

**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KOORDİNATLARDA GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Mücahit KAPLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TEZ YÖNETİCİSİ
Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

**AĞRI
2016**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOORDİNATLARDA GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Mücahit KAPLAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tezde, koordinatlarda geometrik konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikler incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde reel sayıların bir alt aralığında tanımlı konveks fonksiyon sınıfları ve bu sınıflara ilişkin bazı temel örnekler ile ilgili teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca Hölder ve Power-mean gibi bazı temel eşitsizliklere değinilen bu bölümde konveks fonksiyon sınıfları için tespit edilmiş olan hiyerarşiye dikkat çekilmiştir. İkinci bölümde koordinatlarda konveks fonksiyonlar ve integral eşitsizlikler üzerine detaylı bir inceleme yapılmış ve iki katlı integraller için bazı integral eşitlikleri, bu eşitlikler yardımıyla elde edilen eşitsizlikler ve farklı türden koordinatlarda konveks fonksiyonlar için elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise koordinatlarda geometrik konveks fonksiyonlar için yeni bazı integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu tezin amacı koordinatlarda geometrik konveks fonksiyonlar üzerine araştırma yapmak ve bu fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikler elde etmektir.

2015, 80 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, GA –konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği.

ABSTRACT

Master Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR GEOMETRIC CONVEX FUNCTIONS ON THE CO-ORDINATES

Mücahit KAPLAN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, integral inequalities for geometric convex function on the coordinates was examined. In the first chapter of the study, convex function classes which defined in a lower range of real number and theorems about some basic examples of this class was devoted. Also some basic inequalities like Hölder and Power-mean referred to in this section, the hierarchy that was identified for convex function classes was emphasized. In the second chapter, convex function and integral inequalities on the coordinates was examined in detail and some integral equalities for double integrals, inequalities which obtained with the aid of this equalities and types of Hermite-Hadamard, Ostrowski, and Simpson inequalities which obtained for different types convex function on the coordinates was given. In the third chapter, new some integrals inequalities for geometric convex function on the coordinates was obtained.

The aim of this thesis is working on geometric convex function on the coordinates and obtaining integral inequalities for his functions' classes.

2015, 80 pages

Keywords: Convex functions, GA –convex function, Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, Power-mean inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, tez konumda çalışmamı sağlayan, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımnda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e; teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek Lisans tez çalışmalarım süresince yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye, Sayın Uzman Dr. Çetin YILDIZ'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mücahit KAPLAN

Haziran, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi.....	18
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar	23
3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikleri	31
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	59
4.1. Koordinatlarda Geometrik Fonksiyonların Çarpımına İlişkin İntegral Eşitsizlikler	59
4.2. Koordinatlarda Geometrik Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler.....	66
4.3. Koordinatlarda Geometrik-Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	72
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	77
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER DİZİNİ

$SX_m(h, \Delta_1)$	Δ_1 üzerinde (h, m) –konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\left\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right\ _{\infty}$	f 'nin t, s 'ye göre kısmi türevinin Sonsuz Normu
$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$	f Fonksiyonunun t ve s 'ye Göre Kısmi Türevi
$\mathbb{R}_+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I°	I 'nın İçi
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_n(b)$	n –konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_2(\Delta)$	Δ Bölgesi Üzerinde İkinci Mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$S^*(b)$	Starshaped Fonksiyonlar Sınıfı
$SV_m(h, \Delta_1)$	Δ_1 üzerinde (h, m) –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\mathcal{L}(I)$	Log-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{C}(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
$J(\Delta)$	Δ üzerinde Jensen–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$J(I)$	Jensen–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$JQC(\Delta)$	Δ üzerinde Jensen–quasi–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$JQC(I)$	Jensen–quasi–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	P –Fonksiyon

$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonu
$QC(\Delta)$	Δ üzerinde quasi—konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi—konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h, I)$	h —konkav Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, \Delta)$	Δ üzerinde h —konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h —konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SX(h, \Delta)$	Δ üzerinde h —konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$W(\Delta)$	Δ üzerinde Wright—konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$W(I)$	Wright—konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$WQC(\Delta)$	Δ üzerinde Wright—quasi—konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$WQC(I)$	Wright—quasi—konveks Fonksiyonlar Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon	5
Şekil 2.2. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon	10
Şekil 2.3. Aralıkta quasi –konveks fonksiyon	10
Şekil 2.4. Godunova –levin fonksiyonu, P –fonksiyon, Quasi- konveks fonksiyon, Konveks fonkiyon ve Log –konveks fonksiyn sınıflarının ilişkisi	19
Şekil 2.5. Quasi –konveks fonksiyon, Wright –quasi –konveks fonksiyon ve Jensen –quasi –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	20
Şekil 2.6. Konveks fonksiyon, Wright –konveks fonksiyon ve Jensen –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi	21
Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, m –konveks fonksiyon, n –konveks fonksiyon ve starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi	22
Şekil 2.8. $f_{x,y} = x^2 + y^2$ ve $g_{x,y} = ex + y^4$ konveks fonksiyonlar	25

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler matematiksel analiz, mühendislik ve fizik, optimizasyon teorisi, yaklaşım teorisi ve özellikle matematiğin bütün dallarında önemli bir yere sahiptir. Bu geniş kullanım alanı sayesinde birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu alanda çalışma yapmaya teşvik etmiştir. Eşitsizlik teorisine ilişkin ilk çalışma Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından 1934 yılında yazılan “Inequalities” adlı kitaptır. Adı geçen eserde eşitsizlikler çok çeşitli yönleriyle incelenmiş ve uygulamalarıyla birlikte bu kitapta derlenmiştir. Beckenbach and Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren “Inequalities” adlı ikinci kitap yazılmıştır. 1970 yılında ise bu iki eserde bahsedilmeyen birçok yeni eşitsizlik ve konu Mitrinović tarafından “Analytic Inequalities” adlı eserle literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmaların yanında Mitrinović *et al.* (1993) tarafından yazılan “Classical and New Inequalities in Analysis”, Pachpatte (2005) tarafından yazılan “Mathematical Inequalities” adlı kitaplar da eşitsizlikler konusunda yeni sonuçlar içeren ve bu konuda literatüre katkıda bulunan eserler arasında sayılabilir. Son zamanlarda ise eşitsizlikler konusu daha yoğun bir şekilde çalışılan bir konu haline gelmiş ve bu konu üzerine S.S. Dragomir, R.P. Agarwal, J. Pecarić, M.E. Özdemir, M.Z. Sarıkaya ve E. Set gibi birçok araştırmacı çok sayıda makale, kitap ve monografi yayımlamıştır.

Tanımı bir eşitsizlik yardımıyla verilen konveks fonksiyonlar eşitsizlik teori alanıyla çok ilişkili bir kavram olduğundan bu konuda çalışmalar yapılmış ve konveks fonksiyonlar için farklı türden integral eşitsizlikleri ispat edilmiştir. Bir konveks fonksiyonun ortalama değerine ilişkin sınırlar veren ve Hadamard (veya Hermite-Hadamard) integral eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik Hermite (1822-1901) tarafından Ekim 1881’de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak gönderilmiştir. 1905-1906 yıllarında ise yine Hadamard eşitsizliği kadar literatürde önemli bir yer tutan Bu Jensen eşitsizliği Jensen tarafından ortaya atıldı. 1800lü yılların sonuna doğru araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlanan konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikler konusu günümüze kadar popüler bir şekilde tarihsel gelişimini sürdürmüştür. Birçok

araştırmacının lisansüstü tezine konu olan integral eşitsizlikler ile ilgili öne çıkan bazı tez çalışmaları şu şekilde sıralanabilir.

Set (2010), “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” adlı doktora tezi ile E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra m –konveks, (α, m) –konveks, $\log$ –konveks, $quasi$ –konveks, s –konveks, r –konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizliklerinin yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde etmiştir.

Tunç (2010), “Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” adlı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra elde ettiği eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar vermiştir.

Yıldız (2011), “Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” adlı yüksek lisans tezinde $quasi$ –konveks fonksiyonlar için yaptığı geniş bir literatür taramasının yanısıra, $quasi$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra elde ettiği eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar vermiştir.

Alomari (2011), yılında “Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For s –Convex, Quasi–Convex And r –Convex Mappings And Applications” adlı doktora tezinde s –konveks, $quasi$ –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıflarını kullanarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde etmiş ve bu eşitsizlikler için uygulamalar vermiştir.

Akdemir (2012), “Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler” adlı doktora tezinde öncelikle koordinatlarda bazı yeni konveks fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bunların birtakım özellikleri verilerek bu fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra çalışmada kullanılan bazı yeni lemmalar ve

ispatları verilmiş olup bu lemmalar yardımıyla sırasıyla m –konveks fonksiyonlar, (α, m) –konveks fonksiyonlar, h –konveks fonksiyonlar, P –fonksiyonu ve quasi–konveks fonksiyonlar için koordinatlarda integral eşitsizlikler verilmiştir. Son olarak çarpımlara ilişkin birkaç integral eşitsizliği elde edilmiştir. Sonuçların ispatlarında bazı integral eşitlikleri, iki katlı integraller için Hölder ve Power-mean eşitsizlikleri ve konveks fonksiyon sınıflarının tanımları kullanılmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde tez çalışmasına temel teşkil edecek bazı kavramların tanımları verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks küme): V bir lineer uzay $A \subseteq V$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$\{v \in V : v = ax + (1 - a)y, \quad 0 \leq a \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.1.2. (J – konveks Fonksiyon) : $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J – konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J – konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir. (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Wright-konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y + \delta \in I, x < y$ ve $\delta > 0$ için

$$f(x + \delta) + f(y) \leq f(x) + f(y + \delta)$$

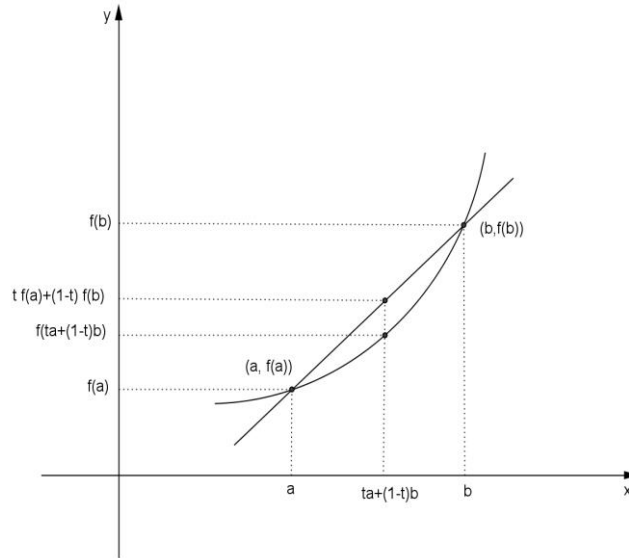
eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye Wright konveks fonksiyon denir (Wright 1954).

