir.}$$

Burada $a = \max_{1 \leq i \leq n+1} f(x_i)$ seçildiğinde $f(x) \leq a$ elde edilir; yani x_0 noktasının $\mathbf{co}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$

etrafında f fonksiyonu yukarıdan sınırlıdır. O halde Teorem 2.16'ya göre f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

2.4.2 Konveks Fonksiyonların Yön Türevi ve Subgradienti

Bir önceki bölümde konveks fonksiyonların her relatif iç noktasında sürekli olduğunu gösterdik. Bu bölümde ise konveks fonksiyonların her iç noktasında uygun yönde türevinin olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.9

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu tanımlansın. $x_0 \in X$ ve $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere

$\lambda \in (0, \delta)$ aralığı için $x_0 + \lambda d \in X$ olsun. Eğer $\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$ limiti mevcut ise, f

fonksiyonunun x_0 noktasında d yönünde türevi vardır denir ve

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} \quad (2.15)$$

ile gösterilir. Benzer olarak

$$f'(x_0; -d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 - \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} = - \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 - \lambda d) - f(x_0)}{-\lambda}$$

$-\lambda = \theta$ olsun. O halde $\lambda \rightarrow 0^+$ için $\theta \rightarrow 0^-$ olur. Yerine yazarsak

$$f'(x_0; -d) = - \lim_{\theta \uparrow 0} \frac{f(x_0 + \theta d) - f(x_0)}{\theta} \quad (2.16)$$

(Rockafellar, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5

$\delta > 0$ olmak üzere $f : [-\gamma, \gamma] \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. $(x_0, \gamma]$ aralığında f aşağıdan sınırlı ve monoton artan olsun. O halde $\inf_{x_0 < x \leq \gamma} f(x)$ vardır ve $\inf_{x_0 < x \leq \gamma} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$

Teorem 2.18

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. Keyfi $x_0 \in X$ ve $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ olsun. $\forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ için $x_0 + \lambda d \in X$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. O halde f fonksiyonunun x_0 noktasında d yönünde türevi vardır ve

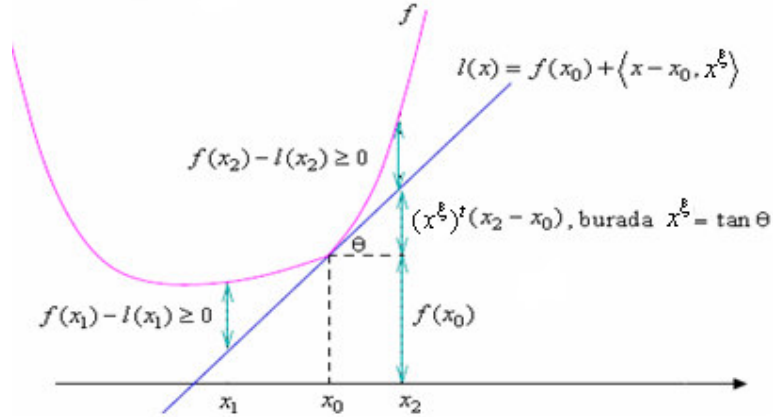
$$f'(x_0; d) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}, \text{ dır.} \quad (2.17)$$

Tanım 2.10

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x) - f(x_0) \geq \langle x - x_0, x^\xi \rangle$, $\forall x \in X$ için

$$(2.18)$$

sağlanıyor ise x^ξ vektörüne f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subgradienti denir. f 'in x_0 noktasındaki tüm subgradientlerinden oluşan kümesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial f(x_0)$ ile gösterilir.



Şekil 2.12 Konveks fonksiyonların subgradientinin geometrik yorumu (Burachik, 2007).

f fonksiyonunun x_0 noktasında subgradiene sahip olması için gerek ve yeter koşul

$l(x) = f(x_0) + \langle x - x_0, x^\xi \rangle$ bir afin fonksiyon olmak üzere

- i) $l(x_0) = f(x_0)$
- ii) $l(x) \leq f(x), \forall x \in X$

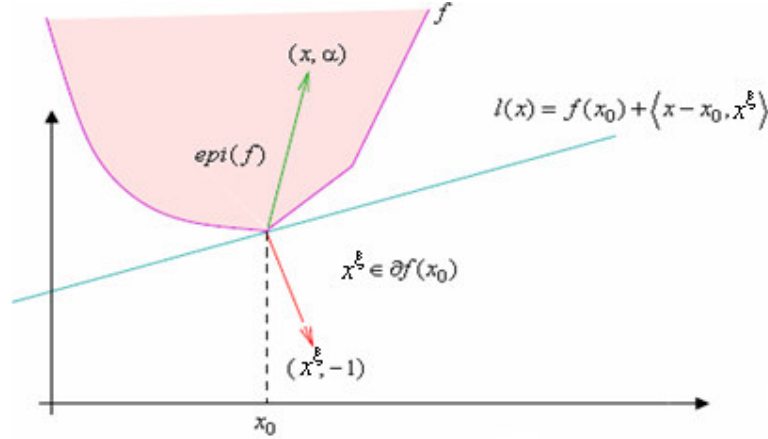
koşullarının sağlanmasıdır. Bunun geometrik anlamı, grafiği $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen ve X kümesinde f in grafiğinin aşağısında kalan afin bir fonksiyon var demektir.

Diğer bir yorum açısından x^ξ vektörünün f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subgradienti olması için gerek ve yeter koşul $(x_0, f(x_0))$ sınır noktasında $(x^\xi, -1)$ dış normaline sahip olan ve bu noktada $\text{epi}(f)$ 'i destekleyen bir hiperdüzlemin bulunmasıdır. (Burachik, 2007)

Teorem 2.18

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. $x_0 \in X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $\partial f(x_0) \neq \emptyset$
- ii) $\text{epi}(f)$ kümesi $(x_0, f(x_0))$ noktasında (x^ξ, a) ; $a \neq 0$ dış normali olan destekleyici hiperdüzleme sahiptir.



Şekil 2.13 Epigrafiğin, subgradient noktasında desteklenmesi (Burachik, 2007).

Teorem 2.19

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. O halde $\partial f(x_0)$ konveks ve kapalı bir kümedir.

Teorem 2.20

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyon ve $x_0 \in \text{ri}X$ olsun. O halde $x^\xi \in \partial f(x_0)$ olması için gerek ve yeter koşul $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ için $f'(x_0, d) \geq \langle d, x^\xi \rangle$ olmasıdır.

İspat

$x^\xi \in \partial f(x_0)$ ise $\forall x \in X$ için $f(x) - f(x_0) \geq \langle x - x_0, x^\xi \rangle$ doğrudur. Teorem 2.18'e göre f konveks fonksiyonu için $x_0 \in \text{ri}X$ ve $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ olduğunda $f'(x_0, d)$ mevcuttur ve teoremin varsayımından $\forall \lambda \in [-\delta, \delta]$ için $x_0 + \lambda d \in X$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. O halde

$$f(x_0 + \lambda d) - f(x_0) \geq \langle x_0 + \lambda d - x_0, x^\xi \rangle = \langle \lambda d, x^\xi \rangle, \quad x_0 + \lambda d \in X$$

için doğrudur. Bu eşitsizliği $\lambda > 0$ sayısına bölüp, $\lambda \downarrow 0$ için limite geçerse

$$f'(x_0, d) \geq \langle d, x^\xi \rangle$$

elde edilir. Tersine $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ için $f'(x_0, d) \geq \langle d, x^\xi \rangle$ sağlansın. $q: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere

$$q(\lambda) = \frac{f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)}{\lambda} \text{ olsun. } q(\lambda) \text{ fonksiyonunu } (0, \varepsilon) \text{ arasında monoton artan}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\lambda \in (0, 1)$ olsun. O halde q monoton artan olduğundan

$$\langle x - x_0, x^\xi \rangle \leq f'(x_0, x - x_0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} q(\lambda) = \inf_{\lambda > 0} q(\lambda) \leq q(\lambda) \leq q(1) = \frac{f(x_0 + 1 \cdot (x - x_0)) - f(x_0)}{1}$$

olup buradan

$$\langle x - x_0, x^\xi \rangle \leq f(x) - f(x_0); \quad \forall x \in X \text{ elde edilir. O halde } x^\xi \in \partial f(x_0) \text{ sağlanır. } \blacksquare$$

Teorem 2.21

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. O halde $\forall x_0 \in \text{ri}X$ için $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ 'dir.

2.4.3 Diferansiyellenen Konveks Fonksiyonlar**Tanım 2.11**

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ bir küme ve $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için

$$f(x) = f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0) \rangle + \|x - x_0\| \alpha(x_0, x - x_0) \quad (2.19)$$

olacak şekilde bir $\nabla f(x_0)$ vektörü ile bir $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu bulmak mümkünse o zaman f fonksiyonu $x_0 \in \text{int}X$ noktasında diferansiyellenendir denir. Burada $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x_0; x - x_0) = 0$ özelliği sağlanır.

Diğer bir deyişle

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x - x_0, \nabla f(x_0) \rangle}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (2.20)$$

Burada $\nabla f(x_0)$ vektörü, gradient vektörü olarak adlandırılıp, eğer f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenen ise sadece bir tek gradient vektörü olabilir:

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)^t \equiv [f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)]^t \quad (2.21)$$

(Bazaraa vd., 1993).

f , x_0 noktasında diferansiyellenen olsun. $x = x_0 + \lambda d$ ve $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ için tanıma göre

$$0 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), \lambda d \rangle}{\lambda \|d\|} = \frac{(f'(x_0; d) - \langle \nabla f(x_0), d \rangle)}{\|d\|} \Rightarrow$$

$$f'(x_0; d) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle, \quad \forall d \in \mathbf{R}^n \quad (2.22)$$

elde edilir.

Özel olarak; e_j , $n \times n$ 'lik birim matrisin j . sütunu olmak üzere $d = e_j$, $j = 1, \dots, n$ alınırsa

$$\langle \nabla f(x_0), e_j \rangle = f'(x_0; e_j) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_j) - f(x_0)}{\lambda} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

x_0 noktasında x_j değişkenine göre kısmi türevi elde edilir.

O halde

$$f'(x_0; d) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} d_i \quad (2.24)$$

(Rockafellar, 2007).

Şimdi konveks fonksiyonlar için diferansiyel ile subdiferansiyel arasındaki ilişkiyi veren teoremi ispat edelim:

Teorem 2.22

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında diferansiyellenen ise $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ 'dır.

Teorem 2.23

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. $x_0 \in \text{int}X$ noktasında f 'in diferansiyellenen olduğunu varsayalım. O halde $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

İspat

Teorem 2.22'ye göre $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ 'dır. $x^\xi \neq \nabla f(x_0)$ olmak üzere $x^\xi \in \partial f(x_0)$ olduğunu kabul edelim. f, x_0 'da diferansiyellenen olduğundan

$$(i) \quad f'(x_0; d) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle \text{ ve}$$

Teorem 2.20'ye göre $x^\xi \in \partial f(x_0)$

$$(ii) \quad f'(x_0, d) \geq \langle x^\xi, d \rangle, \quad 0 \neq d \in \mathbf{R}^n$$

elde edilir. Şimdi (i) ve (ii)'den

$$\langle \nabla f(x_0), d \rangle \geq \langle x^\xi, d \rangle \Rightarrow 0 \geq \langle x^\xi - \nabla f(x_0), d \rangle, \quad 0 \neq d \in \mathbf{R}^n$$

bulunur. Ancak bu eşitsizlik $0 \neq d \in \mathbf{R}^n$ için doğru olduğundan sadece $x^\xi - \nabla f(x_0) = 0$ için gerçekleşebilir. Öyleyse $x^\xi = \nabla f(x_0)$ elde edileceğinden bu durum teoremin kabulü ile çelişir.

O halde $x^\xi = \nabla f(x_0)$ olup $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ olmalıdır. ■

Herhangi çok değişkenli fonksiyonun bir noktasında tüm değişkenlere göre kısmi türevi mevcut ise bu noktada fonksiyonun diferansiyellendiğini söyleyemeyiz. Ancak aşağıdaki teorem, konveks fonksiyonların bir noktada tüm değişkenlere göre kısmi türevleri mevcut ise fonksiyonun diferansiyellenen olduğunu söylemektedir.

Teorem 2.24

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks küme ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks fonksiyonu verilsin. $x_0 \in \text{int}X$ olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasında tüm değişkenlere göre kısmi türevleri mevcut ise f, x_0 noktasında diferansiyellenendir.

İspat

$g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $g(h) = f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle$ olsun. f in

x_0 noktasında diferansiyellenen olduğunu göstermek için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0$ olmalıdır. f in kısmi

türevleri mevcut olduğuna göre

$$\frac{\partial g(h)}{\partial h_i} = \frac{\partial f(x+h)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

olup, g 'nin kısmi türevleri vardır. g fonksiyonunun tanımından $g(0) = 0$ ve $\frac{\partial g(0)}{\partial h_j} = 0$ olduğu

görülmür. g 'nin konveks olduğu açıktır. e_i = i. birim vektör olmak üzere $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$ yazılabilir.

O halde

$$g(h) = g\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n h_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(n h_i e_i) = \sum_{i=1}^n (h_i) \frac{g(n h_i e_i)}{n h_i} \leq \|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{g(n h_i e_i)}{n h_i} \right| \quad (2.25)$$

yazılabilir. Burada eşitsizlikleri oluştururken üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinden yararlanılmıştır. Şöyle ki $h, w \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^n h_i w_i = h^T w \leq \|h\| \cdot \|w\| = \|h\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n w_i e_i \right\| \leq \|h\| \cdot \sum_{i=1}^n |w_i| \cdot |e_i| = \|h\| \cdot \sum_{i=1}^n |w_i|$$

özelliğinden yararlanılmıştır.

(2.25) denkleminde h yerine $-h$ alındığında

$$g(-h) \leq \|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{g(-n h_i e_i)}{n h_i} \right| \quad (2.26)$$

g 'nin konveksliğinden yararlanarak

$$0 = g(0) = g\left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(-h)\right) \leq \frac{1}{2}g(h) + \frac{1}{2}g(-h) \Rightarrow$$

$$-g(-h) \leq g(h) \quad (2.27)$$

bulunur. Şimdi (2.25), (2.26) ve (2.27) eşitsizliklerini birleştirirsek

$$-\sum_{i=1}^n \left| \frac{g(-n h_i e_i)}{n h_i} \right| \leq -\frac{g(-h)}{\|h\|} \leq \frac{g(h)}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{g(n h_i e_i)}{n h_i} \right| \quad (2.28)$$

$$\frac{g(n h_i e_i)}{n h_i} = \frac{f(x + n h_i e_i) - f(x)}{n h_i} - \langle \nabla f(x), e_i \rangle$$

(2.28) eşitsizliğinde $h \rightarrow 0$ için en sağ ve en sol kısmın limitleri 0'dır. O halde buradan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0 \text{ elde edilir (Burachik, 2007).} \blacksquare$$

Tanım 2.12

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ bir küme ve $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in X$ için

$$f(x) = f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle + \|x - x_0\|^2 \alpha(x_0, x - x_0) \quad (2.29)$$

olacak şekilde bir $\nabla f(x_0)$ vektörü, $n \times n$ boyutlu simetrik $\mathbf{H}(x_0)$ matrisi ile bir $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu bulmak mümkünse o zaman f fonksiyonu $x_0 \in \text{int}X$ noktasında iki kez diferansiyellenendir denir. Burada $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x_0; x - x_0) = 0$ özelliği sağlanır. $\mathbf{H}(x_0)$ matrisi, *Hessian matris* olarak adlandırılır ve ikinci mertebeden kısmi türevleri içerir: $f_{ij}(x_0) = \partial^2 f(x_0) / \partial x_i \partial x_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\mathbf{H}(x_0) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_0) & f_{12}(x_0) & \dots & f_{1n}(x_0) \\ f_{21}(x_0) & f_{22}(x_0) & \dots & f_{2n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x_0) & f_{n2}(x_0) & \dots & f_{nn}(x_0) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Teorem 2.25

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ açık, konveks bir küme ve $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ X kümesinde diferansiyellenen fonksiyon olsun. O halde f 'in konveks olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{H}(x_0)$ Hessian matrisin X kümesindeki her noktada pozitif yarı-belirli olmasıdır.

Tanım 2.13

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesinde $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. $\min\{f(x): x \in X\}$ problemini göz önüne alalım. O halde $x \in X$ vektörüne *uygun (feasible) çözüm* denir.

$$\forall x \in X \text{ için } f(x_0) \leq f(x) \quad (2.31)$$

eşitsizliğini sağlayan $x_0 \in X$ vektörüne *global minimum* denir. $\exists \epsilon > 0$ olmak üzere

$$\forall x \in X \cap B(x_0, \epsilon) \text{ için } f(x_0) \leq f(x) \quad (2.32)$$

eşitsizliğini sağlayan $x_0 \in X$ vektörüne *lokal minimum* denir.

Benzer olarak $\exists \epsilon > 0$ olmak üzere

$$\forall x \in X \cap B(x_0, \epsilon) \text{ ve } x \neq x_0 \text{ için } f(x_0) < f(x) \quad (2.33)$$

eşitsizliğini sağlayan $x_0 \in X$ vektörüne *kesin lokal minimum* denir.

Teorem 2.26

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ konveks bir fonksiyon ve $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks bir küme olsun. O halde $x_0 \in X$ noktasının $\min\{f(x): x \in X\}$ probleminin global minimumu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ için $\langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq 0$ olacak şekilde f 'in x_0 noktasında x^ξ subgradientinin mevcut olmasıdır.

İspat

$\forall x \in X$ için $\langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq 0$ olacak şekilde $x^\xi \in \partial f(x_0)$ olsun. O halde

$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^\xi \rangle$, $\forall x \in X$ elde edilir. Buradan $\langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq 0$ koşulu ile

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq f(x_0), \quad \forall x \in X$$

olacağından x_0 'ın global minimum olduğu görülür. Tersine, x_0 problemin global minimum çözümü olsun. $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbf{R}^{n+1}$ olmak üzere aşağıdaki iki kümeyi oluşturalım:

$$\Lambda_1 = \{(x - x_0, y) : x \in \mathbf{R}^n, y > f(x) - f(x_0)\}; \quad \Lambda_2 = \{(x - x_0, y) : x \in X, y \leq 0\}$$

Λ_1 ve Λ_2 kümelerinin konveks olduğu açıktır. Ayrıca $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ 'dir. Aksi halde $(x - x_0, y) \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ olsun. O halde $0 \leq y \leq f(x) - f(x_0)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Ancak bu durum x_0 'ın global minimum olması ile çelişir. Kesişimleri boş olan iki konveks kümeyi ayıran hiperdüzlem mevcuttur; yani $0 \neq (\hat{x}, \mu) \in \mathbf{R}^{n+1}$ ve α skaler olmak üzere

$$\langle x - x_0, \hat{x} \rangle + \mu y \leq \alpha, \quad x \in \mathbf{R}^n, y > f(x) - f(x_0) \quad (2.34)$$

$$\langle x - x_0, \hat{x} \rangle + \mu y \geq \alpha, \quad x \in X, y \leq 0 \quad (2.35)$$

(2.35)'de $x = x_0$ ve $y = 0$ alınırsa $\alpha \leq 0$ olur. 2.34'te $x = x_0$ ve $y = \varepsilon > 0$ alınırsa $\mu \varepsilon \leq \alpha$ olur. O halde bu eşitsizlik $\forall \varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\mu \leq 0$ ve $\alpha \geq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\mu \leq 0$ ve $\alpha = 0$ elde edilir. Eğer $\mu = 0$ alınırsa $\langle x - x_0, \hat{x} \rangle \leq 0$, $\forall x \in X$ olur. Burada $x = x_0 + \hat{x}$ seçilirse $0 \geq \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|\hat{x}\|^2$ elde edilir. Bu eşitsizlik ancak $\hat{x} = 0$ için doğrudur, ancak bu durum $0 \neq (\hat{x}, \mu)$ olması ile çelişir. O halde $\mu < 0$ olmalıdır. Öyleyse (2.34) ve (2.35) denklemlerini $-\mu$ ile bölerek, $-\hat{x}/\mu$ yerine x^ξ vektörünü alırsak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$y \geq \langle x - x_0, x^\xi \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n, y > f(x) - f(x_0) \quad (2.36)$$

$$\langle x - x_0, x^\xi \rangle - y \geq 0, \quad x \in X, y \leq 0 \quad (2.37)$$

(2.37) denkleminde $y = 0$ alınırsa $\langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$ elde edilir. (2.37)'den

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^\xi \rangle, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

olduğu açıktır. O halde $\langle x - x_0, x^\xi \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$ olacak şekilde x^ξ vektörü f 'in x_0 noktasındaki subgradientine eşittir (Bazaraa vd., 1993). ■

3. ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON TEORİSİNE GİRİŞ

Matematiksel ifade ile tek kriterli optimizasyon probleminin amacı bir amaç fonksiyonuna minimum veya maksimum değeri veren çözümü bulmaktır; ancak günümüzde karşılaştığımız problemler gelişen teknoloji ve çevresel şartlar gereği genellikle karmaşık bir doğaya sahiptir. Bu nedenle bu tür problemleri tek kriter ile karakterize edip optimal çözümünü bulmanın pek faydası olmayacaktır. Karmaşık problemler genellikle birbiri ile çelişen ve kıyaslanamayan amaç fonksiyonları ile karakterize edilir; örneğin getiri, risk, kar, maliyet, zaman, performans vs...(Steuer, 1986).

Çok kriterli optimizasyon probleminde bir çözümün tüm kriterlere göre en iyi olması nadir rastlanan bir olaydır. Eğer amaç fonksiyonları birbirleri ile çelişmiyorsa, tüm amaç fonksiyonlarını optimum yapan tek bir çözüm bulunabilir. Bu tür çözümler ideal çözüm olarak adlandırılır. Ancak genellikle amaç fonksiyonları birbirleri ile çeliştiğinden ve kıyaslanamaz olduğundan tek en iyi çözümden bahsetmek mümkün değildir. Genellikle bir tek çözüm yerine çözüm kümesinden bahsedilir. Bu çözümlere Pareto (veya etkin) çözüm denilmektedir (Miettinen, 1999; Collete vd., 2003).

Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas problemi, etkin olmayan çözümleri çözüm kümesinden eleyerek etkin olan iyi çözümlere ulaşmayı amaçlamaktır. Pareto optimal çözümler bulunduktan sonra bu çözümler arasından en iyi kararı seçmek genellikle karar vericinin kişisel tercihlerine bağlıdır. Bu durumda karar vericinin kararlarını modellemek için iki teori söz konusudur:

- i) Çoklu özellik için fayda teorisi (multi-attribute utility theory)
- ii) Çok kriterli karar yardım teorisi (multicriteria decision aid theory)

(Tabucannon, 1988; Collete vd., 2003).

Buradan görüldüğü üzere çok kriterli optimizasyon ile çok kriterli karar analizi birbirini tamamlayan iki alandır. Bu tezin esas amaçlarından biri çok kriterli optimizasyon teorisini incelemektir.

Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas amaçlarından biri optimal çözümlerin varlığı hakkında koşullar bulmaktır.

Gasimov (1992), çalışmasında konveks kümelerin seviye kümeleri yardımı ile lineer olmayan ayırma teoremi geliştirerek asıl minimal noktalar için gerek koşul bulmuştur. Bu çalışmada ise Gasimov'un ispatlamış olduğu teorem geliştirilerek noktayı kümeden ayıran seviye kümesini veren fonksiyonun recessive fonksiyonu ile uzayda sıralama sağlayan koni arasında bir ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması durumunda verilen noktanın asıl minimal nokta olduğunu gösteren bir teorem ispatlanmıştır.

Tanım 3.1

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesinde $f_1(x), \dots, f_k(x)$ fonksiyonları verilmek üzere

$$\min_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad (3.1)$$

problemi *çok kriterli (çok amaçlı veya vektör) optimizasyon problemi* olarak adlandırılır.

Burada $x \in \mathbf{R}^n$ *karar değişken vektörü* olmak üzere X *uygun küme*'sine ait karar vektörü *uygun karar vektörü* olarak adlandırılır. $\mathbf{R}^n$ *karar değişken uzayı*, $\mathbf{R}^k$ *amaç uzayı* ve $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 2$ *amaç fonksiyonları*'dır. X uygun kümesinin $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ eşleştirmesi altındaki görüntüsüne *uygun amaç kümesi* denir ve $Y = f(X)$ ile gösterilir. Y 'nin elemanları ise *uygun amaç vektörü* olarak adlandırılır ve $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$ ile gösterilir (Miettinen, 1999; Ehrgott, 2000).

(3.1) probleminin minimumunun bulunması demek amaç fonksiyonlarının eş anlı olarak minimize edilmesi anlamına gelir. Eğer amaç fonksiyonları birbirleri ile çelişmiyorsa, tüm amaç fonksiyonlarını optimum yapan tek bir çözüm bulunabilir. Ancak genellikle amaç fonksiyonları birbirleri ile çeliştiğinden ve kıyaslanamaz olduğundan tek en iyi çözümden bahsetmek mümkün değildir (Miettinen, 1999).

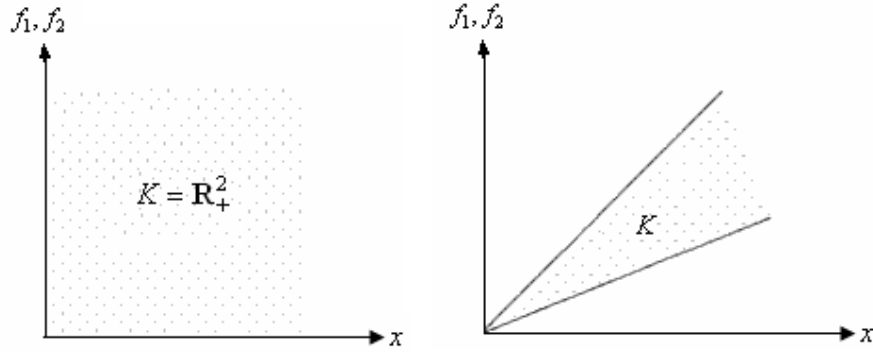
Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas problemi, optimal çözümlerin varlığını ve özelliklerini incelemek, bu çözümler için gerek ve yeter koşullar bulmaktır. Tek kriterli optimizasyon problemlerinin amacı karar değişken uzayını incelemek iken çok kriterli optimizasyon problemlerinde amaç uzayı ile ilgilenilir. Amaç fonksiyonlarının birbiri ile çelişmesi ve ölçülememesi özelliklerinden dolayı amaç uzayında genel sıralama bağıntısı yerine kısmi sıralama bağıntısından bahsedilir. Bundan dolayı optimallik kavramları amaç uzayında verilen kısmi sıralama bağıntısı ile yakından ilintilidir (Miettinen, 1999; Giorgi vd., 2004). Optimallik kavramlarını incelemekten önce sıralama ile ilişkili kavramlar açıklanacaktır.

3.1 Koniler

Tanım 3.2

$K \subset \mathbf{R}^n$ boş kümeden farklı bir küme olsun. Eğer $\forall x \in K$ ve $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ sağlanıyor ise K 'ya *koni* denir. $K \subset \mathbf{R}^n$ konisi için

- i. $K \neq 0$ ve $K \neq \mathbf{R}^n$ ise K aşık olmayan (nontrivial) konidir.
- ii. $\forall x_1, x_2 \in K$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$ ise K konisi konvektir.
- iii. $\forall x \in K, x \neq 0$ için $-x \notin K$ ise yani $K \cap (-K) \subset \{0\}$ ise K konisi sivri uçludur (pointed).



Şekil 3.1 Konilere örnekler (Ehrgott, 2000).

Tanım 3.3

$K \subset \mathbf{R}^n$ boş kümeden farklı bir küme olsun.

$$K' = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\} \quad (3.2)$$

kümesine K 'nin eşlenik konisi denir.

$K = \{0\}$ için $K' = \mathbf{R}^n$, $K = \mathbf{R}^n$ için $K' = \{0\}$, $K = \mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}$ için $K' = -K$ 'dir.

Tanım 3.4

$K \subset \mathbf{R}^n$ bir koni ve K' onun eşleniği olsun.

$$K'' = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \forall y \in K'\} \quad (3.3)$$

kümesine K 'nin ikinci eşlenik konisi denir.

Yardımcı Teorem 3.1

$K \subset \mathbf{R}^n$ bir koni olmak üzere, K' her zaman kapalı konveks konidir.

İspat

$K' = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için bir $y_n \in K'$

dizisini göz önüne alalım. $n \rightarrow \infty$ için $y_n \rightarrow y_0$ kabul edip $y_0 \in K'$

$y_n \in K' \Rightarrow y_n^T x \leq 0, \forall x \in K$ olup buradan limite geçerse

$$\Rightarrow y_0^T x \leq 0, \forall x \in K$$

$$\Rightarrow y_0 \in K'$$

O halde K' kapalıdır. Şimdi konveksliğini gösterelim. $\forall y_1, y_2 \in K', \forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in K'$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, x \rangle = \lambda \langle y_1, x \rangle + (1-\lambda) \langle y_2, x \rangle \text{ olup } y_1, y_2 \in K' \Rightarrow \langle y_1, x \rangle \leq 0, \langle y_2, x \rangle \leq 0$$

olacağından $\langle \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, x \rangle \leq 0$ olduğu görülür, yani K' konvektir. ■

Teorem 3.1

$K \neq \emptyset$ kapalı konveks bir koni ise $K = K''$ 'dir.

İspat

$K \subset K''$ ve $K'' \subset K$ olduğunu göstermeliyiz:

$\forall x \in K$ için $\langle y, x \rangle \leq 0$ şartını sağlayan $y \in K'$ vardır ve $\forall y \in K'$ için $\langle x, y \rangle \leq 0$ olacak şekilde $x \in K''$ vardır. O halde $K \subset K''$ 'dir.

Tersine $K'' \not\subset K$ olduğunu kabul edelim. $x \in K''$ ve $x \notin K$ olsun. K kapalı konveks bir küme olduğundan x noktası ile K konisini sıfırdan farklı bir p vektörü ve bir α skaleri için aşağıdaki şekilde ayırabiliriz:

$$\langle p, y \rangle \leq \alpha, \forall y \in K \text{ ve } \langle p, x \rangle > \alpha$$

Burada $y=0 \in K$ olduğundan $\alpha \geq 0$ elde edilir ve dolayısıyla $p^T x > \alpha \geq 0 \Rightarrow p^T x > 0$ 'dır.

$p \in K^*$ olup $\forall y \in K$ için $p^T y \leq 0$ sağlanır. Aksi halde ayırma teoremi sonucuna göre $\langle p, y \rangle \leq \alpha, \forall y \in K$ sağlanmayabilir. Çünkü bazı $\bar{y} \in K$ için $p^T \bar{y} > 0$ olacaktır ki bu durum ayırma teoremi sonucuna göre elde edilen $\langle p, y \rangle \leq \alpha, \forall y \in K$ gerçeğini sağlamaz. $x \in K''$ kabulünden dolayı $\forall y \in K'$ için $\langle x, y \rangle \leq 0$ olmalıdır. $p \in K'$ olduğundan $p^T x \leq 0$ olur ki bu durum ayırma teoremi sonucu olan $p^T x > 0$ ile çelişir. O halde $x \in K$ olmalıdır. $K'' \subset K$ olup her iki kapsamadan dolayı $K = K''$ ispat edilir (Bazaraa vd., 1993). ■

Tanım 3.4

$K \subset \mathbf{R}^n$ bir koni ve $X \subset \mathbf{R}^n$ olmak üzere eğer

- i. $X + K$ konveks ise X kümesine K -konveks,
- ii. $X + \text{cl}K$ kapalı ise X kümesine K -kapalı,
- iii. $X \subset z + K$, $\exists z \in \mathbf{R}^n$ ise X kümesine K -sınırlı,
- iv. $\forall x \in X$ için $(x - \text{cl}K) \cap X$ kompakt ise X kümesine K -kompakt denir (Tanino ve Sawaragi., 1980) .

Özellik 3.1

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul X 'in $\{0\} -$ konveks olmasıdır.

Tanım 3.5

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi verilsin.

$$0^+ X = \{z \in \mathbf{R}^n : x + \lambda z \in X, \forall x \in X, \lambda > 0\} \quad (3.4)$$

kümesi X 'in *recessive konisi* olarak adlandırılır.

Sawaragi ve diğerleri (1985) recessive koni kavramına dayanarak konveks kümelerin karakterizasyonu için alternatif sunmuşlardır:

Özellik 3.2

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kapalı konveks kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $0^+ X = \{0\}$

olmasıdır. Ek olarak, Eğer X kümesi K -sınırlı ise o halde

$$0^+ \cap (-\text{cl}K) = \{0\} \quad (3.5)$$

Özellik 3.3

$K \subset \mathbf{R}^n$ sivri uçlu, kapalı, konveks bir koni olsun. $X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesinin K -kompakt olması için gerek ve yeter koşul K -kapalı ve K -sınırlı olmasıdır.

Tanım 3.6

$X \subset \mathbf{R}^n$ keyfi küme olsun. Aşağıda verilen kümeler

$$K^* = \{d \in \mathbf{R}^n : \langle c, d \rangle \geq 0, \forall c \in K\} \quad (3.6)$$

$$K^\# = \{d \in \mathbf{R}^n : \langle c, d \rangle > 0, \forall c \in K - \{0\}\} \quad (3.7)$$

Kümeleri sırası ile K 'nın *pozitif dual* ve *kesin-dual konisi* (veya K^* 'ın *quasi-içi*) olarak

adlandırılır. Eğer $K^* = K$ ise K 'ya *self-dual* denir.

Dual ve kesin dual koniler sırasıyla kapalı konveks ve konveks konilerdir. Ayrıca kesin dual koni orijini içermez ve $K_s^* \cup \{0\}$ kapalı konveks konidir.

Özellik 3.4

$K, K_1, K_2 \subset \mathbf{R}^n$ keyfi kümeleri verilsin. Eğer $K_1 \subseteq K_2$ ise $K_2^* \subseteq K_1^*$ ve ek olarak $(\text{int}K)^* = K^* = (\text{cl}K)^*$ ve $(\text{int}K)_s^* = K^* - \{0\}$.

