

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOPULALAR VE BAĞIMLILIK YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe METİN

Anabilim Dalı: İstatistik

Program: İstatistiksel Bilgi Sistemleri

Ocak-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOPULALAR VE BAĞIMLILIK YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe METİN

(07233101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29 Aralık 2009

Tezin Savunulduğu Tarih: 13 Ocak 2010

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Ocak- 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışma da kopulalar teorisi ve bağımlılık yapısı hakkında genel bilgi verilip daha sonra kopula tahmin yöntemlerin yönelik meteorolojik verilerden yararlanılarak bir uygulama verilmiştir.

Öncelikle çalışmamın oluşumunda ve şekillenmesinde desteğini ve bilgisini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK' a, bilgisinden ve fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN' a, daima yanımda olan araştırma görevlisi Sayın Ayşe TURAN'a, desteğini esirgemeyen araştırma görevlisi Sayın Adem DOĞANER'e, istatistik bölüm hocalarına ve daima yanımda olan aileme saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayşe METİN

ELAZIĞ - 2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
TABLOLAR.....	VI
ŞEKİLLER.....	VII
KISALTMALAR.....	VIII
1.GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL ve METOT.....	2
2.1 İki Boyutlu Dağılımlar	2
2.2 Kopula Teorisine Giriş.....	3
2.3 Arşimedyen Kopula Tanımı ve Özellikleri.....	10
2.4 Çok değişkenli Kopula Tanımı ve Özellikleri.....	14
2.5 Uç Değerli Kopula.....	17
2.6 Bağımlılık Sıralaması.....	19
2.7 Bağımlılık Yapıları.....	29
2.8 Kopula Tahmin Yöntemleri	35
2.9 Kopula Oluşturma Metotları.....	38
3.UYGULAMA	42
4.BULGULAR.....	43
4.1 En Düşük Sıcaklık Ölçümleri için Yapılan Analiz Sonuçları.....	43
4.2 En Yüksek Sıcaklık Ölçümleri için Yapılan Analiz Sonuçları.....	50
5.TARTIŞMA VE SONUÇ.....	58
KAYNAKLAR.....	59
EKLER.....	60
EK-1 Önemli kopula aileleri, üreticileri, Kendal Tau ve Spearman Rho.....	61
EK-2 2008–2009 En Düşük ve En Yüksek Sıcaklık Ölçümleri.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	75

ÖZET

Kopulalar tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemek amacıyla kullanılır. Kopula fonksiyonları 1959 yılında ilk Sklar tarafından kullanılmıştır. Kopulalar ile bağımlılık yapısı modelleme, özellikle finansal risk değerlendirmesinde ve aktüerya analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı kopula tahmin yöntemleri hakkında bilgi vermek ve bir uygulama ile örneklendirmektir. Genellikle finasta uygulamalarına rastlanan kopulalar için bu çalışmada dört bölgenin günlük en yüksek ve en düşük sıcaklık ölçümleri arasındaki bağımlılık yapısı kopula tahmin yöntemiyle modellenmeye çalışılmıştır. Bölgeler arasındaki sıcaklık ölçümlerini modellemede en uygun kopula ailelerinin Gumbel Hougaard, Clayton ve Gaussian (Normal) kopula aileleri olduğu görülmüştür. Çalışmada üç aile için gerekli parametre değerleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İki Boyutlu Dağılım Fonksiyonları, Kopula Fonksiyonu, Bağımlılık yapısı, Kendal Tau, Spearman Rho, Sıcaklık Ölçümleri.

SUMMARY

COPULAS AND DEPENDENCE STRUCTURES

Copulas are used modelling dependencies between random variables. Copulas are first used by Sklar in 1959. Modelling the dependence structure with copulas is widely used the financial risk assessment and in the actuary analysis. The purpose of this study is to provide information about copula estimation methods and example with an application. In this study, the aim is modelling with copula estimation method between the highest and the lowest temperature measurement in four region copulas which is encountered in finance. It seen that the most optimal model for temperature measure of between regions is Gumbel Hougaard, Clayton and Gaussian copula families. Parameter values are calculated for these three families in study.

Key Words: Two-Dimensional Distribution Functions, Copula Function, Dependence Structure, Kendall Tau, Spearman Rho, Temperature Measurements

TABLÖLAR

Sayfa No

Tablo 2.1. Bağımlılık yapıları arasındaki ilişki	35
Tablo 4.1. İstanbul-Roma arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	43
Tablo 4.2. İstanbul- Bakü arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	43
Tablo 4.3. İstanbul-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	44
Tablo 4.4. Roma-Bakü arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	44
Tablo 4.5. Roma-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	44
Tablo 4.6. Bakü-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi	45
Tablo 4.7 Gumbel Hougaard Ailesi için endüşük sıcaklıklarda parametre tahmini	45
Tablo 4.8. Clayton Ailesi için endüşük sıcaklıklarda parametre tahmini	46
Tablo 4.9. Gaussian Ailesi için endüşük sıcaklıklarda parametre tahmini	46
Tablo 4.10. İstanbul-Roma arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	51
Tablo 4.11. İstanbul-Bakü arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	51
Tablo 4.12. İstanbul-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	51
Tablo 4.13. Roma-Bakü arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	52
Tablo 4.14. Roma-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	52
Tablo 4.15. Bakü-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi	52
Tablo4.16. Gumbel Hougaard Ailesi için enyüksek sıcaklıklarda parametre tahmini ..	53
Tablo 4.17. Clayton Ailesi için en yükdek sıcaklıklarda parametre tahmini	53
Tablo 4.18. Gaussian Ailesi için enyüksek sıcaklıklarda parametre tahmini	54

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 4.1.a İstanbul-Roma $\theta = 3,076$ parametreli Gumbel Hougaard Ailesi	47
Şekil 4.1.b İstanbul-Roma $\theta = 3,076$ parametreli Gumbel Hougaard Ailesi	48
Şekil 4.2.a İstanbul-Roma Clayton $\theta = 4,153$ parametreli Clayton Ailesi	48
Şekil 4.2.b İstanbul-Roma Clayton $\theta = 4,153$ parametreli Clayton Ailesi	49
Şekil 4.3.a İstanbul-Roma $\theta = 0.0185$ parametreli Gaussian Ailesi	49
Şekil 4.3.b İstanbul-Roma $\theta = 0.0185$ parametreli Gaussian Ailesi	50
Şekil 4.4.a İstanbul-Roma $\theta = 3,745$ parametreli Gumbel Hougaard Ailesi	55
Şekil 4.4.b İstanbul-Roma $\theta = 3,745$ parametreli Gumbel Hougaard Ailesi	55
Şekil 4.5.a İstanbul-Roma Clayton $\theta = 4,153$ parametreli Clayton Ailesi	56
Şekil 4.5.b İstanbul-Roma Clayton $\theta = 4,153$ parametreli Clayton Ailesi	56
Şekil 4.6.a İstanbul-Roma $\theta = 0.0201$ parametreli Gaussian Ailesi.....	57
Şekil 4.6.b İstanbul-Roma $\theta = 0.0201$ parametreli Gaussian Ailesi.....	57

KISALTMALAR

CDA	: Kopula Çekim Alanı (Domain of attraction)
MDA	: Maksimum Çekim Alanı (Maximum domain attraction)
PQD	: Pozitif Kadran Bağımlılık (Positive quadrant dependence)
NQD	: Negatif Kadran Bağımlılık (Negative quadrant dependence)
LTD	: Sol Kuyruk Azalan(Left tail decreasing)
RTI	: Sağ Kuyruk Artan (Right tail decreasing)
SI	: Stokastik Artan (Stochastic increasing)
SD	: Stokastik Azalan (Stochastic decreasing)
LCSD	: Sol Korner (Köşe) Azalan (Left corner decreasing)
LCSI	: Sol Korner (Köşe) Artan (Left corner increasing)
RCSI	: Sağ Korner (Köşe) Artan (Right corner increasing)
RCSD	: Sağ Korner (Köşe) Azalan (Right corner decreasing)
TP₂	: Toplam Pozitif (Total Positivity)
MLE	: Tam En Çok Olabilirlik Tahmini (Maximum likelihood estimation)
IFM	: Marjinallere Ait Tahmin Edici (Inference functions for margins)
SPSS	:Sosyal Bilimler için İstatistiksel paket programı (Statistical Package for the Social Sciences)

1. GİRİŞ

İstatistiğin önemli amaçlarından biri örnek verilerinden yararlanarak yığın parametreleri hakkında tahmin yapmaktır. Tahmin yapmada, araştırılan konuya göre ele alınan değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı öncelikli sorunlardan biri olarak karşımıza çıkar. Tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı hakkında bilgi veren bağımlılık ölçülerini belirlemenin çeşitli yöntemleri vardır.

Bu çalışmada değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını birçok cebirsel özellikleriyle belirleyen metotlardan biri olan kopulalar kullanılmıştır.

Kopulalar ilk kez 1959 da Sklar tarafından kullanılmıştır. Matematiksel olarak kopula fonksiyonları çok değişkenli dağılım fonksiyonlarının tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkisidir. İstatistiksel olarak hem parametrik hem de parametrik olmayan durumlarda bağımlılığın ölçülmesi ve parametrelerin tahminlenmesi için kopula fonksiyonları kullanılarak birçok metoda alternatif sunar. Ayrıca parametrik bir yöntem olan Pearson korelasyon katsayısının da dez avantajlarını ortadan kaldırır.

Bu çalışmada öncelikle kopula fonksiyonlarının teorisine daha sonrada iki uygulamaya yer verilmiştir. Uygulamada aynı konumda bulunan dört bölgenin günlük sıcaklık ölçümleri arasındaki bağımlılık yapısı uygun kopulalarla modellemeye ve uygun kopula tahmin yöntemlerini tanıtmaya çalışacağız. Bu çalışmada modelleme yönteminde parametrik olmayan bağımlılık katsayısı olan Kendal 'Tau' dan yararlanılmıştır.

2. MATERYAL ve METOT

2.1. İki Boyutlu Dağılımlar

Öncelikle bazı notasyonların tanıtılmasına ihtiyaç vardır. R ile $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki gerçel sayılar kümesi, $\bar{R}$ ile de $[-\infty, +\infty]$ aralığındaki genişletilmiş gerçel sayılar kümesi gösterilsin. Bu durumda $\bar{R}^2 = \bar{R} \times \bar{R}$ genişletilmiş gerçel düzlemdir. $\bar{R}^2$ deki bir dikdörtgen D ile gösterilirse, bu iki kapalı aralığın çarpımı $D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$ noktaları köşegen noktalarıdır. Birim kare I^2 ; $I = [0, 1]$ 'in kartezyen çarpımı olan $I \times I$ ' dır. Bir 2- boyutlu gerçel fonksiyon F , tanım kümesi $\bar{R}^2$ 'nin altkümesi olan $DomF$ ve değer kümesi R 'nin bir alt kümesi olan $RanF$ şeklindeki fonksiyondur.

Tanım 2.1.1.

S_1 ve S_2 $\bar{R}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri, (X, Y) S_1 ve S_2 'de tanımlı tesadüfi değişkenler, F 'de tanım kümesi $DomF = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y), \quad x, y \in R \quad (2.1)$$

fonksiyonuna (X, Y) 'nin iki boyutlu dağılım fonksiyonu denir [14].

Teorem 2.1.1.

Bir $F: R_2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun (X, Y) 'nin dağılım fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki dört özelliği sağlamasıdır.

1. F değişkenlerine göre monoton artandır.
2. F değişkenlerine göre soldan sürekli.
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$, $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.
4. $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$ [14].

Tanım 2.1.2.

S_1 ve S_2 $\bar{R}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri, (X, Y) S_1 ve S_2 'de tanımlı tesadüfi değişkenler, F 'de tanım kümesi $DomF = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon olsun. $D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ tüm köşeleri $DomF$ 'de olan bir dikdörtgen olmak üzere durumda F 'nin D - hacmi

$$V_F(D) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \quad (2.2)$$

dir. Aynı zamanda D - dikdörtgeni üzerindeki F 'nin birinci dereceden farkları aşağıdaki gibi verilirse $V_F(D)$ 'ye D - dikdörtgeninin F - hacmi denir ve

$$\Delta_{x_1}^{x_2} F(x, y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2} F(x, y) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$$

dir. O zaman D - dikdörtgeninin F - hacmi, F 'nin D üzerindeki ikinci dereceden farkları olacaktır yani,

$$V_F(D) = \Delta_{x_1}^{x_2} \Delta_{y_1}^{y_2} F(x, y). \quad (2.3)$$

olacaktır. F fonksiyonu için $\partial^2 F / \partial x \partial y$ türevi mevcut ise, o zaman $V_F(D) \geq 0$ olma koşulu $\partial^2 F / \partial x \partial y \geq 0$ koşuluna denktir [14].

Tanım 2.1.3.

Eğer köşegen noktaları $DomF$ 'de olan tüm D dikdörtgenleri için $V_F(D) \geq 0$ ise 2-boyutlu gerçel F fonksiyonuna iki artandır denir [12].

2.2. Kopulalar Teorisine Giriş

X ve Y dağılımları sırasıyla F ve G olan iki sürekli tesadüfi değişken ve H 'da marjinalleri F, G olan sürekli ortak dağılım fonksiyonu olsun. Bu ortak dağılım fonksiyonu ile marjinalleri arasındaki ilişki, $C : I \times I \rightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona kopula denir. Başka bir deyişle F ve G fonksiyonları için f, F' in yoğunluğu olmak üzere $F^{-1}(t) = \inf \{x : F(x) \geq t\}$ ' dir. Sürekli $C(u, v)$ kopulası F ve G fonksiyonları yardımıyla

$$H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = C(u, v) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada (2.4) ifadesinin birinci türevinden h yoğunluğu da f ve g H' in marjinal yoğunlukları olmak üzere

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y) \quad (2.6)$$

şeklindedir [12].

Tanım 2.2.1.

$I = [0,1]$ olmak üzere $C : I \times I \rightarrow I$ iki değişkenli fonksiyonun kopula olması için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir

1. $\forall u, v \in I$ için

$$C(u, 0) = 0, C(0, v) = 0, C(u, 1) = u, C(1, v) = v \quad (2.7)$$

2. $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ olmak üzere $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ için,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (2.8)$$

[7,12].

Tanım 2.2.2.