Tanım 2.1.5. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.*1992).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Bakınız Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Tanım 2.1.6. (m –konveks fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. $\forall x, y \in [0, b]$, $t \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir (Toader 1988).

Tanım 2.1.7. ((a, m) -konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. $\forall x, y \in [0, b]$, $t \in [0, 1]$ ve $(a, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^a f(x) + m(1 - t^a)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna (a, m) –konvektir denir (Miheşan 1993).

Burada $(a, m) \in (0, 0)$ seçilirse artan, $(a, m) \in (a, 0)$ seçilirse a –starshaped, $(a, m) \in (1, 0)$ seçilirse starshaped, $(a, m) \in (1, m)$ seçilirse m –konveks, $(a, m) \in (1, 1)$ seçilirse konveks ve $(a, m) \in (a, 1)$ seçilirse a –konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 2.1.8. (Godunova-Levin Fonksiyonu): Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak: $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ olduğu takdirde,

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova-Levin 1985).

Tanım 2.1.9. (P – Fonksiyonu): Negatif olmayan $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - x)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlıyorsa f 'ye P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan görüldüğü gibi, negatif olmayan tüm monoton ve negatif olmayan tüm konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi-konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

Tanım 2.1.10. (Birinci anlamda s –konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.11. (ikinci anlamda s –konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.12. (h –konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirdiği zaman bu f fonksiyonuna h –konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(a)=a$ alınırsa, negatif olmayan tüm konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve negatif olmayan tüm konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\alpha) = 1$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\alpha) = \alpha^s$, $s \in (0,1)$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olduğu açıkça görülür.

Tanım 2.1.13. x, y pozitif sayılarının r . Kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ x^\lambda y^{(1-\lambda)}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.14. Pozitif f fonksiyonu $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r –konveks fonksiyon denir (Gill et al. 1997).

Bu tanımdan 0 –konveks fonksiyonların *log* –konveks fonksiyonlar ve 1 –konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu açıkça görülmektedir.

r –konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \begin{cases} (\lambda f^r(x) + (1 - \lambda)f^r(y))^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{(1-\lambda)}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al.* 1998).

Tanım 2.1.15. (Quasi-konveks Fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan bir konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

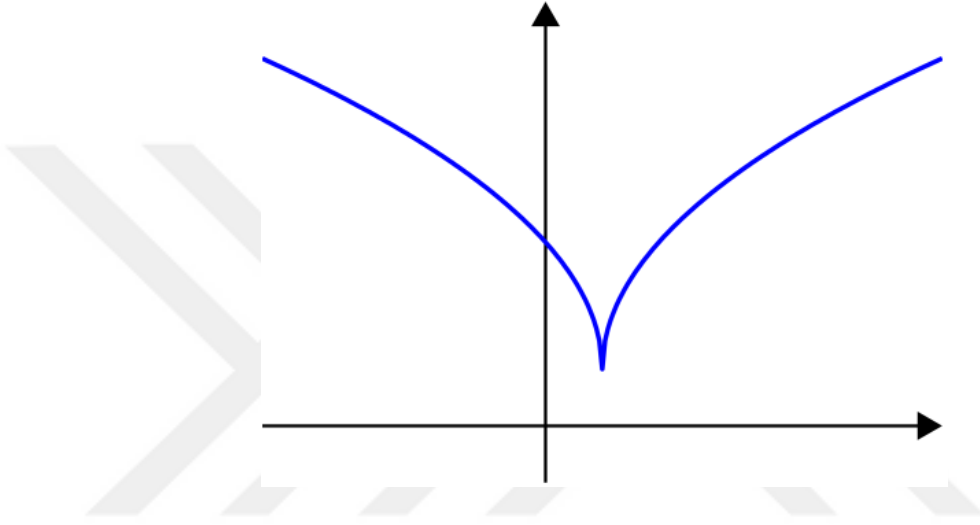
ise f 'ye quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

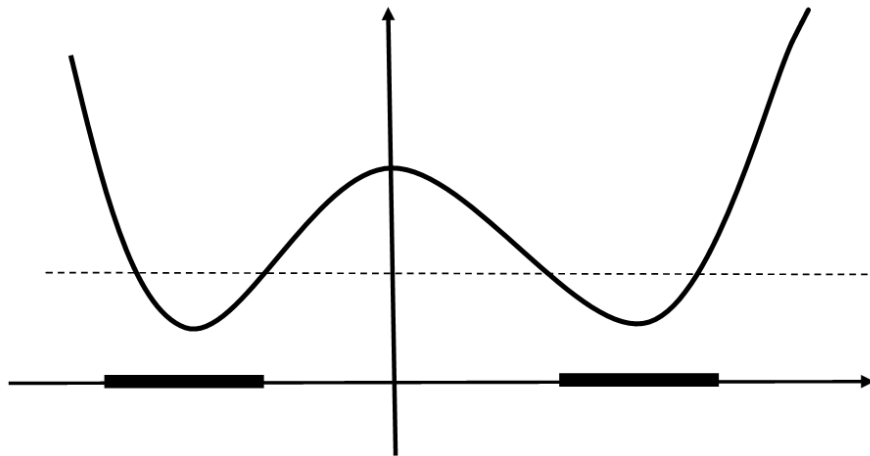
Tanım 2.1.16. f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f 'ye quasi monotoniktir denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Not: Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi-konvekstir. Ama her quasi-konveks fonksiyon konveks olmayabilir.



Şekil 2.2. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünüldüğünde bu fonksiyon quasi-konveks değildir.



Şekil 2.3. Aralıkta quasi –konveks fonksiyon

Tanım 2.1.17. (Jensen –Quasi –konveks fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f 'ye Jensen –Quasi –konveks fonksiyon denir (Drogamir and Pearce 1998).

Burada $\forall x, y \in I$ için Jensen –quasi –konveks fonksiyonlar sınıfı Jensen –konveks fonksiyonlar sınıfını içerir.

Tanım 2.1.18. (Wright –Quasi –konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyor ise veya denk olarak $x_1 y + \delta \in I$, $x < y$ ve $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{2} [f(y) + f(x + \delta)] \leq \max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

oluyorsa f 'ye Wright –Quasi –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.19. (α –star s –konveks Fonksiyon): $t, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall x, y \in I$ için $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + \{(1-t)\alpha\}^s f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye a –star s –konveks fonksiyon denir (Park 2010).

Tanım 2.1.20. ((h, m)-konveks fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye (h, m) -konveks fonksiyon denir (Özdemir *et al.* 2011a).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye (h, m) -konkav fonksiyon denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan m -konveks fonksiyonlar sınıfı, $m = 1$ alınırsa h -konveks fonksiyonlar sınıfı; $m = 1$ ve $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı; $m = 1 = h(\alpha)$ alınırsa P -fonksiyonlar sınıfı ve $m = 1$ ve $h(\alpha) = \alpha^s$, $s \in (0, 1)$ alınırsa ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

Tanım 2.1.21. $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise $\forall x, y \in I$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{(1-\alpha)}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $\log$ -konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Eşitsizlik yön değiştirirse f 'ye $\log$ -konkav fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.22. (Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{(1-t)}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.1.23. (s –Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.1.24. (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan 2014)

Tanım 2.1.25. (Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y$ $x < y$

$$(4) \quad M(ax, ay) = aM(x, y), \quad a > 0$$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.1.2.

$$(1) \quad M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2} \quad \text{Aritmetik ortalama}$$

$$(2) \quad M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy} \quad \text{Geometrik ortalama}$$

$$(3) \quad M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y) \quad \text{Harmonik ortalama}$$

$$(4) \quad M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, \quad x \neq y \text{ için ve } L(x, x) = x \quad \text{Logaritmik ortalama}$$

$$(5) \quad M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, \quad x \neq y \quad \text{ve} \quad I(x, x) = x \quad \text{Identrik ortalama}$$

(Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.1.26. (MN - Konveks (Konkav) fonksiyon) $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN – konveks(konkav) fonksiyonu denir (Anderson 2007).

Teorem 2.1.1. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 2.1.2. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin.

(4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ nin artan

(azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x f'(x)}{f(x)}$ nin artan

(azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2 f'(x)}{f(x)^2}$ nin

artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2 f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}$ nin artan

(azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\frac{x^2 f'(x)}{f(x)^2}$ nin

artan (azalan) olmasıdır (Anderson 2007).

Teorem 2.1.3. (İntegraller için Hölder eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et al.1993).

İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği şöyle ifade edilebilir:

$$\int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |f(x,y)g(x,y)| dx dy \leq \left(\int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |f(x,y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |g(x,y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[\alpha, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[\alpha, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\alpha}^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\alpha}^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\alpha}^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |f(x,y)g(x,y)| dx dy \\ \leq \left(\int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |f(x,y)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\alpha}^b \int_{\alpha}^b |f(x,y)||g(x,y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliği de reel sayılar için temel olan eşitsizliklerden biridir.