3.2 İkili Bağntı ve Kısmi Sıralama

Bu bölümde keyfi X kümesi üzerinde tanımlanmış olan ikili bağntı kavramı ve çeşitli özellikleri incelenecek ve uzayda verilen kısmi sıralama bağntısı ile koni arasındaki ilişki gösterilecektir.

Tanım 3.7

X keyfi kümesi üzerinde tanımlanan ikili bağntı $\mathfrak{R}$, $X \times X$ kartezyen çarpımının bir alt kümesi olup aşağıdaki özelliklere göre farklı isimler ile adlandırılır:

- i. Eğer $\forall x \in X$ için $(x, x) \in \mathfrak{R}$ ise *yansımali*,
- ii. Eğer $\forall x \in X$ için $(x, x) \notin \mathfrak{R}$ ise *yansımaz*,
- iii. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (x_2, x_1) \in \mathfrak{R}$ ise *simetrik*,
- iv. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x_2, x_1) \notin \mathfrak{R}$ ise *asimetrik*,
- v. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için (x_1, x_2) ve $(x_2, x_1) \in \mathfrak{R} \Rightarrow x_1 = x_2$ ise *anti simetrik*,
- vi. Eğer $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için (x_1, x_2) ve $(x_2, x_3) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x_1, x_3) \in \mathfrak{R}$ ise *geçişmeli*,
- vii. Eğer $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için (x_1, x_2) ve $(x_2, x_3) \notin \mathfrak{R} \Rightarrow (x_1, x_3) \notin \mathfrak{R}$ ise *ters geçişmeli*,
- viii. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $(x_1, x_2) \notin \mathfrak{R}$ ve $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_2, x_1) \in \mathfrak{R}$ ise *zayıf bağlantılı*,
- ix. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}$ veya $(x_2, x_1) \in \mathfrak{R}$ ise *bağlantılı*,
- x. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $(x_1, x_2) \notin \mathfrak{R} \Rightarrow (x_2, x_1) \in \mathfrak{R}$ ise *(güçlü) bağlantılı veya tam* olarak adlandırılır.

İkili bağntının özellikleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur:

Özellik 3.5

$\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ bir X kümesi üzerinde tanımlı bağntı ilişkisi olsun. Eğer $\mathfrak{R}$

- i. asimetrik ise yansımazdır.
- ii. geçişmeli ve yansımaz ise asimetriktir.
- iii. ters geçişmeli ve asimetrik ise geçişmelidir.
- iv. geçişmeli, yansımaz ve zayıf bağlantılı ise ters geçişmelidir.

Şimdi ikili bağıntı tanımından hareketle sıralama kavramları açıklanacaktır. Sıralama için ikili bağıntı simgesi olarak $\Re$ yerine genellikle $\preceq$ kullanılır. $(x_1, x_2) \in \preceq$ ve $(x_1, x_2) \notin \preceq$ gösterimleri yerine kısaca $x_1 \preceq x_2$ ve $x_1 \not\preceq x_2$ simgeleri kullanılır.

Tanım 3.8

X kümesi üzerinde tanımlı $\preceq$ ikili bağıntısı

- i. yansımali, simetrik ve geçişmeli ise *denklik bağıntısı*,
- ii. yansımali ve geçişmeli ise *ön sıralama bağıntısı*,
- iii. yansımali, geçişmeli ve bağlantılı ise *tam ön sıralama bağıntısı*,
- iv. yansımali, geçişmeli ve anti simetrik ise *kısmi sıralama bağıntısı*,
- v. yansımaz ve geçişmeli ise *kesin kısmi sıralama bağıntısı*,
- vi. asimetrik ve ters geçişmeli ise *zayıf sıralama bağıntısı*
- vii. asimetrik, geçişmeli ve zayıf bağlantılı ise *tam sıralama bağıntısı*

olarak adlandırılır (Sawaragi vd., 1985; Ehrgott, 2000).

$\mathbf{R}^n$ 'de sık kullanılan ve bu çalışmada kullanılacak olan bazı sıralamalar çizelgede verilmiştir:

Çizelge 3.1 $\mathbf{R}^n$ 'de tanımlı Pareto sıralamalar.

$x \preceq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n :$	zayıf Pareto sıralama
$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, x \neq y, \forall i = 1, \dots, n :$	Pareto sıralama
$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i = 1, \dots, n :$	kesin Pareto sıralama

Şimdi ikili bağıntı ile koniler arasındaki ilişkileri veren sonuçlar ile özelliklere değinilecektir:

Tanım 3.9

$K \subset \mathbf{R}^n$ konisi verilsin. K konisi tarafından oluşturulan

$$\Re_K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : (y - x) \in K\} \quad (3.8)$$

ikili bağıntısı $\mathbf{R}^n$ üzerinde *koni bağıntısı* olarak adlandırılır.

Özellik 3.6

$K \subset \mathbf{R}^n$ bir koni ve $\Re_K$ koni bağıntısı olsun. O halde $\Re_K$ skaler ile çarpma ve toplama işlemleri uyumlu olup aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. yansımali $\Leftrightarrow 0 \in K$
- ii. geçişmeli $\Leftrightarrow K$ konveks
- iii. anti simetrik $\Leftrightarrow K$ sivri uçlu

Özel olarak, Tanım 3.8'den ve Özellik 3.6'dan sivri uçlu, konveks K konisi tarafından oluşturulan $\Re_K$ koni bağıntısının kısmi (kesin kısmi) sıralama bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul $0 \in K$ ($0 \notin K$) olmasıdır. Bu sebeple sivri uçlu, konveks koni *sıralama konisi* olarak ta adlandırılır ve izleyen şekildedir:

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in K \quad (3.9)$$

$$x \prec y \Leftrightarrow y - x \in K - \{0\} \quad (3.10)$$

Özellik 3.7

$X \subset \mathbf{R}^n$ üzerinde skaler çarpma ile uyumlu $\preceq$ sıralama bağıntısı tanımlansın. O halde

$$K_{\preceq} := \{y - x \in \mathbf{R}^n : x \preceq y\} \quad (3.11)$$

bir konidir. Bu durumda, eğer $\preceq$ bağıntısı toplama işlemi ile uyumlu ise

- i. $0 \in K_{\preceq} \Leftrightarrow \preceq$ yansımali
- ii. $K_{\preceq}$ konveks $\Leftrightarrow \preceq$ geçişmeli
- iii. $K_{\preceq}$ sivri uçlu $\Leftrightarrow \preceq$ anti simetrik.

Özel olarak, $\mathbf{R}^n$ 'de $\leq$ Pareto sıralama bağıntısı tanımlansın. O halde (4.11)'de tanımlanan bağıntı konisi sırası ile $\mathbf{R}^n$ 'in negatif olmayan, sıfırdan farklı ve pozitif bölgeleri elde edilir:

$$K_{\leq} = \{x \in \mathbf{R}^n : x \geq 0\} = \mathbf{R}_{\geq}^n \quad (3.12a)$$

$$K_{\leq} = \{x \in \mathbf{R}^n : x \geq 0\} = \mathbf{R}_{\geq}^n \quad (3.12b)$$

$$K_{<} = \{x \in \mathbf{R}^n : x > 0\} = \mathbf{R}_{>}^n \quad (3.12c)$$

Özellik 3.8

$x, y \in \mathbf{R}^n$ ve $K \subset \mathbf{R}^n$ aşıkır olmayan, konveks, sivri uçlu koni olmak üzere K konisine göre karar değışken uzayında Pareto sıralama bağıntısı şu şekilde tanımlanır:

$$x \succeq_K y \Leftrightarrow x - y \in K \quad (3.13a)$$

$$x \geq_K y \Leftrightarrow x - y \in K - \{0\} \quad (3.13b)$$

$$x >_K y \Leftrightarrow x - y \in \text{int } K \quad (3.13c)$$

(Ehrgott, 2000; Jahn, 2003; Giorgi vd., 2004).

Çok kriterli optimizasyon probleminin çözüm kümesi içerisinde yer alan bir çözümün iyi bir çözüm olabilmesi için diğer çözümler ile arasında baskınlık ilişkisi olmalıdır. Diğer çözümlere karşı baskın olan ancak kendilerine karşı baskın olmayan çözümler Pareto optimaldir. Ancak baskınlık tanımından hareketle, bir amaç fonksiyonunun bir değerine hangi şartlarda tercih edilebileceğini söylemek mümkün değildir. Bu eksikliğin giderilebilmesi için baskınlık kavramına dayanan ilişkiler ortaya çıkmıştır. (Collete vd., 2003). Bu çalışmada koniye göre baskınlık kavramı incelenecektir.

Tanım 3.10

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi üzerinde $\prec$ kesin sıralama bağıntısı tanımlansın. $\forall x \in X$ için

$$D(x) = \{d \in \mathbf{R}^n : x \prec x + d\} \quad (3.14)$$

kümesi *baskın küme* olarak adlandırılır. Eğer $x_1 \prec x_2$ ise x_1 vektörü x_2 vektörüne baskındır denir (Yu, 1974).

Özellik 3.9

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile uyumlu sıralama bağıntısı verilsin. O halde $\forall x \in X$ için

$$D(x) = \{d \in \mathbf{R}^n : 0 \prec d\} = K_{\prec} \quad (3.15)$$

$K_{\prec}$ orijini içermeyen sivri uçlu konveks bir konidir. Özellik, tersine sıradaki gibi yazılabilir:

Özellik 3.10

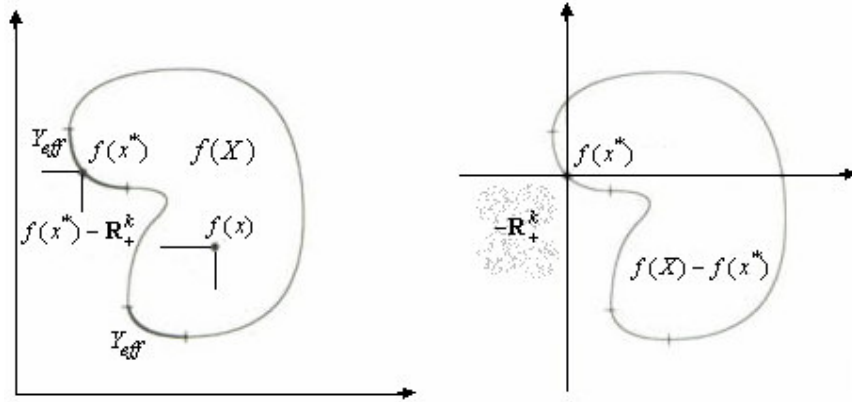
$K \subset \mathbf{R}^n$ sivri uçlu konveks koni olsun. Eğer $D(x) \subset \mathbf{R}^n$ üzerinde K konisi tarafından oluşturulan kesin kısmi sıralama bağıntısı tanımlı ise $\forall x \in X$ için $D(x) = K - \{0\}$ 'dir.

3.3 Pareto Optimal Çözümler

Çok kriterli optimizasyon teorisi alanındaki ilk çalışmalar 1881 yılında Edgeworth'un ordinal fayda tanımı ile ortaya atılmış ve daha sonra bu tanım 1896 yılında Pareto tarafından geliştirildiği için çok kriterli optimizasyon teorisinin optimal çözümleri Pareto ismi ile de anılmaktadır (Miettinen, 1999; Jahn, 2003). Pareto'nun 1906 yılında yapmış olduğu tanıma göre "herhangi bir kaynak tahsisinde bir kişinin refahı, ancak bir başka kişinin refahı azaltılarak artırılabilirse, bu duruma *Pareto optimali* denir" (Akyıldız, 2005).

Tanım 3.11

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi ve $x^* \in X$ verilsin. Eğer her $i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ ve en azından bir j indisi için $f_j(x) < f_j(x^*)$ eşitsizliklerini sağlayan $x \in X$ vektörü mevcut değil ise x^* vektörüne *Pareto minimum çözüm* denir. x^* Pareto minimum ise $f(x^*)$ değerine *etkin* denir. Tüm Pareto optimal çözümlerden oluşan küme X_{par} ile ve tüm $y = f(x^*)$ etkin değerlerinden oluşan küme Y_{eff} ile gösterilir.



Şekil 3.2 Pareto optimal çözümlerin geometrik gösterimi (Ehrgott, 2000).

Literatürde bazı yazarlar Pareto optimal çözüm yerine etkin, baskın olmayan veya adi olmayan çözüm kavramlarını kullanmaktadırlar. Yine literatürde Pareto optimal çözüm için verilen bazı tanımlar aşağıda verilmektedir: Eğer

1. $\forall x \in X$ için $f(x) - f(x^*) \in \mathbf{R}^k \setminus \{-\mathbf{R}_+^k \setminus \{0\}\}$ ise
2. $f(x) - f(x^*) \in -\mathbf{R}_+^k \setminus \{0\}$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise
3. $f(X) \cap (f(x^*) - \mathbf{R}_+^k) = \{f(x^*)\}$ ise
4. $f(x) \in f(x^*) - \mathbf{R}_+^k$ olacak şekilde $f(x) \in f(X) \setminus \{f(x^*)\}$ mevcut değil ise

x^* vektörüne Pareto optimal çözüm denir (Ehrgott, 2000). Benzer tanımlar y etkin değeri için de verilebilir.

Tanım 3.12

$x^* \in X$ karar vektörü $\delta > 0$ olacak şekilde $X \cap B(x^*, \delta)$ kümesinde Pareto optimal çözüm ise, x^* vektörüne *lokal Pareto optimal çözüm* denir.

Öncelikle $Y_{eff} = \{y \in Y : \nexists y' \in Y, y' < y\}$ etkin çözüm kümesinin özellikleri incelenecek ve varlık teoremi ispat edilecektir. Daha sonra f 'in özellikleri yardımı ile Pareto çözüm kümesi X_{par} hakkında sonuçlar elde edilecektir.

Yardımcı Teorem 3.2

$\emptyset \neq Y \subset \mathbf{R}^k$ olmak üzere $Y_{eff} = (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$.

İspat

$y \in (Y + \mathbf{R}_+^k) \Rightarrow y \in Y_{eff}$. $y \notin Y_{eff}$ olduğunu varsayalım. $y \in (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff} \Rightarrow y - y' \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olacak şekilde $y' \in (Y + \mathbf{R}_+^k)$ yoktur. $y \notin Y_{eff} \Rightarrow y - y' \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olacak şekilde $y' \in Y$ vardır.

İki olasılık söz konusudur:

i) $y \notin Y$ olsun. O halde $y = y' + d$ olacak şekilde $y' \in Y$ ve $0 \neq d \in \mathbf{R}_+^k$ vardır.

$y' = y' + 0 \in (Y + \mathbf{R}_+^k)$ olduğundan $y \notin (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$ çelişkisi bulunur.

ii) $y \in Y$ olsun. O halde $y' < y$ olacak şekilde $y' \in Y$ vardır. $d = y' - y \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olsun.

Öyleyse $y = y' + d$ ve $y \notin (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$ varsayım ile çelişir.

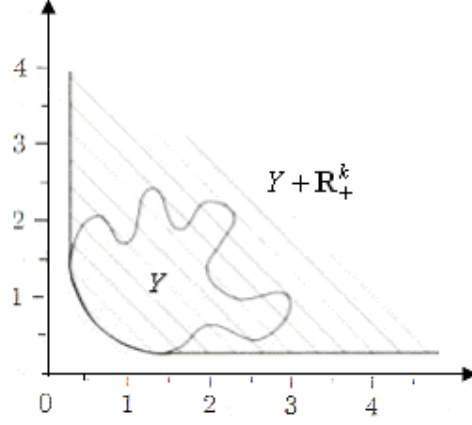
O halde her iki durumda da $y \in Y_{eff}$ 'tir. Şimdi ters kapsama gösterilmelidir.

$y \in Y_{eff} \Rightarrow y \in (Y + \mathbf{R}_+^k)$. $y \notin (Y + \mathbf{R}_+^k)$ olduğunu varsayalım. O halde $y - y' = d' \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olacak şekilde bazı $y' \in (Y + \mathbf{R}_+^k)$ vardır; yani $y'' \in Y, d'' \in \mathbf{R}_+^k$ olmak üzere $y' = y'' + d''$

şeklinde yazılabilir. Öyleyse $y = y' + d' = y'' + (d' + d'') = y'' + d$; $d = (d' + d'') \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$

yazılabilir. O halde $y \notin Y_{eff}$ çelişkisi elde edileceğinden $y \in (Y + \mathbf{R}_+^k)$ 'dır. Her iki kapsamadan

dolayı $Y_{eff} = (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$. Bu durum geometrik olarak Şekil 3.3'te gösterilmektedir. ■



Şekil 3.3 Y ve $(Y + \mathbf{R}_+^k)$ kümelerinin etkin noktaları (Ehrgott, 2000).

Teorem 3.2 [Contact Theorem]

$Y \subset \mathbf{R}^k$ kümesi ve $f(x^*) \in Y$ verilsin. $f(x^*)$ 'in Pareto optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul $Y \cap \gamma(f(x^*)) = \{f(x^*)\}$; $\gamma(f(x^*)) = \{f(x) \in \mathbf{R}^k : f(x) = f(x^*) + \gamma, \gamma \leq 0\}$ olmasıdır.

Vincent ve Grantham'ın (1981) ispatlamış olduğu teoreme göre, tüm Pareto optimal çözümler Y_{eff} kümesinin sınırında yer almaktadır.

Yardımcı Teorem 3.3

$$Y_{eff} \subset \partial Y.$$

İspat

$y \in Y_{eff} \Rightarrow y \in \partial Y$. $y \notin \partial Y$ olduğunu varsayalım. O halde y noktasının bir ε komşuluğu $B(y; \varepsilon) := y + B(0; \varepsilon) \subset Y$ olacak şekilde $y \in \text{int} Y$ vardır. $0 \neq d \in \mathbf{R}_+^k$ olsun. O halde $\lambda d \in U(0, \varepsilon)$ olacak şekilde $\lambda > 0$ seçilebilir. Buradan $\lambda d \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olmak üzere $y - \lambda d \in Y$ elde edilir; yani $y \notin Y_{eff}$ olup çelişki bulunur. ■

Yardımcı Teorem 3.2 ve 3.3'ün yardımı ile Y_{eff} 'in boş olması için aşağıdaki koşul elde edilir:

Sonuç 3.1

Eğer Y veya $(Y + \mathbf{R}_+^k)$ açık küme ise $Y_{eff} = \emptyset$.

Yardımcı Teorem 3.4

$$(Y_1 + Y_2)_{eff} \subset Y_{1_{eff}} + Y_{2_{eff}}.$$

İspat

$y \in (Y_1 + Y_2)_{eff}$ olsun. O halde bazı $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ için $y = y_1 + y_2$ 'dir. $y_1 \notin Y_{1_{eff}}$ olduğunu varsayalım; yani $y_1 - y' = d \in \mathbf{R}_+^k - \{0\}$ olacak şekilde bazı $y' \in Y_1$ vardır. O halde $y_1 = y' + d \Rightarrow y = y' + y_2 + d$ olup $y' + y_2 \in Y_1 + Y_2$ olduğundan $y \notin (Y_1 + Y_2)_{eff}$ çelişkisi bulunur. Benzer olarak $y_2 \in Y_{2_{eff}}$ bulunur; yani $y = y_1 + y_2 \in Y_{1_{eff}} + Y_{2_{eff}}$. ■

Etkin küme hakkında varlık teoremini ispatlamadan önce aşağıdaki tanıma ve yardımcı teoreme ihtiyaç vardır:

Tanım 3.13

$(X, \leq)$ önsıralı bir küme olsun; yani $\leq$ yansıma ve geçişme özelliklerine sahip olsun. Eğer $(X, \leq)$ kümesinin her tam sıralı alt kümesi alt sınıra sahip ise (yani $\emptyset \neq S \subset X$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\bar{x} \leq x$ sağlanıyor ise $\bar{x} \in X$ elemanı S 'nin alt sınırıdır.) $(X, \leq)$ kümesi *tümevarımsal sıralı* olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.5 [Zorn's Lemma]

$(X, \leq)$ boş kümeden farklı, önsıralı küme olsun. Eğer $(X, \leq)$ tümevarımsal sıralı küme ise o halde X kümesi en az bir minimal elemana sahiptir: $x \in X, x \leq \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \leq x$ sağlanıyor ise $\bar{x} \in X$ minimal elemandır.

Teorem 3.3 [Borwein, 1983]

$\emptyset \neq Y$ ve $Y^0 = \{y \in Y : y \leq y^0\} = (y^0 - \mathbf{R}_+^k) \cap Y$ kompakt kümesi olacak şekilde $y^0 \in Y$ olsun; yani Y kümesi, Y^0 kompakt kesitini içersin. O halde Y_{eff} boş kümeden farklıdır.

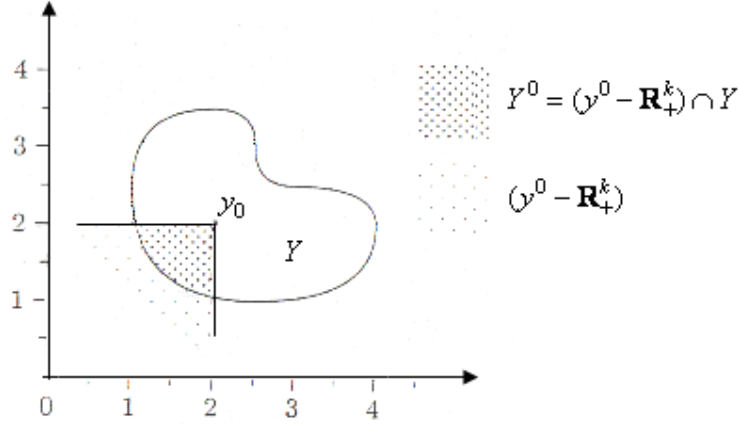
İspat

Y^0 kompakt kesit ve A bazı indeks kümesi olmak üzere $Y^\alpha = \{y^\alpha, \alpha \in A\}$ kümesi Y^0 'da bir zincir (tam sıralı alt küme) olsun. A indeks kümesinin tüm sonlu alt kümeleri B kümesi ile tanımlansın: $B := \{a \subset A : |a| < \infty\}$. Her $a \in B$ sonlu olduğu için ve Y^α, Y^0 kompakt

kümesinde bir zincir olduğundan Weierstrass Teoremi'ne göre $y^a = \inf \{y^\alpha : \alpha \in a\}$ olmak üzere $y^a \in Y^0$ mevcuttur. Şimdi $\alpha \in A$ olmak üzere tüm kümeleri göz önüne alalım: $Y_\alpha := (y^\alpha - \mathbf{R}_+^k) \cap Y^0$, $\alpha \in A$. $Y_\alpha \subset Y^0$ olduğu açıktır ve Y_α , Y^0 kompakt kümesinin kapalı alt kümesi olduğundan kompaktır. Eğer $a \in B$ ise yani sonlu ise $\bigcap_{\alpha \in a} Y_\alpha \neq \emptyset$. Sonuçta Y^0 'ın kompaktlığından $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$ yani $y' \in \bigcap_{\alpha \in A} (y^\alpha - \mathbf{R}_+^k) \cap Y^0$ mevcuttur. O halde kısmi sıralamaya göre bunun anlamı $\forall \alpha \in A$ için $y' \leq y^\alpha$ demektir veya diğer bir deyişle $y' \in Y^0$, $\{y^\alpha, \alpha \in A\}$ zincirinin bir alt sınırındır. Öyleyse Y^0 tümevarımsal sıralıdır. Zorn's Lemma gereği $y^* \in Y^0$ minimal elemanı vardır. $y^* \notin Y_{eff}$ kabul edilsin. O halde $\bar{y} < y^*$ olacak şekilde $\bar{y} \in Y$ vardır:

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in (y^* - \mathbf{R}_+^k) \cap Y \subset ((y^0 - \mathbf{R}_+^k) \cap Y - \mathbf{R}_+^k) \cap Y \subset (y^0 - \mathbf{R}_+^k) \cap Y - \mathbf{R}_+^k \\ &= Y^0 - (y^0 - \mathbf{R}_+^k) \cap Y - \mathbf{R}_+^k \end{aligned}$$

$y^* \in Y^0$ elemanının minimal olması ile çelişir. O halde $y^* \in Y_{eff}$ yani $Y_{eff} \neq \emptyset$. ■



Şekil 3.4 Y 'nin kompakt kesiti (Ehrgott, 2000).

Tanım 3.14

Eğer $Y \subset \mathbf{R}^k$ kümesinin $\{(y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)^c : y^\alpha \in Y, \alpha \in A\}$ şeklindeki her açık örtüsü sonlu alt örtüye sahip ise Y kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -yarı kompakt olarak adlandırılır.

Burada $(y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)^c$, $(y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)$ 'nın tümleyenini göstermektedir: $\mathbf{R}^k \setminus (y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)$.

Teorem 3.4 [Hartley, 1978]

Eğer $\emptyset \neq Y \subset \mathbf{R}^k$ kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -kompakt ise o halde $Y_{eff} \neq \emptyset$.

Yardımcı Teorem 3.6

Eğer Y kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -kompakt ise $\mathbf{R}_+^k$ -yarı kompaktır.

Sonuç 3.2 [Corley, 1980]

Eğer $\emptyset \neq Y$ kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -yarı kompakt ise o halde $Y_{eff} \neq \emptyset$.

Tanım 3.15

$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall y \in \mathbf{R}^k$ için $f^{-1}(y - \mathbf{R}_+^k) = \{x \in \mathbf{R}^n : y - f(x) \in \mathbf{R}_+^k\}$ kapalı ise f e $\mathbf{R}_+^k$ -yarı sürekli fonksiyon denir.

Yardımcı Teorem 3.7

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kompakt küme ve $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ fonksiyonu $\mathbf{R}_+^k$ -yarı sürekli olsun. O halde $Y = f(X)$ kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -yarı kompaktır.

İspat

Y 'nin $\{(y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)^c : y^\alpha \in Y, \alpha \in A\}$ şeklindeki bir açık örtüsünü göz önüne alalım. f $\mathbf{R}_+^k$ -yarı sürekli olduğundan $\{f^{-1}((y^\alpha - \mathbf{R}_+^k)^c) : y^\alpha \in Y, \alpha \in A\}$ kümesi X 'in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğu için bu açık örtünün sonlu alt örtüsü vardır. Bu alt örtünün görüntüsü Y 'nin sonlu alt örtüsüdür. Bu yüzden $Y = f(X)$ kümesi $\mathbf{R}_+^k$ -yarı kompaktır. ■

Yukarıda Y_{eff} kümesinin boş olmaması için bazı tanım ve teoremlere yer verildi. Literatür incelendiğinde ise diğer yazarlar, izdüşüm konisi (Benson, 1978) veya recessive konisi (Borwein, 1977; Bitran vd., 1979; Henig, 1982) kavramlarını kullanarak koşullar bulmuşlardır. Bu ve diğer sonuçların karşılaştırmalı araştırması için Sonntag ve Zalinescu'nun (2000) çalışmasına bakılabilir. Yukarıdaki sonuçlara ek olarak Naccache (1978) ile Bitran ve Magnanti (1979) Pareto kümenin bağlantılı olmasını; Tanino ve Sawaragi (1978, 1980) ise Pareto kümenin stabil özelliğini incelemişlerdir.

Şimdi X_{par} Pareto optimal çözüm kümesi hakkında varlık teoremi verilebilir:

Teorem 3.5

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kompakt küme ve f , $\mathbf{R}_+^k$ -yarı sürekli olsun. O halde $X_{par} \neq \emptyset$.

İspat

Teorem 3.3 ve Yardımcı Teorem 3.7 yardımı ile teoremin ispatı kolaylıkla gösterilebilir. ■

Pareto optimal çözümler ve etkin çözümler için verilen tanım ve teoremler, $\mathbf{R}_+^k$ yerine konveks, aşikar olmayan, sivri uçlu, kapalı K konisine göre verilebilir.

3.3.1 Zayıf ve Kesin Pareto Optimal Çözümler

$\mathbf{R}^k$ amaç uzayında verilen kısmi sıralama bağıntısına göre Pareto optimal ve etkin nokta tanımları verildi. Eğer kısmi sıralama yerine zayıf veya kesin kısmi sıralama bağıntısı kullanılırsa kesin ve zayıf Pareto optimal ile etkin noktaların tanımları elde edilir:

Tanım 3.16

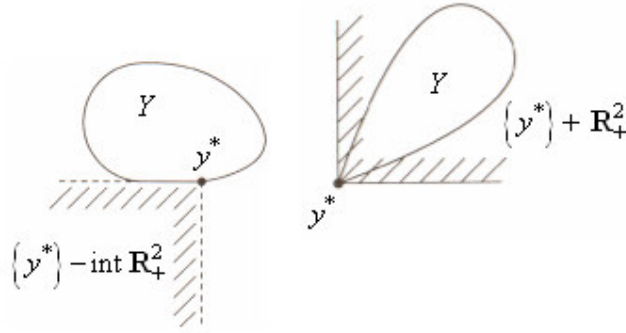
$X \subset \mathbf{R}^n$ ve $x^* \in X$ verilsin.

- Eğer $f(x) < f(x^*)$ yani her $i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise $x^* \in X$ vektörüne *zayıf Pareto optimal çözüm* denir.
- Eğer $f(x) \leq f(x^*)$ yani her $i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ olacak şekilde $x \in X - \{x^*\}$ mevcut değil ise $x^* \in X$ vektörüne *kesin Pareto optimal çözüm* denir.

Zayıf (kesin) çözümler için Pareto optimal ve etkin kümeler sırası X_{w-par} (X_{s-par}) ve Y_{w-eff} , ile gösterilir. Tanımdan da görüldüğü üzere Y_{eff} ve X_{par} kümeleri için aşağıdaki ilişki söz konusudur:

$$Y_{eff} \subset Y_{w-eff} \quad (3.16a)$$

$$X_{s-par} \subset X_{par} \subset X_{w-par} \quad (3.16b)$$



Şekil 3.5 Zayıf ve kesin pareto minimal noktalar (Jahn, 2003).

Pareto optimallik/etkinlik kavramlarında olduğu gibi zayıf Pareto optimallik/etkinlik için de denk tanımlar bulunmaktadır:

- i. $y^* - y \in \text{int } \mathbf{R}_+^k$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcut değil ise,
- ii. $(y^* - \text{int } \mathbf{R}_+^k) \cap Y = \emptyset$ ise

$y^* \in Y_{w\text{-eff}}$ 'tir.

(3.16a)'dan görüldüğü üzere Y_{eff} için elde edilen tüm varlık sonuçlarının $Y_{w\text{-eff}}$ için de sağlandığı açıktır. Ayrıca $Y_{\text{eff}} = \emptyset$ olsa bile $Y_{w\text{-eff}} \neq \emptyset$ olabilir.

Örnek 3.1

$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y_1 < 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$ olsun. Y_{eff} ve $Y_{w\text{-eff}}$ kümelerini inceleyelim:

$Y_{\text{eff}} = \emptyset$ iken $Y_{w\text{-eff}} = (0, 1) \times \{0\} = \{y \in Y : 0 < y_1 < y_2, y_2 = 0\}$.

Şimdi $Y_{w\text{-eff}}$ için varlık koşulları incelenecektir:

Teorem 3.6

$\emptyset \neq Y \subset \mathbf{R}^k$ kompakt olsun. O halde $Y_{w\text{-eff}} \neq \emptyset$.

İspat

$\varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu $\varphi(y) = y_1 + \dots + y_k$ şeklinde olsun. Y kompakt küme ve φ sürekli fonksiyon olduğundan φ 'nin Y kümesinde global minimum noktası vardır:
 $\varphi(y^*) = \min \{\varphi(y) : y \in Y\}$

O halde y^* noktası Y kümesinin Pareto minimum noktasıdır. Çünkü aksi durumda $\hat{y} < y^*$ olacak şekilde $\hat{y} \in Y$ noktası bulunabilirdi. Ancak bu durumda $\varphi(\hat{y}) < \varphi(y^*)$ olacağından bu durum y^* noktasının φ fonksiyonunun global minimum noktası olması ile çelişir. ■

Teorem 3.7

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ kompakt olsun. $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ sürekli olsun. O halde $X_{w\text{-par}} \neq \emptyset$.

İspat

X kompakt olduğundan $Y = f(X)$ kompakt olur. O halde Teorem 3.6'dan ispat elde edilir.

Zayıf Pareto optimal çözümlerin karakterizasyonu ile ilgili teorem için aşağıdaki tanımlar bilinmelidir:

Tanım 3.17

$K \subset \mathbf{R}^n$ aşıkır olmayan, konveks, sivri uçlu koni olmak üzere K konisine göre Pareto sıralama bağıntısı ve $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $x_1 > x_2$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ vektörleri için $g(x_1) > g(x_2)$ ise g fonksiyonuna *K-monoton fonksiyon*; $x_1 \geq x_2, x_1 \neq x_2$ için $g(x_1) > g(x_2)$ sağlanıyorsa g fonksiyonuna *kesin K-monoton fonksiyon* denir.

$G_0, \mathbf{R}^n$ 'de verilen konveks, K -monoton, sürekli ve $g(0)=0$ koşulunu sağlayan tüm fonksiyonların kümesi olsun. K' eşlenik koni olmak üzere sıfırdan farklı $\forall x' \in K'$ için $x \rightarrow \langle x', x \rangle$ fonksiyonları G_0 kümesinin elemanlarıdır. G_{0S} ise G_0 'daki kesin K -monoton fonksiyonlar kümesi olsun.

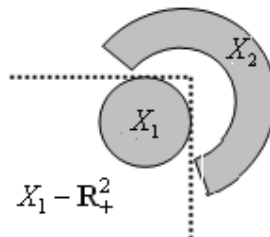
Sıradaki teorem biri konveks diğeri konveks olmayan ve klasik ayırma teoremi ile ayrılamayan kümelerin G_0 fonksiyonlar kümesinin bir elemanı ile ayırmanın mümkün olduğunu göstermektedir:

Tanım 3.18

$X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ boş olmayan kümeler olsun. Eğer $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu için $g(x_1) \leq g(x_2) \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$ ise g fonksiyonu X_1 ve X_2 kümelerini ayırıyor denir.

