



**KOORDİNATLARDA s -KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN MIDPOINT
TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel ACAR

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOORDİNATLARDA s -KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN MIDPOINT
TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Emel ACAR

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Emel ACAR tarafından hazırlanan “Koordinatlarda s –Konveks Fonksiyonlar İçin Midpoint Tipli İntegral Eşitsizlikleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15/02/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Başkan : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniv., Fen Fak.

Üye : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
.../.../2024 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../02/2024

.....

Emel ACAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOORDİNATLARDA s –KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN MIDPOINT TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Emel ACAR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, integral eşitsizlikleri ile ilgili temel tanım ve teoremlerle birlikte, teoremin tarihsel sürecine de odaklanılmıştır. Sonraki bölümde, konveks fonksiyon kavramı tanıtılmış ve farklı versiyonlarıyla ilgili tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, bir önceki bölümde tanımlanan koordinatlarda konvekslik kavramından faydalanılarak elde edilen Midpoint tipli eşitsizliklerle ilgili temel özellikler sunulmuştur. Dördüncü bölüm, tez çalışmasının temelini oluşturmaktadır ve önceki bölümde verilen eşitsizliklere ait özellikler kullanılarak, koordinatlarda s -konveks fonksiyonlarla ilgili yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde tezimizle ilgili sonuç kısmı yer almaktadır. Son bölümde ise, bu çalışmanın temelini oluşturan kaynaklar listelenmiştir.

2024, v + 45 sayfa

Anahtar Kelimeler : Riemann-Liouville kesirli integrali, Konveks fonksiyonlar, s –konveks fonksiyonlar, Koordinatlarda konveks fonksiyonlar, Midpoint tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

MIDPOINT TYPE INEQUALITIES FOR CO-ORDINATED s -CONVEX FUNCTIONS

Emel ACAR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Mehmet Eyüp KİRİŞ

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, integral inequalities The main definitions and theorems of convex functions, as well as the historical background of the theory, are presented. In the next section, the concept of convex function is introduced and the definitions and properties of its different versions are given. In the third section, the previous section Midpoint obtained by utilizing the concept of convexity in defined coordinates basic properties related to type inequalities are presented. The fourth chapter is the core of the thesis work and is based on the previous chapter using the properties of the given inequalities, with s -convex functions in coordinates new related integral inequalities are obtained. In the fifth chapter conclusion section is included. The last section lists the references that form the basis of this study.

2024, v + 45 pages

Keywords : Riemann-Liouville fractional integral, Convex functions, s -convex functions, Convex functions in coordinates, Midpoint type inequalities.

TEŞEKKÜR

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ'e, tez konumu belirleme ve çalışmalarımın yürütülmesi sürecindeki rehberliği için içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, araştırma ve yazım aşamasındaki destekleri için değerli arkadaşım Gözde BAYRAK'a olan minnettarlığımı belirtmek isterim.

Eğitim-öğretim hayatımın her aşamasında üzerimde emeği olan tüm hocalarıma, aileme ve özellikle her zaman sevgisini ve desteğini hissettiğim eşim Zeki ACAR ve oğlum Barış ACAR'a göstermiş oldukları sabır için minnettarlık duyuyorum. Bu süreçteki değerli katkıları için her birine teşekkür ederim.

Emel ACAR
Afyonkarahisar 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı	3
1.2 Çalışmanın Önemi	4
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	6
2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler	6
2.2 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Önemli İntegral Eşitsizlikleri . .	7
2.3 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Genel Kavramlar . .	9
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Midpoint Tipli Eşitsizlikler	13
4. BULGULAR	26
4.1 Koordinatlarda s -Konveks Fonksiyonlar İçin Yeni Midpoint Eşitsizlikler	26
5. SONUÇ	41
6. KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

Γ	Gama fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'nin içinde bir aralık
$\mathbb{R}^2$	İki boyutlu Öklid uzayı
$\sup$	supremum
f'	f 'in birinci türevi
f''	f 'in ikinci türevi
$\ f'\ _\infty$	f 'in türevinin sonsuz normu
K_s^1	1. anlamda s —konveks fonksiyon sınıfı
K_s^2	2. anlamda s —konveks fonksiyon sınıfı
$[a, b] \times [c, d]$	$[a, b]$ aralığı ile $[c, d]$ aralığının kartezyen çarpımı
$L_1[a, b]$	(a, b) aralığında integrallenebilen
J_{a+}^α	Sağ Riemann-Lioville Kesirli İntegrali
J_{b-}^α	Sol Riemann-Lioville Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Conformable kesirli türev tanımının literatüre kazandırılması ve bu alandaki çalışmaların hız kazanması, matematiksel analizde yeni ufukların keşfedilmesine yol açmıştır. Bu kavram literatüre "conformable kesirli türev" adı altında eklenmiştir (Khalil vd. 2014). Bu yeni tanım, özellikle mühendislik ve fizik alanında karşılaşılan problemlerin daha gerçekçi ve doğru bir şekilde modellenmesini sağlamıştır. Conformable kesirli türevin getirdiği bu yenilikler, matematiksel analizin klasik yöntemlerinin bazı sınırlamalarını aşmada önemli bir role sahiptir. Özellikle konveks fonksiyonlarla ilgili çalışmalar, conformable kesirli türevin tanıtılmasıyla yeni bir boyut kazanmıştır. Bu alanda s-konveks fonksiyonlar özel bir ilgi alanı oluşturmaktadır. S-konveks fonksiyonlar, genel konvekslik kavramını genişleten ve çeşitli uygulama alanlarında kullanılabilen fonksiyon sınıflarını temsil eder. Bu fonksiyonların incelenmesi, özellikle optimizasyon, ekonomik teori ve matematiksel programlama gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir. Bu bağlamda s-konveks fonksiyonlar için geliştirilen integral eşitsizlikler, teorik ve uygulamalı matematikte dikkate değer bir yere sahiptir. Bu eşitsizlikler, fonksiyonların davranışlarını daha iyi anlamak ve çeşitli matematiksel problemleri çözmek için kritik araçlar sunmaktadır. Özellikle, midpoint tipli integral eşitsizlikleri, s-konveks fonksiyonların özelliklerini ortaya koymada kullanılan önemli bir yöntemdir. Bu eşitsizlikler, fonksiyonların belirli aralıklardaki ortalama değerlerini tahmin etmek için kullanılır ve bu sayede fonksiyonların genel davranışları hakkında önemli bilgiler sağlar.