Teorem 2.1.4. (üçgen eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.5. (üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu): f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

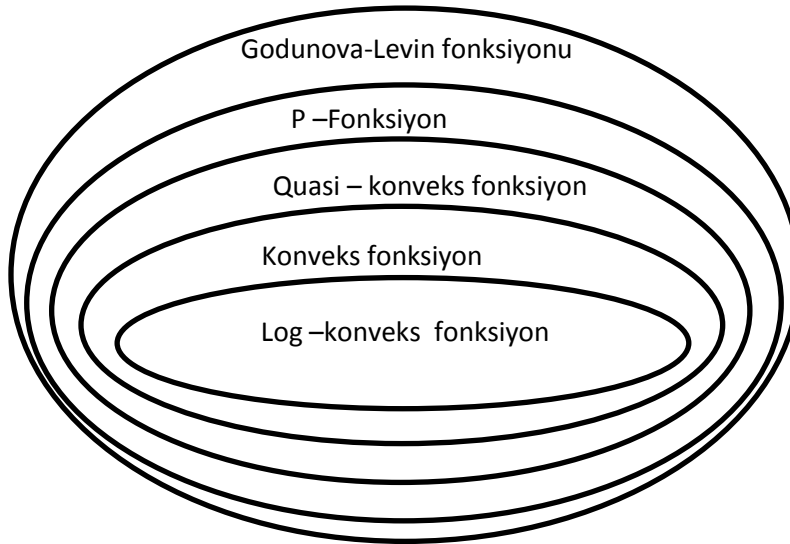
Eşitsizlik teorisi çalışmalarında daha genel ve yeni sınırlar bulmak için çalışma yapılan fonksiyon sınıfı için hipotez şartlarında kısıtlama yapılabilir veya ek bazı özellikler getirilerek sonuçların kullanım alanları genişletilebilir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir ya da bazı fonksiyon sınıfları birbirleriyle belirli özellikler yönüyle benzerlik gösterebilir. Yapılan çalışmalarda farklı türden konveks fonksiyonlar

için ispatlanan integral eşitsizliklerin, belli özel şartlar için farklı konvekslik sınıfları içinde sağladığı görülür. Dolayısıyla buradan konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Ancak bu hiyerarşide bütün konvekslik sınıflarını birlikte ele almak zor olduğundan aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri kullanılarak şu şekilde oluşturulabilir:

Teorem 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log –konveks fonksiyonlar sınıfı, konveks fonksiyonlar sınıfı, quasi –konveks fonksiyonlar sınıfı, p –fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $\mathcal{L}(I)$, $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{QC}(I)$, $\mathcal{P}(I)$, $\mathcal{Q}(I)$ ile gösterilirse;

$$\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{C}(I) \subset \mathcal{QC}(I) \subset \mathcal{P}(I) \subset \mathcal{Q}(I)$$

olduğu görülür.

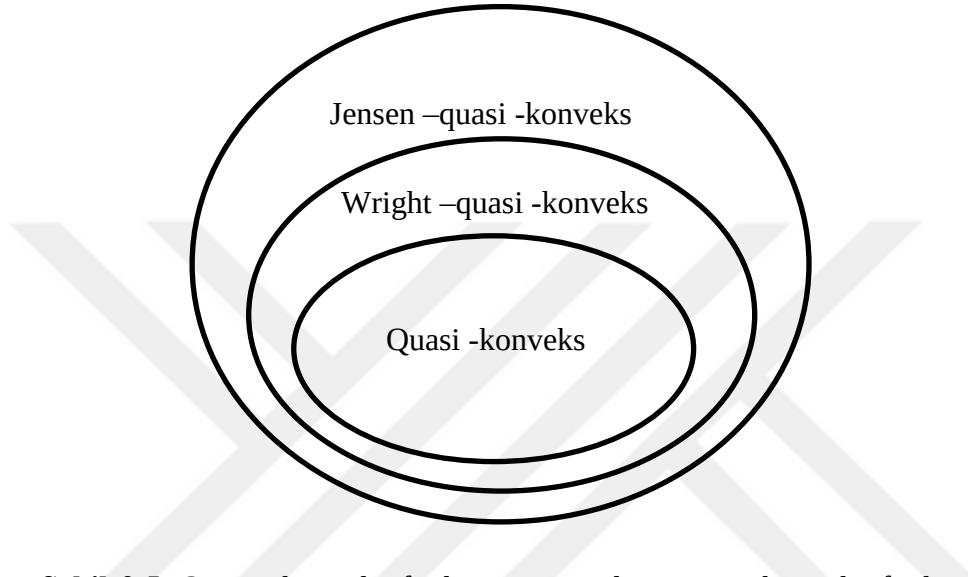


Şekil 2.4. Godunova –levin fonksiyonu, P –fonksiyon, Quasi- konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Quasi –konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright –quasi –konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen –quasi –konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $\mathcal{QC}(I)$, $\mathcal{WQC}(I)$, $\mathcal{JQC}(I)$ ile gösterilirse;

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olduğu görülür (Dragomir an Pearce 1998).

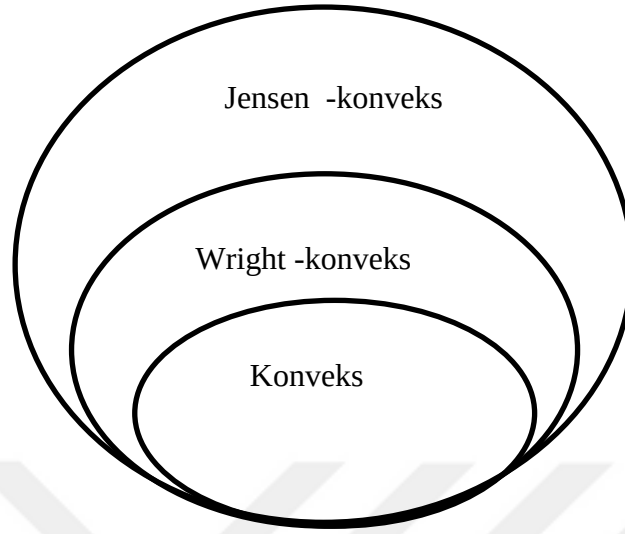


Şekil 2.5. Quasi –konveks fonksiyon, Wright –quasi –konveks fonksiyon ve Jensen –quasi –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright –konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen –konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $C(I)$, $W(I)$, $J(I)$ ile gösterilirse;

$$C(I) \subset W(I) \subset J(I)$$

olduğu görülür (Wright 1954).



Şekil 2.6. Konveks fonksiyon, Wright s -konveks fonksiyon ve Jensen s -konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

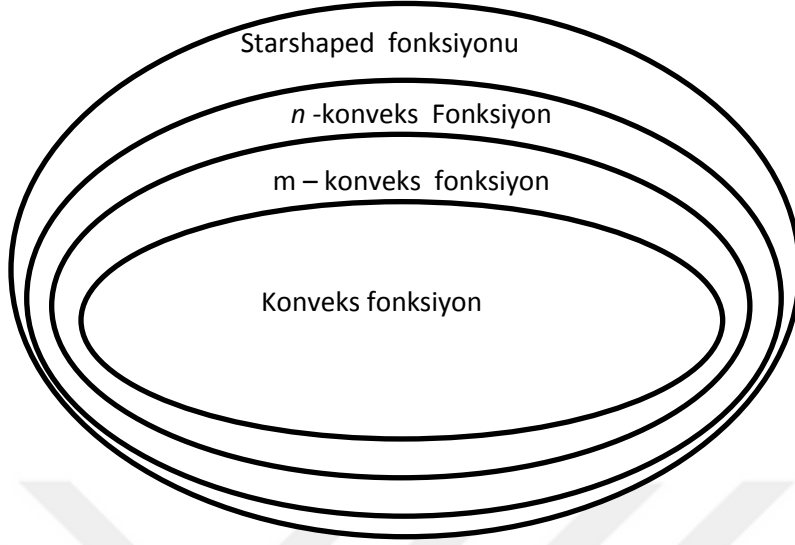
Lemma 2.2.1 Eğer f fonksiyonu m s -konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

Lemma 2.2.2. Eğer f fonksiyonu m s -konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n s -konveks fonksiyondur (Toader 1988).

Yukarıdaki lemmalar yardımıyla; $0 \leq n < m \leq 1$ olmak üzere, Konveks fonksiyonlar sınıfı, m s -konveks fonksiyonlar sınıfı, n s -konveks fonksiyonlar sınıfı ve Starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $K(b)$, $K_m(b)$, $K_n(b)$, $S^*(b)$ ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset K_n(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülür.



Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, m –konveks fonksiyon, n –konveks fonksiyon ve starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi

h –konveks fonksiyon tanımından görüleceği gibi; eğer $h(t)=t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin ters yönlü olması durumunda negatif olmayan konkav fonksiyonlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse fonksiyon $Q(I)$ sınıfından, eğer $h(t) = 1$ sabit fonksiyonu olarak seçilirse $P(I)$ sınıfından fonksiyon, eğer $h(t) = t^s$ seçilirse burada $s \in (0,1)$ olmak üzere K_s^2 sınıfına ait konveks bir fonksiyon olduğu açıktır. Bu bilgiler doğrultusunda $h(t)$ fonksiyonun bazı özel değerleri için;

$$\mathcal{C}(I) \subset SX(h, I), \quad P(I) \subset SX(h, I), \quad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfının alt kümesidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar

Çalışma boyunca $\Delta = [\alpha, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ve $\alpha < b$, $c < d$, ayrıca $\Delta_1 = [0, b] \times [0, d] \subset \mathbb{R}^2$ ve $b, d > 0$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.1.1. (Koordinatlarda Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(z, w)$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde konvektir denir (Dragomir 2001)

$\forall x \in [\alpha, b]$ ve $\forall y \in [c, d]$ için eğer

$$f_y: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$$

ve

$$f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$$

Kısmi dönüşümleri konveks ise $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konvektir.

Lemma 3.1.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her konveks fonksiyon koordinatlar da konvektir, fakat tersi genelde doğru değildir (Dragomir 2001).

Örnek 3.1.1. $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = xy$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon koordinatlarda konveks olmasına rağmen $[0, 1]^2$ de konveks değildir (Dragomir 2001).

Koordinatlarda konveks fonksiyon tanımına denk bir tanımda aşağıdaki gibi yapılabilir:

Tanım 3.1.2. (Koordinatlarda Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y, sv + (1-s)w) &\leq tsf(x, u) + s(1-t)f(y, u) \\ &\quad + t(1-s)f(x, w) + (1-t)(1-s)f(y, w) \end{aligned}$$

eşitsizliği $\forall t, s \in [0,1]$ ve $(x, u), (x, w), (y, u), (y, w) \in \Delta$ için sağlanıyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon denir (Latif and Alomari 2009b).