Teorem 3.8 [Gasimov, 1992]

$K \subset \mathbf{R}^n$ konveks, kapalı, sivri uçlu konisi verilsin ve $\text{int}K \neq \emptyset$ olsun. $X_1, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ boş olmayan kümeler olmak üzere eğer $X_1 - K$ konveks bir küme ve $\text{int}(X_1 - K) \cap X_2 = \emptyset$ ise o halde $X_1 - K$ ve X_2 kümelerini ayıran bir $g \in G_0$ fonksiyonu mevcuttur.



Şekil 3.6 Hiperdüzlem ile ayrılamayan kümeler (Azimli ve Kemalbay, 2007).

Teorem 3.9 [Gasimov, 1992]

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi verilsin. $x_0 \in X$ vektörünün zayıf Pareto minimal olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ için $g(x_0) \leq g(x)$ olacak şekilde bazı $g \in G_0$ olmasıdır.

Zayıf Pareto optimal çözümler teorik olarak önemli olmalarına karşın pratikte pek fayda sağlamamaktadırlar. Bununla birlikte zayıf Pareto optimal çözümleri hesaplamak Pareto optimal çözümleri hesaplamaktan daha kolay olduğu için teknik açıdan faydalı olduğu söylenebilir. Şimdi Pareto optimal çözümlerden daha kısıtlayıcı olan asıl Pareto optimal çözümler incelenecektir.

3.3.2 Bir Çözümünden Diğer Çözümüne Geçiş

Ödünleşim (Trade off), kelimesinin sözlük anlamı bir şeyi elde etmek için başka bir şeyden fedakârlık etmektir. Bir çözümün Pareto optimal olabilmesi için amaç fonksiyonundaki iyileştirmenin başka bir amaç fonksiyonunda kötüleşmeye yol açması gerekmektedir. Bir Pareto optimal çözümden diğerine geçmek için ödünleşim gereklidir. Ödünleşim, bazı amaç fonksiyonlarının değerinde azalma meydana geldiği zaman bir amaç fonksiyonunun değerinde meydana gelen artış ile ilgili olarak amaç fonksiyonlarının değerindeki değişim oranını yansıtır.

Tanım 3.19 [Chankong ve Haimes, 1983]

$X \subset \mathbf{R}^n$ ve $x_1, x_2 \in X$ karar vektörleri olmak üzere bunlara karşılık gelen amaç vektörleri $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ olsun. f_i ve f_j fonksiyonlarını içerecek şekilde x_1 ve x_2 arasındaki değişim oranına *ödünleşim* denir ve

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(x_1, x_2) = \frac{f_i(x_1) - f_i(x_2)}{f_j(x_1) - f_j(x_2)}, \quad f_j(x_1) - f_j(x_2) \neq 0 \quad (3.17)$$

ile gösterilir.

x_1 ile x_2 arasında, f_i ve f_j 'yi kapsayacak şekilde eğer her $l=1, \dots, k$ ve $l \neq i, j$ için $f_l(x_1) = f_l(x_2)$ ise Λ_{ij} *kısmi ödünleşim*; eğer en az bir $l=1, \dots, k$ ve $l \neq i, j$ için $f_l(x_1) \neq f_l(x_2)$ ise Λ_{ij} *tam ödünleşim* olarak adlandırılır.

Karar vericinin birçok amaç fonksiyonunu karşılaştırması zor iken verilen iki amaç fonksiyonunu Λ_{ij} değerine bakarak daha kolay kıyaslayabilir.

Tanım 3.20 [Chankong ve Haimes, 1983]

$\hat{x} \in X$ bir karar vektörü ve $\hat{d}$, $\hat{x}$ vektöründen çıkan uygun yön olsun. $\hat{d}$ boyunca f_i ve f_j 'yi kapsayacak şekilde $\hat{x}$ noktasındaki *tam ödünleşim oranı*

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\hat{x}, \hat{d}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Lambda_{ij}(\hat{x} + \alpha \hat{d}, \hat{x}) \quad (3.18)$$

$\hat{d}$ uygun bir yön olmak üzere, eğer her $l = 1, \dots, k$ ve $l \neq i, j$ ve her $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ için $f_l(\hat{x} + \alpha \hat{d}) = f_l(\hat{x})$ eşitliğini sağlayan $\bar{\alpha} > 0$ mevcut ise λ_{ij} *kısmi ödünleşim oranı* olarak adlandırılır.

3.3.3 Asıl Pareto Optimal Çözümler

Tanıma göre, eğer bir amaç fonksiyonu ile diğer amaç fonksiyonları aynı değere sahip ise Pareto optimal çözümler o amaç fonksiyonunda iyileştirme sağlamaz. Bir amaç fonksiyonundaki iyileşme ancak bir başka amaç fonksiyonunda kötüleşme kabul edildiği zaman gerçekleşir. Yukarıda da bahsedildiği gibi amaç fonksiyonları arasındaki bu ödünleşim hesaplanabilir. Ancak bazı hallerde ödünleşim sınırsız olabilir.

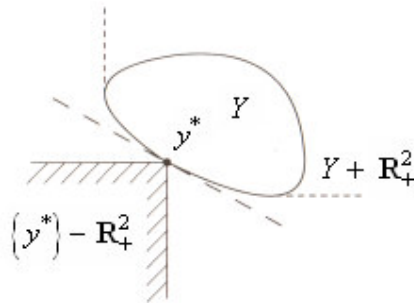
İlk defa Kuhn ve Tucker (1951) Pareto optimal çözümlerin sakıncalı yanlarından bahsetmiş ve bu durumlardan sakınmak için asıl Pareto optimal çözüm tanımını geliştirmişler ve Pareto optimal çözümleri asıl ve asıl olmayan olarak ikiye ayırmışlardır. Asıl Pareto optimal çözümler amaç fonksiyonları arasında sınırsız ödünleşime izin vermez. Literatürde asıl Pareto optimal çözüm için çeşitli tanımlar verilmektedir (Miettinen, 1999; Ehrgott, 2000).

Tanım 3.21 [Henig, 1982]

$X \subset \mathbf{R}^n$ ve $x^* \in X$ için eğer

$$R_+^k - \{0\} \subset \text{int } N, (X - x^*) \cap (-N) = \{0\}, N \cap (-N) = \{0\} \quad (3.19)$$

koşullarını sağlayan konveks kapalı N konisi var ise x^* 'a *asıl Pareto minimal çözüm* denir.



Şekil 3.7 Asıl Pareto minimal çözümler (Jahn, 2003).

Tanım 3.22 [Kuhn ve Tucker, 1951]

$X = \{x \in \mathbf{R}^n : (g_1(x), \dots, g_m(x)) \leq 0\}$ uygun küme; $f_i, i = 1, \dots, k$, $g_j, j = 1, \dots, m$ sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar olsun ve

$$\min f(x)$$

$$g(x) \leq 0, \quad g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$$

problemini göz önüne alalım. $x^* \in X$ çözümü için eğer

$$\langle \nabla f_i(x^*), h \rangle \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (3.20a)$$

$$\langle \nabla f_i(x^*), h \rangle < 0, \quad \exists i \quad (3.21b)$$

$$\langle \nabla g_j(x^*), h \rangle \leq 0, \quad \forall j \in J(x^*) = \{j = 1, \dots, m : g_j(x^*) = 0\} \quad (3.21c)$$

eşitsizliklerini sağlayan $h \in \mathbf{R}^n$ yok ise x^* vektörüne *asıl Pareto optimal çözüm* denir.

Tanım 3.23 [Geoffrion, 1968]

$x^* \in X$ karar vektörü Pareto optimal çözüm ise ve her i indeksi ile her $x \in X$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$; en az bir j indeksi için ise $f_j(x^*) < f_j(x)$ ve $\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M$ sağlanacak şekilde $M > 0$ reel sayısı var ise $x^* \in X$ *asıl Pareto optimal çözüm* olarak adlandırılır.

Teorem 3.10 [Geoffrion, 1968]

$\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$ ve $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ olmak üzere eğer x^* karar vektörü $\min_{x \in X} \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$ probleminin optimal çözümü ise o halde x^* asıl Pareto optimal çözümdür.

Teorem 3.11 [Geoffrion, 1968]

$X \subset \mathbf{R}^n$ ve $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks olsun. O halde $x^* \in X$ vektörünün asıl Pareto optimal olması için gerek ve yeter koşul x^* vektörünün $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$ için $\min_{x \in X} \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$ probleminin optimal çözümü olmasıdır.

Geoffrion, konveks problem halinde asıl Pareto optimal çözümler için gerek ve yeter koşul bulmuştur.

Tanım 3.24

$Y \subset \mathbf{R}^k$ ve $y \in Y$ olsun.

$$T_Y(y) = \{d \in \mathbf{R}^k : \exists \{t_k\} \subset \mathbf{R}, \{y_k\} \subset \mathbf{R}; y_k \rightarrow y, t_k(y_k - y) \rightarrow d\} \quad (3.21)$$

kümesine y noktasında Y 'nin *tanjant konisi*;

$$\text{cone}(Y) = \{\alpha y : \alpha \geq 0, y \in Y\} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha Y \quad (3.22)$$

kümesine Y 'nin *konik örtüsü* denir.

Tanjant koni tanımından da görüldüğü üzere $y_k \rightarrow y, t_k(y_k - y) \rightarrow d$ koşullarından $t_k \rightarrow \infty$

olduğu açıktır veya denk tanım olarak $t_k \rightarrow 0$ iken $(\frac{1}{t_k})(y_k - y) \rightarrow d$ yazılabilir.

Özellik 3.11

- i. Tanjant koni $T_Y(y)$ kapalı konidir.
- ii. Eğer Y konveks ise $\mathbf{cl}(\text{cone}(Y - y))$ ve $T_Y(y)$ konvektir ve $T_Y(y) = \mathbf{cl}(\text{cone}(Y - y))$.

Tanım 3.25 [Borwein, 1977]

$x^* \in X$ çözümü için eğer

$$T_{Y+\mathbf{R}_+^k}(f(x^*)) \cap (-\mathbf{R}_+^k) = \{0\} \quad (3.23)$$

ise $x^* \in X$ *asıl Pareto optimal çözüm* olarak adlandırılır.

Tanım 3.26 [Benson, 1979]

$x^* \in X$ çözümü için eğer

$$\mathbf{cl}(\text{cone}(Y + \mathbf{R}_+^k - f(x^*))) \cap (-\mathbf{R}_+^k) = \{0\} \quad (3.24)$$

ise $x^* \in X$ *asıl Pareto optimal çözüm* olarak adlandırılır.

Tanjant koni ve konik örtü tanımından

$$T_{Y+\mathbf{R}_+^k}(f(x^*)) \subset \mathbf{cl}(\text{cone}(Y + \mathbf{R}_+^k - f(x^*))) \quad (3.25)$$

elde edilir. O halde Benson'un tanımının Borwein'in tanımından daha güçlü olduğu açıktır.

Eğer $X \subset \mathbf{R}^n$ ve $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$ konveks ise Benson ve Borwein tanımları birbirine denktir.

Özellik 3.12

$x^* \in X$ Borwein anlamında asıl Pareto optimal çözüm ise x^* Pareto optimal çözümdür.

Asıl Pareto optimal çözümler için çeşitli yazarların vermiş oldukları tanımlar arasındaki ilişkileri incelemek için Guerraggio, Molho ve Zaffaroni'nin (1994) çalışması incelenebilir. Sıradaki teorem asıl Pareto minimal çözümler için gerek koşulu vermektedir:

Teorem 3.12 [Gasimov, 1992]

$X \subset \mathbf{R}^n$ kümesi verilsin. $x_0 \in X$ vektörü asıl Pareto minimal çözüm ise $\forall x \in X$ için

$$g(x_0) \leq g(x) \quad (3.26)$$

olacak şekilde bazı $g \in G_{0S}$ vardır.

(3.26) koşulunun yeter koşul olması için ilave koşullara ihtiyaç vardır. Sıradaki teoremden ise Gasimov'un ispatlamış olduğu teorem geliştirilerek noktayı kümeden ayıran seviye kümesini veren fonksiyonun recessive fonksiyonu ile uzayda sıralama sağlayan koni arasında bir ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması durumunda verilen noktanın asıl minimal nokta olduğu gösterilmiştir.

Tanım 3.27

$\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ konveks fonksiyonu verilsin. $X = \text{epif}$ kümesi bilindiği gibi konveks bir kümedir. Bu kümenin recessive konisi olan $0^+(\text{epif})$ kümesi Rockefellar (1970) çalışmasında gösterildiği gibi bir fonksiyonun epigrafigidir. Bu fonksiyona f 'in *recessive fonksiyonu* denir ve $f0^+$ şeklinde gösterilir. O halde tanıma göre

$$\text{epi}(f0^+) = 0^+(\text{epif}) \quad (3.27)$$

elde edilir.

Teorem 3.13 [Azimli ve Kemalbay, 2007]

$K \subset \mathbf{R}^n$ konveks, kapalı, sivri uçlu, $\text{int } K \neq \emptyset$ konisi, $X \subset \mathbf{R}^n$ kısmi sıralı kümesi ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer bir $g \in G_{0S}$ için

$$-K \subset \text{int} \left\{ x \mid (g0^+)(x) \leq 0 \right\} \quad (3.28)$$

sağlanıyor ise (3.26) eşitsizliği x_0 'ın asıl Pareto minimal çözüm olması için yeter koşuldur.

İspat

$g \in G_{0S}$ için (3.26) ve (3.28)'nin doğru olduğunu varsayalım. $g_1 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu $g_1(x) = g(x + x_0) - g(x_0)$ şeklinde tanımlansın. $G_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : g_1(x) \leq 0\}$ olsun.

Rockafellar'ın (1970) çalışmasına göre $g_1 0^+ = g 0^+$ ve $0^+ G_1 = \{x \mid (g_1 0^+)(x) \leq 0\}$ elde edilir.

O halde (3.28)

$$-K \subset \text{int } 0^+ G_1 \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. $\text{cone}(X + K - x_0) \cap (-K) = \{0\}$ olduğu kolayca gösterilir. Teoremin ispatı için

$$\mathbf{cl} \text{ cone}(X + K - x_0) \cap (-K) = \{0\} \quad (3.30)$$

olduğu gösterilmelidir. Aksini düşünelim. (3.30) doğru olmasın. O halde sıfırdan farklı bir $k \in K$ için

$$-k \in \mathbf{cl} \text{ cone}(X + K - x_0) \quad (3.31)$$

$g_1(-k) < 0$ olduğu aşıkardır ve g_1 sürekli olduğundan $-k \in \text{int } G_1$ 'dir. Ayrıca (3.29)'den $-k \in \text{int } 0^+ G_1$ elde edilir. Buradan (3.31) göz önüne alınırsa

$$\hat{x} \in 0^+ G_1, \hat{x} \in \text{int } G_1 \quad (3.32)$$

koşulunu sağlayan bir $\hat{x} \in \text{cone}(X + K - x_0)$ vektörü mevcuttur. $0 \in G_1$ ve G_1 konveks küme olduğundan (3.32)'den her $\lambda \in (0, 1]$ için $\lambda \hat{x} \in \text{int } G_1$ elde edilir. Buradan (Teorem 8.3;

Rockafellar, 1970) göz önüne alınırsa $\hat{x} \in 0^+ G_1$ 'den

$$\lambda \hat{x} + \mu \hat{x} \in \text{int } G_1, \forall \mu \geq 0 \text{ ve } 0 < \lambda \leq 1$$

elde edilir. Buradan

$$g_1((\lambda + \mu)\hat{x}) < 0, \forall \mu \geq 0 \text{ ve } 0 < \lambda \leq 1 \quad (3.33)$$

elde edilir. $\hat{x} \in \text{cone}(X + K - x_0)$ olduğundan $r\hat{x} \in X + K - x_0$ 'ı sağlayan bir $r > 0$ sayısı vardır.

$$g_1(r\hat{x}) \geq 0 \quad (3.34)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $r > 0$ için $\mu + \lambda = r$ koşulunu sağlayan $\mu > 0$ ve $\lambda > 0$ sayılarını alalım. O halde (3.33) ve (3.34)'ten

$$g_1(r\hat{x}) < 0 \text{ ve } g_1(r\hat{x}) \geq 0$$

elde edilir. Öyleyse çelişkiiden dolayı (3.30)'un doğru olduğu görülür. ■

3.3.4 Pareto Optimal Çözümlerin Değişim Aralığı

Bu bölümde, amaç fonksiyonlarının X uygun kümesi üzerinde sınırlı oldukları varsayımı altında Pareto optimal çözümlerin değişim aralığı incelenecektir. Pareto optimal çözümlerin alt ve üst sınırı olarak ideal ve nadir noktaların tanımı verilecektir. Bu noktalar Pareto optimal çözümlerin değişim aralığı hakkında karar vericiye fikir sağlamaktadır.

Tanım

X_{par} ve Y_{eff} kümelerinin boş olmadıkları varsayımı altında

$$\min_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad (3.34)$$

problemini göz önüne alalım.

- i. $y^0 = (y_1^0, \dots, y_k^0)$ noktası için

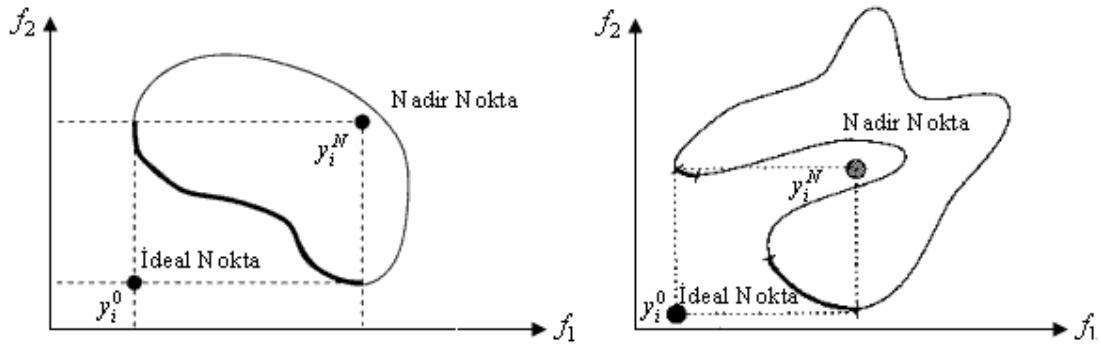
$$y_i^0 = \inf_{x \in X} f_i(x) = \inf_{y \in Y} y_i \quad (3.35)$$

noktası Pareto optimal çözüm kümesinin en büyük alt sınırı olup *ideal nokta* olarak adlandırılır.

- ii. $y^N = (y_1^N, \dots, y_k^N)$ noktası için

$$y_i^N = \sup_{x \in X_{par}} f_i(x) = \sup_{y \in Y_{eff}} y_i \quad (3.36)$$

noktası Pareto optimal çözüm kümesinin en küçük üst sınırı olup *nadir nokta* olarak adlandırılır.



Şekil 3.8 İdeal ve nadir noktaların geometrik yeri (Miettinen, 1999; Collette vd., 2003).

Tanımdan da görüldüğü üzere $\forall y \in Y_{eff}$ için $y_i^0 \leq y_i$ ve $y_i \leq y_i^N$ 'dir. İdeal nokta, k adet tek değişkenli optimizasyon probleminin çözülmesi ile elde edilirken nadir noktanın hesaplanması için etkin bir algoritma yoktur.

Matematiksel olarak her Pareto optimal çözüm, çok kriterli optimizasyon probleminin eşit olarak kabul edilebilir bir çözümüdür. Ayrıca, çözüm kümesi yerine yalnız bir çözümü elde etmek istenilen bir durumdur. Pareto optimal çözümler arasından bir seçim yapabilmek için ise karar vericiye ihtiyaç vardır.

3.4 Karar Verici

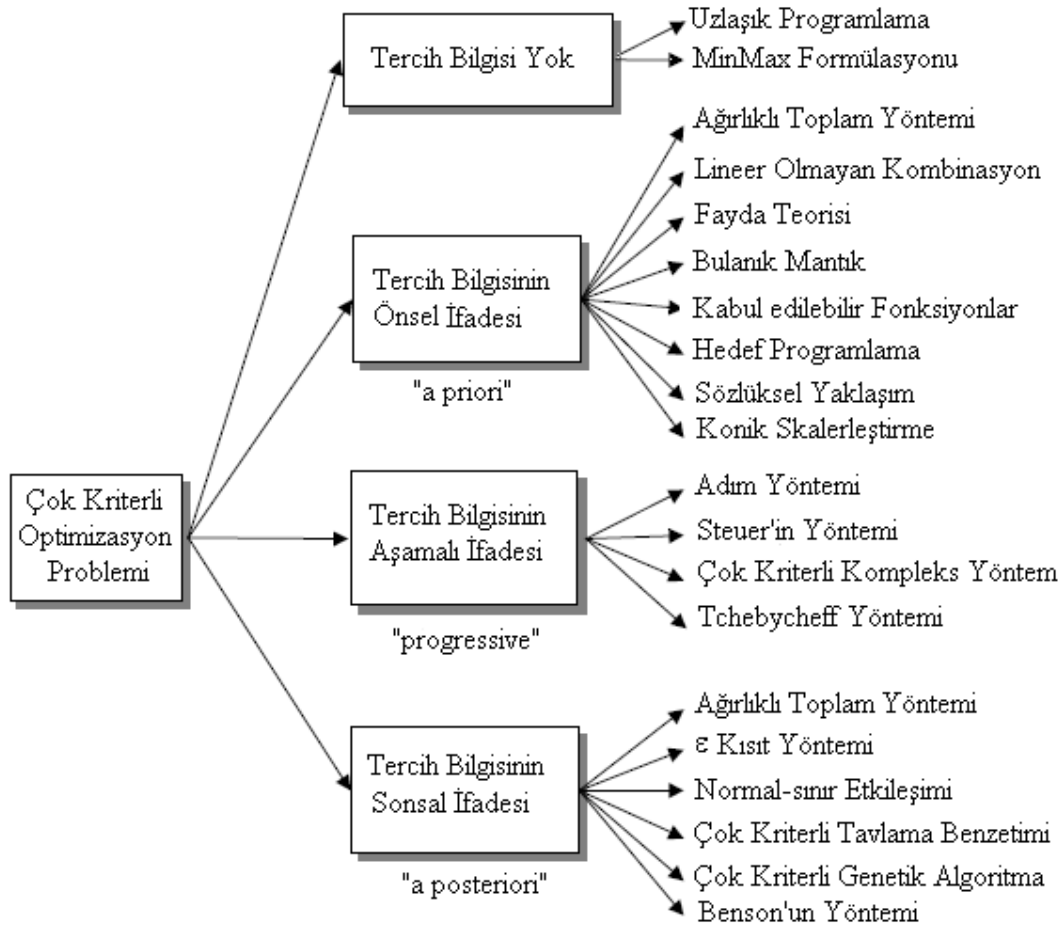
Tüm Pareto optimal çözümler arasından yalnız bir çözümü seçmek için karar vericiye dayanan tercih bilgisine ihtiyaç vardır. Karar verici, farklı çözümler arasında tercih ilişkisini açıklayan kişidir. Analist ise çözüm sürecinin matematiksel kısmı ile ilgilenen kişi veya bilgisayar programıdır. Analist, karar vericiye problemin çözümlerini sunar ve karar vericinin tercihlerine göre bir çözüm belirlenir. Bir sonraki bölümde karar vericinin çözüm sürecinde yer aldığı role göre çok kriterli optimizasyon probleminin çözüm yöntemleri sınıflandırılmıştır.

4. ÇOK KRİTERLİ OPTİMİZASYON PROBLEMİNİ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Çok kriterli optimizasyon probleminin çözümü için literatürde çeşitli yöntemler bulunmaktadır: Skaler yöntemler, etkileşimli yöntemler, bulanık yöntemler, sezgisel yöntemler, karara yardım yöntemleri... Çok kriterli optimizasyon problemi çözüldüğünde, karar vericinin gereksinimlerini en iyi karşılayan bir Pareto optimal çözümün diğer bir deyişle nihai çözümün bulunması hedeflenir. Hwang ve Masud'a göre (1979) çözüm yöntemleri karar vericinin çözüm sürecinde yer aldığı role göre 4 sınıfta incelenebilir:

- i. *Tercih Bilgisine Dayanmayan Yöntemler*: Problem çözüldükten sonra çözüm karar vericiye sunulur. Karar verici çözümü reddeder veya kabul eder.
- ii. *Önsel Tercih Bilgisine Dayanan Yöntemler*: Karar verici optimizasyon yöntemi uygulanmadan önce tercihlerini belirtir ve bunlar modele yansıtılır.
- iii. *Etkileşimli Tercih Bilgisine Dayanan Yöntemler*: Optimizasyon yöntemi ile karar vericinin etkileşimli olduğu durumdur.
- iv. *Sonsal Tercih Bilgisine Dayanan Yöntemler*: Optimizasyon yöntemi uygulandıktan sonra karar verici çözümler arasından tercihinin yapar.

Çizelge 4.1 KV'ye Göre ÇKO problemini çözüm yöntemlerinin sınıflandırılması.



Tercih bilgisine dayanmayan yöntemlerde karar vericinin fikirleri dikkate alınmazken, çözümler elde edildikten sonra karar vericiye sunulur. Karar verici sunulan çözümü reddeder veya kabul eder. Bu durumda seçilen çözümün karar vericinin isteklerini en iyi yansıtan çözüm olduğunu söylemek yanlış olur. Bu tür çözüm yöntemleri, karar vericinin çözümlerden özel bir beklentisi olmadığı durumlarda uygundur.

Önsel yöntemlerde karar verici, çözüm süreci başlamadan önce istek ve düşüncelerini analiste bildirir. Ancak buradaki zorluk, karar verici problemde ulaşmak istediği olasılığı önceden bilemeyebilir veya beklentileri gerçeğe uygun olmayabilir.

Etkileşimli yöntemler, karar vericiyi en çok tatmin edecek sonuçları verir. Analist elde ettiği çözümleri karar vericiye sunar. Eğer karar verici beklentilerini karşılayan çözümü elde edememiş ise analist karar vericinin yeni isteklerini de göz önüne alarak iterasyonu tekrarlar. Süreç en tatmin edici çözümü buluncaya kadar devam eder.

Sonsal yöntemler, Pareto optimal çözüm kümesini veya bir kısmını bulduktan sonra çözümler karar vericiye alternatifler arasından bir tercih yapması için sunulur. Ancak tüm Pareto optimal çözüm kümesinin hesaplanması hem zaman alıcı hem de karar vericinin büyük bir küme içerisinde bir çözüm seçmesi zor olacaktır. Diğer bir sorun ise en etkili yol ile çözümlerin karar vericiye nasıl sunulacağıdır.

Yukarıdaki sınıflamanın dışında çözüm yöntemleri başka kriterlere göre de sınıflandırılmıştır. Çizelgede de görüldüğü üzere bir yöntem aynı anda iki sınıfta yer alabilmektedir. Bu sebeple yapılan sınıflamaların hiçbirinin kesin olduğu söylenemez.

4.1 Skalerleştirme Yöntemleri

Çok kriterli optimizasyon problemini çözmek için bilinen en basit ve yaygın yol skalerleştirme yöntemleridir. Skalerleştirme yöntemlerinin temel mantığı, çok kriterli optimizasyon problemini, reel değerli tek kriterli optimizasyon problemine dönüştürmektir. Böylece literatürde tek kriterli optimizasyon yönteminin çözümü için kullanılan etkili yöntemlerin kullanılabilmesi imkanı sağlandığından çözüm aşamasında kolaylık sağlanır. Sawaragi vd. (1985) çalışmasında bahsedildiği gibi skaler fonksiyonun sağlaması gereken özellikler vardır:

- i. Tek kriterli optimizasyon probleminin her çözümü çok kriterli optimizasyon probleminin Pareto optimal çözümü olmalıdır.
- ii. Çok kriterli optimizasyon probleminin her bir Pareto optimal çözümü, skalerleştirme fonksiyonun optimal çözümü olmalıdır.

Skalerleştirme yöntemleri için dikkate alınması gereken bir diğer özellik ise eğer amaç fonksiyonları ve uygun küme konveks ise skaler problem global Pareto optimal çözümleri bulacaktır; aksi halde elde edilen çözümler lokal Pareto optimaldir.

Başlıca skalerleştirme yöntemleri: Ağırlıklı Toplam Yöntemi, ε -Kısıt Yöntemi, Uzlaşık Programlama, Benson'un Yöntemi, Konik Skalerleştirme Yöntemi...

4.1.1 Ağırlıklı Toplam Yöntemi

Bu yöntemin temel amacı, amaç fonksiyonlarını negatif olmayan ağırlıklar ile çarpıp toplayarak tek değişkenli yeni bir fonksiyon elde etmek ve bu fonksiyonu minimize ederek optimal çözümlere ulaşmaktır. Ağırlıklı toplam probleminin matematiksel ifadesi izleyen şekildedir:

$\forall i=1, \dots, k$ için $w_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ olmak üzere

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (4.1)$$

Teorem 4.1

Eğer $\forall i=1, \dots, k$ için $w_i > 0$ ise (4.1) ağırlıklı toplam probleminin optimal çözümü (3.1) probleminin Pareto optimal çözümüdür.

İspat

$\forall i=1, \dots, k$ için $w_i > 0$ ve olmak üzere $x^* \in X$ (4.1) probleminin optimal çözümü olsun.

Aksini varsayalım. x^* , Pareto optimal çözüm olmasın. O halde $\forall i=1, \dots, k$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$

ve en az bir j indeksi için $f_j(x) < f_j(x^*)$ olacak şekilde bir $x \in X$ çözümü vardır. $w_i > 0$

olduğundan $\forall i=1, \dots, k$ için $\sum_{i=1}^k w_i f_i(x) < \sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*)$ elde edilir. Ancak bu durum x^*

vektörünün (4.1) probleminin optimal çözümü olması ile çelişir. ■

Teorem 4.2

(4.1) probleminin optimal çözümü, (3.1) probleminin zayıf Pareto optimal çözümüdür.

İspat

$x^* \in X$ (4.1) probleminin optimal çözümü olsun. Aksini varsayalım. x^* , zayıf Pareto optimal

çözüm olmasın. O halde $\forall i=1, \dots, k$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olacak şekilde bir $x \in X$ çözümü vardır. Tüm ağırlık katsayılarının negatif olmama varsayımından dolayı en az bir j indeksi için $w_j > 0$ olup $\sum_{i=1}^k w_i f_i(x) < \sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*)$ çelişkisi elde edilir. ■

Teorem 4.3

Eğer $x^* \in X$ (4.1) probleminin tek optimal çözümü ise o halde x^* (3.1) probleminin Pareto optimal çözümüdür.

İspat

$x^* \in X$ çözümü Pareto optimal çözüm olmasın. O halde $\forall i=1, \dots, k$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ ve en az bir j indeksi için $f_j(x) < f_j(x^*)$ olacak şekilde bir $x \in X$ çözümü vardır. $\forall i=1, \dots, k$ için $w_i \geq 0$ olduğundan $\sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*)$ elde edilir. Diğer taraftan x^* tek çözüm olduğundan $\forall \hat{x} \in X$ için $\sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*) < \sum_{i=1}^k w_i f_i(\hat{x})$ elde edilir. Ancak bu iki eşitsizlik birbiri ile çeliştiğinden x^* Pareto optimal çözümdür. ■

Teorem 4.4

Çok kriterli optimizasyon problemi konveks olsun. Eğer $x^* \in X$ Pareto optimal çözüm ise o halde x^* (4.1) probleminin optimal çözümü olacak şekilde bir w ağırlık vektörü mevcuttur.

İspat

X ve $f_i(x)$, $i=1, \dots, k$ konveks olduklarından $Y = f(X)$ kümesi de konvekstir. $x^* \in X$ Pareto optimal çözüm olsun. O halde $y^* \in Y_{eff}$ olmak üzere Yardımcı Teorem 3.2'ye göre $Y_{eff} = (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$ olduğundan $y^* \in (Y + \mathbf{R}_+^k)_{eff}$ olup $(Y + \mathbf{R}_+^k - y^*) \cap (-\mathbf{R}_+^k) = \{0\}$ elde edilir. $(Y + \mathbf{R}_+^k - y^*)$ ve $(-\mathbf{R}_+^k)$ boştan farklı konveks kümeler ve $\mathbf{ri}(Y + \mathbf{R}_+^k - y^*) \cap \mathbf{ri}(-\mathbf{R}_+^k) = \emptyset$ olduğundan bu kümeler asıl ayrılabilir. O halde

$$\langle w, y + d - y^* \rangle \geq 0 \geq \langle w, -d' \rangle \quad \forall y \in Y, \quad d, d' \in \mathbf{R}_+^k,$$

olacak şekilde bazı $w \in \mathbf{R}^k$ vektörü mevcuttur. $\langle w, -d' \rangle \leq 0$ ve $d \in \mathbf{R}_+^k$ olduğundan $w_i \geq 0$,

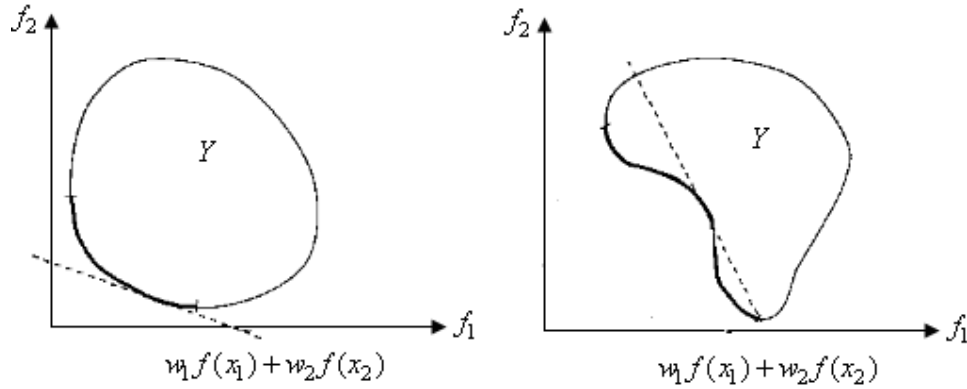
$i = 1, \dots, k$ olduğunu göstermek için $w = e_i$ (i . birim vektör) seçilebilir. $d = 0$ seçilir ise

$$\langle w, y + d - y^* \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle w, y \rangle \geq \langle w, y^* \rangle, \quad \forall y \in Y$$

elde edilir. Buradan $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ $x, x^* \in X$ yazılırsa x^* vektörünün (4.1) probleminin optimal çözümü olduğu görülür. ■

Sonuç 4.1

Teorem 3.10 ve Teorem 3.11'den görüldüğü gibi eğer $\forall i = 1, \dots, k$ için $w_i > 0$ ise (4.1) probleminin optimal çözümü, (3.1) probleminin asıl Pareto optimal çözümüdür. Eğer (3.1) problemi konveks ise bu koşul gerek ve yeter koşula dönüşür.