Midpoint tipli integral eşitsizliklerinin incelenmesi, s-konveks fonksiyonların daha iyi anlaşılmasını ve bu fonksiyonların uygulamalarının geliştirilmesini sağlamaktadır. Bu çalışmalar, matematiksel analizin yanı sıra, ekonomi, mühendislik ve doğa bilimleri gibi birçok disiplindeki problemlere uygulanabilir çözümler üretmek için de önemli bir temel oluşturmaktadır. Genel olarak konveks fonksiyonlar ve özellikle s-konveks fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar, matematiksel analizin ilerlemesinde ve çeşitli bilim dallarında karşılaşılan problemlerin çözümünde büyük bir önem taşımaktadır. Bu alanda yapılan araştırmalar ve geliştirilen yeni yöntemler, hem teorik matematikte hem de uygulamalı alanlarda devam eden gelişmelerin bir parçası-

dır (Alomari ve Darus 2008).

Bu çalışmanın odak noktası, s -konveks fonksiyonlar için ortaya konulan ve giderek önem kazanan midpoint tipli integral eşitsizlikleridir. Bu eşitsizlikler, s -konveks fonksiyonların belirli aralıklardaki davranışlarını anlamak ve bu fonksiyonların genel özelliklerini daha iyi kavramak için kritik öneme sahiptir. Midpoint tipli integral eşitsizliklerinin incelenmesi, bu fonksiyonların integral hesaplamalarında nasıl davrandığını gösterir ve bu bilgi, çeşitli analitik ve uygulamalı problemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu tezde, s -konveks fonksiyonlar için geliştirilen çeşitli midpoint tipli integral eşitsizlikler ayrıntılı olarak incelenecek ve bu eşitsizliklerin matematiksel analiz ve uygulamalarındaki önemi ortaya konacaktır. Özellikle tez çalışmamızda s -konveks fonksiyonlar için geliştirilen yeni midpoint tipli integral eşitsizlikler sunulacak, bu eşitsizliklerin ispatları detaylı bir şekilde ele alınacak ve bu ispatların arkasındaki matematiksel mantık açıklanacaktır. Bunun yanı sıra, bu eşitsizliklerin diğer bilinen integral eşitsizlikleriyle ilişkisi ve bu ilişkinin matematiksel analizdeki yeri tartışılacaktır. Bununla birlikte tez çalışmasının bir diğer önemli kısmı, s -konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için geliştirilen integral eşitsizliklerinin uygulamalı yönüne odaklanacaktır. Bu bağlamda, mühendislik, ekonomi, finans ve doğa bilimleri gibi çeşitli alanlardaki problemlere bu eşitsizliklerin nasıl uygulanabileceği incelenecek ve bu uygulamaların pratikte nasıl faydalı olabileceği örneklerle gösterilecektir (Abdeljawad 2015).

Bu tez çalışmasının bir diğer önemli yönü, s -konveks fonksiyonlar ve midpoint tipli integral eşitsizliklerinin daha geniş matematiksel çerçevede ele alınmasıdır. Bu çerçevede, s -konveks fonksiyonların özellikleri ve bu fonksiyonlar için geliştirilen integral eşitsizliklerinin, matematiksel analizin diğer alanları ile olan ilişkisi detaylı bir şekilde incelenecektir. Örneğin, bu eşitsizliklerin fonksiyonel analiz, olasılık teorisi ve optimizasyon teorisi gibi diğer matematiksel disiplinlerle olan bağlantıları araştırılacaktır. Bu kapsamda, s -konveks fonksiyonların ve bu fonksiyonlar için geliştirilen eşitsizliklerin, gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde ve çözümünde nasıl etkili olabileceği tartışılacaktır. Özellikle, s -konveks fonksiyonlar ve bunların integral eşitsizlikleri konusundaki çalışmalar, daha karmaşık matematiksel yapıların ve fonksiyon sınıflarının anlaşılmasına katkıda bulunmuştur.

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, matematiksel analiz alanında önemli bir yere sahip olan s-konveks fonksiyonlar için geliştirilen midpoint tipli integral eşitsizliklerini derinlemesine incelemektir. Bu inceleme, teorik matematik ve uygulamalı disiplinlerde s-konveks fonksiyonların kullanımını ve anlaşılmasını genişletmeyi hedeflemektedir. Özellikle, bu çalışmanın amaçları şu şekilde özetlenebilir:

- s-Konveks fonksiyonlarının temel özelliklerini, tanımlarını ve matematiksel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemek. Bu fonksiyonların, genel konveks fonksiyonlarla olan ilişkilerini ve farklılıklarını aydınlatmak.
- s-Konveks fonksiyonlar için geliştirilen midpoint tipli integral eşitsizliklerini matematiksel olarak analiz etmek. Bu eşitsizliklerin ispatlarını ve matematiksel temellerini detaylandırmak.
- s-Konveks fonksiyonların ve bunlar için geliştirilen integral eşitsizliklerin, mühendislik, ekonomi, finans ve doğa bilimleri gibi alanlarda nasıl uygulanabileceğini araştırmak. Bu fonksiyonların gerçek dünya problemlerini çözmedeki potansiyellerini ortaya koymak.
- Bu çalışmanın bulgularını kullanarak, matematiksel analiz ve uygulamalı matematikteki yeni araştırma yönlerini ve potansiyel uygulama alanlarını belirlemek. Bu yönlerin, gelecekteki akademik çalışmalara ve endüstriyel uygulamalara nasıl katkı sağlayabileceğini değerlendirmek.
- s-Konveks fonksiyonlar ve bunların integral eşitsizlikleri hakkındaki teorik bilgiyi, pratik uygulamalarla bütünleştirmek. Bu entegrasyonun, hem akademik topluluk için hem de uygulamalı alanlarda çalışan profesyoneller için değerli bir kaynak oluşturmasını sağlamak.

Bu çalışmanın nihai amacı, s-konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için geliştirilen midpoint tipli integral eşitsizliklerin anlaşılmasını ve kullanımını ilerletmek, bu konularda bilgi birikimini artırmak ve matematiksel analiz ile uygulamalı matematiğin gelişimine katkıda bulunmaktır.