C , bir kopula olsun. C' nin u ve v 'de sürekli olması için aşağıdaki Lipschitz koşulunu sağlaması gereklidir.

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (2.9)$$

[1,7,12].

Tanım 2.2.3.

C kopulası u ve v değişkenlerine göre sürekli ve artan olsun. Buna göre C kopulası için

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1 \text{ ve } 0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1 \quad (2.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler C kopulasının differansiyellenebilir olduğunu gösterir [13].

Tanım 2.2.4.

C bir kopula olmak üzere $\delta_C : I^2 \rightarrow I$, $\delta_C(t) = C(t, t)$ şeklinde tanımlanan kopulaya köşegen kopula denir [13].

Teorem 2.2.1.

C bir kopula olsun. C kopulası için $\forall (u, v) \in I$ olmak üzere

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $M(u, v) = \min\{u, v\}$ ve $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ fonksiyonları birer kopuladır. Bu kopulalara sırasıyla Frechet-Hoeffding üst sınırı, Frechet-Hoeffding alt sınırı denir ve

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (2.12)$$

eşitsizliğine ise Frechet-Hoeffding eşitsizliği denir. W ve M kopulalar için genel sınırları oluşturur. Diğer önemli kopula da $\Pi(u, v) = uv$ olarak ifade edilen bağımsızlık ya da çarpım kopulasıdır [7].

Aşağıda ifade edilecek teorem kopulalar teorisinin merkezidir. Sklar teoremi çok değişkenli dağılım fonksiyonları ile onların tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkide kopulaların oynadığı rolü izah eder.

Teorem 2.2.2. (Sklar Teoremi)

H , marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. Öyle bir C kopulası vardır ki, $\bar{R}$ ' deki tüm x ve y ' ler için,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.13)$$

dir. F ve G sürekli ise C tektir; diğer durumda C , $Ran(F) \times Ran(G)$ üzerinde tek olarak belirlenir. Diğer taraftan eğer C bir kopula ve F , G marjinal dağılım fonksiyonları ise (2.13) ile verilen H , marjinal dağılımları F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonudur [1,3,12].

Tanım 2.2.5.

F dağılım fonksiyonu olsun. F ' in yarı-tersi $F^{(-1)}$ olmak üzere

1. $t \in \text{Ran}F$ ise $F^{(-1)}$ için $\bar{R}$ ' de öyle bir x vardır ki $F(x)=t$, $\forall t \in \text{Ran}F$ için, $F(F^{(-1)}(t))=t$ ' dir.

2. $t \notin \text{Ran}F$ ise

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\} \quad (2.14)$$

dir [7,12].

Sonuç 2.2.1.

H , marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. $F^{(-1)}$, $G^{(-1)}$ sırasıyla bu marjinal fonksiyonların yarı terslerini gösterebilirsin. Buna göre herhangi bir $(u,v) \in I^2$ için

$$C(u,v) = H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y)) \quad (2.15)$$

dir [2,7].

Örnek 2.2.1.

Gumbel' in R^2 deki iki değişkenli ortak lojistik dağılımı, $H(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$ ve marjinalleri sırasıyla $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, $G(x) = (1 + e^{-y})^{-1}$ olsun. Buna göre kopulası Sonuç (2.2.1) yardımıyla,

$$\begin{aligned} C(u,v) &= H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y)) \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned}$$

olur [12].

Tanım 2.2.6. (Yaşam Kopulası)

X bir bireyin yaşam süresi, F ' de X tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. X ' in x zamanından daha uzun yaşama olasılığı

$$\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x) \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyona X ' in yaşam fonksiyonu denir. (X,Y) tesadüfi değişkeninin ortak dağılım fonksiyonu H , kopulası C marjinalleri $\bar{F}$ ve $\bar{G}$, ortak yaşam fonksiyonu da $\bar{H}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= P[X > x, Y > y] \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))\end{aligned}\tag{2.17}$$

olur. $I^2 \rightarrow I$ bir $\bar{C}$ fonksiyonu tanımlanıp $F(x)=u$ ve $G(y)=v$ olduğu göz önüne alınarak (2.17)' den

$$\bar{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)\tag{2.18}$$

ve

$$\bar{H}(x, y) = \bar{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))\tag{2.19}$$

sonucu elde edilir. (2.18)' deki $\bar{C}$ bir kopuladır ve yaşam kopulası olarak tanımlanır. Yaşam kopulası $\bar{C}$ ile ortak yaşam fonksiyonu karıştırılmamalıdır. $\bar{C}$, C kopulası yardımıyla, $(0,1)$ düzgün dağılımlı rastgele iki tesadüfi değişkenler için aşağıdaki gibi verilir

$$\bar{C}(u, v) = P[U > u, V > v] = 1 - u + v + C(u, v) = \bar{C}(1 - u, 1 - v)\tag{2.20}$$

[7, 12].

Örnek 2.2.2.

X ve Y sürekli tesadüfi değişkenlerinin ortak yaşam fonksiyonları iki değişkenli Pareto dağılımı olsun. Buna göre $\theta > 0$ olmak üzere

$$\bar{H}(x, y) = \begin{cases} (1 + x + y)^{-\theta} & x \geq 0, y \geq 0 \\ (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0, y < 0 \\ (1 + y)^{-\theta} & x < 0, y \geq 0 \\ 1 & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

ve marjinal fonksiyonları da sırasıyla

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \bar{G}(y) = \begin{cases} (1 + y)^{-\theta} & y \geq 0 \\ 1 & y < 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre buradan elde edilen yaşam kopulası

$$\hat{C}_\theta(u, v) = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}$$

dir [12].

Tanım 2.2.7.

$\{(X_k, Y_k)\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ örneği ile ilgili olan ranklar $\{(R_i, S_i)\}$ olsun. I indikatör fonksiyon ve $u, v \in I$ olmak üzere uygun deneysel kopula C_n ,

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1\left(\frac{R_k}{n+1} \leq u, \frac{S_k}{n+1} \leq v\right) \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır.

N_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ (x, y) için $x \leq x_i$, $y \leq y_i$ şeklindeki sıralı nokta çiftinin sayısı olmak üzere deneysel kopulanın alternatif tanımı,

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{N_{ij}}{n} \quad (2.22)$$

şeklindedir [7,12].

Örnek 2.2.3. (Frechet-Mardia Ailesi)

$u, v \in I$, α, β bağımsız parametreler ve $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere standart denklem,

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta) \Pi(u, v) + \beta W(u, v)$$

şeklinde olup bu kopula ailesi Π, M, W kopulalarının konveks birleşimi olarak tanımlanır. Gerçekten fonksiyonda $C_{1,0} = M$, $C_{0,0} = \Pi$ ve $C_{0,1} = W$ dir [7,12].

Örnek 2.2.4.

Kopulaların bir uygulaması da sıra istatistikleri üzerinedir. X ve Y sürekli tesadüfi değişkenler, bu değişkenlerin dağılım fonksiyonları sırasıyla F ve G , kopulası da C olsun. $K = \min(X, Y)$ ve $L = \max(X, Y)$ de (X, Y) nokta çiftinin ekstremal istatistiklerini gösterebilir. K ve L değişkenlerinin dağılım fonksiyonları, kopulalar kullanılarak şu şekilde ifade edilir,

$$P\{K \leq t\} = F(t) + G(t) - C(F(t), G(t))$$

$$P\{L \leq t\} = C(F(t), G(t)).$$

Bu eşitlikte $F = G = H$ alınır, δ_c , C kopulasının köşegen kopulası olmak üzere

$$P\{K \leq t\} = 2H(t) - \delta_c(H(t))$$

$$P\{L \leq t\} = \delta_c(L(t))$$

yazılır. $U, V \in I$ olmak üzere $X = U$, $Y = V$ ve I da $H(t) = t$ eşitliğinden

$$P\{K \leq t\} = 2t - \delta_c(H(t))$$

$$P\{L \leq t\} = \delta_c(t)$$

elde edilir [7].

Örnek 2.2.5. (Farlie-Gumbel-Morgenstern Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \in [-1, 1]$ olmak üzere C_θ , $[0, 1]^2$ üzerinde

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$$

şeklinde tanımlanır. $\theta = 0$ ise, $C_0 = \Pi$ [7].

Örnek 2.2.6. (Cuadras-Auge Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \in [0, 1]$ için C_θ , $[0, 1]^2$ üzerinde

$$C_\theta(u, v) = [\min(u, v)]^\theta [uv]^{1-\theta} = \begin{cases} uv^{1-\theta} & u \leq v \\ u^{1-\theta}v & u \geq v \end{cases}$$

şeklindedir. $\theta = 0$ ise, $C_0 = \Pi$ ve $\theta = 1$ ise, $C_1 = M$ ve $\Pi(u, v) = uv$ olduğundan bu aile M ve Π ' nin ağırlıklandırılmış geometrik ortalaması diye adlandırılır [7].

Örnek 2.2.7. (Marshall- Olkin Ailesi)

$u, v \in I$ ve $\alpha, \beta \in [0, 1]$ olmak üzere $C_{\alpha\beta}$, $[0, 1]^2$ üzerinde

$$C_{\alpha\beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta})$$

şeklindedir [7, 12].

Örnek 2.2.8. (Galambos Ailesi)

$u, v \in I$ ve $\theta > 0$ olmak üzere $C_\theta, [0,1]^2$ üzerinde

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\left(\left[(-Inu)^{-\theta} + (-Inv)^{-\theta}\right]^{-1/\theta}\right)$$

şeklindedir [7].

2.3. Arşimedyen Kopula Tanımı ve Özellikleri

Çalışmalarda önemli rol oynayacak ve çok faydalı özelliklere sahip olan arşimedyen kopula, kopulaların bir alt sınıfıdır. Sürekli kesin azalan tek değişkenli bir fonksiyon yardımıyla elde edilir. Arşimedyen kopulalar değişkenler arasındaki ilişkinin doğası ve gücü bakımından çeşitliliği olan modellerin temellerini oluşturur. Bu özelliği sayesinde uygulamada çok fazla tercih edilir.

Tanım 2.3.1.

γ sürekli, $\gamma: I \rightarrow [0, \infty]$ ’ a kesin azalan $\gamma(1) = 0$ olan bir fonksiyon olsun. γ nin genelleştirilmiş-tersi $\gamma^{[-1]}$, $Dom \gamma^{[-1]} = [0, \infty]$ ve $Ran \gamma^{[-1]} = I$ olan aşağıdaki gibi bir fonksiyondur

$$\gamma^{[-1]}(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \gamma(0) \\ 0 & \gamma(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklinde bir fonksiyondur. $\gamma^{[-1]}$ fonksiyonu $[0, \infty]$ ’ da sürekli, artmayan ve $[0, \gamma(0)]$ ’ da kesin azalandır. Üstelik I da $\gamma^{[-1]}(\gamma(t)) = t$ ve

$$\gamma(\gamma^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \gamma(0) \\ \gamma(0) & \gamma(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\gamma^{[-1]}(\gamma(t)) = \min\{t, \gamma(0)\} \quad (2.25)$$

dır. Ayrıca $\gamma(0) = \infty$ ise $\gamma^{[-1]} = \gamma^{-1}$ [4,12].

Teorem 2.3.1.

$C:I \times I \rightarrow I$ bir kopula ve γ^{-1} de (2.24)' de tanımlanan γ ' nin genelleştirilmiş tersi olmak üzere

$$C(u, v) = \gamma^{-1}(\gamma(u) + \gamma(v)) \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanan C , Tanım (2.2.2)' deki özellikleri sağlar [3,12].

Tanım 2.3.2. (Arşimedyen Kopula)

Teorem (2.3.1)' de verilen kopulalar γ üreteçli arşimedyen kopula olarak tanımlanır. $\gamma(0) = \infty$ ise C kopulası kesindir denir ve bu kopulalar aşağıdaki özellikleri sağlar,

1. $\forall u, v \in I$ için C simetriktir,

$$C(u, v) = C(v, u). \quad (2.27)$$

2. $\forall u, v, w \in I$ için C birleşimlidir,

$$(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)). \quad (2.28)$$

3. C kopulasının üreticisi γ ve c pozitif bir sayı olmak üzere $c\gamma$ ' de C kopulası için bir üreticidir.

4. C kopulasının köşegen kopulası δ_C olmak üzere, $\forall t \in (0,1)$ için $\delta_C < t$ dir [4].

Örnek 2.3.1.

Π, M, W kopulalarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

1. $\gamma(t) = -\ln(t), t \in I$ olsun. γ tam üreticidir ve $\gamma^{-1}(t) = e^{-t}$ dir. Buna göre Teorem (2.3.1)' deki eşitlik yardımıyla

$$C(u, v) = e^{-[\ln(u) + \ln(v)]} = uv = \Pi(u, v)$$

elde edilir. O halde Π arşimedyen bir kopuladır.

2. $\gamma(t) = 1 - t, t \in I$ olsun. γ tam olmayan üretici ve $\gamma^{-1}(t) = \max\{1 - t, 0\}$ dir. Buna göre

$$C(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$$

dir. W tam olmayan arşimedyen kopuladır

3. M kopulası arşimedyan değildir. Gerçekten $t \in (0,1)$ için

$$\delta_{M_2}(t) = \min\{t, t\} = t \not\leq t$$

dir [7].

Sonuç 2.3.1.

Kesin üreteç fonksiyonu γ ve γ^{-1} nin tersi γ^{-1} olan C arşimedyan kopulası kesin monoton ise $C \succ \Pi$ dir [7].