Şekil 4.1 Konveks ve konveks olmayan problem için ATY (Miettinen, 1999).

Ağırlıklı toplam skalerleştirme fonksiyonu Pareto çözüm kümesini lineer fonksiyon aracılığı ile desteklemektedir. Ancak Teorem 4.4'e göre ve Şekil 4.1'den de görüldüğü üzere çok kriterli optimizasyon problemi konveks değil ise w ağırlık vektörü değiştirilerek tüm Pareto optimal çözümleri hesaplanamayabilir.

Ağırlıklı toplam yöntemi, önsel tercih bilgisine dayanan yöntem olarak ta kullanılabilir. Bu durumda karar verici beklenti ve düşünceleri doğrultusunda amaç fonksiyonlarını ağırlıklandırarak katsayıları belirleyebilir.

4.1.2 ϵ -Kısıt Yöntemi

Haines vd. (1971) tarafından bulunan bu yönteme göre amaç fonksiyonlarından biri minimize edilmek için seçilir ve geriye kalan amaç fonksiyonları, her birinin üst sınırı ϵ olacak şekilde kısıtlama fonksiyonuna dönüşür. ϵ -kısıt yönteminin matematiksel ifadesi izleyen şekildedir:

$$\min_{x \in X} f_p(x) \quad (4.2)$$

$$f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad \forall j = 1, \dots, k, j \neq p$$

Burada $\varepsilon \in \mathbf{R}^k$ ve $p \in \{1, \dots, k\}$.

Teorem 4.5

(4.2) ε -kısıt probleminin optimal çözümü, (3.1) probleminin zayıf Pareto optimal çözümüdür.

İspat

$x^* \in X$ (4.2) probleminin optimal çözümü olsun. Aksini varsayalım. x^* , zayıf Pareto optimal çözüm olmasın. O halde $\forall i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olacak şekilde bir $x \in X$ çözümü vardır. $\forall j = 1, \dots, k$ ve $j \neq p$ için $f_j(x) < f_j(x^*) \leq \varepsilon_j$ olduğundan x vektörü, ε -kısıt probleminin bir uygun çözümüdür. Ancak $f_p(x) < f_p(x^*)$ olduğundan bu eşitsizlik x^* vektörünün (4.2) probleminin optimal çözümü olması ile çelişir. ■

Teorem 4.6

Eğer $\exists p$ için $x^* \in X$ vektörü (4.2) probleminin tek optimal çözümü ise x^* (3.1) probleminin Pareto optimal çözümüdür.

İspat

Aksini varsayalım. $x^* \notin X_{par}$ olsun. O halde $\forall i = 1, \dots, k$ için $f_i(x^0) \leq f_i(x^*)$ ve en az bir j indeksi için $f_j(x^0) < f_j(x^*)$ olacak şekilde bir $x^0 \in X$ çözümü vardır. $\exists p$ için $x^* \in X$ (4.2) probleminin tek optimal çözümü olduğundan $\forall x \in X$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, $i \neq p$ için $f_p(x^*) < f_p(x)$ çelişkisi elde edileceğinden $x^* \in X_{par}$. ■

Teorem 4.7

$x^* \in X$ vektörünün Pareto optimal olması için gerek ve yeter koşul $\forall p = 1, \dots, k$ için x^* vektörünün (4.2) probleminin bir optimal çözümü olacak şekilde bir $\hat{\varepsilon} \in \mathbf{R}^k$ vektörünün bulunmasıdır.

İspat

" $\Rightarrow$ " $x^* \in X_{par}$ olsun. $\hat{e} = f(\hat{x})$ seçelim. $\exists p$ için x^* , (4.2) probleminin optimal çözümü olmasın. O halde $f_p(x) < f_p(x^*)$ ve her $j \neq p$ için $f_j(x) \leq \hat{e}_j = f_j(x^*)$ olacağından $x^* \notin X_{par}$ çelişkisi bulunur.

" $\Leftarrow$ " $\forall p = 1, \dots, k$ için $x^* \in X$ (4.2) probleminin optimal çözümü ise $f_p(x) < f_p(x^*)$ ve $f_j(x) \leq f_j(x^*)$, $j \neq p$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değildir. O halde $x^* \in X_{par}$. ■

Teorem 4.7'ye göre uygun ε kısıtları seçildiği takdirde tüm Pareto optimal çözümler hesaplanabilir. Ayrıca, ispattan da görüldüğü üzere ε_j değerleri, Pareto optimal çözümlerin amaç fonksiyonları değerine eşittir.

ε - kısıt yöntemi, ağırlıklı toplam yönteminden farklı olarak konvekslik koşulu olmadan tüm Pareto optimal çözümleri hesaplayabilmektedir.

Bu yöntemin asıl Pareto optimal çözümleri karakterize eden teoremine geçmeden önce bazı tanımların verilmesi gereklidir:

Benson ve Morin (1977) çalışmalarında yardımcı fonksiyon olarak bilinen ve *pertürbasyon fonksiyonu* olarak isimlendirdikleri fonksiyonu izleyen şekilde tanımlamışlardır:

$$v(y) = \inf_{x \in X} \left\{ f_p(x) \mid \left\{ f_j(x) - \varepsilon_j \leq y_j; \forall j = 1, \dots, k; j \neq p \right\} \right\} \quad (4.3)$$

$v(0)$ için ε -kısıt probleminin amaç fonksiyonunun optimal değerinin elde edileceği açıktır.

Tanım 4.1

Eğer $v(0)$ sonlu ve her $0 \neq y \in \mathbf{R}^{k-1}$ için

$$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq R$$

olacak şekilde $R > 0$ sayısı mevcut ise ε - kısıt problemine *stabil* denir.

Teorem 4.8 [Benson ve Morin, 1977]

Çok kriterli optimizasyon problemi konveks olsun ve $x^* \in X_{par}$ verilsin. x^* vektörünün asıl Pareto optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul $\forall p = 1, \dots, k$ için (4.2) ε -kısıt probleminin (burada $\forall j = 1, \dots, k; j \neq p$ için $f_j(x^*) = \varepsilon_j$) stabil olmasıdır.

4.1.3 Benson Yöntemi

Benson'un (1978) çalışmasında verilen bu skalerleştirme yöntemine göre $x_0 \in X$ uygun çözüm olmak üzere bir başlangıç noktası seçilir ve eğer bu çözüm Pareto optimal çözüm değil ise baskınlık ilişkisi bulunmalıdır. Bunun için Benson'un önerisine göre $\varepsilon_i = f_i(x_0) - f_i(x)$ negatif olmayan sapma değişkeni kısıtlaması altında ε_i değerlerinin toplamı maksimize edilerek çok kriterli problem skalerleştirilir. Benson yönteminin matematiksel ifadesi izleyen şekildedir: $x_0 \in X$ verilmek üzere

$$\max \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \quad (4.4)$$

$$f_i(x_0) - \varepsilon_i - f_i(x) = 0$$

$$\varepsilon_i \geq 0, x \in X$$

Teorem 4.9

$x_0 \in X$ başlangıç çözümünün Pareto optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul (4.4) Benson probleminin amaç fonksiyonu değerinin 0 olmasıdır.

İspat

" $\Leftarrow$ " $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 0$ olsun. (4.4) probleminin varsayımına göre $\varepsilon_i \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_i = 0, \forall i.$$

$$\Rightarrow f_i(x_0) = f_i(x), i = 1, \dots, k.$$

O halde $f(x) \neq f(x_0)$ ve $f_i(x) \leq f_i(x_0)$ olacak şekilde $x \in X$ vektörü mevcut olamayacağından $x_0 \in X_{par}$ elde edilir. Tersine $x_0 \in X_{par}$ olduğunda benzer yol ile ispat kolaylıkla gösterilebilir. ■

Bu yöntemin güçlü yanı eğer (4.4) problemi sonlu çözüme sahip ise Pareto optimal çözüm sağlanır. Sonlu çözümü olmadığında eğer konvekslik varsayımı sağlanır ise bu durumda asıl Pareto optimal çözümler mevcuttur. Sıradaki teoremler bu durumları izah eder:

Yardımcı Teorem 4.1

Eğer (4.4) problemi sonlu sayıda amaç fonksiyonu ile bir optimal çözüme sahip ise ve bu

değer (x^*, ε^*) noktasında elde ediliyor ise $x^* \in X_{par}$ 'dır.

İspat

Aksini varsayalım. $x^* \notin X_{par}$ olsun. O halde $\forall i=1, \dots, k$ için $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$ ve en az bir j indeksi için $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*)$ olacak şekilde bazı $\hat{x} \in X$ vardır. $\hat{\varepsilon}_i = f_i(x_0) - f_i(\hat{x})$ olarak tanımlanırsa

$$\hat{\varepsilon}_i = f_i(x_0) - f_i(x^*) \geq f_i(x_0) - f_i(\hat{x}) = \varepsilon_i^* \geq 0$$

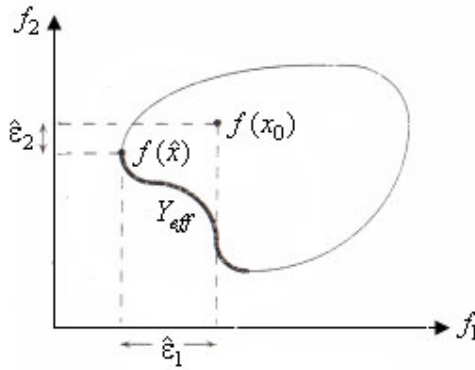
olacağından $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ (4.4) probleminin bir uygun çözümüdür. Diğer taraftan $\hat{\varepsilon}_i > \varepsilon_i^*$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i > \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^* \text{ elde edilir. Ancak bu eşitsizlik } (x^*, \varepsilon^*) \text{ noktasının seçimi ile çeliştiğinden}$$

$$x^* \in X_{par}. \blacksquare$$

Teorem 4.10 [Benson, 1978]

$X \subset \mathbf{R}^n$ konveks kümesi ve $f_1(x), \dots, f_k(x)$ konveks fonksiyonları verilsin. Eğer (4.4) probleminin sonlu optimal amaç fonksiyonu değeri yok ise o halde (3.1) probleminin asıl Pareto optimal çözümü yoktur.



Şekil 4.2 Benson yönteminin grafiksel gösterimi (Ehrgott, 2000).

Şekil 4.2'de de görüldüğü üzere $f(x_0) \in Y$ başlangıç çözümü $f(\hat{x}) \in Y_{eff}$ etkin çözümünden daha büyük koordinatlara sahip olmak üzere $\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2$ sapmalar toplamı maksimize edilerek Pareto optimal çözüm bulunmaya çalışılır. Eğer seçilen $x_0 \in X$ başlangıç çözümü Pareto optimal çözüm ise amaç fonksiyonunun değerinin 0 olacağı açıktır. Öyleyse Benson'un yöntemi seçilen çözümün Pareto optimal çözüm olup olmadığının kontrolünü yapmaktadır.

4.1.4 Uzlaşık Programlama Yöntemi

Bilindiği gibi, çok kriterli optimizasyon probleminde bir çözümün tüm amaç fonksiyonlarına göre en iyi çözüm yani ideal nokta olması genellikle mümkün değildir. İlk olarak Yu (1973) ve Zeleny (1973) tarafından verilen yöntemin temel amacı ideal noktaya en yakın olan çözümü bulmaktır. Karar vericiyi tatmin eden amaç fonksiyonu değerlerinden oluşan vektör, *referans noktası* olarak adlandırılır. Bu yöntemde ideal nokta, referans noktası vazifesi görebilir. İdeal noktaya en yakın olan noktayı bulabilmek için referans noktası ile uygun amaç fonksiyonları arasındaki mesafe minimize edilmeye çalışılır. Bu yöntem tercih bilgisine dayanmamaktadır. Analist, referans noktasını ve mesafeyi ölçeceği metriği kendi belirler. Tüm amaç fonksiyonları eşit derecede öneme sahiptir (Miettinen, 1999; Ehrgott, 2000). Uzlaşık programlama yönteminin matematiksel ifadesi izleyen şekildedir: $d : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}_+$ uzaklık fonksiyonu olmak üzere

$$\min_{x \in X} d(f(x) - y^0) \quad (4.5)$$

(4.5) probleminin optimal çözümünün Pareto optimal çözüm olup olmadığı d uzaklık fonksiyonundan türeyen normun özelliklerine bağlıdır.

Tanım 4.2

$\| \cdot \| : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}_+$ normu tanımlansın. Eğer $\forall y_1, y_2 \in \mathbf{R}^k$ için

- i. $|y_{1i}| \leq |y_{2i}|, i = 1, \dots, k$ olduğunda $|y_1| \leq |y_2|$ sağlanıyor ise $\| \cdot \|$ normu monotondur.
- ii. $|y_{1i}| \leq |y_{2i}|, i = 1, \dots, k$ ve bazı j için $|y_{1j}| < |y_{2j}|$ olduğunda $\|y_1\| < \|y_2\|$ sağlanıyor ise $\| \cdot \|$ normu kesin monotondur.

Teorem 4.11

Eğer $\| \cdot \| : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}_+$ normu monoton ve x^* vektörü (4.5) probleminin

- i) optimal çözümü ise o halde $x^* \in X_{w-par}$;
- ii) tek optimal çözümü ise o halde $x^* \in X_{par}$

Teorem 4.12

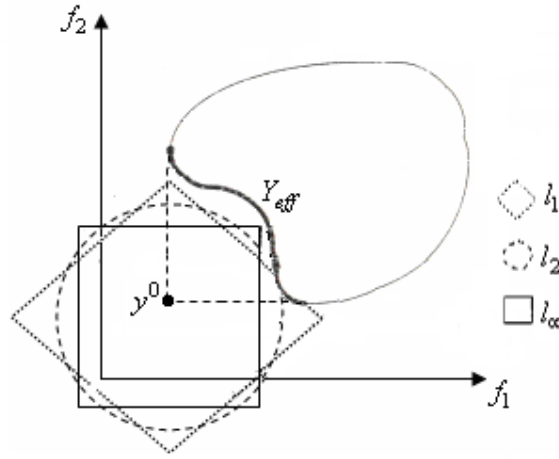
Eğer $\| \cdot \| : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}_+$ normu kesin monoton ve x^* vektörü (4.5) probleminin optimal çözümü ise o halde $x^* \in X_{par}$.

Bilindiği üzere, d uzaklık fonksiyonu simetrik, pozitif tanımlı ve üçgen eşitsizliğini sağlar ise metrik olarak adlandırılır. Bu yöntemde uzaklık ölçümü için normlardan türeyen metrikler üzerinde durulacaktır. Literatürde sıklıkla l_p norm ailesinden türeyen normlar kullanılmaktadır:

$1 \leq p < \infty$ için $\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^p \right)^{1/p}$ ifadesi l_p normunun genel hali olup, $p=1$ için $l_1 = \sum_{i=1}^k |y_i|$

normu, $p=2$ için $l_2 = \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 \right)^{1/2}$ *Euclid normu*, $p=\infty$ için $l_\infty = \max(|y_1|, \dots, |y_k|)$

Tchebycheff normu elde edilir. p değeri yükseldikçe problemin çözümü zorlaşmaktadır.



Şekil 4.3 Çeşitli normlara göre uzlaşık programlama probleminin geometrik gösterimi.

Bu yöntemin geometrik gösteriminden de görüldüğü üzere, seçilen norma göre bu yöntemin bulacağı çözüm farklılık göstermektedir. Geometrik yorumu kolaylaştırmak için $\{y: \|y - y_0\| \leq c\}$ seviye kümesi göz önüne alınabilir. Bu küme ideal noktaya en az c uzaklığı kadar yakın olan noktaları içerir. O halde yöntemin amacı seviye kümesi ile uygun amaç kümesi Y 'nin kesişimleri boş olmayacak şekilde en küçük c değerini bulmaktır (Ehrgott, 2000).

İlk defa Bowman (1976) tarafından uzlaşık programlama probleminin ağırlıklı yaklaşım olarak çözülmesi önerilmiştir. Böylece ağırlık vektörü değiştirilerek farklı çözümler elde edilir.

$\forall i=1, \dots, k$ için $w_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ olmak üzere

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - y_i^0|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty) \quad (4.6)$$

problemi *ağırlıklı l_p problemi* olarak adlandırılır. Özel olarak $p=\infty$ için *ağırlıklı*

Tchebycheff problemi izleyen şekildedir:

$$\min_{x \in X} \max_{i=1, \dots, k} \left(w_i |f_i(x) - y_i^0| \right) \quad (4.7)$$

Eğer ideal nokta global olarak biliniyor ise, (4.6) ve (4.7) problemlerinde mutlak değer ihmal edilebilir. (4.7) problemi diferansiyellenemeyen yapıda olup eğer amaç ve kısıtlama fonksiyonları diferansiyellenebiliyorsa (4.7) problemi diferansiyellenen hale dönüştürülebilir:

$$\min \alpha \quad (4.8)$$

$$f_i(x) - y_i^0 \leq \alpha, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

$$x \in X$$

Ağırlıklı l_p problemi $p = 1$ için ağırlıklı toplam problemine dönüşür:

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - y_i^0| = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) - \sum_{i=1}^k w_i y_i^0$$

(Miettinen, 1999).

Teorem 4.13

$x^*, p \in [1, \infty)$ için (4.6) probleminin optimal çözümü olsun. Eğer

- i. x^* , tek optimal çözüm ise veya
- ii. tüm ağırlık katsayıları pozitif ise

$$x^* \in X_{par}.$$

İspat

$x^* \notin X_{par}$ olsun. O halde

- i. $\forall i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ ve en az bir j indeksi için $f_j(x^0) < f_j(x^*)$ olacak şekilde bir $x \in X$ çözümü vardır ve bu çözümün (4.6) probleminin optimal çözümü olduğu aşıkardır. Ancak bu durum x^* 'ın tek optimal çözüm olması ile çelişir.
- ii. $w_i > 0$ olduğundan $\forall i = 1, \dots, k$ için $0 \leq w_i(f_i(x) - y_i^0) \leq w_i(f_i(x^*) - y_i^0)$ ve en azından bir j indeksi için $w_j(f_j(x) - y_j^0) < w_j(f_j(x^*) - y_j^0)$ elde edilir. Bu eşitsizliğin p . kuvvetini alıp

toplamı alınırsa $\sum_{i=1}^k w_i(f_i(x) - y_i^0) < \sum_{i=1}^k w_i(f_i(x^*) - y_i^0)$ eşitsizliği sağlanır. Pozitif ağırlıklı

l_p normu güçlü monoton artan olduğundan eşitsizliğin her iki tarafının $(1/p)$. kuvveti alınabilir. Ancak bu durum x^* 'ın (4.6) probleminin optimal çözümü olmasına zıttır. ■

Teorem 4.14

x^* , (4.7) probleminin optimal çözümü olsun. Eğer her $w_i \in \mathbf{R}_+^k$, $i = 1, \dots, k$ ise $x^* \in X_{w-par}$.

İspat

$x^* \notin X_{w-par}$ olsun. O halde $\forall i = 1, \dots, k$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olacak şekilde $x \in X$ mevcuttur.

Buradan $\forall i$ için $f_i(x) - y_i^0 < f_i(x^*) - y_i^0$ elde edilir. Ancak bu durum x^* 'in optimal çözüm olması ile çelişir. ■

İdeal nokta yerine referans noktası kullanılacak ise $y^r \leq y^0$ sağlanması durumunda yukarıdaki teoremler geçerli olacaktır. Bu durumda $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^k$ olmak üzere $y_i^u = y_i^0 - \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$ olacak şekilde $y^u \in \mathbf{R}^k$ vektörüne *ütopya noktası* denir. İdeal nokta yerine ütopya noktasını kullanmanın sağladığı avantaj sıradaki teoremdedir.

Teorem 4.15 [Choo ve Atkins, 1983]

$X \subset \mathbf{R}^n$ ve $x^* \in X$ uygun karar vektörü verilsin. $x^* \in X_{w-par}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\min_{x \in X} \max_{i=1, \dots, k} w_i (f_i(x) - y_i^u) \quad (4.9)$$

probleminin bir optimal çözümü x^* olacak şekilde $w \in \mathbf{R}_+^k$ olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow w_i = 1/(f_i(x^*) - y_i^u)$ sonlu ve pozitif ağırlıklar olsun. x^* , (4.9) probleminin optimal çözümü olmasın. O halde

$$\max_i w_i (f_i(x) - y_i^u) < \max_i \frac{1}{f_i(x^*) - y_i^u} (f_i(x^*) - y_i^u) = 1$$

$$\Rightarrow w_i (f_i(x) - y_i^u) < 1, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow f_i(x) - y_i^u < f_i(x^*) - y_i^u, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow f(x) < f(x^*)$$

elde edilir ancak bu durum $x^* \in X_{w-par}$ ile çelişir. ■

Ağırlıklı l_p probleminin tüm Pareto optimal çözümleri bulabilmesi için konvekslik şartı gerekir. Yukarıdaki teorem ise ağırlıklı Tchebycheff probleminin konvekslik şartı gerektirmeden Pareto optimal çözümleri karakterize eden koşulları vermektedir.

4.1.5 Konik Skalerleştirme Yöntemi

Gasımov (2001) tarafından geliştirilen yönteme göre çok kriterli optimizasyon problemini skalerleştirmek için amaç fonksiyonları ve kısıtlamalar üzerinde herhangi bir varsayım gerektirmeden amaç fonksiyonları birleştirilerek koniye göre artan konveks fonksiyon oluşturulur. Bu skaler fonksiyonun minimal çözümleri ise verilen çok kriterli optimizasyon probleminin Benson asıl minimal çözümlerini karakterize eder. Bu yöntemin diğer yöntemlere göre en önemli üstünlüğü Pareto optimal çözümleri karakterize ederken amaç fonksiyonları veya kısıtlama fonksiyonları üzerinde konvekslik koşulunu gerektirmez. Böylece konveks olmayan çok kriterli optimizasyon probleminin çözümü için bir yaklaşım önerilmiştir. Diğer taraftan eğer başlangıçta amaç fonksiyonları lineer veya konveks ise bu yaklaşım konveksliği korur.

Konik skalerleştirme yöntemine geçmeden önce aşağıdaki tanım ve teoremlere ihtiyaç vardır:

Tanım 4.3

Y , reel lineer uzay olmak üzere $K \subset Y$ aşikâr olmayan konveks konisi verilsin. $\emptyset \neq B \subset K$ konveks küme olsun. Eğer bazı $\lambda > 0$ ve bazı $b \in B$ için sıfırdan farklı her $y \in K$ elemanı $y = \lambda b$ şeklinde bir tek gösterime sahip ise B kümesine K konisi için bir *baz* denir.

Gasımov (2001) çalışmasında, konveks sivri uçlu ve kapalı sınırlı baza sahip bir koni tarafından sıralanmış reel normlu uzayda konveks olmayan çok kriterli optimizasyon problemini göz önüne almıştır. Bu çalışmada konveks ve koniye göre monoton fonksiyonlar tanıtılmış ve bu fonksiyonların minimal noktasından yararlanılarak Benson asıl minimal noktaların karakterizasyonu ile ilgili teorem verilmiştir. Literatürdeki diğer çalışmalara bakıldığında asıl minimal noktaların karakterizasyonu için konvekslik, koni için konvekslik veya koni için sınırlılık gibi koşullara ihtiyaç duyulurken Gasımov çalışmasında bu tür ek koşullar olmadan Benson asıl minimal noktasını karakterize etmiştir.

$(Y, \|\cdot\|)$ reel normlu uzayı; kapalı sivri uçlu, konveks $K \subset Y$ konisi ile kısmi sıralanmış olsun. K^* pozitif dual konisi ve $K^\#$ kesin dual koni olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$U = \{(u, \alpha) \in K^* \times \mathbf{R}_+ \mid \alpha \|y\| - \langle y, u \rangle \leq 0, \forall y \in K\} \quad (4.10)$$

$$U^\# = \{(u, \alpha) \in K^\# \times \mathbf{R}_+ \mid \alpha \|y\| - \langle y, u \rangle < 0, \forall y \in K - \{0\}\} \quad (4.11)$$

Yardımcı Teorem 4.2

$(u, \alpha) \in U$ ($(u, \alpha) \in U^\#$) olmak üzere $g : Y \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu

$$g(y) = \alpha \|y\| + \langle y, u \rangle \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlansın. O halde g fonksiyonu Y üzerinde monoton artan (güçlü monoton artan) fonksiyondur.

İspat

$(u, \alpha) \in U$ olsun. Koniye göre monoton artan fonksiyon tanımına göre $y \leq_K s \Rightarrow g(y) \leq g(s)$, $\forall y, s \in K$ gösterilmelidir. $y \leq_K s \Leftrightarrow s - y = k \in K$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} g(y) - g(s) &= g(s - k) - g(s) \\ &= \alpha \|s - k\| + \langle s - k, u \rangle - \alpha \|s\| - \langle s, u \rangle \leq \alpha \|k\| - \langle k, u \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Buradan $g(y) \leq g(s)$ elde edilir. Güçlü monoton artan olduğunu göstermek için $(u, \alpha) \in U^\#$ ve $y \leq_K s \Leftrightarrow s - y = k \in K - \{0\}$ olmak üzere benzer yolla ispat edilir. ■

Teorem 4.16 [Gasimov, 2001]

$(Y, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay, $K \subset Y$ konveks koni ve $\emptyset \neq S \subset Y$ verilsin. $(u, \alpha) \in U^\#$ için

$$\min_{y \in S} g(y) = g(s) \quad (4.13)$$

olsun; burada g , (4.12)'de tanımlanan bir fonksiyondur. O halde s vektörü S kümesinin Benson asıl optimal çözümüdür.

İspat

(4.13)'e göre $\alpha \|s\| + \langle s, u \rangle \leq \alpha \|y\| + \langle y, u \rangle$. Buradan

$$\alpha \|y - s\| + \langle y - s, u \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S \quad (4.14)$$

$\forall t \in \text{cone}(S + K - \{s\})$ için $t = \lambda(y + k - s)$ olacak şekilde $y \in S$, $k \in K$, $\lambda \geq 0$ mevcuttur.

O halde g 'nin de monoton özelliğinden

$$g(t) = \lambda(\alpha \|y - s + k\| + \langle y - s + k, u \rangle) \geq \lambda(\alpha \|y - s\| + \langle y - s, u \rangle) \geq 0$$

elde edilir. Öyleyse $\forall t \in \text{cone}(S + K - \{s\})$ için $g(t) \geq 0$ 'dır.

Keyfi $y \in \text{clcone}(S + K - \{s\})$ sabitini göz önüne alalım. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ olacak şekilde

bir $\{y_n\} \in \text{cone}(S + K - \{s\})$ mevcuttur. $\forall t \in \text{cone}(S + K - \{s\})$ için $g(t) \geq 0$

olduğundan $g(y_n) = \alpha \|y_n\| + \langle y_n, u \rangle \geq 0$; $\forall n \in N$ elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için

$$g(y) = \alpha \|y\| + \langle y, u \rangle \geq 0; y \in \text{clcone}(S + K - \{s\}) \quad (4.15)$$

bulunur.

s 'nin S kümesinin Benson asıl minimal noktası olmadığını varsayalım. O halde bazı $\bar{y} \in \text{clcone}(S + K - \{s\}) \cap (-K \setminus \{0\})$ mevcuttur. g güçlü monoton olduğundan $g(\bar{y}) < 0$ elde edilir. Ancak bu durum (4.15) ile çelişir. ■

Bu teoremden yararlanılarak konik skalerleştirme yöntemi ile ilgili temel teoremler verilebilir:

$$W = \{(\alpha, w) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^k : 0 \leq \alpha < \min\{w_1, \dots, w_p\}\}. \quad (4.16)$$

Teorem 4.17 [Gasimov, 2001]

Bazı $(\alpha, w) \in W$ için $x^* \in X$ uygun karar vektörü (4.17)'de verilen skaler minimizasyon probleminin bir optimal çözümü olsun:

$$\min_{x \in X} \alpha \sum_{i=1}^k |f_i(x)| + \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (4.17)$$

O halde x^* , (3.1) probleminin Benson asıl optimal çözümüdür.

Teorem 4.18 [Gasimov, 2001]

$x^* \in X$, (3.1) probleminin Benson asıl optimal çözümü olsun. O halde x^* vektörünü (4.18)'de verilen skaler minimizasyon probleminin optimal çözümü yapacak bir $(\alpha, w) \in W$ vektörü mevcuttur:

$$\min_{x \in X} \alpha \sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(x^*)| + \sum_{i=1}^k w_i (f_i(x) - f_i(x^*)). \quad (4.18)$$

(4.18)'de verilen fonksiyon konik skalerleştirme fonksiyonunun matematiksel ifadesidir.

Bilindiği üzere özellikle konveks olmayan çok kriterli optimizasyon problemleri için bazı skalerleştirme yöntemleri asıl Pareto optimal çözümleri destekleyememektedir. Gasimov (2001) ise konik skalerleştirme tekniğinde Pareto optimal çözümlerin hiperdüzlem yerine koniler aracılığı ile desteklenmesini önermiştir. Bu durumda uygun destek koniler aracılığı ile tüm Pareto optimal çözümler bulunabilir.

$x^* \in X$, (3.1) probleminin Pareto optimal çözümü ise (4.19)'da verilen *ötelenmiş problem*'inin de Pareto optimal çözümüdür: $a \in \mathbf{R}^k$ keyfi vektör olmak üzere

$$\min_{x \in X} (f_1(x) - a_1, \dots, f_k(x) - a_k) \quad (4.19)$$

Eğer herhangi Pareto optimal çözüm bilinmiyor ise bu durumda (4.18)'de verilen konik skalerleştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilebilir:

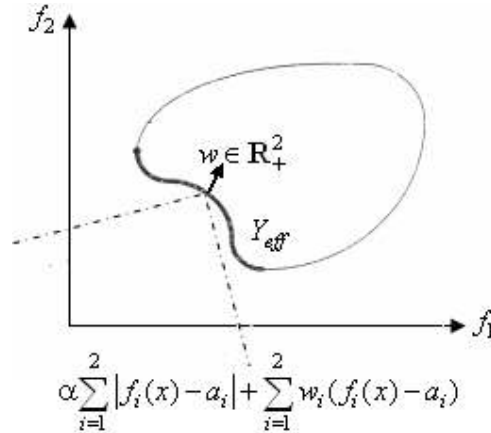
$$\min_{x \in X} \alpha \sum_{i=1}^k |f_i(x) - a_i| + \sum_{i=1}^k w_i (f_i(x) - a_i) \quad (4.20)$$

O halde konik skalerleştirme yöntemi kullanılarak Benson asıl optimal çözümler karakterize edilebilir:

Sonuç 4.2

$x^* \in X$ uygun karar vektörünün Benson asıl optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul x^* vektörünün (4.20) probleminin optimal çözümü olacak şekilde $a \in \mathbf{R}^k$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $w \in \mathbf{R}_+^k$, $(\alpha, w) \in W$ değerlerinin mevcut olmasıdır.

Burada dikkat edilmesi gereken özellik $\alpha = 0$ için ağırlıklı toplam problemi elde edileceğinden desteklenemeyen Pareto optimal çözümlerin bulunabilmesi için $\alpha > 0$ olmalıdır (Gasimov ve Üstün, 2006).



Şekil 4.4 Konik skalerleştirme yönteminin geometrik gösterimi.

Konik skalerleştirme yönteminin geometrik ifadesini kolaylaştırmak için

$$\left\{ y \in \mathbf{R}^k : \alpha \sum_{i=1}^k |f_i(x) - a_i| + \sum_{i=1}^k w_i (f_i(x) - a_i) \leq c \right\} \text{ seviye kümesi göz önüne alınabilir. Bu}$$

küme $c = 0$ için tepe noktası $a \in \mathbf{R}^k$ 'da bulunan, yönü $w \in \mathbf{R}_+^k$ vektörü ile belirlenen ve tepe açısı $a \in \mathbf{R}^k$ vektörüne bağlı olan bir konidir. O halde bu yöntemin amacı, seviye kümesi ile uygun amaç kümesi Y 'nin kesişimleri boş olmayacak şekilde minimum c değerini bulmaktır. Bir diğer ifade ile bu yöntem, uygun amaç kümesinde $a \in \mathbf{R}^k$ ve $(\alpha, w) \in W$ vektörleri ile belirlenen koninin Pareto etkin yüzeyi desteklediği noktayı bulmayı hedefler.

Konik skalerleştirme yönteminin avantajları şöyle sıralanabilir:

- i. Amaç fonksiyonları ve uygun çözüm kümesi için konvekslik şartı aranmaz.
- ii. Karar vericinin tercihlerini ve isteklerini modele yansıtan önsel bilgiye dayalı bir yöntemdir. Karar verici amaç fonksiyonlarına ait istek düzeylerini $a \in \mathbf{R}^k$; amaç fonksiyonlarının ağırlıkları ile ilgili tercihlerini $(\alpha, w) \in W$ vektörü ile modele dâhil eder.
- iii. Pareto (asıl) optimal çözümlerin bulunması için ek probleme ihtiyaç yoktur.
- iv. NP-zor problemlerinde skaler problemin bir kez çözülmesiyle karar vericiyi tatmin edecek çözüme ulaşılmasını sağlar (Üstün, 2007).

Yukarıda da bahsedildiği gibi konik skalerleştirme yönteminin bahsedilen diğer yöntemlere göre birçok avantajı bulunmaktadır. Şimdi konik skaler problemin çözülebilmesi için mevcut algoritmalara geçilebilir:

Klasik Lagrangian ve ceza fonksiyonları ile dualite ilişkisine dayalı algoritmalar yalnızca kısıtlamalı optimizasyon problemlerinin bazı özel sınıflarına uygulanabilmektedirler. Bu sebeple dual problemi elde etmek için literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Genişletilmiş Lagrangian yaklaşımının ortaya çıkışı ile dualite ilişkisine dayanan etkin yöntemler bulunmuştur. Dual problemler genellikle diferansiyellemeyen konveks problemlerdir ve dual problemi çözmek için genellikle diferansiyellenemeyen minimizasyon teknikleri örneğin subgradient yöntemler uygulanmaktadır (Burachik vd., 2006). Ancak konveks olmayan dualite teorisinde optimal çözümler elde edilirken dual aralık denilen asıl ve dual problemlerin optimal çözümleri arasında farklılık oluşmaktadır.