1.2 Çalışmanın Önemi

Bu çalışmanın önemi, s-konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için geliştirilen midpoint tipi integral eşitsizliklerinin teorik ve uygulamalı yönlerine odaklanmasında yatmaktadır. Bu odaklanma, hem matematiksel analiz alanında hem de birçok farklı disiplinde önemli katkılarda bulunmaktadır. Çalışmanın önemi aşağıdaki başlıklar altında toplanabilir:

- s-Konveks fonksiyonlar, konveks analizin bir genellemesi olarak önem taşır. Bu çalışma, s-konveks fonksiyonların daha detaylı incelenmesini sağlayarak, konveks analiz teorisinin anlaşılmasını ve uygulanmasını derinleştirmektedir.
- s-Konveks fonksiyonlar ve ilgili integral eşitsizlikleri, mühendislik, ekonomi, finans ve doğa bilimleri gibi çeşitli alanlarda uygulanabilir.
- Bu çalışma, s-konveks fonksiyonlar ve integral eşitsizliklerinin incelenmesiyle ilgili mevcut literatüre yeni perspektifler ve sonuçlar ekleyerek, gelecekteki araştırmalar için yeni yollar açmaktadır.

Teorik matematiksel analiz ile pratik uygulamalar arasında köprü kurarak, her iki alandaki bilginin entegrasyonuna ve uygulanabilirliğine katkıda bulunmaktadır. Kayaların özelliklerinin tanımlanmasında, dinamik sistemlerin kontrol teorisinde, viskoelastisite problemlerini çözme ve formülleştirmede, materyallerin mekanik ve elektriksel özelliklerini modellemede, ses sinyallerini modellemede, biyolojide, çeşitli materyallerin özelliklerini tanımlamada ve elektrokimyada kullanılmaktadır. Ayrıca kontrol teori, ısı iletimi, elektrik, mekanik, kaos, fraktal gibi alanlarda da kesirli hesabın kullanıldığı görülmektedir (Philips 1986, 1989). Örneğin, kesirli türev kullanılarak Maxwell'in denklemleri genelleştirilmiştir (Engheta 1997, 1998). Kesirli türev içeren Lagrangian ve Hamiltonian mekaniği formülleştirilmiştir (Riewe 1996, 1997). Agrawal (2002), kesirli mertebeden türevi içeren varyasyon hesabını geliştirmiştir. Fraktal yapısını içeren işlemleri formülleştirmede ve istatistikte kesirli hesabın kullanıldığı görülmektedir (Babakhani ve Gejji 2002). Conformable kesirli türevin getirdiği bu yenilikler, matematiksel analizin klasik yöntemlerinin bazı sınırlamalarını aşmada önemli bir role sahiptir. Sonuç olarak bu çalışma, s-konveks fonksiyonlar ve midpoint tipi integral eşitsizlikleri hakkında derinlemesine bilgi sunarak, matematik-

sel analiz ve uygulamalı matematiğin ilerlemesine önemli katkılarda bulunmaktadır. Özellikle matematiksel analiz ve uygulamalı disiplinler arasındaki entegrasyonun teşvik edilmesi, bu çalışmanın önemli bir sonucu olarak öne çıkmaktadır.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm, tezdeki önemli tanımları, teoremleri ve ispatları içermektedir.

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 $\forall \lambda, \Omega \in K$ ve $\tau \in [0, 1]$ için,

$$(1 - \tau) \lambda + \tau \Omega \in K$$

ise $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda konveks küme denir (Pearce ve Dragomir 2000).

Tanım 2.2 $\forall \lambda, \Omega \in K$ ve $\tau \in [0, 1]$ için,

$$f((1 - \tau) \lambda + \tau \Omega) \leq (1 - \tau) f(\lambda) + \tau f(\Omega)$$

ise $f : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pearce ve Dragomir 2000).

Tanım 2.3 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < s \leq 1$ şartı altında birinci anlamda s-konveks fonksiyon ise; $\forall \lambda, \Omega \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için,

$$f(\alpha \lambda + \beta \Omega) \leq \alpha^s f(\lambda) + \beta^s f(\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı K_s^1 şeklinde gösterilir (Orlicz ve Matuszewksa 1961).

Tanım 2.4 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < s \leq 1$ şartı altında ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu ise; $\forall \lambda, \Omega \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için,

$$f(\alpha \lambda + \beta \Omega) \leq \alpha^s f(\lambda) + \beta^s f(\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı K_s^2 şeklinde gösterilir (Brekner 1978).

Tanım 2.4 te, $s = 1$ için klasik konvekslik elde edilir (Maden vd. 2014).

Tanım 2.5 $f \in L_1[a, b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $J_{a+}^\alpha f$ ve $J_{b-}^\alpha f$ Riemann-Liouville kesirli integralleri;

$$J_{a+}^\alpha f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\lambda (\lambda - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \lambda > a$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\lambda^b (\tau - \lambda)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \lambda < b,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha = 0$ için $\Gamma(0) = 1$ ve $J_{a+}^0 f(\lambda) = J_{b-}^0 f(\lambda) = f(\lambda)$ dır (Samko 1993).

Tanım 2.6 $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak şartıyla $f \in L_1[a, b]$ fonksiyonu için ${}^\beta I_{a+}^\alpha f$ ve ${}^\beta I_{b-}^\alpha f$ kesirli conformable integral operatörleri;

$${}^\beta \mathcal{I}_{a+}^\alpha f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\lambda \left(\frac{(\lambda - a)^\alpha - (\tau - a)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau)}{(\tau - a)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \tau > a \quad (2.1)$$

ve

$${}^\beta \mathcal{I}_{b-}^\alpha f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\lambda^b \left(\frac{(b - \lambda)^\alpha - (b - \tau)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau)}{(b - \tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \tau < b, \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Samko 1993).

2.2 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Önemli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 2.7 $I, \mathbb{R}$ de bir aralık; $a, b \in I$ ile $a < b$ iken $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\lambda) d\lambda \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

Hermite-Hadamard eşitsizliği, çeşitli uygulama alanları ve geometrik yorumlarıyla konveks fonksiyonlar teorisinde en yaygın kullanılan eşitsizliklerden biridir. Bu eşitsizlik, konveks fonksiyonların integralinin ortalama değeri için tahminler sağlamada önemli bir rol oynar. Ayrıca, son yıllarda artan ilgiyle birlikte çeşitli araştırmalarda ve genelleştirmelerde kullanılmıştır.

Dolayısıyla, Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyonlar teorisindeki önemli sonuçlardan biridir ve bu alandaki çeşitli matematiksel analizlerde kullanılır.