Tanım 2.3.3. (Seviye Eğrileri)

C bir kopula ve $0 < t \leq 1$ olmak üzere

$$L_t = \{(u, v) \in I^2 : C(u, v) = t\} \quad (2.29)$$

ifadesi C ' nin seviye eğrileri olarak tanımlanır. Tanım (2.2.1)' den $C(t, 1) = C(1, t) = t$ olduğundan L_t ' nin uzunluğu sınır noktaları olan $(1, t)$ ve $(t, 1)$ ile ilgilidir. $t=0$ ise $Z(C) = L_0$ yani $C(u, v) = 0$ olduğu bölgedir. C , γ üreteçli arşimedyan kopula olsun. t ve L_t ' de yukarıdaki gibi tanımlanırsa (2.29) denklemi C ' nin arşimedyan olması durumunda konvektir. Buna göre (2.26) ve (2.29) ifadeleri yardımıyla

$$(u, v) \in L_t \Leftrightarrow \gamma(u) + \gamma(v) = \gamma(t) \quad (2.30)$$

yazılır. Burada $t \leq u \leq 1$ için v, u ' nun fonksiyonu olmak üzere $L_t(u) = v$ alınır

$$L_t(u) = \gamma^{[-1]}(\gamma(t) - \gamma(u)) = \gamma^{-1}(\gamma(t) - \gamma(u)) \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $\gamma(t) - \gamma(u)$ ifadesi $(0, \gamma(0))$ aralığında yer aldığından $\gamma^{[-1]}$ yerine γ^{-1} kullanılabilir. C kopulasının C - ölçüsü,

$$B_C(t) = \{(u, v) \in I^2 : C(u, v) \leq t\}, \quad 0 < t \leq 1 \quad (2.32)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade γ üreteçli C arşimedyan kopula için aşağıdaki gibidir

$$B_C(t) = \{(u, v) \in I^2 : \gamma(u) + \gamma(v) \geq \gamma(t)\}, \quad 0 < t \leq 1 \quad [7]. \quad (2.33)$$

Teorem 2.3.2.

C , γ üreteçli arşimedyan kopula ve $0 < t \leq 1$ olsun. (2.33) eşitliği ile verilen $B_C(t)$ fonksiyonunun C - ölçüsü $K_C(t)$ olmak üzere,

$$K_c(t) = t - \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t^+)} \quad (2.34)$$

dir [5].

Örnek 2.3.2. (Frank Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq 0$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = -\ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right)$, $t \in I$ olan kopula ailesi

$$C_\theta(u, v) = \frac{1}{\ln \theta} \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]$$

dır. $\theta = 1$ için U ve V tesadüfi değişkenleri bağımsız yani $C_1 = \Pi$, $\theta = 0$ ise $C_0 = M$, $\theta = \infty$ ise $C_\infty = W$ ' dir. Frank ailesinin yoğunluğu ise

$$c_\theta(u, v) = -\frac{(\theta - 1)\theta^{u+v} \ln \theta}{\theta^{u+v} - \theta^u - \theta^v - \theta}$$

şeklindedir [7,12].

Örnek 2.3.3. (Gumbel-Hougaard Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq 1$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = (-\ln t)^\theta$, $t \in I$ olan kopula ailesi

$$C_\theta(u, v) = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}}$$

dir. $\theta = 1$ için U ve V tesadüfi değişkenleri bağımsız yani $C_1 = \Pi$, bu aile pozitif sıralı ve $\theta = \infty$ için M dir [7].

Örnek 2.3.4. (Clayton Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq -1$ üretici fonksiyonu $\gamma(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, $t \in I$ olan kopula ailesi

$$C_\theta(u, v) = (\max\{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1), 0\})^{-1/\theta}$$

$\theta = 0$ için U ve V tesadüfi değişkenleri bağımsız yani $C_0 = \Pi$, bu aile pozitif sıralı ve $\theta > 0$ için tüm üyeleri kesin süreklidir [7].

Örnek 2.3.5. (Ali-Mikhail-Haq Ailesi)

$u, v \in I$, $-1 \leq \theta \leq 1$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = \ln\left(\frac{1-\theta(t-1)}{t}\right)$, $t \in I$ olan kopula ailesi

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

dir. $\theta = 0$ için U ve V tesadüfî değişkenleri bağımsız yani $C_0 = \Pi$ dir. Bu aile pozitif

sıralı, $\theta = 1$ için $C_1(u, v) = \frac{uv}{1 - (1-u)(1-v)}$ ve bu kopula Clayton ailesinde $\theta = 1$

durumuna denktir [12].

Örnek 2.3.6. (Joe Ailesi)

$u, v \in I$, $\theta \geq 1$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = \ln[1 - (1-t)^\theta]$, $t \in I$ olan kopula ailesi,

$$C_\theta(u, v) = 1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$$

$\theta = 1$ için U ve V tesadüfî değişkenleri bağımsız yani $C_0 = \Pi$, bu aile pozitif sıralı ve

$\theta = \infty$ için M olup ailenin tüm üyeleri kesin süreklidir [7].

Sonuç 2.3.1.

γ üretici olsun. O zaman

1. $\gamma_\alpha(t) = \gamma(t^\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1]$ için üreticidir.

2. $\gamma_\beta(t) = [\gamma(t)]^\beta$, $\forall \beta \geq 1$ [4].

2.4. Çok değişkenli Kopula Tanımı ve Özellikleri

Tanım 2.4.1. (F- Hacmi)

$D=[x,y]$ köşeleri $DomF$ de olan n - dörtgeni olmak üzere D ' nin F - hacmi, D ' nin 2^n - tane köşesinin toplamı olan

$$V_F(B) = \sum Sgn(c)F(c) \quad (2.35)$$

şeklindedir. Burada Sgn fonksiyonu

$$Sgn(c) = \begin{cases} +1 & , \quad c_i = x_i \quad \text{çift her } i \text{ için} \\ -1 & , \quad c_i = x_i \quad \text{tek her } i \text{ için} \end{cases} \quad (2.36)$$

dir. D dörtgeninin tüm köşeleri için $V_F(B) \geq 0$ ise F fonksiyonu n - artandır [7,12].

Tanım 2.4.2.

F reel değerli fonksiyon ve $DomF \subset R^n$ olmak üzere F ' in n -artan olması için $V_F(D) \geq 0$ olması gerek ve yeterdir [12].

Tanım 2.4.3. (Çok Değişkenli Kopula)

$C : I^n \rightarrow I$ fonksiyonu n -kopuladır öyle ki,

1. $\forall u \in I^n$ için en az bir u sıfır ise,

$$C(u) = 0 \quad (2.37)$$

ve herhangi bir u_i dışında tüm u lar 1 ise,

$$C(u) = u_i. \quad (2.38)$$

2. Her $x, y \in I^n$ öyle ki $x \leq y$ için

$$V_C([x, y]) \geq 0. \quad (2.39)$$

C , n -kopulası tanım kümesi üzerinde düzgün sürekli ve C n - kopulası $n > 2$ ise, C ' nin $2 \leq k < n$ olacak şekilde k - boyutlu marjinalleri I üzerinde düzgün sürekli ve azalmayandır [7].

Teorem 2.4.1. (Çok değişkenli Sklar Teoremi)

H marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan n - boyutlu ortak dağılım fonksiyonu için öyle bir C n -kopulası vardır ki, $\forall x \in R^n$ için

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.40)$$

olur. $F_1, F_2, \dots, F_n$ ' ler dağılım fonksiyonu ise C tektir yani C değer kümesi üzerinde tek olarak bellidir. Tersine C , n –kopula ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonları ise F fonksiyonu eşitlik (2.40)' da verilen marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan n - boyutlu ortak dağılım fonksiyonudur [7,12].

Sonuç 2.4.1.

H , sürekli marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ ve kopulası C olan ortak dağılım fonksiyonu olsun.

Bu marjinallerin yarı tersleri sırasıyla $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ olmak üzere

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}) \quad (2.41)$$

dir [3,7,12].

Örnek 2.4.1.

1. $W_n(u_1, \dots, u_n) = \max\{u_1 + \dots + u_n - (n-1), 0\}$ Frechet-Hoeffding alt sınırı $n \geq 2$ için kopula değildir.
2. $M_n(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\}$ Frechet-Hoeffding üst sınırı $n \geq 2$ için n - kopuladır.
3. $\pi_n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n$ çarpım kopulası $n \geq 2$ için n - kopuladır [7,12].

Tanım 2.4.4. (Çok Değişkenli Arşimedyen kopula)

γ sürekli, $\gamma: I \rightarrow [0, \infty]$ ' a kesin azalan ve $\gamma(1) = 0$ olan bir fonksiyon olsun. γ ' nin. genelleştirilmiş-tersi $\gamma^{[-1]}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ şeklindedir. γ^{-1} için $\gamma^{-1}(0) = 1$, $\gamma^{-1}(\infty) = 0$ 'dır. Bu fonksiyona üretici fonksiyonu adı verilir. Bu tanıma bağlı olarak, bir $C: I^n \rightarrow I$ kopulası

$$C(u) = \gamma^{-1}(\gamma(u_1) + \gamma(u_2) + \dots + \gamma(u_n)) \quad (2.42)$$

ise tüm $n \geq 2$ ler için C , n - kopula ve γ^{-1} , $[0, \infty)$ üzerinde tam monotondur. O halde

$$(-1)^n \frac{\partial^k}{\partial u^k} \gamma^{-1}(u) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

olup γ , C kopulasının üretici fonksiyonu olarak tanımlanır. γ üretici fonksiyonuna bağlı olarak C kopulasının yoğunluğu

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \gamma^{-1}(\gamma(u_1) + \gamma(u_2) + \dots + \gamma(u_n)) \prod_{i=1}^n \gamma'(u_i) \quad (2.44)$$

şeklindedir [7].

Örnek 2.4.2.

$\psi_\theta(t) = t^{-\theta} - 1, \theta > 0$ üreteçli Clayton ailesinin $n > 2$ durumuna genelleştirilmesi, üretici fonksiyon ve tersi olan $\psi_\theta^{-1}(t) = (1+t)^{-1/\theta}$ yardımıyla

$$C_\theta(u) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - (n-1))^{-1/\theta}, \theta > 0$$

olarak bulunur [7].

Örnek 2.4.3.

$\gamma(t) = \ln[1 - (1-t)^\theta], \theta \geq 1$ üreteçli Joe ailesinin n -boyuta genelleştirilmesi üretici fonksiyon ve tersi $\gamma^{-1}(t) = 1 - (1 - e^t)^{1/\theta}$ yardımıyla

$$C_\theta(u) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - u_i)^\theta) \right]^{1/\theta}$$

olarak bulunur [7].

2.5. Uç Değerli Kopula

Rassal değişkenlerin toplamının modellendiği zaman merkezi limit teoreminin oynadığı rolün aynısı, rassal değişkenlerin uç değerlerinin modellendiği zaman uç değer teorisinin oynadığı rolün aynısıdır. Her iki durumda da teori bize limit dağılımlarının ne olması gerektiğini söyler.

Teorem 2.5.1. (Fisher Tippet (1928))

$\{X_i\}_{i=1}^n, F$ dağılımı ile dağılmış tesadüfi değişkenler ve $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olsun.

Eğer

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad c_n > 0, d_n \in R \quad (2.45)$$

olacak şekilde H dağılım fonksiyonu varsa bu H dağılımı aşağıda verilen uç değerli dağılımlardan birine aittir.

$$\text{Frechet} \quad \phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Weibull} \quad \psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x^{-\alpha})}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha < 0 \quad (2.46)$$

$$\text{Gumbel} \quad \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R \quad [3,9].$$

Tanım 2.5.1.

a ve b sabitleri için

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) \quad (2.47)$$

eşitliği sağlanıyorsa F dağılımı G dağılımının maksimum çekim alanına aittir denir. Öte yandan $\forall n \in N$ ve a, b sabitleri için

$$G^n(a_n + b_n z) = G(z), \quad \forall z \in R \quad (2.48)$$

sağlanıyorsa $G(z)$ fonksiyonu maksimum dengeli olarak tanımlanır [7,9].

Tanım 2.5.2. (Uç Değerli Kopula)

Bir n - kopula C olsun. Buna göre

$$C(u_1^t, \dots, u_n^t) = C^t(u_1, \dots, u_n) \quad (2.49)$$

ifadesi uç değerli kopula olarak tanımlanır. F, H ' ın maksimum çekim alanına ait bir fonksiyon ise H ' ın C kopulası, F ' ın limiting uç değerli kopulası olarak tanımlanır [7,9].

Örnek 2.5.1.

Kopula ailelerinden bir kaçı, (2.49) yardımıyla, uç değerli kopula için aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. Bağımsızlık kopulası

$$\Pi_n(u^t) = \prod_{i=1}^n u_i^t = \Pi_n^t(u)$$

şeklindedir.

2. Gumbel Hougaard n - kopulası olan C_{θ} $\theta \geq 1$ için

$$C_{\theta}(u^t) = e^{-[(-\ln u_1)^{\theta} + \dots + (-\ln u_n)^{\theta}]^{1/\theta}} = C_{\theta}^t(u)$$

elde edilir. O halde Gumbel-Hougaard ailesi uç değerli tek arşimedyan kopuladır [7].

Tanım 2.5.3.

C , n - kopula olsun. C fonksiyonu $\forall t > 0$ ve $u \in I_n$ için,

$$C(u_1, \dots, u_n) = C^t(u_1^{1/t}, \dots, u_n^{1/t}) \quad (2.50)$$

ise maksimum güvenilirdir [7].

Tanım 2.5.4.

C n - kopula ve C' ' nin uç değerli n - kopulası C^* olsun. Buna göre $\forall u \in I^n$ için

$$C^*(u_1, \dots, u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u_1^{1/n}, \dots, u_n^{1/n}) \quad (2.51)$$

dir [7].

Tanım 2.5.5.

C bir n - kopula ve C' ' nin uç değerli kopulası C^* olsun. C kopulası C^* kopulasının çekim alanına sahip ise,

$$C(F_1, \dots, F_n) \in MDA(C^*(H_1, \dots, H_n)) \quad (2.52)$$

eşitliği sağlanır. Her bir F_i marjinali, sürekli ve genelleştirilmiş uç değerli dağılım olan H_i ' nin çekim alanına ait fonksiyonlardır. Buna göre C^* , C kopulasının limit kopulası olarak tanımlanır ve $C \in CDA(C^*)$ yazılabilir [7].

2.6. Bağımlılık Sıralaması

Tanım 2.6.1. (Uyum Sıralaması)

H ve H' sırasıyla C ve C' kopulalarına ve aynı F, G marjinallerine sahip sürekli iki değişkenli dağılım fonksiyonu olsun. H' , H ' dan daha uyumlu ise

$$\forall (x, y) \in R^2 \quad H(x, y) \leq H'(x, y) \quad (2.53)$$

ya da bu ifadeye denk olarak

$$\forall (u, v) \in I^2 \quad C(u, v) \leq C'(u, v) \quad (2.54)$$

dır. Eğer H' , H' dan daha uyumlu ise $H \prec_c H'$ yazılabilir.