Lemma 3.1.2. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ şeklinde tanımlansın. Eğer f kısmi türevlenebilir ise f 'nin koordinatlarda konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f_y: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$$

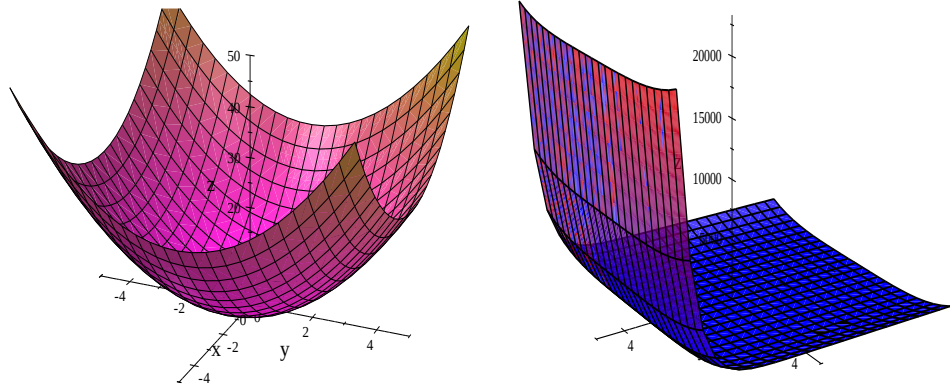
Ve

$$f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$$

şeklinde tanımlı kısmi dönüşümler için $f_x'' \geq 0$ ve $f_y'' \geq 0$ olmasıdır (Latif and Alomari 2009b).

Lemma 3.1.3. $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks iki fonksiyon ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu takdirde $f + g$ ve αf koordinatlarda konvektir (Latif and Alomari 2009b).

Lemma 3.1.4. $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks iki fonksiyon olsun. Bu takdirde fg koordinatlarda konvektir (Latif and Alomari 2009b).



Şekil 2.8. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve $g(x, y) = e^x + y^4$ konveks fonksiyonlar

Tanım 3.1.3. (Koordinatlarda m –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta_1$ ve $m, t \in [0, 1]$ için eğer

$$f(tx + (1 - t)z, ty + m(1 - t)w) \leq tf(x, y) + m(1 - t)f(z, w)$$

oluyorsa f' 'ye Δ_1 üzerinde m –konvektir denir (Özdemir *et al.* 2010).

$\forall x \in [0, b]$ ve $\forall y \in [0, d]$ için eğer

$$f_y: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_y(u) = f(u, y)$$

Ve

$$f_x: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(v) = f(x, v)$$

Kısmi dönüşümleri m –konveks ise $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda m –konvektir.

Lemma 3.1.5. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her m –konveks fonksiyon $m \in [0, 1]$ için koordinatlarda m –konvektir (Özdemir *et al.* 2010).

Tanım 3.1.4. (Koordinatlarda (a,m) –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x,y), (z,w) \in \Delta_1$ ve $(a,m) \in [0,1]^2$, $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)z, ty + m(1-t)w) \leq t^a f(x,y) + m(1-t^a)f(z,w)$$

oluyorsa f 'ye Δ_1 üzerinde (a,m) –konvektir denir (Özdemir *et al.* 2010).

Bu tanımda $(a,m) = \{(1,m), (1,1)\}$ alınması durumunda sırasıyla koordinatlarda m –konveks fonksiyonlar sınıfı ve koordinatlarda konveks fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

Lemma 3.1.6. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her (a,m) –konveks fonksiyon $(a,m) \in [0,1]^2$ için koordinatlarda (a,m) –konvektir (Özdemir *et al.* 2010).

Tanım 3.1.5. (Koordinatlarda birinci anlamda s –konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x,y), (z,w) \in \Delta$, $a^s + \beta^s = 1$, $s \in (0,1]$ ve $a, \beta \geq 0$ için

$$f(ax + \beta z, ay + \beta w) \leq a^s f(x,y) + \beta^s f(z,w)$$

ise f 'ye Δ üzerinde birinci anlamda s –konvektir denir (Alomari and Darus 2008b).

Tanım 3.1.6. (Koordinatlarda ikinci anlamda s –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x,y), (z,w) \in \Delta$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq \lambda^s f(x,y) + (1-\lambda)^s f(z,w)$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde ikinci anlamda s –konvektir denir (Alomari and Darus 2008a).

Lemma 3.1.7. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı her s –konveks fonksiyon koordinatlarda s –konvektir (Alomari and Darus 2008a).

Tanım 3.1.7. (Δ üzerinde h –Konveks Fonksiyon): $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta, a \in [0,1]$ ve pozitif fonksiyon $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere negatif olmayan $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(ax + (1 - a)z, ay + (1 - a)w) \leq h(a)f(x, y) + h(1 - a)f(z, w)$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde h –konvektir denir. Δ üzerinde h konveks fonksiyonlar sınıfı $SX(h, \Delta)$ ile gösterilir. Eşitsizlik ters yönlü olduğu taktirde f 'ye Δ üzerinde h –konkav fonksiyon denir ve bu fonksiyonlar sınıfı $SV(h, \Delta)$ ile gösterilir (Latif and Alomari 2009a).

h –konveks fonksiyonun koordinatlarda tanımını şu şekilde yapılabilir:

Tanım 3.1.8. (Koordinatlarda h –konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall t, s \in [0,1]$ ve $(x, u), (x, w), (y, u), (y, w) \in \Delta$ için

$$f(tx + (1 - t)y, su + (1 - s)w) \leq h(t)h(s)f(x, u) + h(t)h(1 - s)f(x, w)$$

$$+ h(s)h(1 - t)f(y, u) + h(1 - t)h(1 - s)f(y, w)$$

ise f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda h –konvektir denir (Latif and Alomari 2009a).

Tanım 3.1.9 (Δ üzerinde Quasi –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta, \text{ ve } \lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq \max\{f(x, y), f(z, w)\}$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde quasi –konveks fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı $QC(\Delta)$ ile gösterilir (Özdemir et al.2011b).

Lemma 3.1.8. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan her Quasi –konveks fonksiyon koordinatlarda quasi konvektir (Özdemir *et al.* 2011b).

Tanım 3.1.10 (Δ üzerinde Jensen –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ için

$$f\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+w}{2}\right) \leq \frac{f(x, y) + f(z, w)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna Δ üzerinde Jensen –konvektir denir. Bu fonksiyonların sınıfı $J(\Delta)$ ile gösterilir (Özdemir *et al.* 2011b).

Tanım 3.1.11 (Δ üzerinde Jensen–Quasi –Konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ için

$$f\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+w}{2}\right) \leq \max\{f(x, y), f(z, w)\}$$

oluyorsa f fonksiyonuna Jensen –quasi –konvektir denir. Bu Fonksiyonların sınıfı $JQC(\Delta)$ ile gösterilir (Özdemir *et al.* 2011b).

Lemma 3.1.10. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her Jensen –quasi –konveks fonksiyon koordinatlarda Jensen –quasi –konvektir (Özdemir *et al.* 2011b).

Tanım 3.1.12. (Δ üzerinde Wright–konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $t, s \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd) + f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \\ \leq f(a, c) + f(b, d) \end{aligned}$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde Wright–konvektir denir. Bu fonksiyonların sınıfı $W(\Delta)$ ile gösterilir (Özdemir *et al.* 2011b).

Lemma 3.1.11. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her Wright–konveks fonksiyon koordinatlarda Wright–konvektir (Özdemir *et al.* 2011b).

Tanım 3.1.13. (Δ üzerinde Wright–Quasi–Konveks Fonksiyon) $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall(a, c), (b, d) \in \Delta$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere eğer

$$\frac{1}{2} [f(tx + (1-t)z, ty + (1-t)w) + f((1-t)x + tz, (1-t)y + tw)] \leq \max\{f(x, y), f(z, w)\}$$

ise f 'ye Δ üzerinde Wright–Quasi–konvektir denir. Bu fonksiyonların sınıfı $WQC(\Delta)$ ile gösterilir (Özdemir *et al.* 2011b).

Lemma 3.1.12. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her Wright–Quasi–konveks fonksiyon koordinatlarda Wright–Quasi–konvektir (Özdemir *et al.* 2011b).

Tanım 3.1.14. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall(x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq \frac{f(x, y)}{\lambda} + \frac{f(z, w)}{(1-\lambda)}$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde Godunova-Levin sınıfından fonksiyon adı verilir (Akdemir and Özdemir 2010).

Lemma 3.1.13. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her Godunova-Levin sınıfına ait fonksiyon koordinatlarda Godunova-Levin sınıfına aittir (Akdemir and Özdemir 2010).

Tanım 3.1.15. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq f(x, y) + f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde P –fonksiyon adı verilir (Akdemir and Özdemir 2010).

Lemma 3.1.14. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her P –fonksiyon koordinatlarda P –fonksiyondur (Akdemir and Özdemir 2010).

Tanım 3.1.16. (Koordinatlarda Log –konveks Fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall (x, y), (u, v) \in \Delta$ ve $t, s \in [0,1]$ için

$$f(ax + \beta z, ay + \beta w) \leq [f(x, y)]^a [f(z, w)]^\beta$$

oluyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda log –konveks fonksiyon denir (Alomari and Darus 2009).

Alomari and Darus aşağıdaki sonucu koordinatlarda log konveks fonksiyonlar için elde etmişlerdir.

Sonuç 3.1.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu koordinatlarda log –konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \log f\left(\frac{\alpha + b}{2}, \frac{c + d}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b - \alpha)(c - d)} \int_{\alpha}^b \int_c^d \log f(x, y) dx dy \\ &\leq \log \sqrt[4]{f(\alpha, c)f(a, d)f(b, c)f(b, d)} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus 2009).

Tanım 3.1.19. (Koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ olmak üzere $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda, t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t z^{1-t}, y^\lambda w^{1-\lambda}) \leq \max\{f(x, y), f(x, w), f(z, y), f(z, w)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks fonksiyon denir (Guo et al. 2015).

Önerme 3.1.2. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu artan ve Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise bu durumda f Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konvektir. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu artan ve Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks ise bu takdirde Δ üzerinde koordinatlarda Quasi-konvektir.