Teorem 2.8 $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $I \in [0, 1]$ koşuluyla $f; I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ise;

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\lambda) d\lambda \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ikinci anlamda s-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak tanımlanır (Dragomir ve Fitzpatrick 1999).

Teorem 2.9 Eğer f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçel fonksiyonlar olup $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise ve $p > 1$ ile $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartları sağlanıyorsa;

$$\int_a^b |f(\lambda)g(\lambda)| d\lambda \leq \left(\int_a^b |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(\lambda)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

integraller için Hölder Eşitsizliği olarak bilinir (Mitrinovic vd. 1993).

Hölder eşitsizliği, çift katlı integraller için şu şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b \int_a^b |f(\lambda, \Omega) g(\lambda, \Omega)| d\lambda d\Omega \leq \left[\int_a^b \int_a^b |f(\lambda, \Omega)|^p d\lambda d\Omega \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b \int_a^b |g(\lambda, \Omega)|^q d\lambda d\Omega \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 2.10 Eğer f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar ve $|f|$ ile $|g|^q$, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ise ve $q \geq 1$ olmak üzere;

$$\int_a^b |f(\lambda)g(\lambda)| d\lambda \leq \left(\int_a^b |f(\lambda)| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(\lambda)| |g(\lambda)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği Power-Mean Eşitsizliği olarak bilinir. Hölder Eşitsizliği'nin özel bir durumudur.

Power-Mean eşitsizliği kullanılarak çift katlı integraller için;

$$\int_a^b \int_a^b |f(\lambda, \Omega) g(\lambda, \Omega)| d\lambda d\Omega \leq \left[\int_a^b \int_a^b |f(\lambda, \Omega)|^p d\lambda d\Omega \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_a^b \int_a^b |f(\lambda, \Omega)| |g(\lambda, \Omega)|^q d\lambda d\Omega \right]^{\frac{1}{q}}$$

ifadesi elde edilebilir (Mitrinovic vd. 1993).

Teorem 2.11 $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks olmak üzere;

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\lambda) d\lambda - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|),$$

eşitsizliği Midpoint Eşitsizliği olarak bilinir (Kirmacı 2004).

Teorem 2.12 $\lambda, \Omega \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |\lambda + \Omega| &\leq |\lambda| + |\Omega|, \\ ||\lambda| - |\Omega|| &\leq |\lambda - \Omega|, \\ ||\lambda| - |\Omega|| &\leq |\lambda + \Omega| \end{aligned}$$

eşitsizlikler genel olarak geçerlidir. Üçgen Eşitsizliği;

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

yazılır (Mitrinovic vd. 1993).

Teorem 2.13 f , $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $a < b$ olmak üzere,

$$\left| \int_a^b f(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_a^b |f(\lambda)| d\lambda$$

ifadesine *İntegraller için Üçgen Eşitsizliği* denir (Mitrinovic vd. 1993).

2.3 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Genel Kavramlar

Tanım 2.14 $f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, $\forall \tau, s \in (0, 1)$ ve $(\lambda, \Omega), (u, v) \in \Delta$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} &f(\tau\lambda + (1-\tau)\Omega, su + (1-s)v) \\ &\leq \tau s f(\lambda, u) + s(1-\tau) f(\Omega, u) + \tau(1-s) f(\lambda, v) + (1-\tau)(1-s) f(\Omega, v) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilebiliyor ise $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konvektir (Latif ve Alomari 2009).

Lemma 2.15 Her konveks $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda da konveks olup tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bu prensip, konveks analiz teorisinde önemli bir ilkedir ve Dragomir (2001) tarafından ispatlanmıştır. Örneğin; $f(\lambda, \Omega) = \lambda\Omega$ şeklinde tanımlanan $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks olmasına rağmen $[0, 1] \times [0, 1]$ için konveks değildir.

Tanım 2.16 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (\lambda, u), (\Omega, v) \in \Delta$ ile $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $\alpha, \beta \geq 0, s \in (0, 1]$ koşulları altında;

$$f(\alpha\lambda + \beta\Omega, \alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(\lambda, u) + \beta^s f(\Omega, v)$$

ise, f fonksiyonuna Δ üzerinde *Koordinatlarda 1. Anlamda s-Konvektir* denir (Alamori ve Darus 2008).

Tanım 2.17 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (\lambda, u), (\Omega, v) \in \Delta$ olmak üzere $s \in (0, 1]$ ve $\lambda \in (0, 1]$ koşulları altında $f \in L_1([a, b] \times [c, d])$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ ile $a, c \geq 0$ ve Γ ; Gama fonksiyonu olmak üzere Riemann-Liouville integralleri $J_{a+, c+}^{\alpha, \beta}, J_{a+, d-}^{\alpha, \beta}, J_{b-, c+}^{\alpha, \beta}$ ve $J_{b-, d-}^{\alpha, \beta}$;

$$J_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f(\lambda, \Omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\lambda \int_c^\Omega (\lambda - \tau)^{\alpha-1} (\Omega - s)^{\beta-1} f(\tau, s) ds d\tau, \quad \lambda > a, \Omega > c, \quad (2.3)$$

$$J_{a+, d-}^{\alpha, \beta} f(\lambda, \Omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\lambda \int_\Omega^d (\lambda - \tau)^{\alpha-1} (s - \Omega)^{\beta-1} f(\tau, s) ds d\tau, \quad \lambda > a, \Omega < d, \quad (2.4)$$

$$J_{b-, c+}^{\alpha, \beta} f(\lambda, \Omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\lambda^b \int_c^\Omega (\tau - \lambda)^{\alpha-1} (\Omega - s)^{\beta-1} f(\tau, s) ds d\tau, \quad \lambda < b, \Omega > c, \quad (2.5)$$

ve

$$J_{b-, d-}^{\alpha, \beta} f(\lambda, \Omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\lambda^b \int_\Omega^d (\tau - \lambda)^{\alpha-1} (s - \Omega)^{\beta-1} f(\tau, s) ds d\tau, \quad \lambda < b, \Omega < d, \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır (Samko 1993).