İki tesadüfi değişken arasındaki bağımlılığı ölçmek için birkaç yol vardır. Bağımlılığın ölçüsü X ve Y tesadüfi değişkenlerinin monoton bağımlılığı ve karşılıklı uç değerlerin bağımsızlığı ile ilgilidir. Bu ölçülerin en önemli özelliği bazılarının kesin artan dönüşümler altında değişmez kalmasıdır [7].

Tanım 2.6.2. (Bağımlılığın Ölçüsü)

X ve Y sürekli tesadüfi değişkenlerinin kopulası C ve değişkenler arasındaki bağımlılığın nümerik ölçüsü de δ olsun. Buna göre

1. Her sürekli (X,Y) çifti için δ tanımlıdır.
2. $0 \leq \delta_{XY} \leq 1$.
3. $\delta_{XY} = \delta_{YX}$.
4. $\delta_{XY} = 0$ ise X ve Y değişkenleri bağımsızdır.
5. $\delta_{XY} = 1$ ise X ve Y tesadüfi değişkenleri birbirlerinin kesin monoton fonksiyonlarıdır.
6. α ve β sırasıyla $RanX$ ve $RanY$ de tanımlı kesin monoton fonksiyonlar ise $\delta_{\alpha(x)\beta(y)} = \delta_{XY}$ ' dir.
7. $\{(X_n, Y_n)\}$, $n \in N$ sırasının kopulası C_n olsun. C_n kopulası C kopulasına yakınsıyor ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{X_n Y_n} = \delta_{XY}$ [7,12].

Tanım 2.6.3. (Uyum (Konkordant))

(x_i, y_i) ve (x_j, y_j) sürekli (X,Y) sürekli tesadüfi değişken çiftinden alınan gözlemler olsun. $x_i < x_j$ ya da $y_i < y_j$ ve $x_i > x_j$ ya da $y_i > y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumludur (konkordant) denir. Benzer biçimde $x_i < x_j$ ya da $y_i > y_j$ ve $y_i < y_j$ ya da $x_i > x_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumsuzdur (diskonkordant) denir.

Diğer bir ifadeyle $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumludur (konkordant), $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumsuzdur denir [7,12].

Tanım 2.6.4. (Konkordant Fonksiyon)

X_1, X_2 F ortak marjinli, ve Y_1, Y_2 ' de G ortak marjinli rasgele tesadüfi değişkenler olmak üzere; (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) marjinalleri H_1 ve H_2 ortak dağılım fonksiyonlu sürekli tesadüfi değişkenlerin bağımsız vektörleri olsun. C_1 ve C_2 ; $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ ve $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ olmak üzere (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ' nin kopulaları olsun. Q (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) ' nin uyum ve uyumsuzluğunun olasılıkları arasındaki farkı göstere, yani;

$$Q = P\{(X_1 - X_1)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_1)(Y_1 - Y_2) < 0\} \quad (2.55)$$

şeklindedir. Bu fonksiyonsa konkordant fonksiyon denir. Bu durumda

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (2.56)$$

olacaktır [4,7,12].

Sonuç 2.6.1.

C_1 , C_2 ve Q Tanım (2.6.4)' deki gibi olsun.

1. Q fonksiyonu kendi bileşenlerine göre simetrik. Yani $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$ dir.
2. Q fonksiyonu her bir bileşenine göre azalmayandır. Yani I^2 deki her (u, v) için $C_1 \prec C_1'$ ve $C_2 \prec C_2'$ ise $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1', C_2')$ ' dir.
3. Q fonksiyonunda kopulalarla yaşam fonksiyonları yer değiştirebilir. Yani $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ ' dir.

Herhangi bir keyfi C kopulası için Q fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında yer alır. Ayrıca

$$Q(C, M) \in [0, 1], \quad Q(C, W) \in [-1, 0] \quad \text{ve} \quad Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \quad \text{dir [12].}$$

Parametrik olmayan uyum ölçüleri Kendal Tau ve Spearman Rho ele alınan verinin parametrik varsayımlarının sağlanmaması durumunda kullanılan ilişki ölçüleridir. Kendal Tau ve Spearman Rho tesadüfi değişkenler arasındaki uyum olasılığının ölçüsü olsalar da birbirlerinden oldukça farklıdır.

Tanım 2.6.5. (Kendall Tau)

Sıra sayılarına dayanan ve sıkça kullanılan bir diğer bağımlılık ölçüsü de Kendall Tau dur. (X_j, Y_j) , $j = 1, 2, \dots, n$ rastgele örneğinde P_n uyumlu çiftlerin sayısını, Q_n uyumsuz çiftlerin sayısını göstermek üzere, bu örnekten hesaplanan Kendal Tau ifadesi

$$\tau_n = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} P_n - 1 \quad (2.57)$$

ile verilir [7,10].

Teorem 2.6.1.

X ve Y kopulaları C olan sürekli tesadüfi değişkenler olsun. O zaman X ve Y için Kendall Tau

$$\tau_{XY} = \tau_C = Q = Q(C, C) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (2.58)$$

şeklindedir. Ortak dağılım fonksiyonu C olan düzgün dağılımlı U ve V rastgele değişkenlerinin $C(U, V)$ fonksiyonunun beklenen değeri olarak (2.58)' de verilen ifade

$$\tau_C = 4E[C(U, V)] - 1 \quad (2.59)$$

şeklindedir [5,7,12].

İspat.

(X, Y) değişken çiftinden alınan aynı dağılımlı bağımsız sürekli tesadüfi değişkenleri (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) olsun. Bu değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu da F olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \tau_k &= P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} = 1 \\ &= 2P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1 \\ &= 2E[1_{\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\}}] - 1 \\ &= 2E[1_{\{(X_1 - X_2) > 0\}} 1_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} + 1_{\{(X_1 - X_2) < 0\}} 1_{\{(Y_1 - Y_2) < 0\}}] - 1 \\ &= 2 \left(\int_R \int_R \int_R 1_{\{(X_1 - X_2) > 0\}} 1_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} dF(x_2, y_2) dF(x_1, y_1) \right. \\ &\quad \left. + \int_R \int_R \int_R 1_{\{(X_1 - X_2) < 0\}} 1_{\{(Y_1 - Y_2) < 0\}} dF(x_2, y_2) dF(x_1, y_1) \right) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.2 \left(\int_R \int_R \int_R 1_{\{(X_1 - X_2) > 0\}} 1_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} dF(x_2, y_2) dF(x_1, y_1) \right) - 1 \\
&= 4 \int_R \int_R F(x_1, y_1) dF(x_1, y_1) - 1 \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da

$$4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E[C(U, V)] - 1 \quad (2.60)$$

yazılır [5].

Teorem 2.6.2.

X ve Y kopulaları C olan sürekli tesadüfî değişkenleri olsun. O zaman X ve Y tesadüfî değişkenleri için Kendal Tau, üretici fonksiyonlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilir

$$\tau_c = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} dt. \quad (2.61)$$

İspat.

U ve V düzgün dağılımlı tesadüfî değişkenler, C bunların ortak dağılımı, K_C ' de $C(U, V)$ ' nin dağılım fonksiyonu olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\tau_c &= 4E[C(U, V)] - 1 \\
&= 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\
&= 4 \left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) - 1 \\
&= 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt.
\end{aligned}$$

olur. Teorem (2.3.2)' den $C(U, V)$ ' nin dağılım fonksiyonu K_C

$$K_C(t) = t - \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t^+)} \quad (2.62)$$

ve buradan

$$\rho_\tau = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} dt \quad (2.63)$$

elde edilir [1,5].

Tanım 2.6.6. (Spearman Rho)

Spearman Rho da Kendall Tau gibi uyumluluk ve uyumsuzlukla ilgili bir ilişki ölçüsüdür. Spearman Rho bağımlılık ölçüsünü tanımlamak için öncelikle Spearman rank korelasyonundan bahsedelim. X ve Y , H ortak dağılımlı, F ve G marjinali tesadüfi değişkenler olsun. Bu iki değişken arasındaki örnek Spearman rank korelasyonu $\rho_s(X, Y)$ gösterilirse,

$$\hat{\rho}_s(X, Y) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(\text{rank } X_i - \frac{n+1}{2} \right) \left(\text{rank } Y_i - \frac{n+1}{2} \right) \quad (2.64)$$

şeklindedir. Anakütle durumu için

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F(X), G(Y)) \quad (2.65)$$

olur.

Buna göre $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ ve (X_3, Y_3) ; H ortak dağılımlı, F ve G marjinali ve C kopulalı üç bağımsız tesadüfi vektör olsun. Bu değişkenler için Spearman Rho

$$\rho_s = [P(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0 - P(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0] \quad (2.66)$$

şeklindedir. Burada (X_1, Y_1) çiftinin kopulası C ve (X_2, Y_3) çifti içinde $(X_2$ ve Y_3 ' ün bağımsız kabul edilmesi nedeniyle) Π olur [5,7,12].

Sonuç 2.6.3.

X ve Y tesadüfi değişkenlerinin dağılım fonksiyonları sırasıyla F, G kopulası C olsun. X ve Y tesadüfi değişkenleri için Spearman Rho ana kütle durumunu ele alalım. Bunu elde edebilmek için önce iki değişken arasındaki korelasyon ifadesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \rho_s &= \rho(F(X), G(Y)) \\ &= \frac{\text{Cov}[F(X), G(Y)]}{\sqrt{\sigma^2[F(X)]\sigma^2[G(Y)]}} \\ &= \frac{\text{Cov}[F(X), G(Y)]}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \text{Cov}[F(X), G(Y)] \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(F(X), G(Y)) - [F(X)][G(Y)]\} dx dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u, v \in [0,1]$ 'den $[0,1]$ 'e fonksiyonlar olmak üzere $F(X)=u$ ve $G(Y)=v$ alınırsa son eşitlikten

$$\begin{aligned}
\rho(u, v) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(u, v) - uv\} du dv \\
&= 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12E(U, V) - 3
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlik de yer alan 3 katsayısı normalleştirme katsayısıdır. Sonuç (2.6.1)

eşitliğinde $Q(C, \Pi) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ şeklinde belirtilmiştir [5,7,12].

Tanım 2.6.7.

Kopulası C olan X ve Y sürekli tesadüfî değişkenleri arasındaki ilişkiyi gösteren κ ölçüsünün uyumluluk ölçüsü olduğunu söyleyebilmemiz için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir.

1. κ ölçüsü, her X, Y sürekli tesadüfî değişkenleri için tanımlanmış olmalıdır.
2. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,Y} = 1$, $\kappa_{X,Y} = -1$
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$
4. Eğer X ve Y sürekli tesadüfî değişkenleri bağımsızsa $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$ ' dır.
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$
6. Eğer C_1 ve C_2 , $C_1 \prec C_2$ ilişkisi olan kopulalar ise $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$
7. Eğer $\{(X_n, Y_n)\}$, C_n kopularına sahip sürekli tesadüfî değişkenler dizisi ise ve $\{C_n\}$ noktasal olarak C 'ye yakınsıyorsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$ dır [7,12].

Örnek 2.6.1.

$u, v \in I$, $-1 \leq \theta \leq 1$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = \ln\left(\frac{1-\theta(t-1)}{t}\right)$, $t \in I$ olan Ali-

Mikhail-Haq kopula ailesi

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

olmak üzere bu ailenin θ parametresi ile Kendalın τ_k arasındaki ilişki;

$$\tau_k(\theta) = 1 - \frac{2(\theta + (1-\theta)^2 \ln(1-\theta))}{3\theta^2}.$$

şeklindedir [7,12].

Örnek 2.6.2.

$u, v \in I$, $\theta \in [-1, 1]$ olmak üzere C_{θ} , $[0, 1]^2$ üzerinde

$$C_{\theta}(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$$

şeklinde tanımlanan FGM kopula ailesi için θ parametresi ve sırasıyla Kendalın Tau, Spearman Rau arasındaki ilişki

$$\tau_k(\theta) = \frac{2\theta}{9},$$

$$\rho_s(\theta) = \frac{\theta}{3}$$

dir. Buradan $\tau_k(\theta) \in [-2/9, 2/9]$ ve $\rho_s(\theta) \in [-1/3, 1/3]$ olur [6,12].

Örnek 2.6.3.

$u, v \in I$, $\theta \geq 0$ için üretici fonksiyonu $\gamma(t) = -\ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right)$, $t \in I$ olan Frank'ın kopula

ailesi

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{1}{\ln \theta} \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]$$

olsun. Buna göre Frank'ın kopula ailesi için θ parametresi ve sırasıyla Kendalın Tau, Spearman Rau arasındaki ilişki

$$\tau_k(\theta) = 1 - 4 \frac{D_1(-\ln \theta) - 1}{\ln \theta}$$

$$\rho_s(\theta) = 1 - 12 \frac{D_2(-\ln \theta) - D_1(-\ln \theta)}{\ln \theta}.$$

şeklinde olup D_1 ve D_2 debye fonksiyonlarıdır (Türev fonksiyonları) [6,7,12].

Örnek 2.6.4.

İki değişkenli normal dağılım kopulası Gaussian kopula olarak tanımlanır. ϕ , $N(0,1)$ ' in kümülatif dağılım fonksiyonu, ϕ^{-1} de ϕ nin tersi olsun. $\theta \in [-1,1]$ ϕ_θ da iki değişkenli normal dağılım olmak üzere

$$C_\theta(u, v) = \phi_\theta(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$
$$= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2st + t^2}{2(1-\theta^2)}\right) ds dt$$

ve yoğunluk fonksiyonu ise

$$c(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{1-\theta^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{((\phi^{-1}(u))^2 - 2\theta\phi^{-1}(u)\phi^{-1}(v) + (\phi^{-1}(v))^2)}{1-\theta^2}\right) - ((\phi^{-1}(u))^2 + (\phi^{-1}(v))^2)}$$

şeklinde tanımlanır. Finansta, özellikle finansal modelleme ve portfölyo teorisinde normal kopula kullanılmaktadır. U ve V tesadüfî değişkenleri için $C_0 = \Pi$ 'dır ve bu aile pozitif sıralı olup $C_{-1} = W$ ve $C_1 = M$ ' dir. Bu ailenin θ parametresi ile Kendalın Tau ve Spearman Rho arasındaki ilişki, sırasıyla,

$$\tau_K(\theta) = \frac{2}{\Pi} \arcsin \theta$$

$$\rho_S(\theta) = \frac{6}{\Pi} \arcsin \frac{\theta}{2}$$

şeklindedir [1,7,17].

Teorem 2.6.3.