3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikleri

Koordinatlarda konveks fonksiyonlar için aşağıda verilen teorem Dragomir tarafından elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right] \\
&\leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir 2001).

İspat: $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için

$$g_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, g_x(y) = f(x, y)$$

dönüşümü $[c, d]$ üzerinde konvektir. Dolayısıyla Hadamard eşitsizliği kullanılırsa

$$g_x\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d g_x(y) dy \leq \frac{g_x(c) + g_x(d)}{2}, \quad x \in [a, b]$$

yazılır. Buradan;

$$f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x, y) dy \leq \frac{f(x, c) + f(x, d)}{2}, \quad x \in [a, b]$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $[a, b]$ üzerinden x 'e göre integrali alınır;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right].
\end{aligned} \tag{3.1}$$

bulunur. Benzer biçimde $\forall x \in [a, b]$ için $g_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g_y(x) = f(x, y)$ dönüşümü için;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak Teorem'deki ikinci ve üçüncü eşitsizlik elde edilir. Ayrıca Hadamard eşitsizliği kullanılarak;

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy$$

eşitsizlikleri yazılır ki, bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak Teorem'deki ilk eşitsizlik elde edilir. Son olarak Hadamard eşitsizliğinden;

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx \leq \frac{f(a, c) + f(b, c)}{2}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \leq \frac{f(a, d) + f(b, d)}{2}$$

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy \leq \frac{f(a, c) + f(a, d)}{2}$$

ve

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \leq \frac{f(b, c) + f(b, d)}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanarak Teorem'deki son eşitsizlik bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Sarıkaya 2010 yılında yaptığı çalışmada Teorem 3.2.1 için farklı bir ispatı şu şekilde vermiştir.

İspat: Tanım 2.4.12 $x = t_1 a + (1 - t_1) b, y = (1 - t_1) a + t_1 b, u = s_1 c + (1 - s_1) d, w = (1 - s_1) c + s_1 d$ ve $t = s = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{4} [f(t_1 a + (1 - t_1) b, s_1 c + (1 - s_1) d) \\ & + f((1 - t_1) a + t_1 b, s_1 c + (1 - s_1) d) \\ & + f(t_1 a + (1 - t_1) b, (1 - s_1) c \\ & + s_1 d) + f(t_1 a + (1 - t_1) b, (1 - s_1) c + s_1 d)]. \end{aligned}$$

Bu ifade t_1, s_1 'e göre $[0,1] \times [0,1]$ üzerinden integre edilirse ve gereken değişken değiştirmeleri yapıldığında;

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$$

elde edilir ki, birinci eşitsizlik ispatlanmış olur. Benzer biçimde Tanım 2.4.12'de $x = a, y = b, u = c, w = d$ olarak alındığında ve elde edilen ifade t, s 'e göre $[0,1] \times [0,1]$ üzerinden integre edildiğinde;

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 [tsf(a,c) + s(1-t)f(b,c) \\ & \quad + t(1-s)f(a,d) + (1-t)(1-s)f(b,d)] ds dt \\ & = \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = ta + (1-t)b, y = sc + (1-s)d$ değişken değiştirmeleri $t, s \in [0,1]$ için yapılırsa;

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}$$

bulunur ki, ikinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

Benzer yöntemler kullanılarak Alomari ve Darus koordinatlarda s –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Teorem 3.2.2. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda s –konveks fonksiyon olsun.

Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq 2^{s-2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
 &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\
 &\leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right] \\
 &\leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{(s+1)^2}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari ve Darus 2008a).

Teorem 3.2.3. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda birinci anlamda s –konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x,c) dx + \frac{s}{b-a} \int_a^b f(x,d) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a,y) dy + \frac{s}{d-c} \int_c^d f(b,y) dy \right] \\
&\leq \frac{f(a,c) + sf(a,d) + sf(b,c) + s^2 f(b,d)}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus 2008b).

Latif ve Alomari 2009 yılındaki çalışmalarında koordinatlarda h –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.4. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda h –konveks fonksiyon, $f \in L_2(\Delta)$ ve $h \in L_1[0,1]$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4 \left(h\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy \\
&\leq [f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)] \left(\int_0^1 h(\alpha) d\alpha \right)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Alomari 2009a).

Özdemir *et al.* benzer yöntemlerden yararlanarak koordinatlarda m –konveks ve (α, m) –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.5. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m –konveks fonksiyon olsun. Eğer $m \in (0,1]$ ile birlikte $0 \leq a < b < \infty$ ve $0 \leq c < d < \infty$ ise, bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \leq \frac{1}{4(b-a)} \min\{v_1, v_2\} + \frac{1}{4(d-c)} \min\{v_3, v_4\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_a^b f(x,c) dx + m \int_a^b f\left(x, \frac{d}{m}\right) dx, & v_2 &= \int_a^b f(x,d) dx + m \int_a^b f\left(x, \frac{c}{m}\right) dx \\ v_3 &= \int_c^d f(a,y) dy + m \int_c^d f\left(\frac{b}{m}, y\right) dy, & v_4 &= \int_c^d f(b,y) dy + m \int_c^d f\left(\frac{a}{m}, y\right) dy \end{aligned}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.6. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m –konveks fonksiyon olsun. Eğer $m \in (0,1]$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $0 \leq c < d < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, d]$, $f_y \in L_1[0, b]$ ise, bu takdirde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left[\int_a^b \int_c^d \frac{f(x,y) + mf\left(x, \frac{y}{m}\right)}{2} dydx + \int_c^d \int_a^b \frac{f(x,y) + mf\left(\frac{x}{m}, y\right)}{2} dxdy \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.7. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) –konveks fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha, m) \in [0,1]^2$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $0 \leq c < d < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, d]$, $f_y \in L_1[0, b]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left[\int_c^d \int_a^b \frac{2f(x,y) + m(2^\alpha - 1) \left(f\left(x, \frac{y}{m}\right) + f\left(\frac{x}{m}, y\right)\right)}{2^\alpha} dxdy \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^d \int_a^b f(x,y) dxdy \\ & \leq \frac{1}{2(\alpha+1)(b-a)} \min\{w_1, w_2\} + \frac{1}{2(\alpha+1)(d-c)} \min\{w_3, w_4\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$w_1 = \int_a^b f(x, c) dx + \alpha m \int_a^b f\left(x, \frac{d}{m}\right) dx, \quad w_2 = \int_a^b f(x, d) dx + \alpha m \int_a^b f\left(x, \frac{c}{m}\right) dx$$

$$w_3 = \int_c^d f(a, y) dy + \alpha m \int_c^d f\left(\frac{b}{m}, y\right) dy, \quad w_4 = \int_c^d f(b, y) dy + \alpha m \int_c^d f\left(\frac{a}{m}, y\right) dy$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.8. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) –konveks fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $0 \leq c < d < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, d]$, $f_y \in L_1[0, b]$ ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{4(\alpha+1)} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right. \\ & \quad + \frac{m\alpha}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c}{m}\right) dx + \frac{m\alpha}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{d}{m}\right) dx \\ & \quad + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a}{m}, y\right) dy + \frac{m\alpha}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{b}{m}, y\right) dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2010).

Koordinatlarda Godunova-Levin sınıfından fonksiyonlar ve koordinatlarda P –fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler Akdemir ve Özdemir 2010 yılında yaptıkları çalışmada elde edilmiştir.

.Teorem 3.2.9. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda Godunova-Levin sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere $f_x \in L_1[c, d]$ ve $f_y \in L_1[a, b]$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \left[f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] &\leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f \left(x, \frac{c+d}{2} \right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f \left(\frac{a+b}{2}, y \right) dy \right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir and Özdemir 2010).

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.13’te $f: \Delta = [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \left[f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \right] &\leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(f \left(x, \frac{a+b}{2} \right) + f \left(\frac{a+b}{2}, x \right) \right) dx \right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Akdemir and Özdemir 2010).

Sonuç 3.2.2. Teorem 3.2.9’da $f: \Delta = [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x, y) = f(y, x)$ olarak alındığında;

$$\frac{1}{16} \left[f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f \left(x, \frac{a+b}{2} \right) dx \right] \leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(x, y) dy dx$$

eşitsizliği elde edilir (Akdemir and Özdemir 2010).

Teorem 3.2.10. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda P –fonksiyon olsun. Eğer $\lambda \in (0,1)$, $f_x \in L_1[c, d]$ ve $f_y \in L_1[a, b]$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \left(x, \frac{c+d}{2} \right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f \left(\frac{a+b}{2}, y \right) dy \\ &\leq \frac{4}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ &\leq \frac{2}{b-a} \left[\int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx \right] \\ &\quad + \frac{2}{d-c} \left[\int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir and Özdemir 2010).

Sarıkaya *et al.* 2010 yılında yaptıkları çalışmada daha önceki çalışmalardan farklı olarak aşağıdaki Lemma'yı elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ ise;

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \\
& = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \int_0^1 \int_0^1 (1-2t)(1-2s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt ds
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Sarıkaya *et al.* koordinatlarda konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri bu eşitliği kullanarak elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.11. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ koordinatlarda konveks ise bu takdirde;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right| (a, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right| (a, d) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right| (b, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right| (b, d)}{4} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right]$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.12. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ koordinatlarda konveks olduğu takdirde;

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(a, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(a, d) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(b, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(b, d)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right]$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.13. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer, $q \geq 1$ olmak üzere $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ koordinatlarda konveks olduğu takdirde;

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(a, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(a, d) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(b, c) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(b, d)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right]$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Özdemir *et al.* 2011 yılında yaptıkları çalışmada koordinatlarda Jensen–konveks ve koordinatlarda Wright–Quasi–konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.14. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda Jensen–konveks fonksiyon olsun. Eğer $f_x \in L_1[c, d]$ ve $f_y \in L_1[a, b]$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + H(x, y) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\begin{aligned}
H(x, y) = & \frac{1}{4(d-c)} \int_c^d \int_0^1 |f(ta + (1-t)b, y) - f((1-t)a + tb, y)| dt dy \\
& + \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b \int_0^1 |f(x, tc + (1-t)d) - f(x, (1-t)c + td)| dt dx
\end{aligned}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2011b).

Teorem 3.2.15. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda Wright–Quasi–konveks fonksiyon olsun. Eğer $f_x \in L_1[c, d]$ ve $f_y \in L_1[a, b]$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\max \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right\} \right. \\
& \quad \left. + \max \left\{ \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy, \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right\} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011b).