Tanım 2.18 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için, $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $\text{Re}(\beta) > 0$ ve $f(\lambda, \Omega)$ nin α, β mertebesinden genelleştirilmiş conformable integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\left(\gamma_1 \gamma_2 I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f \right) (\lambda, \Omega) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\lambda \int_c^\Omega \left(\frac{(\lambda - a)^{\gamma_1} - (\tau - a)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha-1} \right. \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{(\Omega - c)^{\gamma_2} - (s - c)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau, s)}{(\tau - a)^{1-\gamma_1}(s - c)^{1-\gamma_2}} ds d\tau \Bigg], \\
(\gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f)(\lambda, \Omega) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{\lambda}^b \int_c^{\Omega} \left(\frac{(b - \lambda)^{\gamma_1} - (b - \tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha-1} \right. \\
& \times \left. \left(\frac{(\Omega - c)^{\gamma_2} - (s - c)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau, s)}{(b - \tau)^{1-\gamma_1}(s - c)^{1-\gamma_2}} ds d\tau \right], \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f)(\lambda, \Omega) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^{\lambda} \int_{\Omega}^d \left(\frac{(\lambda - a)^{\gamma_1} - (\tau - a)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha-1} \right. \\
& \times \left. \left(\frac{(d - \Omega)^{\gamma_2} - (d - s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau, s)}{(\tau - a)^{1-\gamma_1}(d - s)^{1-\gamma_2}} ds d\tau \right], \tag{2.9}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f)(\lambda, \Omega) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{\lambda}^b \int_{\Omega}^d \left(\frac{(b - \lambda)^{\gamma_1} - (b - \tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha-1} \right. \\
& \times \left. \left(\frac{(d - \Omega)^{\gamma_2} - (d - s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta-1} \frac{f(\tau, s)}{(b - \tau)^{1-\gamma_1}(d - s)^{1-\gamma_2}} ds d\tau \right]. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

(Samko 1993).

Teorem 2.19 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun koordinatlarda konveks bir fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \right] \int_a^b f\left(\lambda, \frac{c+d}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, \Omega\right) d\Omega \\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(\lambda, \Omega) d\Omega d\lambda \\
&\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\lambda, c) d\lambda + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\lambda, d) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, \Omega) d\Omega + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, \Omega) d\Omega \right] \\
&\leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir (Drogamir 2001).

Teorem 2.20 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$, $c < d$ olmak üzere Δ üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise;

$$K = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \left(\lambda, \frac{c+d}{2} \right) d\lambda + \frac{1}{d-c} \int_c^d f \left(\frac{a+b}{2}, \Omega \right) d\Omega$$

olmak üzere ;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d d\Omega d\lambda + f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) - K \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \\ & \quad \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} f(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} f(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} f(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} f(b, d) \right|}{4} \right] \end{aligned}$$

Midpoint Eşitsizliği sağlanır (Latif 2012).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Midpoint Tipli Eşitsizlikler

Lemma 3.1 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ üzerinde diferansiyelenebilir olsun. $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ koşulları altında $\frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial t \partial s} \in L_1(\Delta)$ var olmak üzere, aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& \left. + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right] - A \quad (3.1) \\
& = \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
& \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) ds dt \right] \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) ds dt \right] \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) ds dt \right] \\
& \left. + \int_p^{k1} \int_p^k \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) ds dt \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Burada

$$A = \frac{2^{\gamma_2 \beta - 1} \gamma_2^\beta \Gamma(\beta + 1)}{(d-c)^{\gamma_2 \beta}} \left[\gamma_2 I_{c^+}^\beta f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_2 I_{d^-}^\beta f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right] \quad (3.2)$$

$$+ \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} \gamma_1^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{(b - a)^{\gamma_1 \alpha}} \left[\gamma_1 I_{a^+}^\alpha f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \gamma_1 I_{b^-}^\alpha f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) \right]$$

olarak ifade edilir (Kiriş vd. 202x).

Teorem 3.2 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ olsun. A (3.2) deki gibi tanımlanmak ve $B(\cdot, \cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade etmek üzere, eğer $\frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial t \partial s}$ türevi Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise,

$$\begin{aligned} & \left| f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b - a)^{\gamma_1 \alpha} (d - c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\ & \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) \right. \\ & \left. + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) \right] - A \Big| \quad (3.3) \\ & \leq \frac{(b - a)(d - c)}{16} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right] \\ & \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right], \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Kiriş vd. 202x).

İspat. Lemma 3.1'in modülü alınsın:

$$\begin{aligned} & \left| f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b - a)^{\gamma_1 \alpha} (d - c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\ & \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) \right. \\ & \left. + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + d}{2} \right) \right] - A \Big| \quad (3.4) \\ & \leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b - a)(d - c)}{16} \\ & \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1 - t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1 - s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\ & \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1 + t}{2} a + \frac{1 - t}{2} b, \frac{1 + s}{2} c + \frac{1 - s}{2} d \right) \right| ds dt \\ & \left. + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1 - t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1 - s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\ & \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1 + t}{2} a + \frac{1 - t}{2} b, \frac{1 - s}{2} c + \frac{1 + s}{2} d \right) \right| ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) \right| ds dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Burada $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ türevinin Δ üzerindeki koordinatlarda konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \Big] - A \Big| \\
& \leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
& \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \Big] ds dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \Big] ds dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \Big] ds dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right. \\
& \left. + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right] ds dt \Big\} \\
& = \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right] \\
& = \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right] \\
& \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right],
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

Uyarı 3.1.1 Teorem 3.2 de, $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ seçilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\alpha-1} 2^{\beta-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(b-a)^\alpha (d-c)^\beta} \right. \\
& \times \left[{}^{1,1}I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + {}^{1,1}I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\
& \left. + {}^{1,1}I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + {}^{1,1}I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] - A \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[1 - \frac{1}{\alpha+1} \right] \left[1 - \frac{1}{\beta+1} \right] \\
& \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorem 3.3 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $B(\cdot, \cdot)$ Beta fonksiyonu ve A da (3.2) ifadesinde tanımlandığı gibi, $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ olmak şartıyla, eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q > 1$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks iken, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ koşuluyla,

$$\left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right|$$

$$\begin{aligned}
& \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\
& \left. + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] - A \quad (3.6) \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[\left(16 - \frac{16}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(16 - \frac{16}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir (Kiriş vd. 202x).