X ve Y sürekli tesadüfî değişkenler τ ve ρ da sırasıyla (2.57), (2.66)' daki gibi tanımlansın. Buna göre,

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1 \quad (2.67)$$

şeklindedir [7,12].

Teorem 2.6.4.

X ve Y sürekli tesadüfî değişkenler, τ ve ρ da Teorem (2.6.3)' deki gibi verilsin.

$$\frac{1+\rho}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^2 \quad (2.68)$$

ve

$$\frac{1-\rho}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^2 \quad (2.69)$$

şeklindedir. Bu iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir [7,12].

Sonuç 2.6.4.

X ve Y sürekli tesadüfî değişkenler, τ ve ρ da Teorem (2.6.3)' deki gibi verilsin. Buna göre

$$\frac{3\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0 \quad (2.70)$$

ve

$$\frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+3\tau}{2}, \quad \tau < 0 \quad (2.71)$$

dir [7,12].

Teorem 2.6.5.

C_1 ve C_2 iki kopula olsun. Buna göre

$$\iint_{I^2} C_1(u,v) dC_2(u,v) = \frac{1}{2} - \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v) dudv \quad (2.72)$$

dir. Bu ifade özellikle Cuadras-Auge ailesi ve Marshall-Olkin ailesi gibi parçalı fonksiyonlarda Kendal Tau değeri için kullanılır [7].

2.7. Bağımlılık Yapıları

Tanım 2.7.1.

İstatistik ve olasılığın en çok çalışılan konularından biri iki değişken arasındaki bağımlılık ilişkisidir. Kadran bağımlılık özellikle uygulamada risk analizi ve güvenilirlik analizi için önemlidir.

H ortak dağılımlı, F , G marjinali tesadüfi değişkenler X ve Y olsun. Buna göre $\forall (x, y) \in R^2$ için

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} \geq P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

ya da denk olarak

$$P\{X > x, Y > y\} \geq P\{X > x\}P\{Y > y\}$$

oluyorsa X ve Y pozitif kadran bağımlıdır (PQD) denir.

Tüm $\forall (x, y) \in R^2$ için

$$\forall (x, y) \in R^2 \quad P\{X \leq x, Y \leq y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

ya da denk olarak

$$P\{X > x, Y > y\} \leq P\{X > x\}P\{Y > y\}$$

oluyor ise X ve Y negatif kadran bağımlıdır (NQD) denir.

X ve Y tesadüfi değişkenlerinin dağılım fonksiyonu bakımından kadran bağımlılık,

1. X ve Y PQD' dir.

$$\forall (x, y) \in R^2 \quad F_{XY}(x, y) \geq F_X(x)F_Y(y)$$

2. X ve Y NQD' dir.

$$\forall (x, y) \in R^2 \quad F_{XY}(x, y) \leq F_X(x)F_Y(y)$$

şeklinde ifade edilebilir. X ve Y sürekli tesadüfi değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu H ve kopulaları C olmak üzere,

1. X ve Y ' nin PQD olması için gerek ve yeter şart $\forall (u, v) \in I^2$ için $C(u, v) \geq \Pi_2(u, v)$

2. X ve Y ' nin NQD olması için gerek ve yeter şart $\forall (u, v) \in I^2$ için $C(u, v) \leq \Pi_2(u, v)$

olmasıdır [8,16].

Sonuç 2.7.1.

X ve Y PQD olsun. X ve Y 'nin C kopulasının grafiği, çarpım kopulasının grafiğinin üstü ya da altı boyunca uzanır. Yani (X, Y) kadransal bağımlı ise $(-X, -Y)$ PQD, $(-X, Y)$ ve (X, Y) de NQD'dir denir. X ve Y arasında ki PQD X ve Y arasındaki kovaryans tarafından da karakterize edilebilir [7].

Sonuç 2.7.2.

X ve Y tesadüfi değişkenlerinin pozitif kadransal bağımlı olması için gerek ve yeter şart $E(f(X))$, $E(g(Y))$ ve $E(f(X), g(Y))$ beklenen değerleri yardımıyla tanımlanan f ile g arasında ki kovaryans yani $C(f(X), g(Y)) \geq 0$ dır [7].

Örnek 2.7.1.

$u, v \in I$, $\theta \geq 0$ bağımlılık parametresi olmak üzere

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{1}{\ln \theta} \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]$$

Frank ailesi U, V tesadüfi değişkenlerinin kopulası ise bu değişkenler $0 \leq \theta \leq 1$ için PQD, $\theta > 1$ için NQD'dir [7].

Örnek 2.7.2.

$u, v \in I$ ve $\theta \in [-1, 1]$ bağımlılık parametresi olmak üzere,

$$C_{\theta}(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$$

Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesi U, V tesadüfi değişkenlerinin kopulası ise bu değişkenler $\theta = 0$ için $C_0 = \Pi_2$, $\theta > 0$ için PQD ve $\theta < 0$ NQD'dir [7,12].

Örnek 2.7.3.

$u, v \in I$ ve $\theta \geq 0$ bağımlılık parametresi olmak üzere,

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{1 + (\theta - 1)(u + v)}{2(\theta - 1)} - \frac{\sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$$

Plackett ailesi U, V tesadüfî değişkenlerinin kopulası ise bu değişkenler $\theta > 1$ için PQD ve $\theta < 1$ için NQD dir [7].

Tanım 2.7.2. (Kuyruk Bağımlılığı)

Kuyruk bağımlılığı özellikle risk analizi ve güvenilirlik analizi uygulamaları için önemlidir. Buna göre X ve Y tesadüfî değişkenleri için,

1. Tüm y ' ler için $P\{Y \leq y \mid X \leq x\}$, x 'in artmayan bir fonksiyonu ise Y, X 'de sol kuyruk azalandır denir. Kısaca LTD($Y \setminus X$) ile gösterilir.
2. Tüm x ' ler için $P\{X \leq x \mid Y \leq y\}$, y ' in artmayan bir fonksiyonu ise X, Y ' de sol kuyruk azalandır denir. Kısaca LTD($X \setminus Y$) ile gösterilir
3. Tüm y ' ler için $P\{Y > y \mid X > x\}$, x ' in azalmayan bir fonksiyonu ise Y, X ' de sağ kuyruk artandır denir. Kısaca RTI($Y \setminus X$) ile gösterilir.
4. Tüm x ' ler için $P\{X > x \mid Y > y\}$ y ' in azalmayan bir fonksiyonu ise X, Y 'de sağ kuyruk artandır denir. Kısaca RTI ($X \setminus Y$) ile gösterilir.

Dört kuyruk monotonluk koşulları pozitif kadrar bağımlılığı sağlar. Örneğin LTD (XY) alınırsa

$$P[X \leq x \mid Y \leq y] \geq P[X \leq x \mid Y \leq \infty] = P[X \leq x]$$

ve bu durumda

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P[Y \leq y]P[X \leq x \mid Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]$$

olacaktır. Bu durumda PQD (X, Y)' dir. Benzer şekilde RTI ($X \setminus Y$) göz önüne alınırsa

$$P[X > x \mid Y > y] \geq P[X > x \mid Y > -\infty] = P[Y > y]$$

olur ve bu nedenle

$$P[X > x, Y > y] = P[Y > y]P[X > x \mid Y > y] \geq P[X > x]P[Y > y]$$

olacaktır. Bu durumda PQD (X, Y)' dir [7,12,16].

Teorem 2.7.1.

X ve Y tesadüfî değişkenler olsun. Eğer X ve Y Tanım (2.7.1)' deki özelliklerden birini sağlıyorsa X ve Y PQD' dir. Fakat X ve Y PQD olduklarında Tanım (2.7.1)' deki özellikleri sağlamak zorunda değildir [5,6,10].

Sonuç 2.7.3.

X ve Y , kopulası C olan sürekli tesadüfi değişkenler olsun.

1. $\forall v \in I$ için $u \mapsto \frac{C(u,v)}{u}$ ifadesi artmayan ise LTD ($Y \setminus X$) mevcuttur.
2. $\forall u \in I$ için $v \mapsto \frac{C(u,v)}{v}$ ifadesi artmayan ise LTD ($X \setminus Y$) mevcuttur.
3. $\forall v \in I$ için $u \mapsto \frac{v - C(u,v)}{1 - u}$ ifadesi artmayan ise RTI ($Y \setminus X$) mevcuttur.
4. $\forall u \in I$ için $v \mapsto \frac{u - C(u,v)}{1 - v}$ ifadesi artmayan ise RTI ($X \setminus Y$) mevcuttur [7,12,16].

Sonuç 2.7.4.

1. $\forall v \in I$, hemen hemen $\forall u \in I$ için LTD ($Y \setminus X$) olması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u}$ olmasıdır.
2. $\forall u \in I$, hemen hemen $\forall v \in I$ için LTD ($X \setminus Y$) olması için gerek ve yeter $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq \frac{C(u,v)}{v}$ olmasıdır.
3. $\forall v \in I$, hemen hemen $\forall u \in I$ için RTI ($Y \setminus X$) olması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{v - C(u,v)}{1 - u}$ olmasıdır.
4. $\forall u \in I$, hemen hemen $\forall v \in I$ için RTI ($X \setminus Y$) olması için gerek ve yeter şart $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq \frac{u - C(u,v)}{1 - v}$ olmasıdır [7,12,16].

Teorem 2.7.2.

X ve Y sürekli tesadüfi değişkenler olsun. Eğer X, Y 'de sol kuyruk artan ve sağ kuyruk azalan ise, $\rho_{X,Y} \geq \tau_{X,Y} \geq 0$ 'dır. [7,12,16]

Tanım 2.7.3. (Stokastik Bağımlılık)

Stokastik monotonluğuda özellikle risk analizi ve güvenilirlik analizi uygulamaları için önemlidir. X ve Y sürekli iki tesadüfi değişken olsun. Buna göre,

1. Tüm y' ler için $x \mapsto P\{Y > y \mid X = x\}$ ifadesi x' in azalmayan fonksiyonu ise Y, X' de stokastik olarak artandır denir. $SI(Y \setminus X)$ olarak gösterilir.
2. Tüm x' ler için $y \mapsto P\{X > x \mid Y = y\}$ ifadesi y' nin azalmayan fonksiyonu ise X, Y' de stokastik artandır denir. $SI(X \setminus Y)$ ile gösterilir.
3. Tüm y' ler için $x \mapsto P\{Y > y \mid X = x\}$ ifadesi x' in artmayan fonksiyonu ise Y, X' de stokastik azalandır denir. $SD(Y \setminus X)$ ile gösterilir.
4. Tüm x' ler için $y \mapsto P\{X > x \mid Y = y\}$ ifadesi y' in artmayan fonksiyonu ise X, Y' de stokastik azalandır denir. $SD(X \setminus Y)$ ile gösterilir [7,12,16].

Sonuç 2.7.5.

Kopulası C olan sürekli tesadüfi değişkenler X ve Y olsun.

1. $\forall v \in I$ için, $u \mapsto C(u, v)$ fonksiyonu konkav ise $SI(Y \setminus X)$ mevcuttur.
2. $\forall u \in I$ için $v \mapsto C(u, v)$ fonksiyonu konkav ise $SI(X \setminus Y)$ mevcuttur.
3. $\forall v \in I$ için $u \mapsto C(u, v)$ fonksiyonu konveks ise $SD(Y \setminus X)$ mevcuttur.
4. $\forall u \in I$ için $v \mapsto C(u, v)$ fonksiyonu konveks ise $SD(X \setminus Y)$ mevcuttur [7,12,16].

Sonuç 2.7.6.

X ve Y tesadüfi değişkenleri için $SI(Y \setminus X)$ ise $RTI(Y \setminus X)$ ve $LTD(Y \setminus X)$ benzer olarak $SI(X \setminus Y)$ ise $LTD(X \setminus Y)$ ve $RTI(X \setminus Y)$ sağlanır. Özellikle X ve Y tesadüfi değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu H iki değişkenli uç dağılım ise $SI(Y \setminus X)$ ve $SI(X \setminus Y)$ vardır [7,12,16].

Tanım 2.7.4. (Korner (Köşe) Bağımlılık)

Özellikle risk analizi ve güvenilirlik analizi uygulamaları için önemlidir. X ve Y sürekli iki tesadüfi değişken olsun. Buna göre,

1. Her x, y için $P[X \leq x, Y \leq y \mid X \leq x', Y \leq y']$ fonksiyonu x' ve y' de artmayan ise X ve Y sol korner (köşe) set azalandır denir. $LCS D(X, Y)$ ile gösterilir.
2. Her x, y için $P[X \leq x, Y \leq y \mid X \leq x', Y \leq y']$ fonksiyonu x' ve y' de artmayan X ve Y sol artan korner (köşe) set artandır. $LCSI(X, Y)$ ile gösterilir.

3. Her x, y için $P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$ fonksiyonu x' ve y' ' de azalmayan ise X ve Y sağ korner (köşe) set artandır denir. RCSI (X, Y) ile gösterilir.

4. Her x, y için $P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$ fonksiyonu x' ve y' ' de azalmayan ise X ve Y sağ korner (köşe) set azalandır denir. RCSD (X, Y) ile gösterilir [7,12,16].

Teorem 2.7.3.

X ve Y sürekli tesadüfî değişkenler olsun.

1. LCSD (X, Y) mevcut ise bu durumda LTD $(Y \setminus X)$ ve LTD $(X \setminus Y)$,
2. RCSD (X, Y) mevcut ise RTI $(Y \setminus X)$ ve RTI $(X \setminus Y)$ sağlanır [7,12,16].

Tanım 2.7.5.

$\bar{R}^2$ den R ye bir f fonksiyonu için $\bar{R}^2$ üzerinde $f(x, y) \geq 0$ ve $x \leq x', y \leq y'$ olmak üzere aşağıdaki ifade mevcut ise, f 2. dereceden toplam pozitifdir denir ve TP_2 ile gösterilir.

$$\begin{vmatrix} f(x, y) & f(x, y') \\ f(x', y) & f(x', y') \end{vmatrix} \geq 0 \quad (2.73)$$

[7,12,16].

Teorem 2.7.4.

X ve Y kopulası C olan sürekli tesadüfî değişkenler olsun. X ve Y ' nin ve kopula ile uyumlu yaşam kopulası bakımından aşağıdaki karakterizasyonlar sağlanır.