Özdemir *et al.* 2011 yılında yaptıkları çalışmada aşağıdaki eşitliği elde etmiş ve bu eşitlik yardımıyla koordinatlarda konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.2.2. $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L_2[\Delta]$ olduğu takdirde;

$$\begin{aligned}
J &= (1-\lambda)^2 f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \lambda^2 \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4} \\
&\quad + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
&\quad - (1-\lambda) \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy - (1-\lambda) \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x,c) + f(x,d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a,y) + f(b,y)] dy \right] \\
&\quad + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d K(x)M(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) dx dy
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada

$$K(x) = \begin{cases} x - \left(a + \lambda \frac{b-a}{2}\right), & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ x - \left(b - \lambda \frac{b-a}{2}\right), & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

ve

$$M(y) = \begin{cases} y - \left(c + \lambda \frac{d-c}{2}\right), & y \in \left[c, \frac{c+d}{2}\right] \\ y - \left(d - \lambda \frac{d-c}{2}\right), & y \in \left[\frac{c+d}{2}, d\right] \end{cases}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.16. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, bu takdirde;

$$|J| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2 \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|}{4} \right)$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.17. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$|J| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2 \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.18. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q \geq 1$ için;

$$|J| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2 \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir *et al.* 2011c).

Özdemir *et al.* 2011 yılında aşağıdaki Lemma'yı oluşturarak bu Lemma yardımıyla koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hadamard-tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.3. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_1[\Delta]$ ise, bu takdirde;

$$I = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy - \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\ + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ = \frac{(b-a)(d-c)}{16}$$

$$\times \left[\int_0^1 \int_0^1 ts \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t)a, s \frac{c+d}{2} + (1-s)c \right) dt ds \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \int_0^1 (t-1)(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(tb + (1-t) \frac{c+d}{2}, sd + (1-s) \frac{c+d}{2} \right) dt ds \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 t(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t)a, sd + (1-s) \frac{c+d}{2} \right) dt ds \\
& + \int_0^1 \int_0^1 s(t-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(tb + (1-t) \frac{a+b}{2}, s \frac{c+d}{2} + (1-s)c \right) dt ds
\end{aligned}$$

Eşitliği sağlanır ve burada $t, s \in [0,1]$ 'dir (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.19. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks olduğu takdirde;

$$\begin{aligned}
|I| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{144} & \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|}{4} \right. \\
& + 4 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{a+b}{2}, c \right) \right| \\
& \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{a+b}{2}, d \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(a, \frac{c+d}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(b, \frac{c+d}{2} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.20. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$\begin{aligned}
& |J| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|^q}{4} \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q \\
& \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.21. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned}
& |J| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|^q}{36} \right. \\
& + \frac{4 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q}{9} \\
& \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q}{9} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur (Özdemir *et al.* 2011d).

Özdemir *et al.* 2012 yılında yaptıkları çalışmada aşağıdaki Lemmayı ve verilen eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.2.4. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_1[\Delta]$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} C &= f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy - \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d p(x, t) q(y, s) \\ &\quad \times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{b-t}{b-a} a + \frac{t-a}{b-a} b, \frac{d-s}{d-c} c + \frac{s-c}{d-c} d \right) dx dy \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada

$$p(x, t) = \begin{cases} t - a, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ t - b, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

ve

$$q(y, s) = \begin{cases} s - c, & y \in \left[c, \frac{c+d}{2}\right] \\ s - d, & y \in \left[\frac{c+d}{2}, d\right] \end{cases}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.22. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, bu takdirde;

$$|C| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{64}$$

$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (b, d) \right| \right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.23. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$|C|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.24. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q \geq 1$ için;

$|C|$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Özdemir *et al.* aynı çalışmalarında aşağıdaki Lemmayı ispatlamış ve bu Lemmadan faydalanarak koordinatlarda s -konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.2.5. $a < b, c < d$ ve $t, \lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \in L_1[\Delta]$ olduğu takdirde

$$\begin{aligned} D &= \frac{f(a, c) + r_2 f(a, d) + r_1 f(b, c) + r_1 r_2 f(b, d)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} - \left(\frac{r_2}{r_2 + 1} \right) \frac{1}{d - c} \int_c^d f(b, y) dy \\ &\quad - \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right) \frac{1}{d - c} \int_c^d f(a, y) dy - \left(\frac{r_2}{r_2 + 1} \right) \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x, d) dx \\ &\quad - \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right) \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{(b - a)(d - c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ &= \frac{(b - a)(d - c)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \\ &\quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 ((r_1 + 1)t - 1)((r_2 + 1)\lambda - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(tb + (1 - t)a, sd \right. \\ &\quad \left. + (1 - s)c) dt ds \right] \end{aligned}$$

eşitliği $r_1, r_2 \in [0,1]$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.25. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks ise, bu takdirde;

$$|D| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{(r_1+1)(r_2+1)(s+1)^2(s+2)^2} \\ \times \left(MN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + LN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| + KM \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + KL \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right)$$

eşitsizliği geçerli olur ve burada

$$M = \left(s + 1 + 2(r_1 + 1) \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right)^{s+2} - r_1 \right)$$

$$N = \left(s + 1 + 2(r_2 + 1) \left(\frac{1}{r_2 + 1} \right)^{s+2} - r_2 \right)$$

$$L = \left(r_2(s + 1) + 2 \left(\frac{1}{r_2 + 1} \right)^{s+1} - 1 \right)$$

$$K = \left(r_1(s + 1) + 2 \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right)^{s+1} - 1 \right)$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.26. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p > 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks olduğu takdirde;

$$|D| \leq \frac{(b-a)(d-c) \left(1 + r_1^{\frac{p+1}{p}}\right) \left(1 + r_2^{\frac{p+1}{p}}\right)}{(r_1 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (r_2 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (p+1)^{\frac{2}{p}}} \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q}{(s+1)^2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $r_1, r_2 \in [0, 1], s \in (0, 1]$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.27. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $p \geq 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks ise, bu takdirde;

$$|D| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \left(\frac{(1 + r_1^2)(1 + r_2^2)}{4(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\ \times \left(\frac{MN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q + LN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q + KM \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + KL \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q}{(s+1)^2 (s+2)^2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $r_1, r_2 \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Özdemir *et al.* 2012 yılındaki çalışmalarında koordinatlarda konveks fonksiyonların çarpımlarına ilişkin aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.28. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer f negatif olmayan Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve g fonksiyonu $s = \frac{s_1+s_2}{2}$ ve $s_1, s_2 \in (0,1]$ olmak üzere koordinatlarda ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)g(x,y)dydx \\ \leq \frac{1}{2}(p^2 + r^2)L(a,b,c,d) + \frac{1}{2}(pq + rt)M(a,b,c,d) \\ + \frac{1}{2}(q^2 + t^2)N(a,b,c,d) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur ve burada

$$L(a,b,c,d) = f(a,c)g(a,c) + f(b,c)g(b,c) + f(a,d)g(a,d) + f(b,d)g(b,d),$$

$$\begin{aligned} M(a,b,c,d) = f(a,c)g(a,d) + f(a,d)g(a,c) + f(b,c)g(b,d) + f(b,d)g(b,c) \\ + f(b,c)g(a,c) + f(b,d)g(a,d) + f(a,c)g(b,c) + f(a,d)g(b,d), \end{aligned}$$

$$N(a,b,c,d) = f(b,c)g(a,d) + f(b,d)g(a,c) + f(a,c)g(b,d) + f(a,d)g(b,c)$$

ve

$$p = \frac{1}{s_2 + 2}, \quad q = \frac{1}{(s_2 + 1)(s_2 + 2)}, \quad r = \frac{1}{(s_1 + 2)}, \quad t = \frac{1}{(s_1 + 1)(s_1 + 2)}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2012b).

Teorem 3.2.29. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer f negatif olmayan Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve g fonksiyonu $s = \frac{s_1+s_2}{2}$ ve $s_1, s_2 \in (0,1]$ olmak üzere koordinatlarda ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned}
& 2^{s_1+s_2} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\
& + \frac{1}{2} (q^2 + t^2 + 2pt + 2qr) L(a, b, c, d) \\
& + \frac{1}{2} (pq + rt + 2qt + 2rp) M(a, b, c, d) \\
& + \frac{1}{2} (p^2 + r^2 + 2pt + 2rq) N(a, b, c, d)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur ve burada $L(a, b, c, d), M(a, b, c, d), N(a, b, c, d), p, q, r$ ve t Teorem 3.2.28'teki gibi tanımlanmıştır (Özdemir et al. 2012b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Koordinatlarda Geometrik Fonksiyonların Çarpımına İlişkin İntegral Eşitsizlikler

Tanım 4.1.1. (Koordinatlarda GA -konveks Fonksiyon): $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(x^\lambda z^{1-\lambda}, y^\lambda w^{1-\lambda}) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde GA -konveks fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.2. (Koordinatlarda GA -konveks Fonksiyon): $\forall x \in [a, b]$ ve $\forall y \in [c, d]$ için $f_y: [a, b] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(u) = f(u, y)$ ve $f_x: [c, d] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(v) = f(x, v)$ kısmi dönüşümleri GA -konveks ise $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Δ üzerinde koordinatlarda GA -konveks fonksiyon denir.

Önerme 4.1.1. Eğer $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda GA -konveks fonksiyon ise bu taktirde $\forall (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ve $x, z \in [a, b]$, $y, w \in [c, d]$ için

$$\begin{aligned} & f(x^t z^{1-t}, y^s w^{1-s}) \\ & \leq tsf(x, y) + t(1-s)f(x, w) + s(1-t)f(z, y) + (1-t)(1-s)f(z, w) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.1. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin.

Eğer f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GG –konveks fonksiyonlar ise bu durumda;

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x,y)g(x,y)}{xy} dx dy \leq L(f(b,d)g(b,d), f(a,c)g(a,c))$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GG –konveks fonksiyonlar ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq (f(a,c))^t (f(b,d))^{1-t}$$

$$g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq (g(a,c))^t (g(b,d))^{1-t}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca f ve g pozitif değerli fonksiyonlar olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]^2$ bölgesi üzerinden t 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) dt dt \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 [f(a,c)g(a,c)]^t [f(b,d)g(b,d)]^{1-t} dt dt \end{aligned}$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x,y)g(x,y)}{xy} dx dy \leq L(f(b,d)g(b,d), f(a,c)g(a,c))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin.