Azimov ve Gasimov (1999, 2002), konveks olmayan optimizasyon problemlerinde sıklıkla karşılaşılan dual aralığı gidermek için asıl problem üzerinde herhangi konvekslik veya diferansiyellenebilirlik şartı gerektirmeyen genişletilmiş sivri Lagrangian yaklaşımını önermişlerdir. Bunu takip eden çalışmalar ile Gasimov ve Üstün (2005, 2006, 2007) konveks olmayan ve diferansiyellenemeyen skaler problemin çözümü için etkin algoritmalar geliştirmiştir.

4.2 Genişletilmiş Sivri Lagrangian Dualite Problemi

Dualite teorileri, optimizasyon problemleri için yapılan analitik ve algoritmik çalışmalar hakkında önemli ilişkiler sağlamaktadır. Verilen asıl problemin dual problemini elde etmek için çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Örneğin konveks dualite teorisi için dual problem, Lagrangian fonksiyonu veya Perturbasyon fonksiyonu yaklaşımı ile elde edilebilir. Eğer amaç

ve kısıtlama fonksiyonları konveks değil ise lineer olmayan programlama problemi klasik Lagrangian fonksiyonu yaklaşımı ile çözüldüğünde dual aralık (gap) oluşmaktadır. Özellikle konveks olmayan optimizasyon problemlerinde karşılaşılan dual aralığı gidermek için Rockafellar çalışmasında klasik Lagrangian yaklaşımı yerine karesel ceza parametresi içeren genişletilmiş Lagrangian yaklaşımı kullanılmasını önermiştir. Dual aralığın giderilmesi için bir diğer yaklaşım Azimov ve Gasimov (1999) tarafından ortaya atılan genişletilmiş sivri Lagrangian yaklaşımıdır. Klasik Lagrangian probleminde kısıtlama kümesi X 'in (f, g) dönüşümü altındaki görüntü kümesi G oluşturularak bu kümede destek hiperdüzlem aracılığı ile optimal dual amaç fonksiyonu değeri bulunur (Bazaraa vd., 1993). Konveks analiz teorisinde optimallik koşulları ve dualite teoremlerinde önemli rol oynayan subgradientlerin elde edilmesinde destek hiperdüzlemlerden yararlanılırken Azimov ve Gasimov (1999) konveks olmayan problemlerde subgradientleri tanımlamak için destek konilerden yararlanmışlardır. Genişletilmiş sivri Lagrangian problemi, dual fonksiyonu özelliklerinden bağımsız olarak her durumda konkavdır. Asıl problem üzerine herhangi konvekslik veya diferansiyellenebilirlik kısıtlamaları getirmeksizin, asıl problem ile dual problemin optimal çözümlerinin eşit olduğu gösterilmiştir (Azimov ve Gasimov., 1999, 2002; Gasimov, 2002).

X herhangi bir metrik uzay, $\emptyset \neq S \subset X$ ve $f : S \rightarrow \mathbf{R}$, $g : S \rightarrow \mathbf{R}^m$ fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki eşitlik kısıtı altında lineer olmayan programlama problemi göz önüne alınsın:

$$(P) : \text{Asıl (Primal) Problem} \quad (4.21)$$

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in X$$

Her $x \in X$ ve $y \in \mathbf{R}^m$ için

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{Eğer } x \in S \text{ ve } f(x) = y \\ +\infty & \text{Aksi halde} \end{cases} \quad (4.22)$$

fonksiyonu tanımlansın. O halde (P) problemi ile ilgili pertürbasyon fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$$v(y) = \inf_{x \in S} \Phi(x, y) \quad (4.23)$$

(P) 'nin konveks olması durumunda (P_0) problemi tanımlansın. Bu durumda klasik Lagrangian fonksiyonu:

$$L_0(x, y^*) = f(x) + \langle g(x), y^* \rangle, \quad \forall (x, y^*) \in X \times (\mathbf{R}^m)^* = \mathbf{R}^m \quad (4.24)$$

ve Lagrangian dual fonksiyonu:

$$h_0(y^*) = \inf_{x \in S} L_0(x, y^*) \quad (4.25)$$

olmak üzere konveks durumda klasik Lagrangian dual problemi izleyen şekildedir:

(P_0^*) : Dual Problem

$$\max_{y^* \in \mathbf{R}^m} h_0(y^*) \quad (4.26)$$

(P_0) ve (P_0^*) problemlerinin optimal değerleri sırası ile $\inf P_0 = \inf_{x \in S} \sup_{y^* \in \mathbf{R}^m} L_0(x, y^*)$ ve

$\sup P_0^* = \sup_{y^* \in \mathbf{R}^m} \inf_{x \in S} L_0(x, y^*)$ olmak üzere bu iki değer arasında şu ilişki mevcuttur:

$$\inf P_0 \geq \sup P_0^* \quad (4.27)$$

Bu eşitsizlik *dual aralık* olarak bilinir. Rockafellar (1970), Ekeland ve Temam (1976) ve Bazaraa vd. (1993) (4.27)'de eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul olarak L_0 Lagrangian fonksiyonunun eğer noktasının mevcut olmasını göstermişlerdir. Ayrıca $x \in S$ ve $u \in (\mathbf{R}^m)^* = \mathbf{R}^m$ için $(x, u) \in S \times \mathbf{R}^m$ vektörünün L_0 fonksiyonunun eğer noktası olabilmesi için gerek ve yeter koşul: v pertürbasyon fonksiyonu olmak üzere x , (P) probleminin (global) optimal çözümü olması ve $v(y) \geq v(0) + \langle y, u \rangle$, $\forall y$ olmasıdır.

Ancak bilindiği üzere konvekslik varsayımı olmadığı durumda bu eşitsizliği sağlayacak u vektörünü bulmak mümkün olmayabilir. Bu durumda konveks olmayan programlamada oluşacak dual aralık, Lagrangian fonksiyonuna lineer veya karesel ceza terimi ekleyerek elimine edilebilir. Bu tür Lagrangian fonksiyonu genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu olarak bilinir. Genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu hakkındaki tüm yaklaşımlar Rockafellar ve Wets'in (1998) çalışmasında genelleştirilmiştir (Gasimov, 2002).

(P) asıl problemi ile ilişkili genişletilmiş sivri Lagrangian fonksiyonu $x \in S$, $y \in \mathbf{R}^m$, $u \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}_+$ için $L: S \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+) \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere:

$$L(x, u, c) = \inf_{y \in \mathbf{R}^m} \{ \Phi(x, y) + c \|y\| - \langle y, u \rangle \} = f(x) + c \|g(x)\| - \langle u, g(x) \rangle \quad (4.28)$$

Genişletilmiş sivri Lagrangian dual fonksiyonu $h: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere

$$h(u, c) = \inf_{x \in S} L(x, u, c) \quad (4.29)$$

O halde verilen (P) probleminin genişletilmiş sivri Lagrangian dual problemi (P^*) izleyen şekilde tanımlanır:

(P^*) : Genişletilmiş Sivri Lagrangian Dual Problem

$$\sup_{(u,c) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+} h(u,c) \quad (4.30)$$

(Gasımov, 2002). Şimdi $\inf P = \sup P^*$ olması yani asıl problem ile genişletilmiş sivri Lagrangian dual probleminin optimal çözümlerinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilecektir:

Teorem 4.19 [Gasımov, 2002]

$\inf P$ sonlu olsun. O halde $\bar{x} \in S$ ve $(\bar{u}, \bar{c}) \in (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+)$ elemanlarının $S \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+)$ kümesinde tanımlı genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun eyer noktası olması için gerek ve yeter koşul $\bar{x}$ 'nin (P) asıl probleminin bir çözümü, $(\bar{u}, \bar{c})$ 'nin (P^*) dual probleminin bir çözümü ve $\inf P = \sup P^*$ olmasıdır.

Teorem 4.20 [Gasımov, 2002]

$x \in S$ ve $(u,c) \in (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+)$ elemanlarının $S \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+)$ kümesinde tanımlı genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun eyer noktası olması için gerek ve yeter koşul x 'in (P) 'nin bir çözümü olması ve $v(y) \geq v(0) + \langle y, u \rangle - c\|y\|$, $\forall y$ olmasıdır. Burada v , (4.23)'te tanımlanan bir pertürbasyon fonksiyonudur.

Teorem 4.21 [Gasımov, 2002]

(P) asıl problemde f ve g fonksiyonları sürekli, S kompakt ve uygun bir çözüm mevcut olsun. O halde $\inf P = \sup P^*$ ve (P) 'nin bir çözümü vardır. Ayrıca bu durumda genişletilmiş sivri Lagrangian dual fonksiyonu h konkav fonksiyondur ve $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$ üzerinde her yerde sonludur.

Teorem 4.21'de tüm koşullar sağlansa bile $S(P^*)$: dual problemin çözüm kümesi boş olabilir.

Örnek 4.1 [Burachik vd., 2006]

$f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonları $f(x) = -|x|$ ve $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ ile tanımlansın. $X = [-1, 1]$ olsun.

$S(P) = 0$ ile $\inf P = \sup P^* = 0$ olduğunu göstermek kolaydır. $S(P^*)$ 'ı hesaplayalım:

$$\arg \min f(x) + c\|g(x)\| - ug(x) = \arg \min -|x| + \frac{c-u}{2}x^2; \quad x \in [-1, 1]$$

$= \left\{ \left\{ \frac{1}{c-u}, -\frac{1}{c-u} \right\}, c-u > 0 \text{ veya } \{1, -1\}, c-u \leq 0 \right\}$. Buradan h dual fonksiyonu:

$$h(u, c) = \begin{cases} \frac{-1}{2(c-u)}, & c-u > 0 \text{ veya } -1 + \frac{c-u}{2}, & c-u \leq 0 \end{cases} \text{ elde edilir. } \bar{h} = \sup_{(u, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+} h(u, c) = 0$$

olup bu supremum değerini veren $(\bar{u}, \bar{c})$ mevcut olmadığından $S(P^*) = \emptyset$ 'dir.

$S(P^*) \neq \emptyset$ olması için teoremler ve yakınsaklık koşulları izleyen bölümde verilecektir.

Teorem 4.22 [Gasımov, 2002]

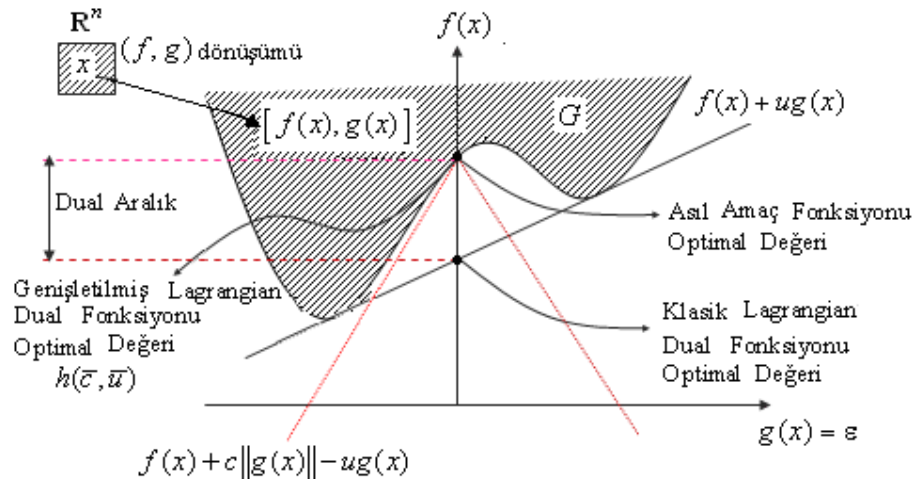
$\inf P = \sup P^*$ olsun ve bazı $(\bar{u}, \bar{c}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$ ile $\bar{x} \in S$ için

$$\min_{x \in S} L(x, \bar{u}, \bar{c}) = f(\bar{x}) + \bar{c} \|g(\bar{x})\| - \langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle$$

olduğunu varsayalım. O halde $\bar{x}$ 'nin (P) probleminin bir çözümü ve $(\bar{u}, \bar{c})$ 'nin (P^*) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $g(\bar{x}) = 0$ olmasıdır.

Genişletilmiş sivri Lagrangian fonksiyonu yardımı ile dual aralığın nasıl yok edildiği geometrik olarak Şekil 5.5'te ifade edilmiştir. Kolaylık açısından geometrik gösterim, bir eşitlik kısıtına sahip konveks olmayan problem için verilmiştir. Keyfi $c \geq 0$, $u \in \mathbf{R}$ ve $x \in \mathbf{R}^n$ için genişletilmiş Lagrangian dual problemi, $f(x) + c \|g(x)\| - ug(x)$ konisinin $\mathbf{R}^n$ 'in (f, g) dönüşümü altında oluşan G görüntü kümesinde minimize edilmesidir yani koninin görüntü kümesine aşağıdan destek noktasının bulunmasıdır.

Genişletilmiş Lagrangian dual probleminin optimal çözümü ile asıl amaç fonksiyonunun optimal çözümü eşit olduğundan özellikle konveks olmayan problemlerin optimal çözümleri (P^*) problemi yardımıyla kolaylıkla bulunabilir (Üstün, 2007).



Şekil 4.5 Genişletilmiş sivri Lagrangian dualite (Gasımov ve Üstün, 2006).

4.3 Genişletilmiş Sivri Lagrangian Dualite Probleminin Çözümü

Bir önceki bölümde (P) ve (P^*) problemlerinin optimal çözümlerinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşullar Teorem 4.19 – 4.21’de verildi. Ayrıca (P^*) probleminin dual fonksiyonu olan h ’nin özelliklerine değinildi. Bu teoremlerden ve özelliklerden istifade ederek (P^*) probleminin çözümü yani h dual fonksiyonunun maksimizasyonu için Gasımov (2002) tarafından Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (MSG) önerilmiştir. Böylece asıl problemin optimal değerine (P^*) problemini çözerek kolaylıkla ulaşılır.

Şimdi Teorem 4.21 koşullarının sağlandığını varsayarak aşağıdaki dual problemi

$$\max_{(u,c)} h(u,c) = \min_{x \in S} L(x,u,c) = \min_{x \in S} \{f(x) + c \|g(x)\| - u'g(x)\} \quad (4.31)$$

$$(u,c) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$$

ve genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunu minimize eden noktalar kümesini göz önüne alalım:

$$S(u,c) = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = \arg \min \{f(x) + c \|g(x)\| - u'g(x); x \in S\} \right\} \quad (4.32)$$

Bilindiği gibi f ile g sürekli fonksiyonlar ve S kompakt küme olduğunda h dual fonksiyonu konkavdır. Aşağıda bu özellikten yararlanılarak bir teorem verilecektir:

Teorem 4.23 [Gasımov, 2002]

$\emptyset \neq S \subset X$ kompakt küme ve f, g sürekli fonksiyon olsunlar. Öyle ki her $(\bar{u}, \bar{c}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$ için $S(\bar{u}, \bar{c})$ boş küme değildir. Eğer $\bar{x} \in S(\bar{u}, \bar{c})$ ise o halde $(-g(\bar{x}), \|g(\bar{x})\|), (\bar{u}, \bar{c})$ noktasında h fonksiyonunun bir subgradientidir.

4.3.1 Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (MSG)

Bu yöntem, genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu temelli dual problemin çözümüne yönelik olarak Gasımov (2002) tarafından geliştirilmiştir. MSG yöntemi, ardışık olarak kısıtlamasız minimizasyon algoritmasıdır. Teorik olarak, her bir adımda adım uzunluğu parametrelerini yenilemek için, genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun kısıtlamasız global minimum değerleri kullanılır. Konveks olmayan kısıtlamasız optimizasyon problemlerini çözmek için mevcut olan global optimizasyon yöntemlerinin yetersizliği nedeniyle MSG algoritmasında genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun kısıtlamasız lokal minimum değerleri de kullanılabilir (Gasımov ve Üstün, 2005). Buna göre MSG algoritmasının adımları şöyledir:

Başlangıç Adımı:

$c_1 \geq 0$ olacak şekilde (u_1, c_1) vektörünü seç ve $k = 1$ alarak temel adıma geç.

Temel Adım:

- i. Verilen (u_k, c_k) için izleyen alt problemi çözülür:

$$\min_{x \in S} f(x) + c_k \|g(x)\| - \langle g(x), u_k \rangle$$

x_k , alt problemin keyfi bir çözümü olsun. Eğer $g(x_k) = 0$ ise dur. Teorem 5.22'ye göre

(u_k, c_k) vektörü (P^*) probleminin, x_k ise (P) probleminin bir çözümüdür. Aksi halde

2. adıma gidilir.

- ii. s_k ve ε_k pozitif sabit adım uzunlukları olmak üzere

$$u_{k+1} = u_k - s_k g(x_k), \quad c_{k+1} = c_k + (s_k + \varepsilon_k) \|g(x_k)\|$$

için $k = k + 1$ alınır ve 1. adıma dönlür.

s_k, ε_k adım uzunlukları ve yakınsaklık sonuçları için izleyen teorem mevcuttur:

Teorem 4.24 [Gasimov, 2002]

$\{(u_k, c_k)\}$ MSG algoritması tarafından üretilmiş dual değişkenlerin dizisi olsun. Keyfi k için (u_k, c_k) 'nın dual problemin çözümü olmadığı varsayılın yani $\forall k$ için $g_k \neq 0$. $h(u_k, c_k)$, MSG algoritması tarafından k . iterasyonda hesaplanan genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun global minimum değeri ve $h(\bar{u}, \bar{c})$, (P) probleminin asıl-dual optimal değeri olsun. O halde

- a. $0 < h(u_{k+1}, c_{k+1}) - h(u_k, c_k) < (2s_k + \varepsilon_k) \|g(x_k)\|^2, \forall s_k, \varepsilon_k > 0$.
- b. Bir dual çözümün olduğu varsayılın. $d_k = d(z_k, \bar{z})$ optimal dual çözüm $\bar{z}$ ile k . iterasyonda algoritma tarafından hesaplanan dual çözüm z_k arasındaki uzaklık olmak üzere eğer

$$0 < \varepsilon_k < s_k < \frac{2[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)]}{5\|g(x_k)\|^2} \quad (4.33)$$

ise $d_{k+1} - d_k < 0$ 'dır.

- c. Bir dual çözümün olduğu ve Teorem 4.22'nin sağlandığı varsayılın. Eğer

$$0 < \varepsilon_k < s_k = \frac{[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)]}{5\|g(x_k)\|^2} \quad (4.34)$$

ise o halde $h(u_k, c_k) \rightarrow h(\bar{u}, \bar{c})$ (Burachik vd., 2006; Gasimov ve Üstün, 2006).

Burachik vd. (2006), MSG algoritması için yeni bir yakınsaklık analizi ve yeni bir adım uzunluğu bulmuşlardır. Teorem 4.24'te verilen yakınsaklık sonuçlarını geliştirmek için s_k adım uzunluğu (4.34)'te verilen özellik yerine s_k daha genel bir yol ile seçildiği zaman tüm dual değişkenlerin dizisinin yakınsaklığı ispat edilmiştir.

Örnek 4.1'de Teorem 4.21'in tüm koşullarının sağlanması durumunda asıl problemin çözüm kümesi boştan farklı olsa ve dual aralık oluşmasa da dual problemin çözüm kümesinin boş olabileceği gösterilmişti. Literatürde dual çözümlerin varlığını garanti eden koşullar genellikle problem ile ilişkili pertürbasyon fonksiyonunun özelliklerine dayanmaktadır. Ancak bilindiği gibi pertürbasyon fonksiyonunun hesaplanması zor olduğundan alternatif çözümler üretilmiştir. Azimov ve Gasimov (2002), bunun için amaç ve kısıtlama fonksiyonlarına dayalı bir koşul geliştirmiştir. Burachik vd. (2006) çalışmasında ise önce genel olarak seçilen yeni adım uzunluğu parametresine göre MSG algoritması tarafından üretilen $\{z_k\} = \{(u_k, c_k)\}$ dual dizisinin yakınsaklığı ispat edilerek dual çözümlerin varlığı için yeni bir koşul bulunmuştur.

Teorem 4.25 [Burachik vd., 2006]

$\bar{h}$ optimal dual değer yani $\bar{h} = \sup P^*$ olsun. MSG algoritması tarafından üretilen $\{z_k\} = \{(u_k, c_k)\}$ dual dizisi sınırlı olduğunu ve bazı $\eta > 0$ sabiti için adım uzunluğu s_k 'nin

$$s_k \geq \eta \frac{[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)]}{\|g(x_k)\|^2} \quad (4.35)$$

eşitsizliğini sağladığı varsayalım. O halde $\{z_k\}$ dual dizisinin her yığılma noktası bir dual çözümdür. Özel olarak $S(P^*) \neq \emptyset$.

Teorem 4.26 [Burachik vd., 2006]

Eğer $\{z_k\}$ dizisi sınırlı ise yakınsaktır.

Diğer taraftan MSG algoritması ile üretilen asıl değişkenler dizisi $\{x_k\}$ 'nin, asıl problemin çözümüne yakınsamadığı bir örnekle gösterilmiştir. Bu sebeple $\forall k$ ve bazı $\beta > 0$ için $\tilde{x}_k \in X(u_k, c_k + \beta)$ olacak şekilde $\{\tilde{x}_k\}$ yardımcı dizisi tanımlanarak bu dizinin tüm yığılma noktalarının optimalliği sağlanmıştır. Teorem 4.25 ve 4.26 şartlarının sağlanması durumunda $\{\tilde{x}_k\}$ yardımcı asıl dizisinin yığılma noktalarının (P) 'nin çözümü olduğu gösterilmiştir.

(4.35) denkleminde genel olarak verilen adım sayısı özel olarak:

$$\eta \frac{[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)]}{\|g(x_k)\|^2} \leq s_k \leq 2 \frac{[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)]}{\|g(x_k)\|^2}; \quad \eta \in (0, 2) \quad (4.36)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçildiğinde aşağıdaki iki problem birbirine denktir:

i. $\{z_k\}$ dual dizisi sınırlıdır.

ii. $S(P^*) \neq \emptyset$.

$h_k \rightarrow \bar{h}$ yakınsaklığını sağlaması için adım uzunluğu s_k özel olarak şöyle seçilebilir:

$\alpha > 0$, $0 < \delta < 2$ ve $(\bar{u}, \bar{c})$ optimal dual çözüm olmak üzere;

$$0 < s_k = \delta \frac{[h(\bar{u}, \bar{c}) - h(u_k, c_k)] + \alpha(\bar{c} - c_k) \|g(x_k)\|}{[1 + (1 + \alpha)^2] \|g(x_k)\|^2} \quad (4.37)$$

Burada dikkat edilmesi gereken özellik adım uzunluğunun belirlenmesinde optimal dual değere ihtiyaç vardır. (P) 'nin her uygun çözümü $\bar{h}$ için bir üst sınır sağladığından eğer $h(\bar{u}, \bar{c})$ bilinmiyor ise $\bar{h}$ yerine onun tahmincisi olarak bir $\hat{h}$ üst sınırı kullanılabilir Ancak $\hat{h} \geq \bar{h}$ olacak şekilde seçim yapılır ise bazı özellikler sağlanmayacaktır (Burachik vd., 2006).

MSG yönteminin teorik ve pratik yönden avantajı, kısıtlamasız lineer olmayan optimizasyon problemlerini çözebilmek için herhangi konvekslik veya diferansiyellenebilirlik şartı aramamasıdır. Algoritma herhangi bir ceza parametresi kullanmaz ve her adımda kesin artan dual değişkenler dizisi oluşturur. Böylece çözüm sürecinin yakınsak olduğu ispatlanmış yani daima mevcut çözümden daha iyi bir çözümün bulunacağı gösterilmiştir. MSG yöntemi, konveks olmayan birçok problemin çözümünde başarılı sonuçlar elde etmiştir (Gasımov, 2002; Gasımov ve Üstün, 2005, 2006; Burachik vd., 2006)

Ancak yöntemin bazı dezavantajları bulunmaktadır: Her bir adımda adım uzunluğu parametresini yenilemesi durumunda bazı dual değişkenler için hesaplanan genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun lokal minimum değeri, problemin genel asıl-dual optimal değerinden büyük olabilmektedir. Bu durumda algoritma, uygun olan ancak optimal olmayan bir lokal minimum değerini çözüm olarak kabul eder ve durur (Gasımov ve Üstün, 2005). Ayrıca yöntemin başlangıç noktasına olan duyarlılığı, çözüme ulaşmada sürenin uzamasına hatta bazı problemlerde çözüm bulunamamasına yol açabilmektedir (Saraç ve Sipahioğlu, 2004). Burachik vd. (2006) çalışmasında belirttiği gibi bir diğer zorluk adım uzunluğu parametresinin belirlenmesinde asıl-dual optimal amaç fonksiyonu değerinin bilinmesi gerektiridir. Yöntemin bu dezavantajlarını aşmak amacıyla Gasımov vd. (2004) Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemini (F-MSG) geliştirmiştir.

4.3.2 Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (F-MSG)

Bu yöntem, Gasımov tarafından verilen MSG yönteminin dezavantajları göz önünde tutularak geliştirilmesi sonucu Gasımov vd. (2004, 2006); Gasımov ve Üstün, (2007) tarafından genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu temelli dual problemi çözmek için verilmiştir. F-MSG algoritması, başlangıç adımında optimal değerın bilinmesine ve her bir iterasyonda adım uzunluğu parametresini yenilemek için genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun kısıtlamasız global minimum değerine ihtiyaç duymaz. Eğer problemin optimal değeri bilinmiyor ise optimal dual değere yakınsayan çözüm için bir alt ve üst sınırı olan dizi oluşturur (Gasımov vd., 2006).

Şimdi, sıfır dual aralık ve dual çözümlerin varlığı varsayımı altında tekrardan (4.31)'de verilen (P^*) problemini göz önüne alalım.

$$\max h(u, c) = \min_{x \in S} L(x, u, c) = \min_{x \in S} \{f(x) + c \|g(x)\| - u'g(x)\}$$

$$(u, c) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$$

$\tilde{h}$, keyfi reel sayı ve $(u, c) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$ olmak üzere aşağıdaki küme tanımlansın:

$$S(u, c, \tilde{h}) = \{x \in S : L(x, u, c) \leq \tilde{h}\} \quad (4.38)$$

Eğer $\tilde{h} \geq h(u, c)$ ise $S(u, c, \tilde{h}) \neq \emptyset$ olacağı açıktır; burada $h(u, c)$, genişletilmiş Lagrangian fonksiyonun global minimum değeri olarak hesaplanan dual fonksiyon değeridir. $\forall x \in S$ için $\Delta(x, u, c) = L(x, u, c) - h(u, c) \geq 0$ (4.39)

ise aralık genişliğini gösteren parametredir.

Tanım 4.4

Eğer $f(\tilde{x}) \leq \tilde{h}$ ve $g(\tilde{x}) = 0$ olacak şekilde $\exists \tilde{x} \in S$ mevcut ise $\tilde{h}$ reel sayısı (P) problemi için *uygun değer* olarak adlandırılır. Aksi halde $\tilde{h}$, (P) problemi için uygun olmayan değerdir. $\bar{h}$, asıl-dual optimal değer olmak üzere, eğer $\tilde{h} \geq \bar{h}$ ise $\tilde{h}$ uygun değerdir; $\tilde{h} < \bar{h}$ ise $\tilde{h}$ 'nın uygun olmayan değer olacağı açıktır.

F-MSG algoritması, isminden de anlaşıldığı üzere asıl problemin uygun ve uygun olmayan değerlerini baz alarak çalışmaktadır. Algoritmanın işlemesindeki temel düşünce şöyledir:

Keyfi reel sayısı h_1 , başlangıç dual değişkenleri (u_1, c_1) için verilen $L(x, u_1, c_1)$ genişletilmiş Lagrangian probleminin bir üst sınırı olmak üzere $P(h_1)$ problemi tanımlanır:

$P(h_1)$: “ $L(x, u_1, c_1) \leq h_1$ olacak şekilde $x \in S$ çözümü bulmak.”

$P(h_1)$ problemi çözülerek h_1 'in uygun değer olup olmadığı kontrol edilir. Sonraki adımda, h_1 'in uygun değer olup olmamasına bağlı olarak $h_1 = \min\{L_1, h_1 - \Delta_1\}$ veya $h_1 = h_1 + \Delta_1$ şeklinde $P(h_1)$ probleminin üst sınırı güncellenir, burada Δ_1 başlangıçta seçilen pozitif sayı ve L_1 ise $P(h_1)$ 'in çözümünden elde edilen uygun değerdir. Bu süreç h_1 'in uygun olmayan değer olmasına kadar devam eder. Uygun olmayan değer alt sınır olarak kabul edilir. Böylece uygun bir üst sınır ile uygun olmayan bir alt sınır belirlenir. Uygun ve uygun olmayan bitiş noktalarına ulaşırsa uygun değer için $h_1 = h_1 - \Delta_1 / 2$ ve uygun olmayan değer için $h_1 = h_1 + \Delta_1 / 2$ şeklinde güncelleme yapılır. Böylece üst ve alt sınır arasındaki aralık yeterince küçük olduğu zaman optimal çözüme ulaşılmış olunur ve algoritma durur (Gasımov vd., 2006; Gasımov ve Üstün, 2007). Buna göre F-MSG algoritmasının adımları izleyen şekildedir:

Adım 1:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta_1, M$ pozitif sayıları ile keyfi h_1 reel sayısı seçilir. $n = 1, p = 0, q = 0$ alınır.

Adım 2:

$(u_1^n, c_1^n) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$ ile $0 < l_1 < M$ seçilir ve $k = 1$ alınarak $u_k = u_1^n, c_k = c_1^n$ oluşturulur.

Adım 3:

Verilen (u_k, c_k) için izleyen $P(h_n)$ problemi çözülür:

$P(h_n)$: “ $L(x, u_1, c_1) = f(x) + c_k \|g(x)\| - \langle u_k, g(x) \rangle \leq h_n$ olacak şekilde $x \in S$ çözümü bulmak.”

Eğer $P(h_n)$ probleminin bir çözümü yok ise (örneğin; eğer $l(k) > M$ ise) 6. adıma gidilir.

Tersine bir çözüm var ise $g(x_k) = 0$ olup olmadığı kontrol edilir. Eğer $g(x_k) = 0$ (veya $\|g(x_k)\| \leq \varepsilon_1$) ise 5. adıma; aksi halde 4. adıma geçilir.

Adım 4:

Dual değişkenler izleyen şekilde güncellenir:

$u_{k+1} = u_k - \alpha s_k h(x_k), c_{k+1} = c_k + (1 + \alpha) s_k \|h(x_k)\|$ olup burada s_k adım uzunluğu parametresi:

$$0 < s_k = \frac{\delta \alpha [h_n - L(x_k, u_k, c_k)]}{[\alpha^2 + (1 + \alpha)^2] \|g(x_k)\|^2} \quad \text{veya} \quad (4.40)$$

$$0 < s_k = \frac{\delta [\alpha (h_n - L(x_k, u_k, c_k) + (\bar{c} - c_k)) \|g(x_k)\|]}{[\alpha^2 + (1 + \alpha)^2] \|g(x_k)\|^2}, \quad (4.41)$$

burada $\alpha > 0$ ve $0 < \delta < 2$ 'dir.

(4.41) formülünde verilen $\bar{c}$, dual problemin Lagrangian c çarpanının optimal değeridir.

Pratikte ise $\bar{c}$ yerine yeterince büyük bir sayı seçilebilir.

Ayrıca (u_k, c_k) dual değişkenleri ile ilgili olarak s_k parametresinin şu özelliği sağlaması gereklidir:

$$s_k \|g(x_k)\| + c_k - \|u_k\| > l_k \quad (4.42)$$

$k = k + 1$ alınarak $k \rightarrow +\infty$ iken $l_k \rightarrow +\infty$ olacak şekilde l_k güncellenir ve 3. adım tekrarlanır.

Adım 5:

$g(x_k) = 0$ olacak şekilde x_k , $P(h_n)$ probleminin bir çözümü olsun. O halde $L(x_k, u_k, c_k) = f(x_k)$ olur. $q = q + 1$ alınır ve p kontrol edilir. Eğer $p = 0$ ise o halde $\Delta_{n+1} = \Delta_n$; aksi halde $\Delta_{n+1} = \Delta_n / 2$ alınır ve Δ_{n+1} kontrol edilir. Eğer $\Delta_{n+1} < \varepsilon_2$ ise durulur. O halde $f(x_k)$ yaklaşık optimal değer, x_k yaklaşık asıl çözüm ve (u_k, c_k) yaklaşık dual çözümdür. Aksi halde ise $h_{n+1} = \min\{f(x_k), h_n - \Delta_{n+1}\}$, $n = n + 1$ alınır ve 2. adıma gidilir.

Adım 6:

$p = p + 1$ alınır. Eğer $q = 0$ ise $\Delta_{n+1} = \Delta_n$; aksi halde $\Delta_{n+1} = \Delta_n / 2$ alınır. Δ_{n+1} kontrol edilir. $\Delta_{n+1} < \varepsilon_2$ ise durulur. 5. adımdaki gibi yaklaşık optimal değerler elde edilir. Aksi halde $h_{n+1} = h_n + \Delta_{n+1}$, $n = n + 1$ alınarak 2. adıma gidilir.