1. LCSD (X, Y) olması için gerek ve yeter şart I 'daki $\forall u, u', v, v', u \leq u', v \leq v'$ için C 'nin TP_2 olmasıdır,

$$C(u, v)C(u', v') \geq C(u, v')C(u', v) \quad (2.74)$$

2. RCSI (X, Y) olması için gerek ve yeter şart I 'daki $\forall u, u', v, v', u \leq u', v \leq v'$ için C 'nin TP_2 olmasıdır.

$$\bar{C}(u, v)\bar{C}(u', v') \geq \bar{C}(u, v')\bar{C}(u', v) \quad (2.75)$$

[7,12,16]

Tablo 2.1. Bağımlılık yapıları arasındaki ilişki

SI ($Y \setminus X$)	$\Rightarrow$	RTI($Y \setminus X$)	$\Leftarrow$	RCSI (X, Y)
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
LTD($Y \setminus X$)	$\Rightarrow$	PQD($X \setminus Y$)	$\Leftarrow$	RTI($X \setminus Y$)
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
LCSD(X, Y)	$\Rightarrow$	LTD($X \setminus Y$)	$\Leftarrow$	SI ($X \setminus Y$)

2.8. Kopula Tahmin Yöntemleri

Kopulalar kullanılarak yapılan istatistiksel çıkarımlarda kullanılan yöntemleri parametrik ve parametrik olmayan yöntemler olarak ikiye ayırabiliriz. Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE) ve Marjinallere ilişkin Çıkarsama Yöntemi (IFM) parametrik yöntemlerdir. Kendall Tau ve Spearman Rho ölçülerine dayanan yöntemler ise parametrik olmayan yöntemlerdir.

Tanın 2.8.1. (Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE))

Bu çok önemli tahmin yönteminden bahsetmeden önce kanonik gösterim olarak adlandırılan gösterimi belirtelim. Bir çok değişkenli dağılım

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2.76)$$

biçimde gösterimi onun kanonik gösterimidir. Bu gösterimde

$$c(F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)) = \frac{\partial C(F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n))}{\partial F(x_1) \partial F(x_2), \dots, \partial F(x_n)} \quad (2.77)$$

C kopulasının n . dereceden kısmi türevi, dolayısıyla c kopula yoğunluğu ve f_j ' ler standart tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır. $\mathcal{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$, örnek veri matrisimiz olsun. Logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log\{c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \log f_i(x_{it}) \quad (2.78)$$

olur. Burada θ hem marjinallerin hem de kopulanın tüm parametrelerinin vektörüdür. (2.78) eşitliğini maksimize eden $\theta_{MLE} = \underset{\theta}{\text{enbüyük}} l(\theta)$ tahminleyici, en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Çok değişkenli kopula ve bu kopulanın marjinalleri (yani tek değişkenli yoğunluk fonksiyonları) için asimptotik uygunluk koşullarını sağlar. Bu uygunluk koşulları altında en çok olabilirlik tahmin edicisi tanımlıdır ve tutarlı asimptotik etkin bir tahmin edicidir. Asimptotik normal dağılıma sahiptir

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \rightarrow N(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)). \quad (2.79)$$

Burada $\mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)$, Fisher bilgi matrisi ve θ_0 doğru parametrik değerdir. θ_{MLE} ' in kovaryans matrisi (yani Fisher' in bilgi matrisi), olabilirlik fonksiyonunun negatif Hessian matrisinin tersi ile tahmin edilir [3,11,17].

Tanım 2.8.2. (Marjinallere İlişkin Çıkarsama Yöntemi (IFM))

En çok olabilirlik yöntemi için, marjinal dağılımların parametreleri ve kopula tarafından açıklanan bağımlılık yapısının parametreleri gerekeceğinden, özellikle çok boyutlu durumlarda karışık ve zor hesaplamalar ile karşılaşılır. Fakat log-olabilirlik fonksiyonuna bakıldığında bu fonksiyonun iki pozitif terimden oluştuğu görülür. Birinci terim kopula yoğunluğu ve onun parametrelerinden oluşurken ,ikinci terim marjinallerden ve kopula yoğunluğunun bütün terimlerini içerir. Tahmin iki adımda yapılır.

Adım 1: Tek boyutlu marjinal dağılımların tahmini yaparak marjinal parametreleri tahmin edilmiştir:

$$\hat{\theta}_1 = \underset{\theta_1}{\text{Argmaks}} \sum_{i=1}^T n \sum_{i=1} \log f_i(x_{it}, \theta_1) \quad (2.80)$$

Adım 2: Elde edilen $\hat{\theta}_1$ parametresi ile θ_2 tahmin edilir.

$$\hat{\theta}_2 = \underset{\theta_2}{\text{Argenbüyük}} \sum_{i=1}^T \log(c(F_1(x_{1i}), F_2(x_{2i}), \dots, F_n(x_{ni}); \theta_2, \hat{\theta}_1)) \quad (2.81)$$

Bu yöntem Marjinallere ilişkin çıkarsama(IFM) denir. IFM tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)' \quad (2.82)$$

şeklinde ifade edilir. L olabilirlik fonksiyonu l_i , i .marjinalin log-olabilirlik fonksiyonu, l_c ise kopulanının log-olabilirlik fonksiyonu olsun. O zaman IFM tahmin edicisi aşağıda verilen eşitliğin çözümüdür.

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_{1d}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right) = 0'. \quad (2.83)$$

Tam en çok olabilirlik yöntemine ait tahmin edici ise aşağıda belirtilen eşitliğin çözümüdür

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (2.84)$$

Bu iki tahmin edici birbirine eşit çıkmaktadır. IFM tahmin edicisi EÇO tahmin edicisinden daha kolay hesaplanabilmektedir. Bu yüzden, IFM tahmin edicisinin EÇO tahmin edicisine göre asimptotik etkinliğinin araştırılması mantıklı olacaktır. Bunun için, iki tahmin edicinin asimptotik kovaryans matrislerinin karşılaştırılması gerekir. IFM teorisi, parametreler vektörünün tahmini için uygun sonuç eşitliklerinin kümesinin kullanılmasına dayanan özel bir durumdur. Bu durumdaki her sonuç eşitliği aslında bir skor fonksiyonudur. (yani eşitliğin sol tarafı, her marjinal yoğunluğa ait log-olabilirliğinin kısmî türevinden oluşur.) EÇO tahmin edicisi gibi, IFM tahmin edicisinin de gereken uygunluk koşulları altında asimptotik normallik özelliğine sahip olduğu Joe tarafından kanıtlanmıştır

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, V^{-1}(\theta_0)). \quad (2.85)$$

Burada $V(\theta_0)$, Godambe bilgi matrisidir [11].

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_i i . marjinalin log-olabilirlik fonksiyonunu, l_c ise kopulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. Böylece skor fonksiyonu,

$$g(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (2.86)$$

şeklinde olur. Godambe bilgi matrisi ise aşağıda belirtilen formu alır,

$$V(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})' \quad (2.87)$$

$$D = E[\partial g(\theta)^T / \partial \theta] \text{ ve } M = E[g(\theta)^T g(\theta)] \quad (2.88)$$

[3,11].

Tanım 2.8.3. (Kopulaların Simülasyonu)

Kopulaların istatistiksel uygulama alanlarından biri de Monte Carlo simülasyon metoduyla rasgele örnek üretme çalışmalarıdır. Marjinalleri F, G , ortak dağılımı da H ve kopulası C olan (X, Y) tesadüfi değişkeninden alınan örneklem (x, y) olsun. Sklar teoreminden dolayı (U, V) tesadüfi örnekleminden (u, v) gözlemleri üretmeye ihtiyacımız vardır. Olasılık integral dönüşümü yardımıyla (u, v) (x, y) ' ye dönüştürülürse sırasıyla $x = F^{[-1]}(u)$, $y = G^{[-1]}(v)$ elde edilir. (u, v) nokta çifti üretmek için $\{U=u\}$ olayında V 'nin

$$c_u(v) = P\{V \leq v \mid U = u\} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \quad (2.89)$$

koşullu dağılımından

1. İki bağımsız düzgün dağılıma sahip u ve t değerleri üretilir.
 2. $c_u^{(-1)}$, c_u ' nun yarı tersi olmak üzere $v = c_u^{(-1)}(t)$ ' yi bulunur.
 3. İstenen çift (u, v) ' dir.
 4. (u, v) çiftlerinden $(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$ çiftleri elde edilir.
- [3,11].

2.9. Kopula Oluşturma Metotları

Bu bölümde uygulama alanında çok önemli olan kopula oluşturma metotları anlatılmıştır. Özellikle arşimedyan kopula aileleri üretici fonksiyonu ters dönüşüm metoduyla kolayca elde edilebilmektedir. Bu özelliği uygulamada çok fazla kullanılmasını sağlamıştır. Burada özellikle uygulamada çok önem taşıyan arşimedyan kopulalardan faydalanılarak, tek parametrelili kopula ailelerin yardımıyla uygulamada daha kolaylık sağlayan iki veya daha fazla parametrelili kopulalar elde etme amaçlanmıştır. Kopula ailelerin çoğu simetriklik özelliğini sağlar fakat bu özellik yeni oluşturulan kopulalar da sağlanmayabilir. Kopulaların asimetric özelliği bazen modelin daha etkin olmasını sağlar.

Tanım 2.9.1.

Θ kesin artan ve sürekli fonksiyonların kümesini gösterebiliriz. $h \in \Theta, h: I \rightarrow I$ fonksiyonu $h(0) = 0$ ve $h(1) = 1$ şeklinde tanımlansın. Buna göre C kopulası ve h fonksiyon dönüşümü yardımıyla elde edilen C_h ,

$$C_h(u, v) = h^{-1}(C(h(u), h(v))) \quad (2.90)$$

şeklindedir. Burada C_h kopula olmayabilir [7].

Sonuç 2.9.1.

$\forall h \in \Theta$ olmak üzere

1. h konkavdır.
2. $\forall C$ kopulası için C ' nin dönüşümü $C_n(u, v) = h^{-1}(C_n(h(u), h(v)))$ olarak verilir [7].

Örnek 2.9.1.

$\phi(t) = -\ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right)$ üreteçli Frank kopula ailesini göz önüne alalım. Frank ailesinin

üreteç fonksiyonunun tersi $\phi^{-1}(t) = -\ln\left(\frac{\theta - 1}{e^t} + 1\right)$ olsun. Buna göre $h(t) = \exp(-\phi(t))$

ifadesinden $h(t) = \frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}$ fonksiyonu Sonuç (2.9.1)' deki gibi elde edilir. $C(u, v) = uv$

çarpım kopulasının h - dönüşümü alınırsa $C_\theta(u, v) = \frac{1}{\ln \theta} \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]$ kopulasının

elde edildiği görülebilir. O halde her uygun h fonksiyonu için Frank ailesi çarpım kopulasının bir dönüşümü olarak elde edilebilir.

Tanım 2.9.2. (Kopulaların Bileşimi)

$h: I \rightarrow I$ fonksiyonu Tanım (2.9.1) ' deki gibi tanımlansın. $H: I^2 \rightarrow I$ fonksiyonu her bir değişken için artan, $H(0,0) = 0$ ve $H(1,1) = 1$ olsun. f_1, f_2, g_1 ve g_2 , Θ de tanımlı fonksiyonlar, A ve B iki kopula olsun. Buna göre

$$F_{A,B}(u, v) = H(A(f_1(u), g_1(v)), B(f_2(u), g_2(v))) \quad (2.91)$$

eşitliği A ve B kopula fonksiyonlarının bileşimi olarak tanımlanır. Genelde $F_{A,B}$ ile gösterilir. $F_{A,B}$ kopula değildir. Ancak H ' ın üzerindeki bazı koşullarda f_1, f_2, g_1 ve g_2 fonksiyonları $F_{A,B}$ kopula olacak biçimde tanımlanabilir [7].

Sonuç 2.9.2.

A ve B iki kopula olsun.

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = A(u^\alpha, v^\beta)B(u^{1-\alpha}, v^{1-\beta}) \quad (2.92)$$

eşitliğinde $C_{\alpha,\beta}$ kopulası $\alpha, \beta \in I$ parametrelili kopula ailesi olarak tanımlanır. Özel olarak bu ifadede $\alpha = \beta = 1$ alınır, $C_{1,1} = A$ ve $\alpha = \beta = 0$ alınır, $C_{0,0} = B$ olur. $\alpha \neq \beta$ için (2.92) eşitliği asimetriktir. Yani $C(u,v) \neq C(v,u)$, $(u,v) \in I^2$ dir [7].

Örnek 2.9.4.

$u, v \in I$ olmak üzere Galambos ve Farlie-Gumbel-Morgestein kopula ailelerini göz önüne alalım. Buna göre Sonuç (2.9.2) ' den üç parametrelili kopula ailesi

$$C_{\alpha,\beta,\theta}(u,v) = uv \exp \left(\left[(-\ln u^\alpha)^{-\theta} + (-\ln v^\beta)^{-\theta} \right]^{-1/\theta} \right) \left[1 + \theta(1-u^{1-\alpha})(1-v^{1-\beta}) \right]$$

şeklinde elde edilir. Burada eğer $\alpha = \beta = 1$ alınır, $C_{1,1}$ Galambos ailesi, $\alpha = \beta = 0$ alınır, Farlie Gumbel-Morgestein ailesi elde edilir.

Teorem 2.9.1. (Khoudraji)

$C \neq \Pi_2$ ve simetrik kopula olsun. C nin limit durumunu içeren kopulası $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha \neq \beta$, $C_{\alpha\beta}$ olmak üzere

$$C_{\alpha\beta}(u,v) = u^\alpha v^\beta C(u^{1-\alpha}, v^{1-\beta}) \quad (2.93)$$

dir [7].

Sonuç 2.9.3.

γ_1 ve γ_2 tarafından üretilen arşimedyen kopulaları sırasıyla A ve B olsun. $\forall \alpha, \beta \in I$ için

$$C_{\alpha\beta}(u,v) = \gamma_1^{-1}(\gamma_1(u^\alpha)) + \gamma_1(v^\beta) \gamma_2^{-1}(\gamma_2(u^{1-\alpha})) + \gamma_2(v^{1-\beta}) \quad (2.94)$$

kopulası α, β parametrelili simetrik olmayan kopuladır [7].

Örnek 2.9.5.