Eğer f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GG –konveks fonksiyonlar ise bu durumda;

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x,y)g\left(\frac{ab}{x}, \frac{cd}{y}\right)}{xy} dx dy \leq L(g(a,c)f(b,d), f(a,c)g(b,d))$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GG –konveks fonksiyonlar ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq (f(a,c))^t (f(b,d))^{1-t}$$

$$g(a^{1-t} b^t, c^{1-t} d^t) \leq (g(a,c))^{1-t} (g(b,d))^t$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca f ve g pozitif değerli fonksiyonlar olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]^2$ bölgesi üzerinden t 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) g(a^{1-t} b^t, c^{1-t} d^t) dt dt \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 [f(a,c)g(b,d)]^t [f(b,d)g(a,c)]^{1-t} dt dt \end{aligned}$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x,y)g\left(\frac{ab}{x}, \frac{cd}{y}\right)}{xy} dx dy \leq L(g(a,c)f(b,d), f(a,c)g(b,d))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin.

Eğer f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GA –konveks fonksiyonlar ise bu durumda;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)g(x, y)}{xy} dx dy \\ & \leq \frac{f(a, c)g(a, c) + f(b, d)g(b, d)}{3} + \frac{f(a, c)g(b, d) + f(b, d)g(a, c)}{6} \end{aligned}$$

İspat: f ve g fonksiyonları Δ üzerinde GG –konveks fonksiyonlar ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq t f(a, c) + (1-t) f(b, d)$$

$$g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq t g(a, c) + (1-t) g(b, d)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca f ve g pozitif değerli fonksiyonlar olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]^2$ bölgesi üzerinden t 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) dt dt \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 t^2 f(a, c) g(a, c) dt dt + \int_0^1 \int_0^1 t(1-t) f(a, c) g(b, d) dt dt \\ & \quad + \int_0^1 \int_0^1 t(1-t) f(b, d) g(a, c) dt dt \\ & \quad + \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^2 f(b, d) g(b, d) dt dt \end{aligned}$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)g(x, y)}{xy} dx dy \\ & \leq \frac{f(a, c)g(a, c) + f(b, d)g(b, d)}{3} + \frac{f(a, c)g(b, d) + f(b, d)g(a, c)}{6} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu Δ üzerinde GG –konveks ve g fonksiyonu Δ üzerinde GA –konveks fonksiyon ise bu durumda;

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq L(f(b)g(b), f(a)g(a))$$

İspat: f ve g fonksiyonları ve $t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq (f(a, c))^t (f(b, d))^{1-t}$$

$$g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq tg(a, c) + (1-t)g(b, d)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca f ve g pozitif değerli fonksiyonlar olduklarından eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]^2$ bölgesi üzerinden t 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) g(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) dt dt \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left((f(a, c))^t (f(b, d))^{1-t} \right) (tg(a, c) + (1-t)g(b, d)) dt dt \end{aligned}$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)g(x, y)}{xy} dx dy \\
& \leq \frac{f(b, d)g(a, c)}{\left(\ln \frac{f(a, c)}{f(b, d)}\right)^2} \left(\frac{f(a, c)}{f(b, d)} \ln \frac{f(a, c)}{f(b, d)} - \frac{f(a, c)}{f(b, d)} - 1 \right) \\
& \quad + \frac{f(b, d)g(b, d)}{\left(\ln \frac{f(a, c)}{f(b, d)}\right)^2} \left(\frac{f(a, c)}{f(b, d)} - \ln \frac{f(a, c)}{f(b, d)} - 1 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. $f \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu Δ üzerinde GG –konveks fonksiyon ise bu durumda;

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)}{xy} dx dy \leq L(f(b, d), f(a, c))$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f fonksiyonu Δ üzerinde GG –konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) \leq (f(a, c))^t (f(b, d))^{1-t}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]^2$ bölgesi üzerinden t 'ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^t d^{1-t}) dt dt \leq \int_0^1 \int_0^1 (f(a, c))^t (f(b, d))^{1-t} dt dt$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)}{xy} dx dy \leq L(f(b, d), f(a, c))$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6. $f \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu koordinatlarda GA –konveks fonksiyon ise bu durumda;

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)}{xy} dx dy \leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: f fonksiyonu koordinatlarda GA –konveks fonksiyon ve $t, s \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(a^t b^{1-t}, c^s d^{1-s}) \leq$$

$$tsf(a, c) + t(1-s)f(a, d) + (1-t)sf(b, c) + (1-t)(1-s)f(b, d)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]^2$ bölgesi üzerinden t ve s 'ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 f(a^t b^{1-t}, c^s d^{1-s}) dt ds$$

$$\begin{aligned} &\leq f(a, c) \int_0^1 \int_0^1 ts dt ds + f(a, d) \int_0^1 \int_0^1 t(1-s) dt ds + f(b, c) \int_0^1 \int_0^1 s(1-t) dt ds \\ &\quad + f(b, d) \int_0^1 \int_0^1 (1-t)(1-s) dt ds \end{aligned}$$

$x = a^t b^{1-t}$ ve $y = c^t d^{1-t}$ değişken değiştirmeleri yapılrırsa

$$\frac{1}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_c^d \int_a^b \frac{f(x, y)}{xy} dx dy \leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.2. Koordinatlarda Geometrik Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Lemma 4.2.1. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ ise, bu takdirde $\forall (u, v) \in \Delta^o$ için;

$$f(x, y) - (\ln b - \ln a) \int_c^d \frac{f(x, v)}{v} dv - (\ln d - \ln c) \int_a^b \frac{f(u, y)}{u} du + \int_a^b \int_c^d \frac{f(u, v)}{uv} dv du$$

$$= \frac{\ln^2 \frac{a}{x} \ln^2 \frac{c}{y}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 (1-t)(1-s) a^t x^{1-t} c^s y^{1-s} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x^{1-t} a^t, y^{1-s} c^s) ds dt$$

$$- \frac{\ln^2 \frac{x}{b} \ln^2 \frac{c}{y}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 t(1-s) x^t b^{1-t} c^s y^{1-s} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (b^{1-t} x^t, y^{1-s} c^s) ds dt$$

$$- \frac{\ln^2 \frac{x}{b} \ln^2 \frac{c}{y}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 t(1-s) x^t b^{1-t} c^s y^{1-s} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (b^{1-t} x^t, y^{1-s} c^s) ds dt$$

$$+ \frac{\ln^2 \frac{x}{b} \ln^2 \frac{y}{d}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 t s x^t b^{1-t} y^s d^{1-s} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^{1-t} x^t, d^{1-s} y^s) ds dt$$

eşitliği sağlanır ve burada $t, s \in [0,1]$ 'dir.

Lemma 4.2.2. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned} I &= acf(a, c) - adf(a, d) - bcf(b, c) + bdf(b, d) - b \int_c^d f(b, y) dy \\ &+ a \int_c^d f(a, y) dy - d \int_a^b f(x, d) dx + c \int_a^b f(x, c) dx + \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ &= (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) ds dt. \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır ve burada $t, s \in [0,1]$ 'dir (Latif 2015).

Teorem 4.2.1. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda GA -konveks ise bu durumda

$$|I| \leq \frac{[(b-a)(d-c)A(a,b)A(c,d)]^{1-1/q}}{2^{\frac{2}{q}}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q [b^2 - L(a^2, b^2)][d^2 - L(c^2, d^2)] \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q [b^2 - L(a^2, b^2)][L(c^2, d^2) - c^2] \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q [L(a^2, b^2) - a^2][d^2 - L(c^2, d^2)] \\
& \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q [L(a^2, b^2) - a^2][L(c^2, d^2) - c^2] \right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q \geq 1$ için sağlanır (Latif 2015).

İspat: Lemma 4.2.2 deki integral eşitliği kullanılarak

$$|I|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 |b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)}| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right| ds dt$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda GA –konveks oluşu ve iki katlı integraller için Hölder Eşitsizliği kullanılır, ardından integraller hesaplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$|I| \leq \frac{[(b-a)(d-c)A(a,b)A(c,d)]^{1-1/q}}{2^{\frac{2}{q}}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q [b^2 - L(a^2, b^2)][d^2 - L(c^2, d^2)] \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q [b^2 - L(a^2, b^2)][L(c^2, d^2) - c^2] \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q [L(a^2, b^2) - a^2][d^2 - L(c^2, d^2)] \\
& \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q [L(a^2, b^2) - a^2][L(c^2, d^2) - c^2] \right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned}
|I| & \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \left[L \left(a^{2q/q-1}, b^{2q/q-1} \right) L \left(c^{2q/q-1}, d^{2q/q-1} \right) \right]^{1-1/q} \\
& \times \left[A \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right) \right]^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği $q > 1$ için sağlanır (Latif 2015).

İspat: Lemma 4.2.2 deki integral eşitliği kullanılarak

$$|I|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 |b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)}| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right| ds dt$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda GA –konveks olduğu kullanılır ve Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.21. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{[(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)]^{1-1/q}}{2q^{2/q}} \\ &\quad \times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})][d^{2q} - L(c^{2q}, d^{2q})] \right. \\ &\quad + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q [b^{2q} - L(a^{2q}, b^{2q})][L(c^{2q}, d^{2q}) - c^{2q}] \\ &\quad + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q [L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}][d^{2q} - L(c^{2q}, d^{2q})] \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q [L(a^{2q}, b^{2q}) - a^{2q}][L(c^{2q}, d^{2q}) - c^{2q}] \right\}^{1/q} \end{aligned}$$

eşitsizliği $q \geq 1$ için sağlanır (Latif 2015).