F-MSG algoritması, iç ve dış döngüden oluşmaktadır: Algoritmanın 3. ve 4. adımı iç döngü olarak kabul edilir. İç döngü, 3. adımda verilen keyfi h_n reel sayısı için $P(h_n)$ probleminin bir çözümünü bulmaya çalışır. Eğer h_n uygun değer ise, $P(h_n)$ probleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm 3. adımda bulunur. Bu adımda k . iterasyonda bulunan çözüm, uygun çözüm olabilir veya olmayabilir. 1. adımda seçilen pozitif ε_1 sayısı, 3. adımda $P(h_n)$ probleminin çözümü olarak bulunan x_k çözümünün uygun çözüm olup olmadığını kontrol etmek için kullanılan hata sınırıdır. Eğer 3. adımda uygun olmayan çözümlerden oluşan sonsuz bir dizi üretilmişse (yani $g(x_k) \neq 0$) dual değişkenleri ve adım uzunluğu parametresi 4. adımdaki gibi güncellenerek bu dizinin uygun bir çözüme yakınsaması sağlanır. Güncellenen dual değişkenler ve adım uzunluğu parametresi için 3. adım tekrarlanarak problemin global çözümüne MSG algoritmasına göre daha hızlı bir şekilde ulaşılır.

Algoritmanın 2., 5. ve 6. adımları ise dış döngü olarak kabul edilir. Dış döngü, h_n sayısının güncellenmesi ile ilgilidir. 3. adımda yaklaşık veya kesin olarak uygun çözüme ulaşılmış ise 5. adıma geçilerek h_n ve q parametreleri güncellenir.

Eğer başlangıçta h_n sayısı uygun değer değil ise yani $f(\tilde{x}) \leq \tilde{h}$ ve $g(\tilde{x}) = 0$ olacak şekilde $\exists \tilde{x} \in S$ mevcut değil ise bu durumda izleyen yol takip edilir: Karar verici eşik seviyesi olarak kabul edeceği yeterince büyük bir M sayısı seçer. Eğer $l(k)$ değeri M eşik değerini aşana kadar yaklaşık veya kesin olarak uygun bir çözüme ulaşamazsa, verilen h_n değeri için $P(h_n)$ probleminin uygun bir çözümü olmadığı sonucu ortaya çıkar; yani h_n uygun olmayan bir değerdir. Bu durumda 6. adıma geçilir. 5. adımdaki p parametresinin 0 olması h_n 'in hala uygun değer olduğunu gösterir. 6. adıma geçildiğinde p değeri artacaktır ve bu durum h_n 'in uygun değer olmadığı hakkında uyarı verir. h_n uygun olmayan değer olduğunda Δ_{n+1} parametresi azalacaktır. Böylece uygun ve uygun olmayan değerlerden oluşan aralığın uzunluğu daralacaktır. Sonuçta h_n uygun olmayan ve h_{n+1} uygun değer olmak üzere $\{[h_n, h_{n+1}]\}$ (sonlu veya sonsuz) dizisi sonsuz dizi olduğu durumda optimal dual değere yakınsayacaktır. Eğer $\Delta_{n+1} < \varepsilon_2$ elde edilirse algoritma sona erer ve en son elde edilen uygun değer, asıl problemin yaklaşık optimal amaç fonksiyonu değerine eşittir.

F-MSG algoritmasında dikkat edilmesi gereken özelliklerinden biri başlangıç değerleri h_1 ve Δ_1 değerlerinin seçimidir. Bu değerlerin seçimi modelin işleyiş performansını etkilemesi açısından önemlidir. Eğer başlangıçta seçilen h_1 sayısı, uygun değer ise ve optimal çözüme yakın bir değer ise algoritma doğal olarak 5. ve 6. adımlara uğramadan hızlı bir şekilde çözüme gidecektir. Δ_1 değeri ise 5. ve 6. adımlarda h_n değerinin güncellenmesi için kullanılan adım uzunluğu parametresidir. Eğer Δ_1 parametresi büyük seçilir ise optimal değer bulunacağı aralık büyük olacağından optimal değere ulaşmak; aksi halde Δ_1 parametresi küçük seçilir ise optimal değer bulunduğu aralığı bulmak zaman alacaktır. Bir diğer özellik ise $P(h_n)$ probleminin çözümü için farklı yöntemler kullanılabilmesidir. Gasimov ve Üstün (2007) bu alt problemin çözülebilmesi için tek kısıtlama fonksiyonu altında sahte amaç fonksiyonunun minimize edilmesini önermişlerdir. Burada sahte amaç fonksiyonu bilinen bir sabit sayı olarak seçilmiştir. Bu alt problem değişik optimizasyon paket programları ile çözülebilir (Gasimov vd., 2006; Gasimov ve Üstün, 2007).

Sıradaki teoremler, F-MSG yönteminin yakınsaklık sonuçlarını göstermektedir:

Teorem 4.27’de h_n sabitinin uygun değer olması durumunda, eğer dual değişkenler 4. adımda verilen koşullara göre güncellenmiş ise 3. adımda $P(h_n)$ probleminin çözümü olarak bulunan x_k çözümler dizisinin, asıl problemin uygun çözümüne yakınsayacağı gösterilmiştir. Eğer h_n uygun olmayan değer ise (4.42) eşitsizliğinin sol tarafı sonsuzluğa gidecektir. Bu durum h_n ’in uygun olmayan değer olduğu hakkında uyarı verir.

Teorem 4.27 [Gasimov vd., 2006]

S kompakt kümesinde f ve g sürekli fonksiyonları tanımlansın. $\forall k$ için s_k adım uzunluğu parametresi (4.42)’deki eşitsizliği sağlasın. Eğer algoritma 3. ve 4. adımda $\{x_k\}; k=1,2,\dots$ sonsuz dizisini üretirse, keyfi $h_n \geq \bar{h}$ uygun değeri için $k \rightarrow \infty$ iken $\|g(x_k)\| \rightarrow 0$ olur.

İzleyen teorem, algoritmada üretilen dual değişkenler ile optimal dual çözüm arasındaki aralığın, s_k parametresi değeri için azaldığını göstermektedir:

Teorem 4.28 [Gasimov vd., 2006]

$(\bar{u}, \bar{c})$ dual çözüm ve $\bar{h} = h(\bar{u}, \bar{c})$ dual problemin optimal değeri olsun. Verilen $\bar{h}$ değeri için s_k parametresi (4.40) veya (4.41)’deki gibi tanımlanmak üzere $\{(u_k, c_k)\}$ dizisi 3. ve 4. adımda üretilen dizi olsun. $L(x_k, u_k, c_k)$ değeri, $L(x, u_k, c_k) \leq \bar{h}$ probleminin bir çözümü olsun. (u_k, c_k) ’nın dual problemin bir çözümü olmadığını (yani $g(x_k) \neq 0$) varsayalım. O halde keyfi $(\bar{u}, \bar{c})$ dual çözümü için $\|(\bar{u}, \bar{c}) - (u_{k+1}, c_{k+1})\| < \|(\bar{u}, \bar{c}) - (u_k, c_k)\|$ sağlanır.

Teorem 4.29 [Gasimov vd., 2006]

(x_k, u_k, c_k) , $h_n = \bar{h}$ için algoritmanın 3. ve 4. adımlarında hesaplansın. $\{g(x_k)\}$ ’nın sınırlı bir dizi olduğu ve 4. adımdaki güncelleştirme koşullarına göre her bir yeni adımda $\delta=1$ için (u_{k+1}, c_{k+1}) hesaplandığı varsayılınsın. Eğer 3. ve 4. adımlarda, genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun $L_k = L(x_k, u_k, c_k)$ değerlerinden oluşan sonsuz bir dizisi üretiliyor ise o halde $k \rightarrow \infty$ iken $L_k \rightarrow \bar{h}$ olur.

Özetle; F-MSG algoritmasını MSG algoritmasından ayıran 3 temel yenilik mevcuttur:

- i. MSG algortimasında başlangıçta problemin kesin veya yaklaşık olarak optimal değerinin bilinmesi gerekli iken F-MSG verilen keyfi bir üst sınır ile başlar ve her bir iterasyonda problemin optimal çözümünü araştırır.
- ii. Karar verici, MSG algoritmasının her bir iterasyonunda genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunun kısıtlamasız global minimum değerini hesaplamak zorunda iken, F-MSG algoritmasında ise hesaplanması çok daha kolay olan $P(h_n)$ problemini çözmelidir.
- iii. F-MSG algoritmasında sunulan bir diğer yenilik adım uzunluğu parametresinin güncellenmesi ile ilgilidir. Böylece MSG algoritmasına göre global çözüme daha çabuk yakınsama sağlanır (Gasimov vd., 2006).

5. PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ

Çalışmanın bu bölümünde, çok kriterli optimizasyon teorisinin uygulama alanlarından biri olan finans teorisinde portföy seçimi problemi ele alınacaktır. Markowitz (1952), ilk defa portföy seçimi problemini matematiksel model ile ifade ederek literatürde bu teorisinin ilerlemesinde baş role sahip olmuştur. Bu bölümde Markowitz'in önermiş olduğu model ve literatürde onun modelinin üzerine inşa edilen diğer birkaç model göz önüne alınarak, mevcut çözüm yaklaşımları incelenecek; portföy seçimi probleminde ortalama-varyans yaklaşımına ilaveten yüksek mertebeli merkezi momentler göz önüne alındığında problemin genellikle konveks olmayan, diferansiyellenemeyen, çok kriterli optimizasyon problemi ile ifade edildiği gösterilecektir.

Bir birey ya da kurum olabilen yatırımcıların tasarruf birikimlerini sermaye piyasalarında kullanmaya başlamaları ile birlikte portföy ve portföy yönetimi teknikleri ve modellerine duyulan ilgi ve ihtiyaç artmıştır (Atan, 2005). Portföy yönetiminin temel amacı yatırımcının risk ve getiriye karşı gösterdiği tutum çerçevesinde, yatırımcının sahip olduğu tasarrufları değerlendirirken portföy içerisine hangi varlıkların hangi oranda gireceği ve değişen ekonomik koşullara bağlı olarak hangi varlıkların portföyden çıkarılacağına karar vermektir.

Günümüzde optimum portföy oluşturulması çalışmalarında istatistik ve yöneylem araştırması teknikleri önemli bir yer tutar. Ancak birçok normatif karar modelleri, yatırımcının elinde bulundurduğu servetini maksimize etmek için yalnız bir amacı göz önüne alır. Bu tür teknikler tek amacı sağlamaya yönelik olduğundan karar verici için öneme sahip diğer olası amaçların sağlanmasını dikkate almazlar. Oysa ki karar verici için birbirleri ile çelişebilen pek çok hedefin veya amacın eşanlı olarak sağlanabilmesi veya bu hedefler arası ikame edilebilirliğin belirlenmesi önemlidir. Bu yüzden, finans kelimesinin daha da matematiksel bir anlam kazandığı günümüzde finansal karar verme problemlerine çok kriterli yaklaşımları uygulamak daha yerinde olacaktır (Ertuna, 1991; Steuer ve Na, 2003; Atan ve Duman, 2003). Portföy oluşturmada iki temel yaklaşım söz konusudur: Geleneksel yaklaşım ve modern yaklaşım.

Geleneksel portföy yaklaşımı, portföyde bulunan menkul kıymetler arasındaki ilişkiye dikkat etmeksizin aşırı çeşitlendirmeye gidilerek portföy riskinin azaltılabileceğini öngörmektedir. Ancak bu yaklaşım, Markowitz'in geliştirdiği teori ile beraber geçerliliğini yitirmiştir. Modern portföy teorisinin kurucusu olarak bilinen Harry Markowitz (1952) çalışmasında, ilk defa portföyün riskini ve getirisini matematiksel model ile ifade etmiştir. Ortalama-varyans yaklaşımı olarak bilinen teoriye göre portföy oluşturma problemi getiri dağılımının ilk iki momentine dayanmaktadır: Getiri dağılımının beklenen değeri portföyün getirisini ve getiri

dağılımının varyansı portföyün riskini temsil eder. Markowitz, çalışmasında portföyün getiri dağılımının çok değişkenli normal dağılıma uyduğu varsayımını kabul eder; diğer bir ifade ile portföyün getirisinin tamamen beklenen değer ile riskinin ise tamamen varyans ile açıklanabileceğini varsayar. Ancak yapılan çalışmalar varlıkların marjinal dağılımlarının normal dağılıma göre daha sivri ve asimetrik özellikleri gösterdiğini ortaya koymuştur. Bu sebeple portföyün getirisi ve riskini tanımlamak için ortalama ve varyans haricinde ikiden yüksek mertebeli momentlere ihtiyaç duyulmuştur. Ancak ikiden yüksek mertebeli momentleri dikkate alan çalışmalar problemi oldukça zor bir yapıya dönüştürdüğü için araştırmacılar tarafından uzun yıllar ihmal edilmiştir. Getiri dağılımının üçüncü merkezi momenti ile alakalı çarpıklık kriterini göz önüne alan çalışmalar artmaya başladıkça ikinci mertebeden yüksek momentlerin portföy seçimi problemlerindeki önemi artmıştır. Dördüncü merkezi moment ile alakalı basıklık kriteri ise literatürde çok az ilgi çekmiştir.

Getiri dağılımlarının normal dağılıma göre asimetri ve sivri olduğunu kanıtlayan çalışmalar ile çarpıklık ve basıklık katsayılarının finansal problemlerdeki önemi artmıştır. Çarpıklık ölçüsü, bir dağılımın ortalaması etrafındaki asimetri derecesini, basıklık ölçüsü ise bir dağılımın ortalaması etrafındaki yaygınlığını ölçer. Normal dağılmayan getiri dağılımı için risk ölçümü olarak sadece varyansın veya standart sapmanın kullanılması riski olduğundan düşük tahmin eder.

Yatırımcı riske karşı gösterdiği tutuma göre getiri elde eder. Bazı yatırımcılar riski severken bazıları riskten kaçır. Sezgisel olarak yatırımcının yüksek riske katlanarak yüksek getiri elde edeceği, düşük risk ile ise düşük getiriye razı olacağı görüşü yaygındır. Bu sebeple hangi yatırım aracına yatırım yapılacağını belirlenmesi açısından risk ve getiri arasındaki ilişkinin belirlenmesi oldukça önemlidir.

Yapılan çalışmalar ile riskten kaçan yatırımcının ortalama ve varyans parametreleri aynı olan getiri dağılımları arasından pozitif çarpıklığı ve düşük basıklığı olanı tercih ettiği ortaya çıkmıştır. Portföy getiri dağılımı pozitif çarpık ise düşük değerlerde getiriler sıklıkla oluşurken kayıplar genellikle azdır. Çok yüksek getiri elde etme olasılığı ise oldukça düşüktür. Getiri dağılımı normalden sivri ise çok yüksek veya çok düşük getirilerin meydana gelme olasılığı normal dağılıma göre daha yüksektir. Bu sebeple getiri dağılımının hem negatif çarpık olması hem de normalden sivri olması durumunda negatif getiri olasılığı artar.

Markowitz'in modelinin ve onun modeli üzerine inşa edilen diğer birçok modelin eksik yanı pratikte oldukça öneme sahip olan gerçek problem kısıtlamalarına sahip olmayışlarıdır. Gerçek hayatta karşılaşılan durumlardan bazıları portföy içerisinde bulunması istenen menkul kıymet sayısı ve menkul kıymetlerin ağırlıkları gibi kısıtlamalardır.

5.1 Portföy Seçimi Problemi İçin Önceki Çalışmalar

Modern portföy teorisinin kurucusu sayılan Markowitz'in (1952) geliştirdiği ortalama-varyans modeli ile beraber portföy seçimi problemi üzerine birçok çalışma yapılmaya başlanmıştır. Markowitz'in teorisi ile beraber literatürde yatırımcıların karar verirken öncelikle beklenen getiriden ve getiri varyansından etkilendikleri varsayımı yaygınlaşmıştır. Markowitz'in modelini kullanmanın ön koşulu getiri dağılımlarının normal dağılıma uyması ya da fayda fonksiyonunun sadece ilk iki momente dayanmasıdır; bir diğer ifade ile fayda fonksiyonunun karesel bir yapıya sahip olmasıdır. Ancak finans verilerinin normal dağılmadığı bilinen bir gerçektir. Yapılan deneysel çalışmalarda finans verilerinde normal dağılıma göre kalın kuyruk ve asimetri özelliklerinin bulunduğu, normal dağılıma uymadığı desteklenmiştir: Mandelbrot (1963), Fama (1963), Blattberg ve Gonedes (1974), Kon (1984), Mills (1995), Campbell (1997), Peiro (1999), Harvey ve Siddique (1999, 2000), Premaratne ve Bera (2002). Markowitz'in modeline getirilen bir diğer eleştiri ise bazı bilim adamlarının

- i. Getiri dağılımı normal dağılıma sahip değil ise
- ii. Yatırımcının fayda fonksiyonu karesel mertebeden daha yüksek ise veya yüksek mertebeden momentlerin yatırımcının kararını etkilemediğine dair bir kanıt yok ise

ikinci mertebeden yüksek momentlerin ihmal edilemeyeceğine ait görüşler ortaya atmasıydı: Arditti (1967, 1971), Levy (1969), Samuelson (1970), Jean (1971), Levy ve Sarnat (1972), Rubinstein (1973), Kraus ve Litzenberg (1976), Scott ve Horvarth (1980), Lai (1991), Konno ve Suzuki (1995), Chunhachinda vd. (1997), Prakash vd. (2003), Lai vd. (2006)...

Samuelson (1970), yatırım kararları sonlu bir zaman aralığında sınırlanmış ise ortalama-varyans yaklaşımının yetersiz kalacağını ve yüksek mertebeli momentlerin dikkate alınması gerektiğini vurgulamıştır. Hanoch ve Levy (1970), karesel fayda fonksiyonunu tercih eden yatırımcının genel varsayımın aksine azalan değil artan mutlak riskten kaçtığını; Levy ve Sarnat (1972) ise varlıkların göreceli olarak düşük mutlak getiri üretmeleri halinde karesel fayda fonksiyonu varsayımlarının kullanışlı olabileceğini göstermiştir.

Portföy seçimi probleminin boyutu arttıkça, etkin yüzeyi belirlemek zorlaşır. Literatürde yüksek momentlere dayalı portföy seçimi problemi ile ilgili çalışmalar incelendiğinde araştırmacıların genellikle getiri dağılımının orijine göre birinci momenti ile ikinci ve üçüncü merkezi momentleri yani sırası ile ortalama-varyans-çarpıklık kriterleri üzerinde yoğunlaştıkları gözlenmiştir.

Arditti (1971), Simkowitz ve Beedles (1978), Fielitz (1976), Singleton ve Wingender (1986), Gibbons vd. (1989) getiri dağılımının simetrik değil aksine sağa çarpık olduğunu göstermiştir. Scott ve Horvarth (1980), riskten kaçan bir yatırımcı pozitif çarpıklık için pozitif tercihte

bulunuyor ise basıklık için negatif tercihte bulunacağını; Brennan (1979) ile He ve Leland (1993) portföy getiri dağılımı aynı ortalama ve varyansa sahip ise yatırımcının pozitif çarpıklığı tercih ettiğini göstermişlerdir.

İlk defa Arditti ve Levy (1975), çarpıklık kriterini içeren çok dönemli probleminin çözümü için sabit bir çarpıklık kısıtlaması altında portföy getirisinin beklenen değerini maksimize eden lineer olmayan programlama modeli önermiştir. Arditti ve Levy'nin varsayımına göre getiri oranları her bir dönemde, sıfır çarpıklık ile benzer ve bağımsız dağılır. Bu varsayımdan çok dönemli modelde çarpıklık kriterinin, ortalama ve varyans değerlerinin bir fonksiyonu olduğu sonucu çıkar. Ancak bu varsayım doğru olamaz; çünkü çarpıklık katsayısının tek dönem için anlamsız olması çoklu dönem için de anlamsız olmasını gerektirmez. Ayrıca çok dönemli modelde çarpıklık kriteri, ortalama ve varyansın bir fonksiyonu ise ortalama-varyans-çarpıklık etkin kümesi, ortalama-varyans etkin kümesinin bir alt kümesi olmalıdır. Arditti ve Levy'nin modelinde çarpıklık, ortalama ve varyansın bir fonksiyonu olarak belirlenmezse ve uygun olmayan çarpıklık kısıtı seçilirse modelin optimal çözümü bulunamayabilir. Kane (1982) çalışmasında ortalama-varyans-çarpıklık modelinde iyi çeşitlendirilmiş portföy ve risksiz varlık olduğu varsayımları altında yatırımcının karar vermesini basitleştirmiştir. Ancak çarpıklık kriterini göz önüne alan iyi çeşitlendirilmiş portföyün nasıl oluşturulacağının belirsizliği sebebiyle yol gösterici bir çalışma olmamıştır. Lai (1991) çalışmasında ise yüksek momentlere dayalı optimal portföy seçimi probleminin dayanması gereken varsayımları ortaya atmıştır. Portföy getirilerinin beklenen değeri ve çarpıklığını maksimize ederken varyansını minimize etmeye çalışmıştır. Bu problemi çözmek için ise yatırımcının kişisel kararlarını ve tercihlerini de göz önüne alan polinomsal hedef programlama yöntemini seçmiştir. Lai, her bir tekli dönemde çarpıklık kriterini ihmal ederek ortalama-varyans kriterlerine dayanarak elde ettiği optimal portföylerin çoklu dönem modelinde etkin portföy olmadıklarını göstermiştir. Chunhachinda vd. (1997), optimal portföy oluşturmada çarpıklığın yatırımcının kararlarını önemli derecede etkilediğini polinomsal hedef programlama yardımı ile göstermiştir.

Portföy seçimi probleminin dört boyutlu probleme dönüşmesi, çok boyutlu etkin yüzeyi tanımlamanın zorluğundan dolayı problemi oldukça zor bir yapıya dönüştürdüğü için birçok araştırmacı tarafından sıklıkla ihmal edilen basıklık kriteri, getiri dağılımında meydana gelecek aşırı kayıp ve kazançların olasılığını ölçmesi bakımından önemlidir.

Fang ve Lai (1997), ilk defa çarpıklık kriterinin yanı sıra basıklık kriterini de göz önüne alarak finansal varlık fiyatlama modelini geliştirmiş ve sistematik varyans, çarpıklık, basıklık için risk primlerini tahmin etmiştir. Bu çalışmaya göre varlıkların beklenen getirileri

sistemik varyansın yanı sıra sistemik çarpıklık ve sistemik basıklıkla yakından ilgilidir. Dittmar (1999) ise riskten kaçınmak için gerek koşulun azalan tam öngörü olduğunu ve bunun da teorik olarak basıklıktan kaçarak sağlandığını göstermiştir. Davies vd. (2004), Berényi (2001, 2005), Lai vd. (2006) ortalama ve çarpıklığı maksimize ederken aynı anda varyans ve basıklığı minimize etmek ve yatırımcının tercihlerini de modele yansıtılabilmek için polinomsal hedef programlama yöntemini tercih etmişlerdir. Athayde ve Flôres (2002), Adcock (2005) ile Jurczenko ve Maillet (2005) verilen ortalama, çarpıklık ve basıklık için varyansı minimize etmeye çalışarak ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık modelini çözmeye çalışmışlardır.

İkiden yüksek mertebeli momentleri göz önüne alan çalışmalarda dikkat edilmesi gereken nokta ise eğer portföyde yer alan varlıklar arasında yüksek derecede korelasyon var ise yani varlıklar birbirinden bağımsız değil ise portföyün ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık değerlerini ifade etmek için her bir varlığın marjinal momentleri yanında portföydeki bir varlığın diğer bir varlık ile arasındaki ilişkisini gösteren yüksek mertebeli bileşik momentlerin dikkate alınması gerekliliğidir. Aksi halde hesaplanan değerler sahte olabilir. Birlikte çarpıklık (co-skewness) ve birlikte basıklık (co-kurtosis), portföy modelindeki bir varlığın portföy çarpıklığına ve portföy basıklığına olan marjinal katkısı olarak yorumlanabilir. İlk defa Kraus ve Litzenberg (1976), yüksek mertebeli bileşik momentlerin dikkate alınmasını önermiştir.

Varlık sayısı kısıtlamaları gibi pratik amaçlar göz önüne alındığında etkin sınır eğrisi süreksiz fonksiyon haline dönüşür. Literatürde varlık sayısı kısıtlı portföy optimizasyonu problemi için çok az sayıda çalışma vardır. Ortalama-varyans uzayında varlık sayısı kısıtlaması göz önüne alındığında problem genellikle karma-tamsayılı lineer olmayan karesel programlama problemiyle ifade edilir ve bu problemi çözmek için genel olarak iki yaklaşım söz konusudur: Karma-tamsayılı lineer olmayan programlama için uygun algoritma tekniklerini kullanmak veya Markowitz'in minimize etmeye çalıştığı karesel amaç fonksiyonu yerine lineer risk fonksiyonu kullanıp sezgisel yöntemlere dayanarak yaklaşık çözüm bulmak.

Bienstock (1995, 1996) karesel risk yaklaşımını ileri sürerek problemin çözümü için branch-and-cut algoritmasını kullanmıştır. Speranza (1996) ise ilk defa lineer risk yaklaşımı için varyans yerine negatif-yarı ortalama mutlak sapma fonksiyonunu kullanarak karma-tamsayılı programlama problemi elde etmiş ve sezgisel yöntemler ile modeli çözmüştür. Chang vd. (2000) ise portföyde bulunacak varlık sayısı ve portföyde tutulan varlığın sahip olduğu oran kısıtlamaları altında Markowitz'in problemini sezgisel yöntemler ile çözmüştür.

5.2 Portföy Teorisine Giriş

Bir yatırımcının sahip olduğu tüm menkul kıymetler portföyü oluşturur. Daha genel bir ifade ile portföy, belirli amaçları gerçekleştirmek isteyen yatırımcıların sahip olduğu birbirleriyle ilişkisi olan ve kendine öz ölçülebilir nitelikleri olan yeni bir varlıktır (Ceylan, 2003).

Portföy yönetimi, yatırımcının sahip olduğu servetini, menkul kıymetler arasında minimum risk maksimum getiri sağlayacak şekilde paylaşmaktır. Portföy yönetiminde amaç, yatırımcının risk ve getiriye karşı gösterdiği tutum çerçevesinde belirlenen yatırım süresince portföy içine hangi varlıkların hangi oranlarda gireceğine ve zamanla değişen ekonomik koşullara bağlı olarak hangi varlıkların portföyden çıkarılacağına karar vermektir (Ertuna, 1991; Ceylan, 2003).

Menkul kıymetler ve değişik yatırım araçlarından çeşitli portföyler oluşturmak mümkündür. Buna göre tamamen hisse senetlerinden oluşan, hisse senedi ve tahvillerden oluşan, tamamı tahvillerden oluşan ve hisse senedi ile tahviller dışında diğer yatırım araçlarından (varlığa dayalı menkul kıymet, bono, repo, altın, metrekare konut sertifikaları, gelir ortaklığı senetleri, döviz ve döviz tevdiat hesapları) oluşan portföy çeşitleri söz konusudur (Demirtaş ve Güngör, 2004).

Menkul kıymet yatırımlarının belirgin özelliklerinden biri belirsiz olmasıdır. Yatırım kararları geleceğe yönelik olduğundan yatırımcının elde etmek istediği getiri yani beklenen getiri ile elde edilen getiri farklı olacaktır. Bu durum finansal açıdan risk ile tanımlanır. Bir diğer ifade ile finansal risk, fiyatların dalgalanırılığı karşısında işletmelerin ya da bireysel yatırımcıların aktif ve pasif değerlerinin değişmesi olarak tanımlanır. Gelişmekte olan ülke ekonomileri için içsel ve dışsal koşullardan kaynaklanan istikrarsızlıklar ile spekülasyon faaliyetleri belirsizlik ve riski daha da arttırmaktadır. Bu nedenle yatırımcı, birçok risk unsuru ile karşı karşıyadır. Yatırımcı, tek bir menkul kıymete yatırım yapmaktansa servetini çeşitli menkul kıymetler arasında paylaştırarak portföyünü oluşturur ve bu risk unsurlarını yok etmeye çalışır. Portföyün oluşturulması ve yönetilmesi yatırım ortamına ait belirsizlikleri ortadan kaldırır; çünkü iyi çeşitlendirilmiş bir portföy için portföyün toplam riski, portföyü oluşturan varlıkların sahip olduğu risklerin toplamından daha küçüktür (Sevil, 2001; Yalçın vd., 2004).

Menkul kıymet getirilerinin bir diğer önemli özelliği ise getiriler arasında ilişki olmasıdır. Birçok ekonomik nicelik gibi menkul kıymet getirileri de birlikte çıkma ve düşme eğilimindedirler. Ancak bu ilişki her zaman tam değildir; bireysel menkul kıymetler ve endüstriler bazen genel refah akışının tersinde hareket edebilirler. Genellikle aynı endüstride yer alan menkul kıymetlerin birbirleri ile daha ilişkili olduğu kabul edilir (Markowitz, 1959).

Yatırımcılar genellikle menkul kıymetin getirisi hakkında bilgi sahibi iken menkul kıymetin sahip olduğu riski ise tam olarak bilemezler. Toplam riski oluşturan etmenlerin yatırımcı tarafından biliniyor olması durumunda yatırımcı bazı riskleri kontrol altına alabilir. Buna göre toplam riski oluşturan iki tür riskten bahsetmek mümkündür: Sistemik risk ve sistemik olmayan risk.

Sistemik risk, sosyal, ekonomik ve politik çevredeki değişikliklerden dolayı kaynaklanan risk olup portföyü çeşitlendirme yolu ile yok edilemeyen risk olarak bilinir; çünkü sistemik risk, tüm yatırımların getirilerini etkileyen risktir. Piyasa bir bütün olarak yükselme trendine girdiğinde menkul kıymetlerin birçoğunun fiyatı yükselir. Bu riskin kaynakları olarak başlıca faiz oranı riski, piyasa riski, politik risk ve kur riski sayılabilir.

Sistemik olmayan risk ise bir menkul kıymet veya sektöre has olan risk olup bir şirkette mevcut olan işçi grevi, yönetici hataları, reklam kampanyaları ile ortaya çıkar. Bu nedenle yatırımcı farklı menkul kıymetlere yatırım yaparak yani çeşitlendirme yolu ile bu risk azaltılabilir. Bu riskin kaynakları olarak başlıca finansal risk, yönetim riski, iş ve endüstri riski sayılabilir.

Finansal karar vermede temel yaklaşım optimum portföy oluşturmaktır. Portföy oluşturmada iki temel yaklaşım söz konusudur: Geleneksel yaklaşım ve modern yaklaşım.

Geleneksel portföy yaklaşımı, bilimsel bir dayanağı olmamakla beraber daha çok subjektif yargılar üzerine kurulu olup “bütün yumurtaları aynı sepete koyma” prensibi ile portföyde bulunan menkul kıymetler arasındaki ilişkiye dikkat etmeksizin aşırı çeşitlendirmeye gidilerek portföy riskinin azaltılabileceğini öngörmektedir. Ancak bu yaklaşım, Markowitz’in geliştirdiği teori ile beraber geçerliliğini yitirmiştir.

Modern portföy teorisinin kurucusu olarak bilinen Harry Markowitz (1952) “Portfolio Selection” isimli makalesinde, ilk defa portföyün riskini ve getirisini matematiksel model ile ifade etmiştir. Menkul kıymet getirilerini rassal değişken kabul eden modele göre menkul kıymet getirilerinin doğrusal bileşimi ile oluşan portföy getirileri de rassal değişken olup bu rassal değişkenin olasılık dağılımından bahsetmek mümkündür. Böylece geçmiş dönem verilerine dayanarak elde edilen getiri dağılımının ortalaması ve varyansı yardımı ile portföyün getirisi ve riski ölçülür.

Markowitz’in makalesi, yatırımları çeşitlendirme düşüncesini de bilimsel olarak açıklamış ve sadece portföyde yer alan menkul kıymet sayılarını arttırarak çeşitlendirme ile riskin azaltılamayacağını bunun yanı sıra varlıklar arasındaki ilişkilere dikkat edilmesi gerekliliğini göstermiştir. Markowitz’e göre (1952) eğer menkul kıymet getirileri birbirleri ile ilişkisiz ise o halde çeşitlendirme ile portföy riski elimine edilebilir. Eğer menkul kıymet getirileri

arasındaki ilişki tam ise yani tüm menkul kıymet getirileri tam uyum içerisinde birlikte çıkma ve düşme eğiliminde ise çeşitlendirme yolu ile portföyün riski elimine edilemez. Gerçekte ise menkul kıymet getirileri ne birbirinden bağımsızdır ne de aralarında tam ilişki söz konusudur; ancak aralarında yüksek derecede ilişki olduğu bilinen bir gerçektir. Bu durumda çeşitlendirme portföyün riskini azaltabilir ancak riski yok edemez. Riski azaltmak için ise birbirleri ile yüksek derecede ilişkili olan menkul kıymetler ile portföy oluşturmaktan kaçınmak gereklidir. O halde menkul kıymetler arasındaki ilişkiyi dikkate alan iyi bir çeşitlendirme yapılması durumunda portföyün beklenen getirisini değiştirmeden portföyün riskini azaltmak mümkündür (Markowitz, 1959).

Markowitz'in çalışmasının bir diğer önemli özelliği, yatırımcı için önemli olan menkul kıymetin kendi sahip olduğu risk değil, o menkul kıymetin portföyün varyansına yapacağı katkının ne olduğudur. Bu durum ise o menkul kıymetin kovaryansı ile açıklanır (Rubinstein, 2002). Yatırım kararı alınırken menkul kıymetler ayrı ayrı değil bütün portföy ele alınır. Markowitz'in çalışmasında beklenen değer ile temsil edilen portföyün getirisi maksimize edilirken varyans ile temsil edilen portföyün riski ise minimize edilerek yatırımcıyı en çok tatmin eden portföyler bulunmaya çalışılır.