$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = (-Int)^{-\delta}, \delta \geq 1$ alınırsa A ve B Gumbel-Hougaard ailesi oluşturulur. 3 parametrelili kopula ailesi eşitlik (2.97)' den

$$C_{\alpha, \beta, \delta}(u, v) = \exp(-[(-\alpha Inu)^{\delta} + (-\beta Inv)^{\delta}]^{1/\delta} - [(-\bar{\alpha} Inu)^{\delta} + (-\bar{\beta} Inv)^{\delta}]^{1/\delta})$$

$\bar{\alpha} = 1 - \alpha, \quad \bar{\beta} = 1 - \beta$ şeklinde verilir ve Gumbel Hougaard ailesinin genelleştirilmiş diye tanımlanır [7].

3. UYGULAMA

Kopulalara uygulama olarak Roma, İstanbul, Bakü ve Tokyo şehirlerinin 01.01.2008 tarihinden 30.04.2009 tarihine kadar en düşük ve en yüksek sıcaklıklarını takip ederek 486 veri üzerinde çalışılmıştır. Çalışmanın amacı bölgeler arasındaki sıcaklıkların bağımlılık yapısını Kendal Tau ya dayanan yöntemlerle en iyi tahmin edecek kopula ailelerini bulmaktır. Bağımlılıkla ilgili Pearson korelasyon katsayısı çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Ancak bazı varsayımları kullanım alanını daraltmaktadır. Bu nedenle modelleme yaparken parametrik olmayan bağımlılık katsayısı olan Kendal Tau dan yararlanılmıştır. Bu yöntem yardımıyla veriye uygun kopula aileleri ve bu aileler için uygun parametreleri hesaplanarak tablolarda verilmiştir. Bağımlılık ölçüsü Kendal Tau arşimedyan kopulalarda sağladığı hesaplama kolaylığı sayesinde üstünlüğe sahiptir. Veriler eklerde sunulmaktadır. Analizler SPSS paket programı ile gerçekleştirilmiştir. Uygun kopula aileleri için parametre değerlerinden yararlanılarak her bir kopula ailesinin tek bir parametre değeri için Matlab 7.6.0' da kopula aileleri için farklı yönlerden grafikleri çizilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. En Düşük Sıcaklık Ölçümleri için Yapılan Analiz Sonuçları

Yapılan çalışmada amaç bölgeler arası günlük en düşük sıcaklığın bağımlılık yapısını Kendal Tau' ya dayanan yöntemler ile en iyi tahmin edecek kopula ailelerini ve bu kopulaların parametrelerini tahmin etmektir. Çalışmada ikili karşılaştırmalardan dolayı $\binom{4}{2}$ kadar korelasyon analizi tablosu elde edilmiştir. Korelasyon analizi tabloları aşağıda verilmiştir. Tablolarda Kendal Tau değerlerinin 1' e yakın olduğu görülmektedir. Bu da alınan bölgeler arasındaki günlük en düşük sıcaklık ilişkisinin pozitif yönde olduğunu gösterir. En düşük sıcaklıklar arasındaki bağımlılığı modellemede aşağıdaki korelasyon analizi tablolarında yer alan Kendal Tau değerleri yardımıyla en iyi tahmin edecek θ parametresine bağlı uygun kopula modelleri aşağıda sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.1. İstanbul-Roma arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Roma
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2- yönlü) N	1,000 . 486	0,675(**) ,000 486
Roma	Korelasyon katsayısı Önemlilik(2- yönlü) N	0,675(**) ,000 486	1,000 . 486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.2. İstanbul- Bakü arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Bakü
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2- yönlü) N	1,000 . 486	0,741(**) ,000 486
Bakü	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2- yönlü) N	0,741(**) ,000 486	1,000 . 486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.3. İstanbul-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Tokyo
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2-yönlü) N	1,000 . 486	0,708(**) ,000 486
Tokyo	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2- yönlü) N	0,708(**) ,000 486	1,000 . 486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.4. Roma-Bakü arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		Roma	Bakü
Kendall's tau_b Roma	Korelasyon katsayısı Önemlilik (2- yönlü) N	1,000 . 486	0,655(**) ,000 486
Bakü	Korelasyon katsayısı Önemlilik(2- yönlü) N	0,655(**) ,000 486	1,000 . 486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.5. Roma-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		Roma	Tokyo
Kendall's tau_b Roma	Korelasyon katsayısı Önemlilik.(2 yönlü) N	1,000 . 486	0,636(**) ,000 486
Tokyo	Korelasyon katsayısı Önemlilik.(2- yönlü) N	0,636(**) ,000 486	1,000 . 486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.6. Bakü-Tokyo arasındaki en düşük sıcaklık ilişkisi

		Bakü	Tokyo
Kendall's tau_b Bakü	Korelasyon katsayısı	1,000	0,707(**)
	Önemlilik(2-yönlü)	.	,000
	N	486	486
Tokyo	Korelasyon katsayısı	0,707(**)	1,000
	Önemlilik.(2-yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

4.1.1. Kendal Tau ve Gumbel Hougaard Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Gumbel Hougaard ailesi arasındaki bağıntı daha önce teorik kısımda da verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (4.1)$$

Bu denklemden yukarıda en düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri Tablo 4.7' de sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.7. Gumbel Hougaard için en düşük sıcaklıklarda parametre tahmini

	Gumbel Hougaard ($\theta \geq 1$)
İstanbul-Roma	$\theta = 3,076$
İstanbul-Bakü	$\theta = 3,861$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 3,424$
Roma-Bakü	$\theta = 2,898$
Roma-Tokyo	$\theta = 3,747$
Bakü-Tokyo	$\theta = 3,412$

Gumbel Hougaard ailesi için parametre aralığı $\theta \geq 1$ olup Tablo 4.7' de verilen değerlerle uyumludur.

4.1.2. Kendal Tau ve Clayton Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Clayton kopula ailesi arasında bağıntı daha önce teorik kısımda da verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (4.2)$$

Bu denklemden yukarıda düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri Tablo 4.8' de sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.8. Clayton için en düşük sıcaklıklarda parametre tahmini

	Clayton $(\theta \geq -1)$
İstanbul-Roma	$\theta = 4,153$
İstanbul-Bakü	$\theta = 5,722$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 4,849$
Roma-Bakü	$\theta = 3,797$
Roma-Tokyo	$\theta = 3,494$
Bakü-Tokyo	$\theta = 4,825$

Clayton için parametre aralığı $\theta \geq -1$ olup Tablo 4.8' de verilen değerlerle uyumludur.

4.1.3. Kendal Tau ve Gaussian (Normal) Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Gumbel Hougaard ailesi arasındaki bağıntı daha önce teorik kısımda da verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{2}{\pi} \arcsin \theta \quad (4.3)$$

Bu denklemden aşağıdaki en düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri Tablo 4.9' da sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.9. Gaussian için en düşük sıcaklıklarda parametre tahmini

	Gaussian $\theta \in [-1,1]$
İstanbul-Roma	$\theta = 0,0185$
İstanbul-Bakü	$\theta = 0,0203$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 0,0194$
Roma-Bakü	$\theta = 0,0179$
Roma-Tokyo	$\theta = 0,0174$
Bakü-Tokyo	$\theta = 0,0193$

Gaussian aile için parametre aralığı $\theta \geq -1$ olup Tablo 4.9' da verilen değerlerle uyumludur.

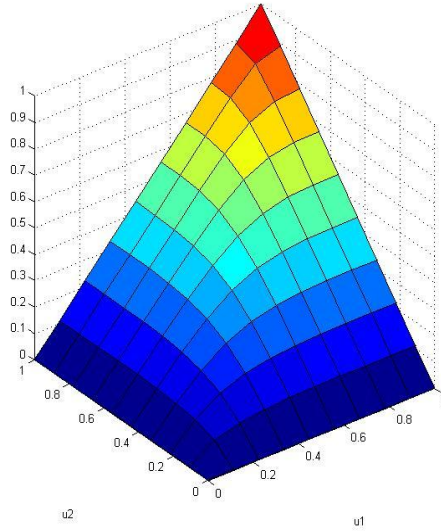
Gumbel Hougaard, Clayton ve Gaussian kopulalarının bölgeler arasındaki en düşük sıcaklık ölçümlerinin bağımlılık yapısını modellemede kullanılabileceğini gösterir. Buna göre θ değerlerine bağlı olarak her bir kopula ailesi aşağıdaki ifade gibi yazılabilir. Burada tablolardan alınan tek bir parametre değeri için

$$C_{3,076}(u, v) = e^{(-(lnu)^{-3,076} + (lnv)^{-3,076})^{1/3,076}} \quad (4.4)$$

$$C_{4,153}(u, v) = (\max(u^{-4,153} + v^{-4,153} - 1, 0))^{-1/4,153} \quad (4.4 a)$$

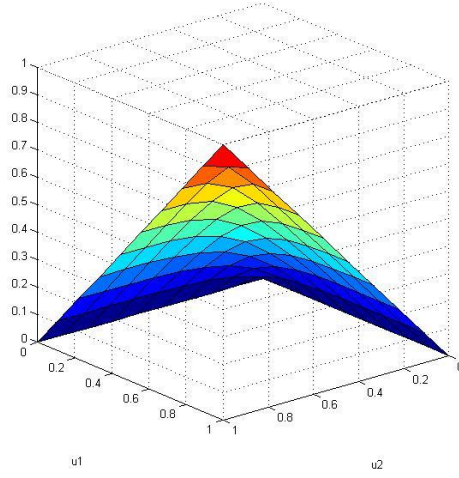
$$C(s, t) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(0,0185)^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2st + t^2}{2(1-(0,0185)^2)}\right) ds dt \quad (4.4 b)$$

(4.4), (4.4 a) ve (4.4 b) denklemlerinin $u=u_1$, $v=u_2$ alınarak grafikleri sırasıyla $u_2 - u_1$ yönlü ve $u_1 - u_2$ yönlü grafikleri aşağıda verilmiştir.



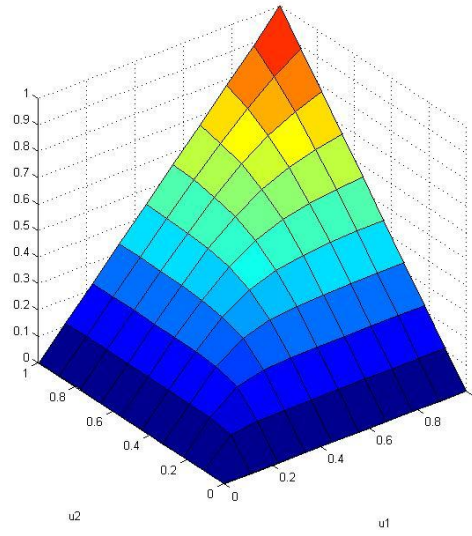
Şekil 4.1.a İstanbul-Roma için $\theta = 3,076$ parametrelili

Gumbel Hougaard Ailesi



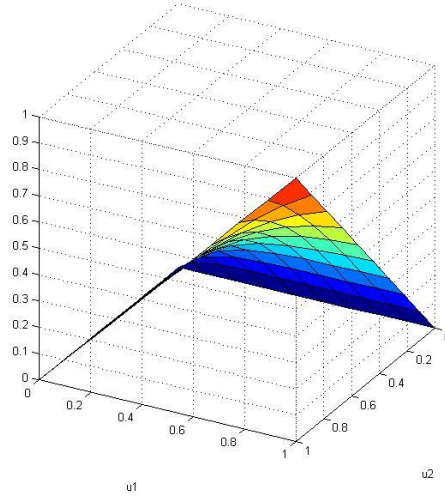
Şekil 4.1.b İstanbul-Roma için $\theta = 3,076$ parametrelili

Gumbel Hougaard Ailesi



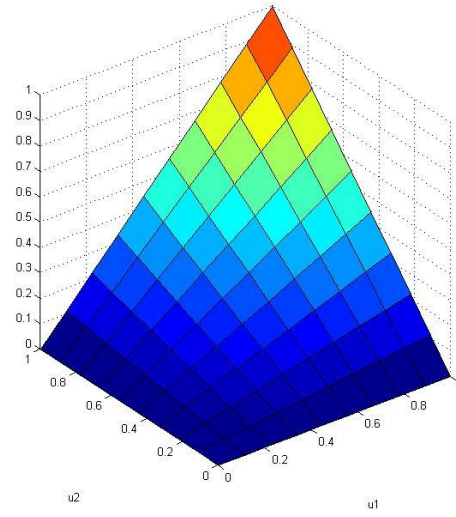
Şekil 4.2.a İstanbul-Roma için $\theta = 4,153$ parametrelili

Clayton Ailesi



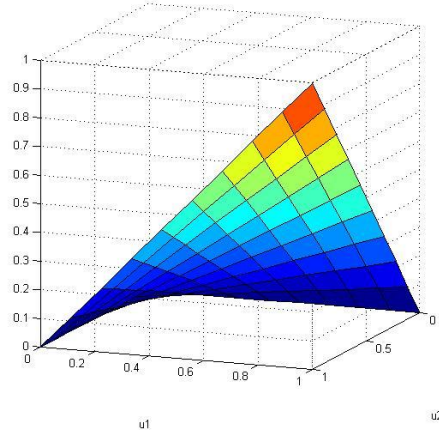
Şekil 4.2.b İstanbul-Roma için $\theta = 4,153$ parametreli

Clayton Ailesi



Şekil 4.3.a İstanbul-Roma için $\theta = 0,0185$ parametreli

Gaussian Ailesi



Şekil 4.3.b İstanbul-Roma için $\theta = 0,0185$ parametreli

Gaussian Ailesi

4.2. En Yüksek Sıcaklık Ölçümleri için Yapılan Analiz Sonuçları

Yapılan çalışmada amaç bölgeler arası günlük en yüksek sıcaklığın bağımlılık yapısını Kendal Tau dayanan yöntemler ile en iyi tahmin edecek kopula ailelerini ve bu kopulaların parametrelerini tahmin etmektir. Bu çalışmada da en düşük sıcaklıklara benzer sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmada ikili karşılaştırmalardan dolayı $\binom{4}{2}$ kadar korelasyon analizi tablosu elde edilmiştir. Korelasyon analizi tabloları aşağıda verilmiştir. Tablolarda Kendal Tau değerlerinin 1'e yakın olduğu görülmektedir. Bu da alınan bölgeler arasındaki günlük en yüksek sıcaklık ilişkisinin pozitif yönde olduğunu göstermiştir. En düşük sıcaklıklar arasındaki bağımlılığı modellemede aşağıdaki korelasyon analizi tablolarında yer alan Kendal Tau değerleri yardımıyla en iyi tahmin edecek θ parametresine bağlı uygun kopula modelleri aşağıda sırasıyla verilmiştir

Tablo 4.10. İstanbul-Roma arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Roma
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı	1,000	0,733(**)
	Önemlilik (2-yönlü)	.	,000
	N	486	486
Roma	Korelasyon katsayısı	0,733(**)	1,000
	Önemlilik (2-yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.11. İstanbul-Bakü arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Bakü
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı	1,000	0,701(**)
	Önemlilik (2-yönlü)	.	,000
	N	486	486
Bakü	Korelasyon katsayısı	0,701(**)	1,000
	Önemlilik (2-yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.12. İstanbul-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		İstanbul	Tokyo
Kendall's tau_b İstanbul	Korelasyon katsayısı	1,000	0,682(**)
	Önemlilik (2-yönlü)	.	,000
	N	486	486
Tokyo	Korelasyon katsayısı	0,682(**)	1,000
	Önemlilik (2- yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.13. Roma-Bakü arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		Roma	Bakü
Kendall's tau_b Roma	Korelasyon katsayısı	1,000	0,688(**)
	Önemlilik(2- yönlü)	.	,000
	N	486	486
Bakü	Korelasyon katsayısı	0,688(**)	1,000
	Önemlilik (2- yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü).