İspat: Lemma 4.2.2'deki integral eşitliği kullanılarak

$|I|$

$$\leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 |b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)}| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right| ds dt$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda GA –konveks olduğu kullanılır ve Hölder integral eşitsizliğinin bir versiyonu uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.21. $f: \Delta \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ^o üzerinde kısmi diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Delta^o$ olsun ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda GA –konveks ise bu durumda

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{[(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)]^{1-1/q}}{p^{2/q}} \\ &\times \left[L \left(a^{2q-p/q-1}, b^{2q-p/q-1} \right) L \left(c^{2q-p/q-1}, d^{2q-p/q-1} \right) \right]^{1-1/q} \\ &\times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q [b^p - L(a^p, b^p)][d^p - L(c^p, d^p)] \right. \\ &\quad + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q [b^p - L(a^p, b^p)][L(c^p, d^p) - c^p] \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q [L(a^p, b^p) - a^p][d^p - L(c^p, d^p)] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q [L(a^p, b^p) - a^p][L(c^p, d^p) - c^p] \Big\}^{1/q}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $q > p > 1$ için sağlanır (Latif 2015).

İspat: Lemma 4.2.2 deki integral eşitliği kullanılarak

$$|I|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 |b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)}| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right| ds dt$$

yazılır. Bir önceki teoremin ispatındaki benzer yolla, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda GA –konveks olduğu kullanılır ve Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.

4.3. Koordinatlarda Geometrik-Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks fonksiyon ise bu durumda

$$|I| \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) L(a^2, b^2) L(c^2, d^2) \\ \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.2.2 deki integral eşitliği kullanılarak

$$|I|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \int_0^1 \int_0^1 |b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)}| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right| ds dt$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks olduğu kullanılır ve integraller hesaplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$|I| \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) L(a^2, b^2) L(c^2, d^2) \\ \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| \right\}$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks fonksiyon ise bu durumda

$$|I| \\ \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) L^{\frac{1}{p}}(c^{2p}, d^{2p}) \\ \times \left(\max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için sağlanır.

İspat: Lemma 4.2.2 deki integral eşitliği ve iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$|I| \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) \left(\int_1^1 \int_1^1 (b^{2t} a^{2(1-t)} d^{2s} c^{2(1-s)})^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (b^t a^{1-t}, d^s c^{1-s}) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks olduğu kullanılır ve integraller hesaplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$|I| \\ \leq (\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c) L^{\frac{1}{p}}(a^{2p}, b^{2p}) L^{\frac{1}{p}}(c^{2p}, d^{2p}) \\ \times \left(\max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (b, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (b, c) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (a, d) \right|^q, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (a, c) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde kısmi diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L([a, b] \times [c, d])$ verilsin. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks fonksiyon ise bu durumda

$$|J| \leq \frac{(\ln x - \ln a)(\ln y - \ln c)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(L(x, a) - x)(L(c, y) - y)}{4xy} \right] \\ \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (a, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (a, c) \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\ln x - \ln a)(\ln d - \ln y)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(L(x, a) - x)(y - L(y, d))}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right\} \\
& + \frac{(\ln b - \ln x)(\ln y - \ln c)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(x - L(x, b))(L(c, y) - y)}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| \right\} \\
& + \frac{(\ln b - \ln x)(\ln d - \ln y)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(x - L(x, b))(y - L(y, d))}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.1 de verilen integral eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|J| &= \left| f(x, y) - (\ln b - \ln a) \int_c^d \frac{f(x, v)}{v} dv - (\ln d - \ln c) \int_a^b \frac{f(u, y)}{u} du + \int_a^b \int_c^d \frac{f(u, v)}{uv} dv du \right| \\
&\leq \frac{\ln^2 \frac{a}{x} \ln^2 \frac{c}{y}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 (1-t)(1-s) a^t x^{1-t} c^s y^{1-s} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x^{1-t} a^t, y^{1-s} c^s) \right| ds dt \\
&\quad + \frac{\ln^2 \frac{a}{x} \ln^2 \frac{y}{d}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 s(1-t) a^t x^{1-t} y^s d^{1-s} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x^{1-t} a^t, d^{1-s} y^s) \right| ds dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\ln^2 \frac{x}{b} \ln^2 \frac{c}{y}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 t(1-s) x^t b^{1-t} c^s y^{1-s} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^{1-t} x^t, y^{1-s} c^s) \right| ds dt \\
& + \frac{\ln^2 \frac{x}{b} \ln^2 \frac{y}{d}}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \int_0^1 \int_0^1 t s x^t b^{1-t} y^s d^{1-s} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b^{1-t} x^t, d^{1-s} y^s) \right| ds dt
\end{aligned}$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda Geometrik-Quasi-konveks olduğu kullanılır ve integraller hesaplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|J| & \leq \frac{(\ln x - \ln a)(\ln y - \ln c)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(L(x, a) - x)(L(c, y) - y)}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| \right\} \\
& + \frac{(\ln x - \ln a)(\ln d - \ln y)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(L(x, a) - x)(y - L(y, d))}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right\} \\
& + \frac{(\ln b - \ln x)(\ln y - \ln c)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(x - L(x, b))(L(c, y) - y)}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, c) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| \right\} \\
& + \frac{(\ln b - \ln x)(\ln d - \ln y)}{(\ln b - \ln a)(\ln d - \ln c)} \left[\frac{(x - L(x, b))(y - L(y, d))}{4xy} \right] \\
& \quad \times \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, d) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Çalışmanın ana bölümünü oluşturan dördüncü bölümde, koordinatlarda geometrik fonksiyon tanımlanmıştır. Daha sonra bu fonksiyon sınıfı için tanım ve bazı temel analiz işlemleri kullanılarak integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra iki katlı integraller için iki yeni integral eşitliği ispat edilmiştir. Bu integral eşitlikleri ve iki katlı integraller için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak elde edilmiş koordinatlarda geometrik konveks ve koordinatlarda geometrik quasi konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikler verilmiştir. Farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli yeni sınırlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında verilen lemmalara benzer lemmalar kurularak koordinatlarda yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca yeni genelleştirmeler, Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli benzer eşitsizlikler elde edilebilir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, dördüncü bölümde verilen ve kullanılan lemmaları farklı konveks fonksiyon sınıflarına uygulayabilir ve yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

- Akdemir, A.O., 2010. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum
- Akdemir, A.O. and Özdemir M.E., 2010. Some Hadamard-type inequalities for co-ordinated P –convex functions and Godunova-Levin functions, American Institute of Physics Conference Proceedings [ONLINE: <http://scitation.aip.org/dbt/dbt.jsp?KEY=APCPCS&Volume=1309&Issue=1>].
- Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For s –Convex, Quasi-Convex And r –Convex Mappings And Applications. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malaysia, Bangi.
- Alomari, M. and Darus, M., 2008. Co-ordinated s –convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3 (32), 1557-1567.
- Alomari, M. and Darus, M., 2008. On the Hadamard's inequality for log –convex functions on the co-ordinates, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2009 Article ID 283147.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen. Raumen, Publ. Inst. Math., 23, 13–20.
- Dragomir, S.S., 2001. On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, 5 (4), 775-788.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. And Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21 (3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 1997. Hadamard's inequality for r –convex functions, J. Math. Anal. and Appl., 215, 461-470.
- Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkci sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkii. Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, pp. 138–142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Hudzik, H. And Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions, Aequationes Math., 48, 100-111.
- Latif, M.A., 2015. Hermite-Hadamard Type Inequalities for GA-convex Functions on the Co-ordinates with Applications, Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences 52 (4): 367–379.
- Latif, M.A. and Alomari, M., 2009. On Hadamard-type inequalities for h –convex functions on the co-ordinates, Int. Journal of Math. Analysis, 3 (33), 1645-1656.

- Latif, M.A. and Alomari, M., 2009. Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates, *International Mathematical Forum*, 4 (47), 2327-2338.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, *Seminar on Functional Equations, Approx. And Convex.*, Cluj-Napoca (Romania).
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Niculescu, C. and Persson, L.E., 2006. *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, Springer Science+Business Media, Inc.
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Ekinici, A., 2011. New integral inequalities for co-ordinated convex functions, VI. Ufa International Mathematical Conference, Ufa Bashkir State University .
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E., 2011. On (h, m) –convexity and Hadamard-type inequalities, 6. Ankara Matematik Günleri, Ankara Hacettepe Üniversitesi.
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Yıldız, C., 2011. On Co-ordinated Quasi-Convex Functions, ONLINE: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.3622v1.pdf
- Özdemir, M.E., Kavurmacı, H., Akdemir, A.O. and Avci, M., 2012. Inequalities for convex and s –convex functions on $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012:20.
- Özdemir, M.E., Latif, M.A. and Akdemir, A.O., 2012. On some Hadamard-type inequalities for product of two s -convex functions on the co-ordinates, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012:21
- Özdemir, M.E., Set, E., and Sarıkaya, M.Z., 2011. Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated m –convex and (α, m) –convex functions, *Hacettepe J. of. Math. and Statistics*, 40, 219-229.
- Özdemir, M.E., Yıldız, C. and, Akdemir, A.O. 2011. On Co-ordinated Convex Functions, ONLINE: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1107/1107.4033v1.pdf
- Park, J., 2010. Hermite-Hadamard-type inequalities for real alpha-star s -convex mappings, *J. Appl. Math. & Informatics*, 28, No. 5 - 6, pp. 1507-1518.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. And Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, *J. Math. Anal. and Appl.*, 220, 99-109.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*, Academic Press, New York.
- Sarıkaya, M.Z., Set, E., Özdemir, M.E. and Dragomir, S.S., 2010. New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, Accepted.
- Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Set, E., Sardari, M., Özdemir, M.E. and Roojin, J., 2009. On generalizations of the Hadamard inequality for (α, m) –convex functions, *Kyungpook Math. Journal*, Accepted.
- Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity, *Proc. Colloq. Approx. Optim.*, Cluj-Napoca (Romania), 329-338.

- Tunç, M., 2010. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61, 620-622.
- Varošanec, S., 2007. On h –convexity, J. Math. Anal. And Appl., 326, 303-311.
- Yıldız, Ç., 2011. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s –Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/560586.
- Zang, T-Y., Ji, A-P. and Qi, F., Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA –convex functions with applications to means, Le Matematiche, Vol LXVIII (2013)- Fasc. I, pp. 229-239, doi:104418/2013.68.1.17

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Erzurum’da doğdu. İlköğrenimini ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2008 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne kayıt yaptırdı ve 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılı Eylül ayında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Milli eğitim bakanlığına bağlı Yağan Cumhuriyet Ortaokulunda matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.