İspat. Lemmadan, (3.4) eşitsizliği elde edilir. Hölder eşitsizliği kullanılır ve ardından $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonunun koordinatlarda konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \quad (3.7) \\
& \quad \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right|^p \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left(\int_0^1 \int_0^1 (1 - (1 - (1-t)^{\gamma_1})^{\alpha p}) (1 - (1 - (1-s)^{\gamma_2})^{\beta p}) ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q ds dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\quad \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) \right| ds dt \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\quad \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\quad \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) \right| ds dt \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Bulunan (3.7)-(3.10) eşitsizlikleri (3.4)' de yerine yazılırsa, (3.6) elde edilir. $\square$

Uyarı 3.1.2 Teorem 3.3'te $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ seçilirse, aşağıdaki sonuç bulunur:

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\alpha-1}2^{\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \right. \\
& \times \left[{}^{1,1}I_{a^+,c^+}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + {}^{1,1}I_{a^+,d^-}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \right. \\
& \left. + {}^{1,1}I_{b^-,c^+}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + {}^{1,1}I_{b^-,d^-}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right] - A \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[\left(16 - \frac{16}{(\alpha p + 1)}\right) \left(16 - \frac{16}{(\beta p + 1)}\right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Teorem 3.4 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ koşulları altında, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q q \geq 1$ ifadesi Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve A , (3.2)'de tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
S = & \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^\alpha\gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1\gamma_2 I_{a^+,c^+}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1\gamma_2 I_{a^+,d^-}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& \left. + \gamma_1\gamma_2 I_{b^-,c^+}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1\gamma_2 I_{b^-,d^-}^{\alpha,\beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right] - A \Big|
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan;

$$S \leq \frac{(b-a)(d-c)}{\gamma_1\gamma_2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2+\frac{1}{q}} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B\left(\alpha+1, \frac{1}{\gamma_1}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B\left(\beta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right)\right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B\left(\alpha+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) + B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \right. \\
& \left. \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B\left(\beta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) + B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \\
& \left. + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B\left(\alpha+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) + B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \right. \\
& \left. \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \right. \\
& \left. \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B\left(\beta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) + B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\
& \left. + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B\left(\beta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) + B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B\left(\alpha+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) + B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B\left(\beta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) + B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B\left(\alpha+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B\left(\beta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \Big|^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$+ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \quad (3.15)$$

$$\times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q$$

$$+ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \quad (3.16)$$

$$\times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q$$

$$+ \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \quad (3.17)$$

$$+ \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left. \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q$$

$$+ \left(\left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \right.$$

$$\times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right]$$

$$\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q$$

$$+ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q$$

$$+ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \quad (3.18)$$

$$+ \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q$$

$$+ \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır (Kiriş vd. 202x).

İspat.

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt
\end{aligned}$$

olsun. I_5 integralinde Power Mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| ds dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \right. \\
& \left. \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Ardından $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ ifadesinin $\triangle$ üzerinde koordinatlarda konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) ds dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) \right. \\
& \times \left\{ \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1-s}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q ds dt \right\} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) \\
& \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& \leq \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left(\left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \right. \right. \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& \left. + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) \\
& \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& \leq \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left(\left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \right. \right. \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& \left. \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \Bigg\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) (3.21) \\
& \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& \leq \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left(\left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \right. \right. \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left. \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

son olarak,

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right) (3.22) \\
& \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) \right| ds dt \\
& \leq \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left(\left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \right. \right. \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\gamma_1}{2} - B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{2} - B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left[\frac{3\gamma_1}{2} - 2B \left(\alpha + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) + B \left(\alpha + 1, \frac{2}{\gamma_1} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{3\gamma_2}{2} - 2B \left(\beta + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) + B \left(\beta + 1, \frac{2}{\gamma_2} \right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \Bigg] \Bigg\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.19)-(3.22) eşitsizlikleri (3.12) de yazıldığında ispat tamamlanmış olur.

□

Uyarı 3.1.3 Eğer Teorem 3.4'te $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\alpha-1} 2^{\beta-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(b-a)^\alpha (d-c)^\beta} \left[{}^{1,1}I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \right. \\
& + {}^{1,1}I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + {}^{1,1}I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \\
& \left. \left. + {}^{1,1}I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] - A \right| \tag{3.23} \\
& \leq (b-a)(d-c) \left(\frac{1}{4} \right)^{2+\frac{1}{q}} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) \left(1 - \frac{1}{\beta+1} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \left(\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \right. \\
& + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left. \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \\
& + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left. \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left. \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q \right. \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\
& + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \\
& + \left. \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right] \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+2} \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} .
\end{aligned}$$

4. BULGULAR

4.1 Koordinatlarda s -Konveks Fonksiyonlar İçin Yeni Midpoint Eşitsizlikler

Teorem 4.1 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde tanımlı olsun. $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ koşulları altında $\frac{\partial^2 f(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda}$ türevi Δ üzerinde koordinatlarda s -konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2s+4} \cdot \gamma_1 \gamma_2} [\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \Big] \\
& \times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right\}
\end{aligned}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
\Psi(\gamma_1, \alpha, s) &= \int_0^1 [1 - (1-u)^\alpha] \left(2 - u^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)^s \cdot u^{\frac{1}{\gamma_1} - 1} du \\
\Psi(\gamma_2, \beta, s) &= \int_0^1 [1 - (1-u)^\beta] \left(2 - v^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^s \cdot v^{\frac{1}{\gamma_2} - 1} dv
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat. Lemma (3.1)' e göre,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Big] - A \Big|
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
&\times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big\}
\end{aligned}$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ nin koordinatlarda s -konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1\alpha-1} 2^{\gamma_2\beta-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1\alpha} (d-c)^{\gamma_2\beta}} \right. \\
&\times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
&+ \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Big] - A \Big| \\
&\leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
&\times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
&\times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right| \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right| \Big] d\lambda dt
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\
& + \left. \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliğinin sağ tarafında,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
&\times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt
\end{aligned} \tag{4.3}$$

,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
&\times \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt
\end{aligned} \tag{4.4}$$

,

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\ & \left. + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_4 = & \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ & \times \left[\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\ & \left. + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] d\lambda dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

diyelim. (4.3) de değişken değiştirme yöntemi kullanıldığında;

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \frac{1}{2^s 2^s} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| \right. \\ & + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right] \\ & + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| \right] \\ & \left. + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.3)-(4.6) ifadelerinde de değişken değiştirme kullanıldığında;