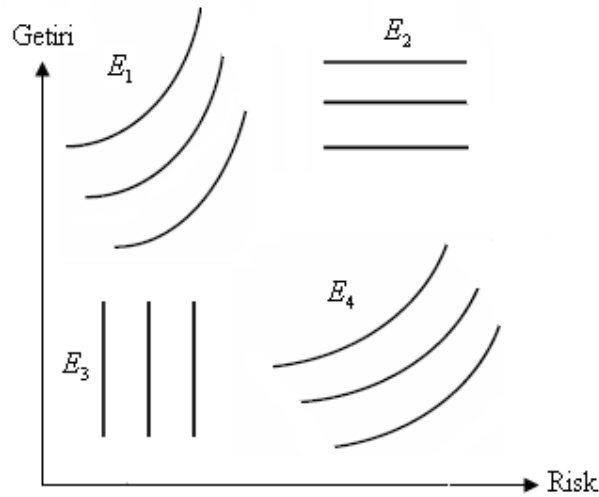
Modern portföy teorisi, yatırımcıların ve finansal piyasaların davranışları ile ilgili olarak çeşitli varsayımlara dayanmaktadır:

- i. Yatırımcılar, kararlarını getiri dağılımının olasılık dağılımına göre alır.
- ii. Belli periyotta tanımlı getirilerin olasılık dağılımı yatırımcılar tarafından tahmin edilebilir. Getiri dağılımı, normal dağılım varsayımlarını sağlar.
- iii. Yatırımcılar tek dönemde faydalarını maksimize etmeye çalışır.
- iv. Getiri değerlerinde meydana gelen değişkenlik yatırımcılar tarafından riskin ölçülmesinde kullanılır.
- v. Yatırımcılar yalnızca portföy getirilerinin ortalama ve varyansı ile ilgilenir.
- vi. Getiri olasılık dağılımının orijine göre birinci momenti olan beklenen değer ve ikinci merkezi momenti olan varyans, portföyün getirisi ve riskini ölçmek için kullanılır.
- vii. Yatırımcılar rasyoneldir ve risk almaktan hoşlanmaz.
- viii. Finansal piyasalar etkindir (Chen vd., 2008).

Ortalama-varyans yaklaşımı olarak bilinen teoriye göre portföy oluşturma problemi getiri dağılımının ilk iki momentine dayanır: Getiri dağılımının beklenen değeri portföyün getirisini ve getiri dağılımının varyansı portföyün riskini temsil eder. Markowitz'in teorisine göre verilen risk seviyesinde portföyün beklenen getirisi maksimize edilir veya hedeflenen beklenen getiri seviyesinde portföyün riski minimize edilir.

Yatırımcının amacı düşük risk ile yüksek beklenen getiri hedeflemektir. Belirli bir risk düzeyinde maksimum getiriye sahip veya beklenen getiri hedefinde en düşük riske sahip menkul kıymetlerin oluşturduğu portföy etkin veya optimal portföy olarak adlandırılır. Markowitz, çalışmasında çeşitli risk ve beklenen getiri düzeyinde oluşan optimal portföylerin bir araya gelmesi ile oluşan eğriyi etkin sınır eğrisi ile tanımlar. Bu eğri üzerindeki her portföy yatırımcıyı en fazla tatmin eder (Markowitz, 1959).

Yatırımcı ise riske karşı izleyeceği tutuma göre etkin sınır eğrisi üzerinden portföyünü seçecektir. Yatırımcının riske karşı izleyeceği tutumu ise kayıtsızlık eğrileri ile açıklanır. Bir kayıtsızlık eğrisi üzerindeki her nokta yatırımcıya eş fayda sağlar. Bu eğri yardımı ile yatırımcının katlandığı risk karşısında getiri beklentileri görülmektedir:



Şekil 5.1 Yatırımcı kayıtsızlık eğrileri (Genel, 2004).

E_1 eğrisi, riskten aşırı düzeyde kaçan yatırımcıyı temsil eder. Bu yatırımcı, riskte meydana gelecek küçük bir değişikliği ancak beklenen getirisinde büyük bir artış olması halinde kabullenir. Yatırımın riski, beklenen getirisinden daha önemlidir.

E_2 eğrisi, riske karşı tamamen duyarsız yatırımcıyı temsil eder. Bu yatırımcı, yatırım kararlarını yalnızca beklenen getiri değerlerine göre alır.

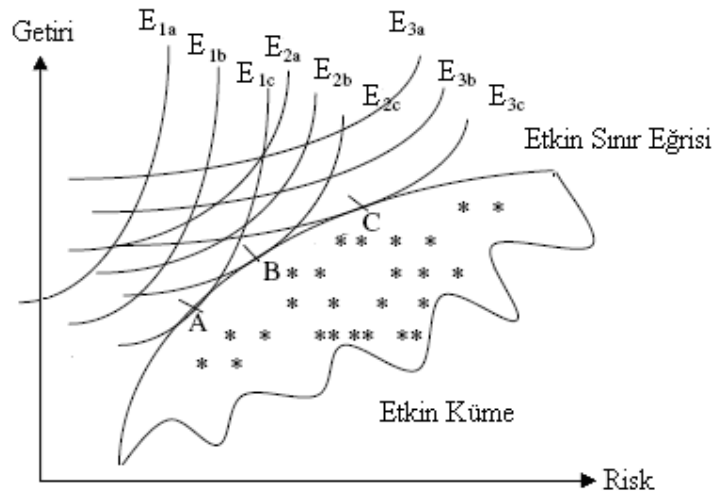
E_3 eğrisi, riske karşı tamamen duyarlı yatırımcıyı temsil eder. Bu yatırımcı, yatırım kararlarını yalnızca risk değerlerine göre alır.

E_4 eğrisi, risk seven yatırımcıyı temsil eder. Bu yatırımcı, olası bir getiri artışı için yüksek düzeyde risk almaya eğilimlidir. Elde edilecek getiri, riskten daha önemlidir.

Gerçek hayatta ise riske tamamen duyarlı ve duyarsız yatırımcıların olmadığı yatırımcıların ise bu iki uç risk değeri arasında getiri hedefledikleri bilinir (Genel, 2004).

Yatırımcı, risk - getiri ekseninde katlanabileceği risk düzeyinin belirlediği bireysel kayıtsızlık eğrisinin etkin kümeye teğet olduğu noktada dengeye ulaşarak optimal portföyü

elde eder (Özdil ve Yılmaz, 2001). Böylece yatırımcının seçeceği optimal portföy, hem etkin sınır eğrisi üzerinde yer alan hem de yatırımcının kayıtsızlık eğrisi üzerinde yer alıp en fazla faydayı sunan portföydür.



Şekil 5.2 Yatırımcının optimal portföyünün belirlenmesi (Sharpe vd., 1985).

5.3 Portföyün Getirisi ve Riski

MPT'ye göre yatırımcı, yatırım dönemi başında her bir menkul kıymetin yatırım içindeki oranını belirleyerek servetini çeşitli menkul kıymetler arasında paylaştırır. Dönem boyunca, her bir menkul kıymet rassal getiri oranı oluşturur. Bu yüzden dönem sonunda yatırımcının serveti, getirilerin ağırlıklı ortalamasına göre değişecektir. Bu sebeple verilen bir menkul kıymetin getirisi, rassal değişken olarak kabul edilebilir. Yatırımcının amacı, hangi menkul kıymete hangi oranda yatırım yapması gerektiğini belirleyerek dönem sonunda beklenen faydasını maksimum yapmaktır. Belirsizlik altındaki bu problem, lineer olmayan stokastik programlama problemi olmasına karşılık Markowitz fayda fonksiyonunu 2. mertebeden Taylor açılımına yaklaştırarak beklenen fayda fonksiyonunu yaklaşık olarak getirilerin ortalaması ve varyansı ile ifade etmiştir (Kaplan, 1998). Ancak yapılan çalışmalar üçüncü ve dördüncü mertebeli merkezi momentlerin göz önüne alınması gerektiğini gösterdiği için yatırımcının beklenen fayda fonksiyonu 4. mertebeden Taylor serisi açılımı ile daha iyi temsil edilecektir: U , sonsuz kere diferansiyellenen fayda fonksiyonu olmak üzere

$$U(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{U^k[E(R)]}{k!} ((R - E(R))^k \right] \quad (5.1)$$

$$E[U(R)] \approx U[E(R)] + \sum_{k=1}^4 \frac{U^{(k)}[E(R)]}{k!} ((R - E(R))^k \quad (5.2)$$

(Liow ve Chan, 2004; Jurczenko ve Maillet, 2006; Martellini ve Ziemann, 2007).

5.3.1 Portföyün Beklenen Değeri

MPT'ye göre portföyün getirisi, portföyün beklenen değeri ile ölçülür. Rassal değişkenlerin toplamının beklenen değeri, her bir rassal değişkenin beklenen getirisi toplamına eşit olduğundan, portföyün beklenen getirisi, portföyü oluşturan her bir menkul kıymetin beklenen getirilerinin ağırlıklı ortalamasına eşittir. Burada ağırlıklar, her bir menkul kıymetin portföy içindeki yatırım oranını gösterir. O halde R_p , portföy getirisi rassal değişkenini göstermek üzere, portföy getirisinin beklenen değeri:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \quad (5.3)$$

n : Portföydeki menkul kıymetlerin sayısı,

$E(R_i) = \mu_i$: i . menkul kıymetin beklenen değeri

x_i : i . menkul kıymetin yatırım oranı; $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ve $x_i \geq 0$ kısıtlamaları sağlanır.

5.3.2 Portföyün Varyansı

MPT'ye göre portföyün riski, varyansı (veya standart sapması) ile ölçülür. Gerçek hayatta birçok ekonomik nicelik gibi menkul kıymet getirileri de birlikte hareket etme eğiliminde olduklarından menkul kıymet getirileri birbirinden bağımsız değildir, yani aralarında ilişki mevcuttur. Bu sebeple iki rassal değişkenin birlikte dağılıma ölçüsü olup değişme beraberliğini ortaya koyan kovaryans değeri göz önüne alınmalıdır. Bu yüzden portföyün varyansı, menkul kıymetlerin varyanslarının ağırlıklı ortalamasına eşit olmayıp, portföyü oluşturan her bir menkul kıymet çifti için hesaplanan kovaryansların ağırlıklı ortalamasına eşittir:

$$Var(R_p) = \sigma_p^2 = E \left[\left\{ x^T (R_p - E(R_p)) \right\}^2 \right] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}, \quad (i \neq j) \quad (5.4)$$

veya

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (5.5)$$

$$\sigma_{ij} = E \left[\{ R_i - E(R_i) \} \{ R_j - E(R_j) \} \right] \quad (5.6)$$

σ_i : i . menkul kıymetin standart sapması

ρ_{ij} : i . ve j . menkul kıymet arasındaki korelasyon katsayısı

σ_{ij} : i . ve j . menkul kıymetin birinci mertebeden merkezi bileşik momenti (kovaryans)

$$Cov(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sigma_{ij} \quad (5.7)$$

olmak üzere diğer bir ifade ile portföyün varyansı:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (5.8)$$

Markowitz'in önermiş olduğu yaklaşıma göre portföyün riskini azaltmak için menkul kıymetler arasındaki korelasyona dikkat edilmesi gerekliliği (5.8) formülünden anlaşılmaktadır. Markowitz'in yatırımları çeşitlendirmede öne sürmüş olduğu yaklaşımı, iki menkul kıymet ile oluşturulan bir portföy için ele alarak açıklayalım:

A menkul kıymeti için yatırım oranı x_A ve B menkul kıymeti için yatırım oranı $x_B = 1 - x_A$ olsun. O halde portföyün beklenen getirisi ve varyansı:

$$E(R_p) = x_A E(R_A) + x_B E(R_B),$$

$$\sigma_p^2 = (x_A \sigma_A + x_B \sigma_B)^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

Buradan portföyün varyansı yani riskini azaltabilmenin, A ve B menkul kıymetleri arasındaki ilişkinin yönü ve derecesini gösteren ρ_{AB} korelasyon katsayısına bağlı olduğu görülür.

$\rho_{AB} = 1$ olduğunu varsayalım; yani A ve B menkul kıymetleri arasında tam pozitif doğrusal ilişki olsun. Bu ilişki iki menkul kıymetin tamamen aynı yönlü hareket ettiğini gösterir. Diğer bir ifade ile bir menkul kıymetin getirisinde artış (azalış) oluyor ise diğer menkul kıymetin getirisinde de aynı artış (azalış) söz konusudur. O halde portföyün varyansı

$$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B = (x_A \sigma_A + x_B \sigma_B)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_p = x_A \sigma_A + x_B \sigma_B$$

Tam pozitif doğrusal ilişki olması durumunda portföyün standart sapması, her bir menkul kıymetin standart sapmasının ağırlıklı toplamına eşit olacaktır. Bu durumda tüm portföyler etkin olup portföy seçimi sadece yatırımcının risk tercihinine bağlı olacaktır. Aynı zamanda bu durumda çeşitlendirme ile portföy riskin azaltılması mümkün değildir.

$0 < \rho_{AB} < 1$ olduğunu varsayalım; yani A ve B menkul kıymetleri arasında pozitif ilişki olsun. O halde bir menkul kıymetin getirisindeki artış (azalış) oluyor ise muhtemelen diğer menkul kıymet getirisinde de artış (azalış) olacaktır. Bu durumda portföyün standart sapması, her bir menkul kıymetin standart sapmasının ağırlıklı toplamından küçük olacaktır. O halde pozitif ilişki olması halinde çeşitlendirme ile portföyün riski azaltılabilir.

$-1 < \rho_{AB} < 0$ olduğunu varsayalım; yani A ve B menkul kıymetleri arasında negatif ilişki olsun. O halde bir menkul kıymetin getirisindeki artış (azalış) oluyor ise muhtemelen diğer menkul kıymet getirisinde de azalış (artış) söz konusu olacaktır. Bu durumda portföyün standart sapmasının değeri azalacağı için çeşitlendirme ile portföyün riskini azaltmak mümkündür.

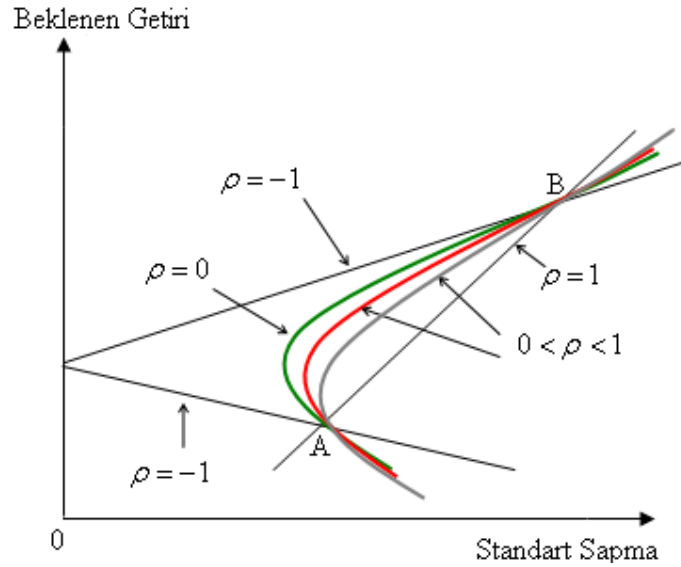
$\rho_{AB} = -1$ olduğunu varsayalım; yani A ve B menkul kıymetleri arasında tam negatif doğrusal ilişki olsun. Bu ilişki iki menkul kıymetin tamamen ters yönlü hareket ettiğini gösterir. Diğer bir ifade ile bir menkul kıymetin getirisinde artış (azalış) oluyor ise diğer menkul kıymetin getirisinde de aynı azalış (artış) söz konusudur. O halde portföyün varyansı

$$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 - 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B = (x_A \sigma_A - x_B \sigma_B)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_p = \pm(x_A \sigma_A - x_B \sigma_B)$$

Tam negatif doğrusal ilişki olması halinde portföyün riskini sıfırlamak mümkün olabilir. Bu durumda çeşitlendirme yapmak yatırımcı için faydalı olacaktır.

$\rho_{AB} = 0$ olduğunu varsayalım. O halde bu durumda A ve B menkul kıymetleri arasında doğrusal ilişki mevcut değildir; ancak bu durum aralarında eğrisel veya başka tür bir ilişki olmadığı anlamına gelmez (Wallingford, 1967; Chen vd., 2008).



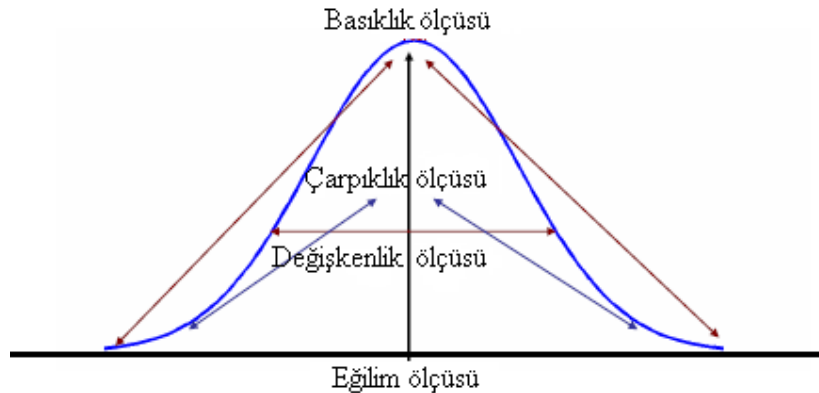
Şekil 5.3 A ve B menkul kıymetlerinden oluşan portföy için çeşitli korelasyon katsayıları ile risk-getiri ilişkisi (Chen vd., 2008).

Markowitz'e göre yatırımcı, aralarında tam ilişki bulunmayan veya tam negatif ilişki bulunan menkul kıymetler ile portföyünü oluştursa portföyün riskini kolayca azaltabilir. Menkul kıymet getirileri arasındaki ilişkiyi göz önüne alarak yapılan çeşitlendirme, portföyün beklenen getirisini azaltmadan riskini düşürür.

Modern portföy teorisinin temeli olan ortalama-varyans modelinde menkul kıymet getirilerinin çok değişkenli normal dağılımdan geldiği varsayılmaktadır; diğer bir ifade ile portföyün getirisi tamamen beklenen değeri ile portföyün riski ise tamamen varyansı ile açıklanabilmektedir. Ancak yapılan çalışmaların, finansal varlıkların marjinal dağılımlarının normal dağılıma göre daha sivri olduğunu ve simetrik olmadığını ortaya koyması ile varsayılanın aksine menkul kıymet getirilerinin çok değişkenli normal dağılımının mümkün olmadığı görülmektedir (Mandelbrot, 1963; Fama, 1963; Campbell (1997); Harvey ve Siddique, 1999, 2000). Eğer getiri dağılımı normal değil ise risk ölçümü olarak sadece varyansın veya standart sapmanın kullanılması riski olduğundan düşük tahmin ederek gerçek riskin hesaplanmasına olanak vermez (Kim ve White, 2004). Birçok bilim adamı eğer yatırımcının fayda fonksiyonu karesel değil ise; yüksek mertebeli momentlerin yatırımcının kararlarını etkilemediğine dair bir kanıt yok ise yüksek mertebeli momentlerin göz önüne alınması gerektiğini savunmuştur. Getiri dağılımı normal dağılıma uymadığı zaman dağılımın merkezi yığılma ve değişkenlik ölçülerinin yanında çarpıklık ve basıklık ölçüleri önem kazanmaktadır.

Bir dağılımın özellikleri hakkında bilgi veren, diğer dağılımlar ile karşılaştırmaya yarayan değerlere tanımlayıcı istatistikler denir. Tanımlayıcı istatistikler, dört grupta incelenebilir:

- i. Merkezi Yığılma (eğilim) ölçüleri: Analitik ortalamalar (aritmetik, kareli, geometrik ve harmonik ortalama); analitik olmayan ortalamalar (mod, medyan, kartil, desil, santil).
- ii. Değişkenlik ölçüleri: Standart sapma, varyans, değişim aralığı, değişim katsayısı.
- iii. Çarpıklık ölçüleri: Ortalamaya dayanan; kartillere dayanan; momentlere dayanan (Pearson çarpıklık katsayısı, Fisher çarpıklık katsayısı) çarpıklık ölçüleri
- iv. Basıklık Ölçüleri: Momentlere dayanan ölçü (Pearson basıklık katsayısı, Fisher basıklık katsayısı)

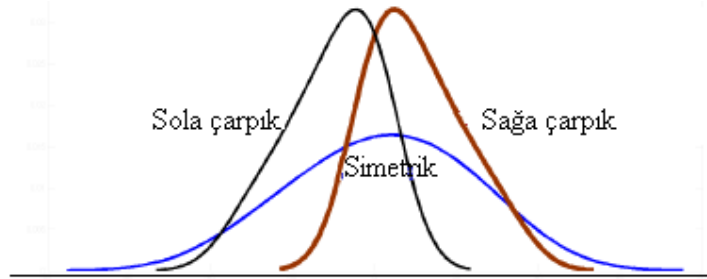


Şekil 5.4 Bir dağılımın eğilim-değişkenlik-çarpıklık-basıklık ölçüleri (Maillet, 2007).

Buna göre, getiri dağılımının üçüncü ve dördüncü mertebeden merkezi momentlerini dikkate almak dağılımın asimetrisi ve basıklığı hakkında bilgi verecektir:

5.3.3 Portföyün Üçüncü Mertebeden Merkezi Momenti

Çarpıklık ölçüsü, bir dağılımın ortalaması etrafındaki asimetri derecesini ölçer. Simetrik veya normal dağılımlarda ortalama, mod ve medyan değerleri birbirine eşittir; ancak tersi her zaman geçerli değildir. Bir dağılım simetrik değil ise dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinde kuyruklarından biri diğerine göre daha uzun olur. Aritmetik ortalama ile mod (veya medyan) arasındaki fark pozitif ise (*A. Ortalama > Medyan > Mod*) dağılım sağa çarpıktır; negatif ise (*A. Ortalama < Medyan < Mod*) sola çarpıktır denir.



Şekil 5.5 Farklı çarpıklık ölçüsüne göre olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri (Maillet, 2007).

Çarpıklık ölçüleri aritmetik ortalama ve kartillere dayanarak hesaplanabildiği gibi literatürde daha çok momentlere dayalı olarak hesaplanan çarpıklık ölçüleri kullanılır (Serper, 2000; Bener, 2002).

Bazen üçüncü merkezi moment, çarpıklık katsayısı yerine kullanılır: Dağılım simetrik ise $\mu_3 = 0$, sağa çarpık ise $\mu_3 > 0$, sola çarpık ise $\mu_3 < 0$ olduğu gösterilebilir. Ancak, $\mu_3 = 0$ olup simetrik olmayan bir dağılım elde edilebilir (Mood vd., 1974). Bu nedenle Pearson, üçüncü merkezi momenti anakütle dağılımının standart sapmasının kübüne bölerek çarpıklık katsayısını elde etmiştir:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (5.9)$$

veya Fisher'in kümülanlara dayalı tanımından hareketle

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1} \quad (5.10)$$

denklemini Fisher çarpıklık katsayısı olarak bilir.

Üçüncü merkezi momentin standart biçime dönüştürülmüş hali olan Pearson çarpıklık katsayısı, ölçek ve orijin değişikliklerine duyarlı olmadığı için bir dağılımın şeklinin teorik bir dağılım ile karşılaştırılmasında kullanılabilir: Simetrik dağılımlarda $\sqrt{\beta_1} = 0$ 'dır, ancak $\sqrt{\beta_1} = 0$ ise seri simetrik olmayabilir. $\sqrt{\beta_1} > 0$ ise sağa çarpık, $\sqrt{\beta_1} < 0$ sola çarpık anakütle dağılımını temsil eder (Genceli, 2006).

Getiri dağılımının normal dağılmadığını destekleyen çalışmalar ile Markowitz'in ortalama-varyans yaklaşımı portföyün getirisi ve riskini belirlemede yetersiz kalmıştır. Yapılan çalışmalar riskten kaçan yatırımcının ortalama ve standart sapması aynı olan dağılımlar arasından sağa (pozitif) çarpık olan dağılımı sola (negatif) çarpık olana tercih ettiğini ortaya koymuştur (Kraus ve Litzenberger, 1976; Scott ve Horvarth 1980; Brennan, 1979; He ve Leland, 1993; Chunhachinda vd., 1997). Dağılım sağa çarpık ise ortalamanın üzerinde daha fazla gözlem bulunur. Portföy getiri dağılımı sağa çarpık ise düşük değerlerde getiriler sıklıkla oluşurken kayıplar genellikle azdır. Çok yüksek getiri elde etme olasılığı ise oldukça düşüktür. Bu duruma klasik bir örnek olarak piyango bileti gösterilebilir. Yatırımcının en yüksek ikramiye oranını elde etme olasılığı oldukça düşük olmasına rağmen küçük miktarda kazanma olasılığı fazla ve kaybı az olacağı için tercih edilen bir şans oyunudur. Yatırımcılar genellikle negatif çarpıklık sergileyen yüksek riskli varlıklardan uzak durmayı tercih ederler. Literatürde yer alan çalışmaların büyük çoğunluğu üçüncü merkezi momenti çarpıklık katsayısı olarak kullanmışlardır. Portföyün çarpıklığı, menkul kıymetlerin çarpıklık katsayılarının ağırlıklı ortalamasına eşit olmayıp, portföyü oluşturan her bir menkul kıymet çifti için hesaplanan bileşik çarpıklıklarının ağırlıklı ortalamasına eşittir. Buna göre portföyün üçüncü merkezi momenti izleyen şekilde hesaplanır:

$$S^3(R_p) = E \left[\left\{ x^T (R_p - E(R_p)) \right\}^3 \right] = \sum_{i=1}^n x_i^3 S_i^3 + 3 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i^2 x_j S_{ij} + \sum_{j=1}^n x_i x_j^2 S_{ij} \right), (i \neq j) \quad (5.11)$$

veya

$$\begin{aligned} S^3(R_p) &= E \left[\left\{ x^T (R_p - E(R_p)) \right\}^3 \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i - \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \right)^3 \right] \Rightarrow \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i - \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j R_j - \sum_{j=1}^n x_j E(R_j) \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k R_k - \sum_{k=1}^n x_k E(R_k) \right) \right] \Rightarrow \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_j x_k (R_i - E(R_i)) (R_j - E(R_j)) (R_k - E(R_k)) \right] \Rightarrow \\ S^3(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_j x_k S_{ijk} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$S_{ijj} = E \left[\{ R_i - E(R_i) \}^2 \{ R_j - E(R_j) \} \right] \quad (5.13)$$

$$S_{ijj} = E \left[\{ R_i - E(R_i) \} \{ R_j - E(R_j) \}^2 \right] \quad (5.14)$$

$$S_{ijk} = E \left[\{ R_i - E(R_i) \} \{ R_j - E(R_j) \} \{ R_k - E(R_k) \} \right] \quad (5.15)$$

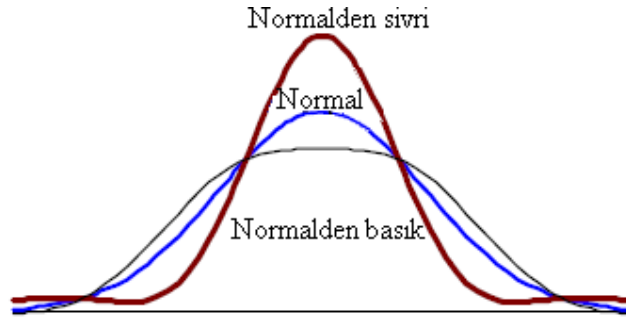
S_i^3 : i . menkul kıymetin üçüncü merkezi momenti

S_{ij}, S_{ijj} : i . ve j . menkul kıymetler için merkezi bileşik moment

S_{ijk} : i, j . ve k . menkul kıymetin merkezi bileşik momenti

5.3.4 Portföyün Dördüncü Mertebeden Merkezi Momenti

Basıklık ölçüsü, bir dağılımın ortalaması etrafındaki yaygınlığını ölçer. Bazı durumlarda rassal değişkenin dağılımı ortalamanın çok yakınında yoğunlaştığı zaman olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği normale göre sivri, tersi olduğunda ise normale göre basık olur. Çarpıklık katsayısının işareti dağılımın simetrisi hakkında bilgi vermek için yeterli iken basıklık katsayısı daha çok normal dağılıma göre karşılaştırma yapmak için kullanılır (Bener, 2002; Mood vd., 1974).



Şekil 5.6 Farklı basıklık ölçüsüne göre olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri (Maillet, 2007) Çarpıklık katsayısında olduğu gibi bazen dördüncü merkezi moment μ_4 basıklık katsayısı olarak kullanılabilir, ancak benzer sorun burada da görüleceği için Pearson tarafından dördüncü merkezi moment varyansın karesine bölünerek standart hale getirilmiştir:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (5.16)$$

veya Fisher'in tanımından hareketle

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \beta_2 - 3 \quad (5.17)$$

denklemleri Fisher basıklık katsayısı veya aşırı (excess) basıklık olarak bilinir.

Literatürde en sık kullanılan basıklık ölçüsü momentlere dayanan Pearson basıklık katsayısıdır. Normal dağılım için $\beta_2 = 3$ ($\gamma_2 = 0$) olup, $\beta_2 > 3$ ($\gamma_2 > 0$) normalden daha sivri ve kalın kuyruklu, $\beta_2 < 3$ ($\gamma_2 < 0$) ise normalden daha basık ve ince kuyruklu dağılımı gösterir (Genceli, 2006).

Portföy seçimi problemleri için dördüncü merkezi moment ile alakalı basıklık ölçüsü problemi oldukça zor bir yapıya dönüştürdüğü için literatürde çok az araştırmacının ilgisini

çekmiştir. Genellikle getiri dağılımının normale göre daha sivri ve kalın kuyruklu olduğunu bilinmektedir. Basıklık ölçüsü ortalamadan oldukça yüksek ve oldukça düşük değerlerde olan uç gözlem değerlerinin ölçülmesinde kullanılır. Buna göre normale göre sivri dağılımlarda uç gözlemler normal dağılıma göre daha sık oluşurken, normale göre basık dağılımlarda uç gözlemler normal dağılıma göre daha az oluşur.

Yapılan çalışmalar ile riskten kaçan yatırımcıların normale göre basık ve ince kuyruklu dağılımları tercih ettiklerini ortaya koymuştur (Schoot ve Horvath, 1980; Harvey ve Siddique, 2006; Jondeau ve Rockinger, 2003; Haas, 2007). Portföy getiri dağılımı normale göre daha basık ise çok yüksek veya çok düşük getirilerin meydana gelme olasılığı normal dağılıma göre daha düşüktür.

Çarpıklık ölçüsünde olduğu gibi literatürde yer alan çalışmaların büyük çoğunluğu dördüncü merkezi momenti basıklık katsayısı olarak kullanmışlardır. Portföyün basıklığı, menkul kıymetlerin basıklık katsayılarının ağırlıklı ortalamasına eşit olmayıp, portföyü oluşturan her bir menkul kıymet çifti için hesaplanan bileşik basıklıklarının ağırlıklı ortalamasına eşittir. Buna göre portföyün dördüncü merkezi momenti izleyen şekilde hesaplanır:

$$K^4(R_p) = E \left[\left\{ x^T (R_p - E(R_p)) \right\}^4 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^4 K_i^4 + 4 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i^3 x_j K_{ijj} + \sum_{j=1}^n x_i x_j^3 K_{ijj} \right) + 6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 x_j^2 K_{ijj}, \quad (i \neq j) \quad (5.18)$$

veya

$$K^4(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_i x_j x_k x_l K_{ijkl} \quad (5.19)$$

$$K_{ijj} = E \left[\{R_i - E(R_i)\}^3 \{R_j - E(R_j)\} \right] \quad (5.20)$$

$$K_{ijj} = E \left[\{R_i - E(R_i)\} \{R_j - E(R_j)\}^3 \right] \quad (5.21)$$

$$K_{ijj} = E \left[\{R_i - E(R_i)\}^2 \{R_j - E(R_j)\}^2 \right] \quad (5.22)$$

$$K_{ijkl} = E \left[\{R_i - E(R_i)\} \{R_j - E(R_j)\} \{R_k - E(R_k)\} \{R_l - E(R_l)\} \right] \quad (5.23)$$

K_i^4 : i . menkul kıymetin dördüncü merkezi momenti

K_{ijj} , K_{ijj} , K_{ijj} : i . ve j . menkul kıymetler için merkezi bileşik moment

K_{ijkl} : i ., j ., k ve l . menkul kıymetin merkezi bileşik momenti

5.4 Çok Kriterli Portföy Seçimi Problemleri ve Çözüm Yaklaşımları

Bu bölümde, ortalama ve varyans dışında yüksek mertebeli merkezi momentleri göz önüne alan modeller ve çözüm yaklaşımlarına değinilecektir.

5.4.1 Ortalama-Varyans Modeli [Markowitz, 1952]

Modern portföy teorisinin kurucusu olan Markowitz'in (1952, 1959) çalışmasında beklenen değer ile temsil edilen portföyün getirisi maksimize edilirken varyans ile temsil edilen portföyün riski ise minimize edilir. Markowitz, portföyde yer alan her bir menkul değer in geçmiş dönem verilerinden hareketle portföyün getirisi ve varyansını izleyen şekilde tanımlamaktadır:

$i, j \in \{1, \dots, n\}$: portföyde yer alan varlıkların kümesi

$t = \{1, \dots, T\}$: portföyde yer alan varlıkların bulunduğu dönemlerinin kümesi

R_{it} : i . varlığın t . dönemdeki getirisi

$\bar{R}_i$: i . varlığın ortalama getirisi

x_i : i . menkul değer in portföydeki yatırım oranı olmak üzere,

$$E(\hat{R}_i) = \bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.24)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.25)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (5.26)$$

Buna göre ortalama-varyans kriterlerini göz önüne alan problem izleyen şeklindedir:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i \quad (5.27)$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \quad (5.28)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.29)$$

Ancak risk ve getiri birlikte hareket eden değişkenler olduğundan aynı anda riskin minimize edilmesi ve getirinin maksimize edilmesi kolay olmayacaktır. Markowitz'in teorisine göre verilen risk seviyesinde portföyün beklenen getirisi maksimize edilir veya hedeflenen beklenen getiri seviyesinde portföyün riski minimize edilir:

i. α : Yatırımcının üstleneceği maksimum risk seviyesi olmak üzere;

$$\max \sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i \quad (5.30)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \leq \alpha \quad (5.31)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.32)$$

amaç fonksiyonu olan portföyün getirisi lineer olduğundan (5.30)-(5.32) problemi konveks küme üzerinde lineer fonksiyonun maksimumunu bulma problemine dönüşür.

ii. β : Yatırımcının hedeflediği minimum getiri seviyesi olmak üzere;

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i \geq \alpha \quad (5.34)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

amaç fonksiyonu olan portföyün varyansı karesel konveks fonksiyon olduğundan (5.33)-(5.35) problemi karesel optimizasyon yöntemi ile çözülür (Wang ve Xia, 2002; Ehrgott vd, 2004).