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \frac{1}{2^s 2^s} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right. \\ & + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| \\ & + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \\ & \left. + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|, \right. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} I_3 = & \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \frac{1}{2^s 2^s} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| \right. \\ & + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| \\ & + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \\ & \left. + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned}
I_4 = & \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \frac{1}{2^s 2^s} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right. \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| \\
& + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| \Big\}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Bulunan (4.7)-(4.10) ifadeleri (4.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Big] - A \Big| \\
\leq & \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2s+4} \gamma_1 \gamma_2} \cdot [\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \\
& \times \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \\
& + \left[\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right] \left[\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right] \Big] \\
& \times \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.2 Varsayalım ki $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Δ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ olmak koşuluyla $\left| \frac{\partial^2 f(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right|$ Δ üzerinde koordinatlarda s-konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Big] - A \Big| \\
\leq & \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{s}{q}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times \frac{1}{(s+1)^{\frac{2}{q}}} \left[(2^{s+1} - 1)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q \right. \\
& + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + \left[(2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + \left[(2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q + (2^{s+1} - 1)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q \\
& + (2^{s+1} - 1) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q + (2^{s+1} - 1)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma (3.1)' in modülü alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \left. \right] - A \left| \right. \\
& \leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
& \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2} a + \frac{1-t}{2} b, \frac{1+\lambda}{2} c + \frac{1-\lambda}{2} d \right) \right| d\lambda dt \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2} a + \frac{1-t}{2} b, \frac{1-\lambda}{2} c + \frac{1+\lambda}{2} d \right) \right| d\lambda dt \quad (4.12) \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right]
\end{aligned}$$

$$\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \quad (4.13)$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big\} \quad (4.14)$$

bulunur. (4.11) de Hölder eşitsizliği ve $\left| \frac{\partial^2 f(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right|$, nin koordinatlarda s-konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ & \leq \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right|^p \cdot \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right|^p d\lambda dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right|^q d\lambda dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha} \cdot \frac{1}{\gamma_2^\beta} \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 |1 - (1 - (1-t)^{\gamma_1})^\alpha|^p \cdot |1 - (1 - (1-\lambda)^{\gamma_2})^\beta|^p d\lambda dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q d\lambda dt \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Değişken değiştirme kullanıldığında (4.11);

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ & \leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha \cdot \gamma_2^\beta \cdot 2^{\frac{2s}{q}}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\frac{2^{s+1} - 1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q + \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)^2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q + \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{2^{s+1} - 1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q + \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)^2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)^2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + \left(\frac{1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \quad (4.15)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde (4.12) ;

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ &\quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta \cdot 2^{\frac{2s}{q}}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)^2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q + \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q + \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + \frac{(2^{s+1} - 1)}{(s+1)^2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.13);

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ &\quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta \cdot 2^{\frac{2s}{q}}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)^2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q + \left(\frac{1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q + \\ &\quad \left. + \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + \frac{(2^{s+1} - 1)}{(s+1)^2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve (4.14);

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1 - (1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ &\quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta \cdot 2^{\frac{2s}{q}}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{s+1} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q + \frac{(2^{s+1} - 1)}{(s+1)^2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(2^{s+1} - 1)}{(s+1)^2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q + \left(\frac{2^{s+1} - 1}{(s+1)} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \quad (4.18)$$

sonuçları elde edilir. Bulunan (4.15)-(4.18) sonuçları (4.11)-(4.14) de yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.3 $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ koşulları altında $q \geq 1$ iken $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ koordinatlarda s-konveks ise;

$$\begin{aligned} & \left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\ & \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\ & + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \Big] - A \Big| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{\gamma_1^{\frac{1}{q}} \gamma_2^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{4} \right)^{2 + \frac{s}{q}} \\ & \times \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right) \right]^{1 - \frac{1}{q}} \\ & \times \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \right. \\ & + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\ & + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \\ & + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \\ & \times \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \right. \\ & + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \\ & + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\ & \times \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \\ & + \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \right. \\
& + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \\
& \times \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \\
& + \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \Big]^{\frac{1}{q}} \\
& + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \right. \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\
& + \Psi(\gamma_1, \beta, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \\
& + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \\
& \times \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \Big]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma (3.1)' in modülü alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{2\gamma_1^{\alpha-1} 2\gamma_2^{\beta-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
& \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right. \\
& + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \Big| \\
& \leq \frac{\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta (b-a)(d-c)}{16} \\
& \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big] \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big] \quad (4.20)$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big] \quad (4.21)$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \Big\}. \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.19) integraline Power-Mean eşitsizliği uygulanırsa;

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\ \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\ \leq \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] d\lambda dt \Big]^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right. \\ \left. \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right|^q d\lambda dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Burada;

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] d\lambda dt \Big]^{1-\frac{1}{q}}$$

integraline değişken değiştirme uygulanırsa;

$$\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] d\lambda dt \Big]^{1-\frac{1}{q}}$$

sonucu elde edilir.

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \right.$$

integralinde $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|$ 'nin koordinatlarda s -konvekslik özelliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right|^q d\lambda dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times t \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right] \left[\frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right] \\
& \times \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left(\frac{1-\lambda}{2} \right)^s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q d\lambda dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Değişken değiştirme uygulanıp yerine yazılırsa (4.19);

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
& \times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right|^q d\lambda dt \\
& \leq \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right] \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \frac{1}{4^s} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, c) \right|^q \right. \\
& + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a, d) \right|^q \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, c) \right|^q \\
& \left. + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b, d) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.20);

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right] \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \frac{1}{4^s} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \right. \\
&+ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\
&+ \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\
&\left. \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \\
(4.21);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+\lambda}{2}c + \frac{1-\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right] \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \frac{1}{4^s} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \right. \\
&+ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\
&+ \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \\
&\left. \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ve son olarak (4.22);

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\gamma_1^\alpha} - \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\alpha \right| \left| \frac{1}{\gamma_2^\beta} - \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\beta \right| \\
&\times \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-\lambda}{2}c + \frac{1+\lambda}{2}d \right) \right| d\lambda dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^\alpha} \frac{1}{\gamma_2^\beta} \left[1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right] \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \frac{1}{4^s} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}} \left\{ \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \right. \\
&\quad + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\
&\quad \left. \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. Lemma (3.1)'in modülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\left| f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \frac{2^{\gamma_1 \alpha - 1} 2^{\gamma_2 \beta - 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta}{(b-a)^{\gamma_1 \alpha} (d-c)^{\gamma_2 \beta}} \right. \\
&\quad \times \left[\gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{a^+, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right. \\
&\quad + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, c^+}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) + \gamma_1 \gamma_2 I_{b^-, d^-}^{\alpha, \beta} f \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) - A \left. \right| \\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{\gamma_1^{\frac{1}{q}} \gamma_2^{\frac{1}{q}}} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2+\frac{s}{q}} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1} B \left(\frac{1}{\gamma_1}, \alpha + 1 \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} B \left(\frac{1}{\gamma_2}, \beta + 1 \right) \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \right. \\
&\quad + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \\
&\quad + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \right. \\
&\quad + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\
&\quad + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B \left(\alpha + 1, \frac{s+1}{\gamma_1} \right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B \left(\beta + 1, \frac{s+1}{\gamma_2} \right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi(\gamma_1, \alpha, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \\
& + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
& + \left[\Psi(\gamma_1, \alpha, s) \cdot \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, d) \right|^q + \right. \\
& + \Psi(\gamma_2, \beta, s) \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, d) \right|^q \\
& + \Psi(\gamma_1, \beta, s) \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b, c) \right|^q \\
& \left. + \left(\frac{\gamma_1}{s+1} - B\left(\alpha+1, \frac{s+1}{\gamma_1}\right) \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2}{s+1} - B\left(\beta+1, \frac{s+1}{\gamma_2}\right) \right) \cdot \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a, c) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur. $\square$

5. SONUÇ

Sonuç olarak bu tez çalışması, koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar için midpoint tipli integral eşitsizliklerinin derinlemesine incelenmesine önemli bir katkı sağlamaktadır. Çalışmanın bu konuya yoğunlaşması, matematiksel analizdeki geleneksel yaklaşımları genişletmekte ve kesirli türev ve integral hesabının bu alandaki uygulamalarını ortaya koymaktadır. Bu çalışma, s-konveks fonksiyonların temel özelliklerini ve bu fonksiyonlar için geçerli olan midpoint tipi integral eşitsizliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Bu inceleme, bu fonksiyonların matematiksel yapısını ve uygulama potansiyelini daha iyi anlamamıza olanak tanımıştır. s-Konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için geliştirilen yeni integral eşitsizlikler, konveks analiz teorisinin daha da genişletilmesine olanak sağlamıştır. Genel olarak bu tez çalışması, s-konveks fonksiyonlar ve onlar için geliştirilen midpoint tipli integral eşitsizliklerinin anlaşılmasına ve bu alandaki bilgi birikimine önemli bir katkı sağlamıştır. Bu çalışma, hem matematiksel analizin temel alanlarında hem de çeşitli uygulamalı disiplinlerde kullanılabilecek teorik ve pratik bilgiler sunmaktadır. Bu, öğrencilere ve araştırmacılara, matematiksel kavramları daha etkin bir şekilde öğrenme ve uygulama fırsatları sağlamaktadır. Bu tez, s-konveks fonksiyonlar ve integral eşitsizlikleri üzerine yapılacak gelecek çalışmalar için güçlü bir temel oluşturmuştur. Bu alanlarda ileride yapılacak araştırmalar için yol gösterici olabilir ve yeni araştırma konularının keşfedilmesine öncülük edebilir. Bu tez, s-konveks fonksiyonlar ve integral eşitsizlikleri hakkındaki mevcut bilgiyi genişletmekte ve bu konularda gelecekteki araştırma ve uygulamalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Alomari M, Darus M, 2008, Co-ordinated Convex Function In The First Sense With Some Hadamard-type Inequalities, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 32, 1557-1567.

Abdeljawad T, 2015, On Conformable Fractional Calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.

Agrawal O P, 2002, Formulation of Euler Lagrange equations for fractional variational problems, J. math. anal. appl., 272 (1), 368-379.

Bayrak G, 2022, Koordinatlarda s-Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 52-55s, Afyonkarahisar.

Babakhani A, Daftardar-Gejji V, 2002, On calculus of local fractional derivatives, J. math. anal. appl., 270, 66-79.

Breckner W W, 1978, Stetigkeitsaussagen Fur Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen In Topologischen Linearen Raumen, Publications De L'institut Mathematique, 23, 13-20.

Dragomir S S, Fitzpatrick S, 1999, The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Math, 32(4), 687-696.

Dragomir S S, Pearce C E M, 2000, Selected Topics On Hermite-Hadamard Inequalities And Applications, Victoria University, Melbourne and Adelaide, 357s, Australia.

Dragomir S S, 2001, On The Hadamard's Inequality For Convex Functions On The Co-ordinates in a Rectangle From the Plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 5, 775-788.

Engheta N, 1998, Fractional duality in electromagnetic theory. In: Proceeding of the Proceedings of the 1992 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory: Sydney Convention and Exhibition Centre, Darling Harbour, Sydney, Aus-

tralia, August 17-20, 1992.

Engheta N, 1997, On the role of fractional calculus in electromagnetic theory, IEEE antennas and propagation, 39 (4).

Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M, 2014, A new definition of fractional derivative, Journal of computational and applied mathematics, 264, 65-70.

Kiriş M E, Uzun Y T, Bayrak G, 202x, New version of Midpoint-Type inequalities for the convex functions of two variables via generalized conformable integrals, 5-11.

Kirmaci U S, 2004, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers to midpoint formula, Appl. Math. Comp. 147, 137-146.

Latif M A, Alomari M, 2009, On Hadamard-Type Inequalities For Convex Functions On The Co-ordinates, International Journal of Mathematical Analysis, 3, 1645-1656.

Maden S, Tomar M, Set E, 2014, Hermite-Hadamard Type Inequalities For s -Convex Stochastic Processes in The First Sense, Pure and Applied Mathematics Letters, 2349, 1-7.

Matuszewska W, Orlicz W, 1961, A Note Of The Theory of S-Normed Spaces of Fiintegrable Functions, Studia Mathematica, 21, 107-115.

Mitrinovic D S, 1970, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, 404p, Berlin.

Mitrinovic D S, Pecaric J E, Fink A M, 1991, Inequalities Involving Function and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 587p, Dordrecht, Boston, London.

Mitrinovic D S, Pecaric J E, Fink A M, 1993, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Philip P C, 1986, The exact distribution of the wald statistic, Econometrica, 54 (4).

Philips P C, 1989, Fractional matrix calculus and the distribution of multivariate test, Cowles foundation paper, 664.

Riewe F, 1996, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics, *Physical Review E*, 53, 1890-1899

Riewe F, 1997, Mechanics with fractional derivatives, *Physical Review E*, 3, 3581-3592.

Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I, 1993, *Fractional Integral and Derivatives Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon.