Markowitz'in problemi kısıtlamalı optimizasyon şeklinde ifade edilebileceği gibi iki amaç fonksiyonu $\lambda \in [0,1]$ parametresi ile ağırlıklandırılarak kısıtlamasız optimizasyon problemine dönüştürülebilir:

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \right] - (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i \right] \quad (5.36)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.37)$$

O halde farklı α değerleri için problemi çözmektense farklı λ parametresine karşılık model çözülür:

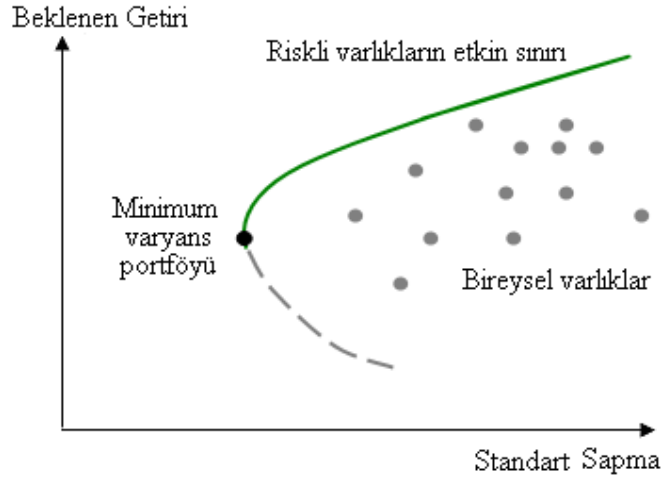
$\lambda = 0$ için risk göz önüne alınmaksızın, beklenen getiri maksimize edilmeye çalışılır. Bu durumda optimal çözüm, en yüksek getiriye sahip olan yalnızca bir menkul değerden oluşur.

$\lambda = 1$ için getiri göz önüne alınmaksızın, risk minimize edilmeye çalışılır. Bu durumda ise optimal çözüm, riski minimize edecek şekilde birçok menkul değerden oluşacaktır.

$0 < \lambda < 1$ için getiri ve risk önem derecelerini dikkate alınarak optimal portföyler belirlenecektir (Chang vd., 2000; Demirtaş ve Güngör, 2004).

Böylece çeşitli seviyelerde verilen risk veya beklenen değer kısıtlaması altında veya farklı

ağırlıklandırma parametresine göre problem çözülerek yatırımcının risk-getiri tercihlerine dayanarak seçim yapabileceği optimum getiri ve risk değerlerinden oluşan etkin sınır eğrisi elde edilir. Bu eğri üzerindeki tüm noktalar verilen risk düzeyinde yatırımcıya maksimum getiri sağlar veya hedeflenen getiri düzeyinde yatırımcıya en düşük riski sunar. Yatırımcı riske karşı izleyeceği tutuma göre etkin sınır üzerinden portföyünü seçecektir (Markowitz, 1959, 1987; Elton ve Gruber, 1997).



Şekil 5.7 Markowitz'in etkin sınır eğrisi (Chen vd., 2008).

5.4.2 Ortalama-Varyans-Çarpıklık Modeli [Lai, 1991]

Getiri dağılımının normal dağılmadığının ortaya konulması ile yüksek mertebeli momentlerin göz önüne alınması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Yapılan çalışmalar, ortalama-varyans-çarpıklık kriteri göz önüne alındığında daha iyi sonuç alındığını göstermektedir. Çarpıklık kriterinin göz önüne alınması ile, beklenen değer ve çarpıklık maksimize edilirken varyansın minimize edilmesi ile portföy seçimi problemi birbiri ile çelişen amaç fonksiyonlarından oluşur. Lai (1991) çalışmasında ortalama ve varyansın yanı sıra çarpıklık kriterini de göz önüne alan optimal portföy seçimi için izleyen varsayımları kabul etmiştir:

- i. Yatırımcı riskten kaçan kişi olup dönem sonundaki servetinin beklenen faydasını maksimize etmek ister.
- ii. $n+1$ tane varlık mevcut olup $n+1$. varlığın risksiz olduğu kabul edilir.
- iii. Tüm varlıklar kolaylıkla satılabilir, kusursuzca bölünebilir ve sınırlı sorumlulukları vardır.
- iv. Risksiz varlık için borç alma ve verme oranları eşittir.
- v. Sermaye piyasası etkindir. Vergi ve işlem maliyeti yoktur.
- vi. Gelirin tamamının kullanılması ile tüm varlıkların sınırsız açıktan satışına izin vardır.

Portföyün çarpıklığını hesaplamak için geçmiş dönem verilerine dayanarak izleyen hesaplamaların yapılması gereklidir:

r_t : risksiz varlığın t . dönemdeki getiri oranı

$\bar{r}$: risksiz varlığın ortalama getirisi olmak üzere

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t \quad (5.38)$$

$$\hat{S}_i^3 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^3, \forall i=1, \dots, n \quad (5.39)$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2 (R_{jt} - \bar{R}_j), \forall i, j=1, \dots, n \quad (5.40)$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)^2, \forall i, j=1, \dots, n. \quad (5.41)$$

Buna göre ortalama-varyans-çarpıklık kriterlerini göz önüne alan problem izleyen şekildedir:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i (\bar{R}_i - \bar{r}) \quad (5.42)$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{S}_{ij} \quad (5.43)$$

$$\max \sum_{i=1}^n x_i^3 \hat{S}_i^3 + 3 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i^2 x_j \hat{S}_{ij} + \sum_{j=1}^n x_i x_j^2 \hat{S}_{ij} \right), i \neq j \quad (5.44)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i=1, \dots, n \quad (5.45)$$

Çarpıklık kriterinin göz önüne alınması sebebiyle (5.42)-(5.45) problemi konveks olmayan yapıya dönüşür. Konveks olmayan optimizasyon problemlerinin çözümü için literatürde yer alan yöntemlerin çoğunluğu global çözümü garanti etmez, ancak lokal bir çözüm sağlayabilir. Lai, önermiş olduğu problemi çözmek için yatırımcının kişisel karar ve tercihlerini de göz önüne alan polinomsal hedef programlama yöntemini seçmiştir.

5.4.3 Ortalama-Varyans-Çarpıklık-Basıklık Modeli [Lai vd., 2006]

Portföy seçimi probleminin dört boyutlu probleme dönüşmesi, hem çok boyutlu etkin yüzeyi tanımlamanın zorluğundan hem de problemi oldukça zor bir yapıya dönüştürdüğü için basıklık kriteri birçok araştırmacı tarafından sıklıkla ihmal edilmektedir. Literatürde basıklık kriterini de göz önüne alan portföy seçimi problemleri oldukça az sayıdadır. Basıklık kriterini göz önüne alınması ile beklenen değer ve çarpıklık maksimize edilirken varyans ve basıklığın minimize edilmesi ile portföy seçimi problemi birbiri ile çelişen amaç fonksiyonlarından oluşmaktadır. Portföyün basıklığını hesaplamak için geçmiş dönem verilerine dayanan izleyen hesaplama gereklidir:

$$\hat{K}_i^4 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^4, \forall i=1, \dots, n \quad (5.46)$$

$$\hat{K}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^3 (R_{jt} - \bar{R}_j), \forall i, j=1, \dots, n \quad (5.47)$$

$$\hat{K}_{ijj} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)^3, \forall i, j=1, \dots, n. \quad (5.48)$$

$$\hat{K}_{ijj} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2 (R_{jt} - \bar{R}_j)^2, \forall i, j=1, \dots, n \quad (5.49)$$

Buna göre ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık kriterlerini göz önüne alan problem izleyen şekildedir:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i \hat{R}_i \quad (5.50)$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \quad (5.51)$$

$$\max \sum_{i=1}^n x_i^3 \hat{S}_i^3 + 3 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i^2 x_j \hat{S}_{ij} + \sum_{j=1}^n x_i x_j^2 \hat{S}_{ij} \right), i \neq j \quad (5.52)$$

$$\min \sum_{i=1}^n x_i^4 \hat{K}_i^4 + 4 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i^3 x_j \hat{K}_{ijj} + \sum_{j=1}^n x_i x_j^3 \hat{K}_{ijj} \right) + 6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 x_j^2 \hat{K}_{ijj}, i \neq j \quad (5.53)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i=1, \dots, n \quad (5.54)$$

Lai vd. (1996), ortalama-varyans-çarpıklık modeline benzer olarak (5.51)-(5.54) çok kriterli optimizasyon modelini çözmek için polinomsal hedef programlama yöntemini seçmişlerdir. Böylece çok kriterli problem, birbirinden bağımsız dört adet alt probleme dönüşür. Bu yöntemin temel hedefi, yatırımcının amaçladığı ortalama, varyans, çarpıklık, basıklık değerleri ile belirlenen ideal portföyden sapmaları mümkün olduğunca minimize etmektir.

5.4.4 Varlık Sayısı Kısıtlı Model [Chang vd., 2000]

Markowitz'in ortalama-varyans yaklaşımı modeli ve bu modele ilaveten yüksek mertebeli merkezi momentleri göz önüne alan çalışmaların eksik yanı pratikte oldukça öneme sahip olan kısıtlamaları göz önüne almayışılarıdır. Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerde, portföye girecek menkul kıymet adedini sınırlamak, herbir menkul kıymetin yatırım oranı için alt ve üst limitleri belirlemek gibi kısıtlamalar olabileceği için bu tür kısıtlamaları göz önüne almayan modeller yatırımcının beklentilerini karşılamada yetersiz kalabilir (Chang vd., 2000; Demirtaş ve Güngör, 2004).

Standart ortalama-varyans probleminde hedeflenen maksimum getiri kısıtlaması altında varyansın minimize edilmesi için karesel programlama problemi kolaylıkla çözülebilirken, standart yaklaşıma varlık sayısı kısıtlaması ilave edildiğinde etkin sınır eğrisini bulmak epey güçleştiği için karesel programlama yöntemi problemi çözmekte yetersiz kalır. Chang vd. (2000), çalışmasında bu tür kısıtlamalar altında etkin sınır eğrisinin süreksiz fonksiyon halini aldığını göstermişlerdir:



Şekil 5.8 Varlık sayısı kısıtlı problem için etkin sınır eğrisi (Chang vd., 2000).

Chang vd., (2000) önermiş oldukları modelin matematiksel ifadesi izleyen şekildedir:

n : Portföydeki menkul kıymetlerin sayısı,

k : Portföyde bulunması istenen menkul kıymetlerin sayısı

$z_i : \begin{cases} 1, & \text{Eğer } i.\text{menkul değer portföye dahil ise} \\ 0 & \text{Aksi halde} \end{cases}$

ϵ_i : i . menkul değer portföye dahil ise portföy içindeki minimum oranı

δ_i : i . menkul değer portföye dahil ise portföy içindeki maksimum oranı

x_i : i . menkul kıymetin yatırım oranı

α : Yatırımcının üstleneceği maksimum risk seviyesi olmak üzere;

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \hat{\sigma}_{ij} \quad (5.55)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i = \alpha \quad (5.56)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (5.57)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = k \quad (5.58)$$

$$0 \leq \varepsilon_i \leq \delta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.59)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.60)$$

$$z_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n \quad (5.61)$$

Literatürde varlık sayısı kısıtlı portföy modelleri ile yapılan çok az çalışma mevcuttur. Ortalama-varyans uzayında varlık sayısı kısıtlaması göz önüne alındığında problem genellikle karma-tamsayılı lineer olmayan karesel programlama problemiyle ifade edilir ve bu problemi çözmek için etkin algoritmalar olmamasına rağmen problemi çözmek için genel olarak iki yaklaşım söz konusudur: Karma-tamsayılı lineer olmayan programlama için uygun algoritma tekniklerini kullanmak veya Markowitz'in minimize etmeye çalıştığı karesel amaç fonksiyonu yerine lineer risk fonksiyonu kullanıp sezgisel yöntemlere dayanarak yaklaşık çözüm bulmak.

Bienstock (1995, 1996) karesel risk yaklaşımını ileri sürerek problemin çözümü için branch-and-cut algoritmasını kullanmıştır. Speranza (1996) ise ilk defa lineer risk yaklaşımı için varyans yerine negatif-yarı ortalama mutlak sapma fonksiyonunu kullanarak karma-tamsayılı programlama problemi elde etmiş ve sezgisel yöntemler ile modeli çözmüştür. Chang vd. (2000) ise portföyde bulunacak varlık sayısı ve portföyde tutulan varlığın sahip olduğu oran kısıtlamaları altında Markowitz'in problemini sezgisel yöntemler ile çözmüştür.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, çok kriterli optimizasyon teorisi temel tanım ve teoremleri ile irdelenmiştir. Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas amaçlarından biri optimal çözümlerin varlığı hakkında koşullar bulmaktır. Çok kriterli optimizasyonda da Pareto noktalarını bulmak için klasik ayırma teoremlerinin uygulanması durumunda konvekslik şartı önemlidir. Ancak ister dualite ister çok kriterli optimizasyon teorisi olsun karşılaşılan problemlerin çoğu konveks olmayan optimizasyon problemleri olmaktadır. Gasımov (1992) çalışmasında konveks kümelerin seviye kümeleri yardımı ile lineer olmayan ayırma teoremi geliştirilerek asıl minimal noktalar için gerek koşul bulmuştur.

Bu çalışmada, Gasımov'un (1992) çalışması geliştirilerek verilen gerek koşulun yeter koşul olması için uzayda sıralama sağlayan koni ile ayırma fonksiyonunun recessive fonksiyonu arasında ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması halinde verilen noktanın asıl minimal nokta olduğu ispat edilmiştir.

Çok kriterli optimizasyon probleminin çözümü için literatürde mevcut olan skalerleştirme yöntemleri incelenmiştir. Mevcut skalerleştirme yöntemleri genellikle konveks problemlere hitap ettiği için bu yöntemlerin konveks olmayan çok kriterli optimizasyon problemlerine uygulanmaları sonucunda elde edilen çözüm yetersiz kalabilir. Ancak bu yöntemler arasında Gasımov (2001) tarafından geliştirilen konik skalerleştirme yöntemi konveks olmayan çok kriterli problemin tüm etkin noktalarını elde edebilmesi ve aynı zamanda yatırımcının tercih ve isteklerini modele yansıtabilmesi özellikleri ile diğer yöntemlere göre üstünlük sağlamaktadır.

Elde edilen konik skaler problem ise genellikle konveks olmayan ve diferansiyellenemeyen yapıda olduğundan türev bilgisi gerektiren klasik Lagrangian yaklaşımları ile çözülemez. Bu nedenle Azimov ve Gasımov (1999, 2002) tarafından önerilen genişletilmiş sivri Lagrangian dual problemi incelenmiştir. Bu dual problem, konveks olmayan durumlarda sıklıkla karşılaşılan dual aralık sorununu ortadan kaldırmak için asıl problemin konveks veya diferansiyellenebilir olmasına ihtiyaç duymamaktadır.

Literatürde konveks olmayan optimizasyon problemleri için geliştirilen algoritmalar ancak lokal çözümü garanti edebilirken global çözüm sağlayamaz. Bu nedenle elde edilen dual problemin çözümü için Gasımov tarafından geliştirilen Uygun Değerler Temelli Geliştirilmiş Subgradient Yöntemi (F-MSG) yöntemi ele alınmıştır. F-MSG yöntemi, problem üzerinde konvekslik veya diferansiyellenebilirlik koşulları aramayıp konveks olmayan, kısıtlamalı, çok

kriterli optimizasyon problemlerinin global çözümünü garanti etmektedir.

Çok kriterli optimizasyon teorisinin uygulama alanlarından biri olarak finans teorisi seçilmiş ve bu alanın en temel problemlerinden biri olan portföy seçimi problemi incelenmiştir. Optimal portföy oluşturmak için mevcut geleneksel ve modern yaklaşımın dayandığı temeller, avantaj ve dezavantajları ele alınmıştır. Buna göre Modern portföy teorisinin kurucusu olan Markowitz'in geliştirmiş olduğu ortalama-varyans yaklaşımı ile bu model üzerine kurulan yüksek mertebeli merkezi momentlerin alınması gerekliliğini gösteren çalışmalar incelenmiştir. Buna göre oluşturulan modellerin matematiksel ifadesi ve çözümlerinde izlenen yaklaşımlar ele alınmıştır.

Ortalama-varyans yaklaşımına ilaveten yüksek mertebeli merkezi momentleri ve varlık sayısı kısıtlamalarını göz önüne alan problem genellikle konveks olmayan, diferansiyellenemeyen, çok kriterli optimizasyon problemi ile ifade edilmektedir. Bilindiği üzere, literatürde bu tür karmaşık ve zor problemleri çözebilecek etkin bir algoritma uygulanmamıştır. Modelleri çözmek için uygulanan yöntemler yalnızca lokal çözümleri garanti edebilmektedir. Aynı zamanda uygulanan birçok yöntem yatırımcının kişisel tercih ve isteklerini modele yansıtamamaktadır.

Bu tezde öğrenilen konular, gelecekte yapılacak birçok çalışmaya temel olacaktır. Çalışılan konunun oldukça geniş kapsamlı olması nedeni ile sayısal uygulama kısmı bu tezde yer almamakla beraber ileride yapılması planlanan çalışmalar kısaca şöyle özetlenebilir:

Bu çalışmada anlatılan konveks olmayan çok kriterli optimizasyon teorisinde elde edilen teori ve algoritmaların üstünlüğüne karşılık, bu alanın sıklıkla uygulama alanlarından biri olan portföy seçimi problemini çözmek için mevcut algoritmaların özellikleri incelendiğinde ileride yapılacak olan çalışmalar için anlatılan teori ve algoritmaların bu alanda uygulanması önerilmektedir. Böylece yatırımcıyı daha tatmin edici çözümlere ulaşılması hedeflenmektedir. Bu hedef doğrultusunda ileride yapılacak çalışmalar için mevcut skalerleştirme yöntemleri ile önerilen konik skalerleştirme yöntemi ve mevcut çözüm algoritmaları ile F-MSG yöntemi seçilen probleme uygulanabilir ve elde edilen çözümler karşılaştırılarak önerilen yöntemlerin yatırımcıya sağlayacağı faydalar sunulabilir. Değinilen modellere ilaveten başka kriterler de göz önüne alınarak önerilecek modelin kapsamı genişletilebilir.

Sonuç olarak, hem optimizasyon teorisi hem de finans teorisi oldukça geniş ve gün geçtikçe gelişen alanlar oldukları için bu konular üzerine araştırma yapmak gerek akademisyenlerin gerekse de yatırım uzmanlarının ilgisini çekmektedir. Bu alandaki çalışmaları takip etmek hem akademisyenlere hem de yatırım uzmanlarına oldukça fayda sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Akyıldız, H., (2005), “Temel Dinamikleri ve Çelişkileriyle Üretim ve Bölüşüm Süreci”, Tühis, İş Hukuku ve İktisat Dergisi, 19:27-44.
- Arditti, F. D., (1971), “Another Look at Mutual Fund Performance”, Journal of Financial and Quantitative Analysis”, 6:909-912.
- Arditti, F. D. ve Levy, H., (1975), “Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: The Multi-period Case”, Journal of Finance, 30:797-809.
- Atan, M., (2005), “Karesel Programlama İle Portföy Optimizasyonu”, VII. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, 26-27 Mayıs 2005, Beyazıt –İstanbul.
- Atan, M. ve Duman, S., (2003), “Doğrusal Olmayan Hedef Programlaması Yardımıyla Alternatif Bir Portföy Modeli Çözümlemesi”, 3. İstatistik Kongresi, İstatistik Mezunları Derneği, 16 - 20 Nisan 2003, Belek-Antalya.
- Azimov, A. Y., (2008a), “Duality for Set-valued Multiobjective Optimization Problems: Part1: Mathematical Programming”, Journal of Optimization Theory and Applications, 137:61-74.
- Azimov, A. Y., (2008b), “Duality for Set-valued Multiobjective Optimization Problems: Part2: Optimal Control”, Journal of Optimization Theory and Applications, 137:75-88.
- Azimov, A. Y. ve Gasimov, R. N., (1999), “On Weak Conjugacy, Weak Subdifferentials and Duality with Zero Gap in Nonconvex Optimization”, International Journal of Applied Mathematics, 1:171-192.
- Azimov, A. Y. ve Gasimov, R. N., (2002), “Stability and Duality of Nonconvex Problems via Augmented Lagrangian”, Cybernetics and System Analysis, 38:412-421.
- Azimli, A. ve Kemalbay, G., (2007), “Lineer Olmayan Ayırma Teoremi ve Asıl Minimal Noktaların Karakterizasyonu”, 5. İstatistik Kongresi ve Risk Ölçümleri ve Yükümlülük Toplantısı, 20-24 Mayıs 2007, Belek-Antalya.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. ve Shetty, C. M., (1993), “Nonlinear Programming Theory and Algorithms”, Second Edition, John Wiley & Sons, Singapore.
- Bener, A., (2002), “Matematiksel İstatistik Cilt I”, Yıldız Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul.
- Benson, H. P. ve Morin, T. L., (1977), “The Vector Maximization Problem: Proper Efficiency and Stability”, SIAM Journal on Applied Mathematics, 32:64-72.
- Benson, H. P., (1978), “Existence of Efficient Solutions for Vector Maximization Problem”, Journal of Optimization Theory and Applications, 26:569-580.
- Ben-Tal, A. ve Nemirovski, A., (2004), “Lecture Notes Optimization I-II, Convex Analysis”, Israel Institute Technology.
- Borwein, J. M., (1977), “Proper Efficient Points for Maximization with Respect to Cones”, SIAM Journal on Control and Optimization, 15:57-63.
- Borwein, J. M., (1983), “On The Existence of Pareto Efficient Points”, Mathematics of Operation Research, 8:64-73.
- Boyd, S. ve Vandenberghe L., (2004), “Convex Optimization”, Cambridge University Pres, Cambridge.
- Burachik, R. S., (2007), “Notes on Advanced Optimization”, www.unisanet.unisa.edu.au.

- Burachick, R. S., Gasimov, R. N., Ismayilova, N. A. ve Kaya, C. Y., (2006), "On a Modified Algorithm for Dual Problems via Sharp Augmented Lagrangian", *Journal of Global Optimization*, 34:55-78.
- Ceylan, A., (2003), "Finansal Teknikler", Ekin Kitabevi, Bursa.
- Chang, T. -J., Meade, N., Beasley, J. E. ve Sharaiha, Y. M., (2000), "Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation", *Computers&Operations Research*, 27:1271-1302.
- Chankong, V. ve Haimes, Y., (1983), "Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology", Elsevier Science Publishing Company, New York.
- Chen, W-P., Chung, H., Ho, K-Y. ve Hsu, T-L., (2008), "Portfolio Optimization Models and Mean-Variance Spanning Tests", *Conference on Quantitative Finance*, Hsinchu-Taiwan.
- Choo, E. ve Atkins. D., (1983), "Proper Efficiency in Nonconvex Multicriteria Programming", *Mathematics of Operation Research*, 8:467-470.
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S. ve Prakash A. J., (1997), "Portfolio Selecion and Skewness: Evidence from International Stock Market", *Journal of Banking and Finance*, 21:143-167.
- Collete, Y. ve Siarry, P., (2003), "Multiobjective Optimization Principles and Case Studies", Springer-Verlag, Berlin.
- Corley, H. W., (1980), "An Existence Result for Maximizations with Respect to Cones", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 31:277-281.
- Demirtaş, Ö. ve Güngör, Z., (2004), "Portföy Yönetimi ve Portföy Seçimine Yönelik Uygulama", *Havacılık ve Uzay Teknolojileri Dergisi*, 1:103-109.
- Ehrgott, M., (2000), "Multicriteria Optimization", Springer-Verlag, Berlin.
- Ehrgott, M., Klamroth, K. ve Schwehm, C., (2004), "An MCDM Approach to Portfolio Optimization", *European Journal of Operational Research*, 155:752-770.
- Elton, E. J. ve Martin, J. G., (1997), "Modern Portfolio Theory, 1950 to date", *Journal of Banking&Finance*, 21:1743-1759.
- Ertuna, İ. Ö., (1991), "Yatırım ve Portföy Analizi (Bilgisayar Uygulama Örnekleriyle)", Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Frenk, J. B. G. ve Kassay, G., (2004), "Introduction to Convex and Quasiconvex Analysis", *Erim Report Series Research in Management*, Netherlands.
- Fieldsend, J. E., Matatko, J. ve Peng, M., (2004), "Cardinality Constrained Portfolio Optimization", In *Proceedings of the Fifth International Conferenceon Intelligent Data Engineering and Automated Learning*, Lecture Notes in Computer Science, Springer.
- Gasimov, R. N., (1992), "Duality in Nonconvex Optimization", *Phd Thesis*, Bakû.
- Gasimov, R. N., (2001), "Characterization of The Benson Proper Efficiency and Scalarization in Nonconvex Vector Optimization", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 507:189-198.
- Gasimov, R. N., (2002), "Augmented Lagrangian Duality and Nondifferentiable Optimization Methods in Nonconvex Programming", *Journal of Global Optimization*, 24:187-203.
- Gasimov, R. N. ve Üstün, Ö., (2005), "Solving the Quadratic Assignment Problems Using Modified Subgradient Algorithm", *35th International Conference on Computers & Industrial Engineering*, 19-22 June 2005, Istanbul.

- Gasimov, R. N. ve Üstün, Ö., (2006), "Reference Point Approach for Cardinality Constrained Portfolio Optimization", First Conference of Advanced Mathematical Methods for Finance, 26-29 April 2006, Side-Antalya.
- Gasimov, R. N. ve Üstün, Ö., (2007), "Solving the Quadratic Assignment Problems Using F-MSG Algorithm", Journal of Industrial and Management Optimization, 3:173-191.
- Gasimov, R. N., Üstün, Ö. ve Rubinov A. M., (2004), "The Modified Subgradient Algorithm Based On Feasible Dual Values And Solving The Quadratic Assignment Problems", International Conference on Continuous Optimization ICCOPT-I, 2-4 August 2004, Troy-United States of America.
- Gasimov, R. N., Üstün, Ö. ve Rubinov A. M., (2006), "The Modified Subgradient Algorithm Based On Feasible Values", Journal of Optimization, (submitted paper).
- Genceli, M., (2006), "Tek Değişkenli Dağılımlarda Normallik Testleri", Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi, 4:69-91.
- Genel, H., (2004), "Genetik Algoritmalar ile Portföy Optimizasyonu", Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, 73s.
- Geoffrion, A. M., (1968), "Proper Efficiency and The Theory of Vector Maximization", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22:618-630.
- Giorgi, G., Guerraggio, A. ve Thierfelder, J., (2004), "Mathematics of Optimization: Smooth and Nonsmooth Case", Elsevier Science Publishing Company, Netherlands.
- Guerraggio, A., Molho, E. ve Zaffaroni, A., (1994), "On The Notion of Proper Efficiency in Vector Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications, 82:1-21.
- Haas, M., (2007), "Do Investors Dislike Kurtosis?", Economics Bulletin, 7:1-9.
- Haimes, Y. Y., Lasdon, L. S. ve Wismer, D. A., (1971), "On a Bicriterion Formulation of The Problems of Integrated System Identification and System Optimization", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1:296-297.
- Hartley, R., (1978), "On Cone-Efficiency, Cone-Convexity and Cone-Compactness", SIAM Journal on Applied Mathematics, 2:211-222.
- Henig, M. I., (1982), "Proper Efficiency with Respect to Cones", Journal of Optimization Theory and Applications, 36:387-407.
- Hwang, L. C. ve Masud, A. S. M., (1979), "Multiple Objective Decision Making: Methods and Application", A State-of-the-Art Survey, Springer-Verlag, Berlin.
- Jahn, J., (2003), "Vector Optimization Theory, Applications, and Extensions", Springer-Verlag, Berlin.
- Jurczenko, E., Maillet, B. ve Merlin, P., (2005), "Hedge Funds Portfolio Selection with Higher-order Moments: A Non-parametric Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Efficient Frontier", http://www.riskturk.com/ec2/submitted/EC2_EJBMPM_05.pdf.
- Jurczenko, E. ve Maillet, B., (2006), "Theoretical Foundations of Asset Allocation and Pricing Models with Higher-order Moments", in Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models, Chapter 1, John Wiley & Sons, New York.
- Kane, A., (1982), "Skewness Preference and Portfolio Choice", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17:15-25.

- Kaplan, P. D., (1998), "Asset Allocation Models Using The Markowitz Approach", <http://corporate.morningstar.com/ib/documents/MethodologyDocuments/IBBAAssociates/MarkowitzApproach.pdf>.
- Kemalbay, G., (2008), "Konveks Analiz", Bitirme Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 96 s.
- Kim, T-H. ve White, H., (2004), "On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis: Simulation and Application to the S&P500 Index", Finance Research Letters, 1:56-73.
- Kraus, A. ve Litzenberger, R., (1976), "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", Journal of Finance, 31:1085-1094.
- Kuhn, H. W. ve Tucker, A. W., (1951), "Nonlinear Programming", Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability", University of California Press, Berkeley, 481-492.
- Lai, T-Y., (1991), "Portfolio Selection with Skewness: A Multiple-Objective Approach", Review of Quantitative Finance and Accounting, 1:293-305.
- Lai, K. K., Yu, L. ve Wang, S., (2006), "Mean-Variance-Skewness-Kurtosis-based Portfolio Optimization", Proceedings of the First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences, 2:292-297
- Levy, H. ve Sarnat, M., (1972), "Investment and Portfolio Analysis", John Wiley&Sons, Inc, New York.
- Liow, K. H. ve Chan, L. C., (2004), "Covariance, Coskewness and Cokurtosis in Global Real Estate Securities", <http://www.rst.nus.edu.sg/research/workingpaper/2004-003.pdf>.
- Maillet, B. B., (2007), "Absolute and Asymmetric Robust Asset Allocations by Extension of the CAPM", Presentation for the 5th Europlace Institute of Finance International Meeting, Paris.
- Markowitz, H., (1952), "Portfolio Selection", Journal of Finance, 8:77-91.
- Markowitz, H., (1959), "Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments", John Wiley&Sons, Inc, New York.
- Martellini, L. ve Ziemann, V., (2007), "Improved Forecasts of Higher-Order Co-moments and Implications for Portfolio Selection", EDHEC Risk and Asset Management Research Centre, EDHEC Working Paper.
- Miettinen, K., (1999), "Nonlinear Multiobjective Optimization", Kluwer, Boston.
- Mood, A. M, Graybill, F. A. ve Boes, D. C., (1974), "Introduction to the Theory of Statistics", Third Edition, McGraw-Hill, Inc., United States of America.
- Özdil, T. ve Yılmaz, C., (2001) "Seçilmiş Hisse Senetlerinden Minimum Risk Düzeyinde Maksimum Getirili Portföyün Oyun Kuramıyla Oluşturulması", V. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu 19-22 Eylül 2001, Çukurova Üniversitesi.
- Rockafellar, R. T., (1970), "Convex Analysis", Princeton University Pres, Princeton.
- Rockafellar, R. T. ve Wets, R. J.-B., (1998), "Variational Analysis", Springer, Berlin.
- Rubinstein, M., (2002), "Markowitz's Portfolio Selection: A Fifty-Year Retrospective", The Journal of Finance, 57:1041-1045.
- Samuelson, P., (1970), "The Fundamental Approximation of Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments, Review of Economic Studies, 37:537-542.

- Saraç, T. ve Sipahioğlu A., (2004), "Sırt Çantası Probleminin Çözümünde Genişletilmiş Subgradient Yönteminin Kullanımı", 24. Ulusal Yöneylem Araştırması/Endüstri Mühendisliği Kongresi, 15-18 Haziran 2004, Gaziantep-Adana.
- Sawaragi, Y., Nakayama, H. ve Tanino, T., (1985), "Theory of Multiobjective Optimization", Academic Press, Orlando.
- Scott, R. C. ve Horvath, P. A., (1980), "On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance", The Journal of Finance, 35:915-919.
- Serper, Ö., (2000), "Uygulamalı İstatistik I", Ezgi Kitabevi, Bursa.
- Sevil, G., (2001), "Finansal Risk Yönetimi Çerçevesinde Piyasa Volatilitésinin Tahmini ve Portföy VaR Hesaplamaları, Eskişehir.
- Sharpe, W. F., Alexander, G. J. ve Bailey, J. W., (1985), "Investments", 3rd Edition, Prentice Hall.
- Sonntag, Y. ve Zalinescu, C., (2000), "Comparision of Existence Results for Efficient Points", Journal of Optimization Theory and Applications, 105:161-188.
- Steuer, R. E., (1986), "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application", John Wiley & Sons, United States of America.
- Steuer, R. E. ve Na. P., (2003), "Multiple Criteria Decision Making Combined with Finance: A Categorized Bibliographic Study", European Journal of Operational Research, 150:496-515.
- Tabucanon, M. T., (1988), "Multiple Criteria Decision Making in Industry", Elseiver Science Publishing Company, Netherlands.
- Tanino, T. ve Sawaragi, Y., (1980), "Stability of Nondominated Solutions in Multicriteria Decision-Making", Journal of Optimization Theory and Applications, 30:229-253.
- Üstün, Ö., (2007), "Çok Amaçlı Portföy Optimizasyonu Problemi ve Çözüm Yaklaşımları", Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 165 s.
- Wallingford, B. A., (1967), "A Survey of Portfolio Selection Models", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2:85-106.
- Wang, S. ve Xia, Y., (2002), "Portfolio Selection and Asset Pricing", Springer-Verlag, Berlin.
- Vincent, T. L. ve Grantham, W. J., (1981), "Optimality in Parametric Systems", Wiley-Interscience, New York.
- Yalçın, K., Atan, M. ve Boztosun, D., (2005), "Karesel Programlama Yönteminin İMKB 100 Endeksine Uygulanması ve Portföy Optimizasyonu", İktisat İşletme ve Finans Dergisi, 20:70-83.
- Yu, L. P., (1974), "Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives", 14:319-377.
- Yu, L., Wang, S. ve Lai, K. K., (2008), "Neural Network-Based Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection", Computers&Operations Research, 35:34-46.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	23.10.1983	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1997-2001	Bağcılar Lisesi (Y.D.A.)
Lisans	2001-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
Lisans	2003-2008	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2005-2008	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

2005-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi
-------------------	--