Tablo 4.14. Roma-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		Roma	Tokyo
Kendall's tau_b Roma	Korelasyon katsayısı	1,000	0,717(**)
	Önemlilik (2- yönlü)	.	,000
	N	486	486
Tokyo	Korelasyon katsayısı	0,717(**)	1,000
	Önemlilik (2- yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü)

Tablo 4.15. Bakü-Tokyo arasındaki en yüksek sıcaklık ilişkisi

		Bakü	Tokyo
Kendall's tau_b Bakü	Korelasyon katsayısı	1,000	0,699(**)
	Önemlilik (2- yönlü)	.	,000
	N	486	486
Tokyo	Korelasyon katsayısı	0,699(**)	1,000
	Önemlilik (2- yönlü)	,000	.
	N	486	486

** Korelasyon %1 önem seviyesinde (2-yönlü).

4.2.1. Kendal Tau ve Gumbel Hougaard Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Gumbel Hougaard ailesi arasındaki bağıntı daha önce teorik kısımda verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (4.5)$$

Bu denklemden aşağıdaki en düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri Tablo 4.16’ da sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.16. Gumbel Hougaard için en düşük sıcaklıklarda parametre tahmini

	Gumbel Hougaard ($\theta \geq 1$)
İstanbul-Roma	$\theta = 3,745$
İstanbul-Bakü	$\theta = 3,344$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 3,144$
Roma-Bakü	$\theta = 3,205$
Roma-Tokyo	$\theta = 3,533$
Bakü-Tokyo	$\theta = 3,322$

Gumbel Hougaard ailesi için parametre aralığı $\theta \geq 1$ olup Tablo 4.16’ da verilen değerlerle uyumludur.

4.2.2. Kendal Tau ve Clayton Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Clayton kopula ailesi arasındaki bağıntı daha önce teorik kısımda verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (4.6)$$

Bu denklemden aşağıdaki en düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri tablo 4.17’ de sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.17. Clayton için en düşük sıcaklıklarda parametre tahmini

	Clayton ($\theta \geq -1$)
İstanbul-Roma	$\theta = 5,490$
İstanbul-Bakü	$\theta = 4,688$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 4,289$
Roma-Bakü	$\theta = 4,410$
Roma-Tokyo	$\theta = 5,067$
Bakü-Tokyo	$\theta = 4,644$

Clayton ailesi için parametre aralığı $\theta \geq -1$ olup Tablo 4.17’ de verilen değerlerle uyumludur.

4.2.3. Kendal Tau ve Gaussian Ailesinin Tahmini

Kendal Tau ve Gumbel Hougaard ailesi arasındaki bağıntı daha önce teorik kısımda da verilmiştir.

$$\tau_K(\theta) = \frac{2}{\pi} \arcsin \theta \quad (4.7)$$

Bu denklemden aşağıdaki en düşük sıcaklıklar için verilen korelasyon tablolarındaki Kendal Tau ailesinin parametre tahminleri tablo 4.18' de sırasıyla verilmiştir.

Tablo 4.18. Gaussian Ailesi için en yüksek sıcaklıklarda parametre tahmini

	Gaussian $\theta \in [-1,1]$
İstanbul-Roma	$\theta = 0,0201$
İstanbul-Bakü	$\theta = 0,0192$
İstanbul-Tokyo	$\theta = 0,0187$
Roma-Bakü	$\theta = 0,0188$
Roma-Tokyo	$\theta = 0,0196$
Bakü-Tokyo	$\theta = 0,0191$

Gaussian için parametre aralığı $\theta \geq -1$ olup Tablo 4.18' de verilen değerlerle uyumludur.

Düşük sıcaklıklar modellemeye olduğu gibi yüksek sıcaklıklar arasındaki ilişkiye en uygun kopulalar Gumbel Hougaard, Clayton arşimedian kopulaları ve Gaussian kopula aileleridir. Buna göre buradaki parametreler yardımıyla her bir kopula için

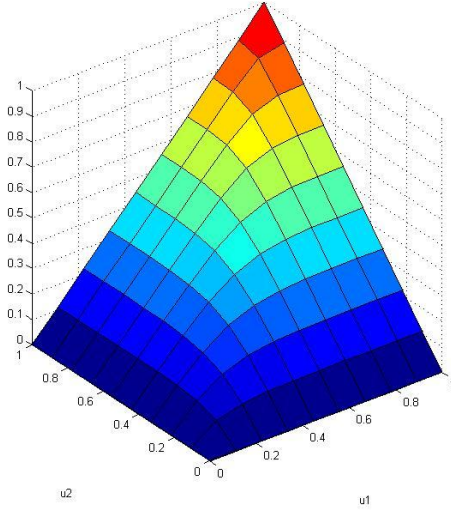
$$C_{3,745}(u, v) = e^{-(\ln u)^{-3,745} + (\ln v)^{-3,745}} \quad (4.8)$$

$$C_{5,490}(u, v) = (\max(u^{-5,490} + v^{-5,490} - 1, 0))^{-1/5,490} \quad (4.8 a)$$

$$C(s, t) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-0,0201^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2st + t^2}{2(1-0,0201^2)}\right) ds dt \quad (4.8.b)$$

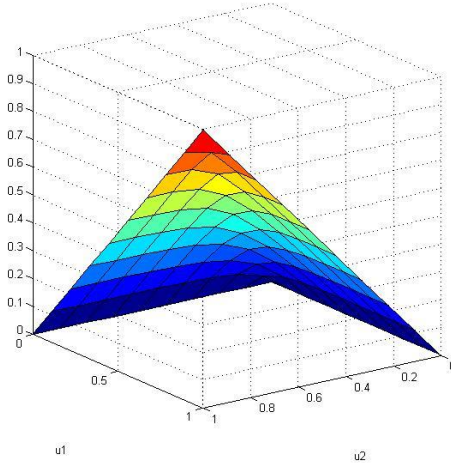
şeklinde yazılabilir.

(4.8) , (4.8 a) ve (4.8.b) denklemlerinin $u=u_1$, $v=u_2$ alınarak grafikleri sırasıyla $u_2 - u_1$ yönlü ve $u_1 - u_2$ yönlü grafikleri aşağıda verilmiştir.



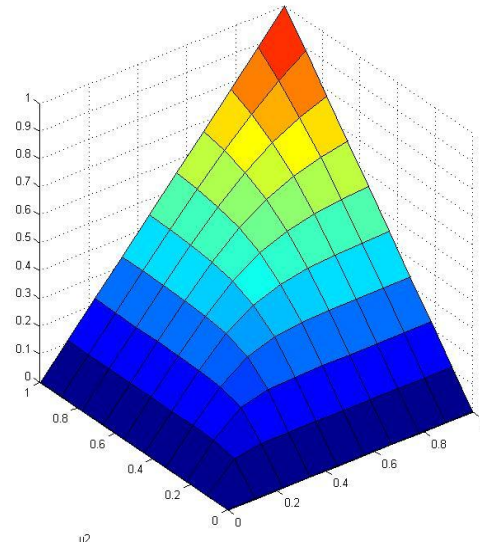
Şekil 4.4.a İstanbul-Roma için $\theta = 3,745$ parametreli

Gumbel Hougaard Ailesi



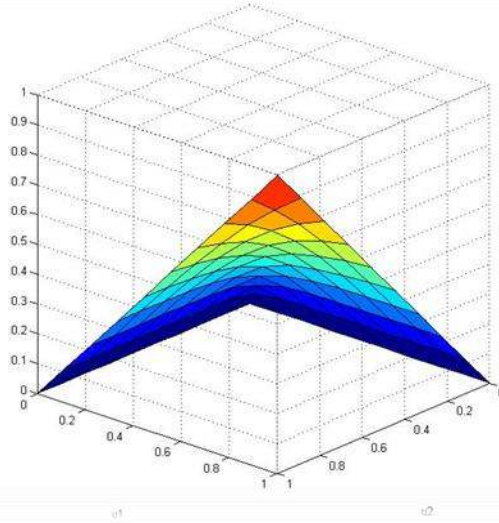
Şekil 4.4.b İstanbul-Roma için $\theta = 3,745$ parametreli

Gumbel Hougaard Ailesi



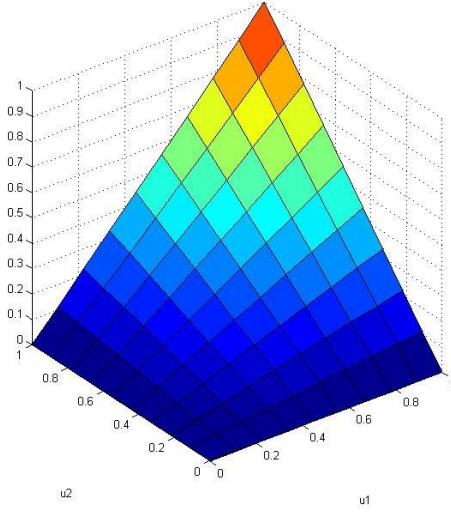
Şekil 4.5.a İstanbul-Roma için $\theta = 4,153$ parametrelili

Clayton Ailesi



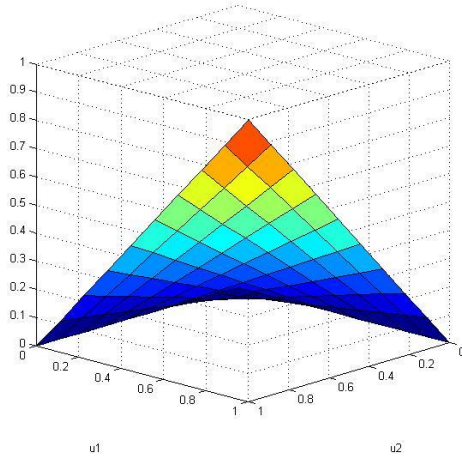
Şekil 4.5.b İstanbul-Roma Clayton $\theta = 4,153$ parametrelili

Clayton Ailesi



Şekil 4.6.a İstanbul-Roma için $\theta = 0,0201$ parametrelili

Gaussian Ailesi



Şekil 4.6.b İstanbul-Roma için $\theta = 0,0201$ parametrelili

Gaussian Ailesi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan çalışmada kopula tahmin yöntemleri üzerinde durulmuş dört farklı şehrin günlük en yüksek ve en düşük sıcaklıkları kullanılarak uygulama yapılmıştır.

Uygulamada dünya üzerindeki dört şehrin en düşük ve en yüksek sıcaklıkları arasında ne tür bir ilişki olduğunu araştırmak için 01.01.2008 tarihinden 30.04.2009 tarihine kadar olan zaman aralığında dört şehrin sıcaklıklarından 486 birimlik veri kümesi kullanılmış kopula kavramı ile modellenmesi üzerine kurulmuştur. Uygulanabilirliği diğer yöntemlere göre daha kolay olan parametrik olmayan kopula tahmin yöntemleriyle değişik kopula aileleri seçilerek tahminlerde bulunulmuş ve Gumbel Hougaard, Clayton ve Gaussian kopula ailelerinin istatistiksel olarak veri kümemize diğer ailelere göre daha iyi uyduğu görülmüştür. Gumbel Hougaard ve Clayton Ailesi arşimedyan kopula sınıfından olup hesaplamada sağladığı kolaylığıyla tercih edilir. Yapılan çalışma sadece Kendal tau bağımlılık ölçüsü kullanılarak parametreler hesaplanmıştır. Diğer bir parametrik olmayan ilişki katsayısı Spearman Rho' da istenirse veri için kullanılabilir ancak Spearman Rho hesabı Kendal Tau kadar kolay değildir. Kendal Tau' nun teorik kısımda verilen özellikle arşimedyan kopula aileleri için üretici fonksiyona bağlı hesaplama ya da kopulanın türevlerine bağlı olarak hesaplama kolaylığı sayesinde Spearman rho' ya göre tercih edilmesinin nedenlerinden bazılarıdır. Bu çalışma veri için önce deneysel kopula tanımlanıp deneysel kopula üzerinden parametre tahmini yapıp istenen değerler elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Abozou K. T.**, 2007. Copulas in Statistics, *Msc Thesis*, African Institute for Math. Sciences.
- [2] **Alsina C. and Bonet E.**, 1979. On Sums of Uniformly Distributed Random Variables, *Stochastica*, **3**, 2 .
- [3] **Bouyé E.**, 2000. Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications Financial Econometrics, London.
- [4] **Çelebioglu, S.**, 2003. Arşimedyen kapulalar ve bir uygulama, *Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, **22**,43-52.
- [5] **De Matteis R.**, 2001. Fiting Copulas To Data, *Diploma thesis*, Institute of Math. of Univesity of Zurich.
- [6] **Genest, C., Rivest, L.**, 1993. Stat. inference procedures for bivariate archimedean copulas, *Journal America Statistic Associative*. **88**, 1034-1043.
- [7] **Gianfausto, S., Carlo D. M., Nathabandu T., Kottegoda and Renzo R.**, 2007. *Extremes In Nature*, Springer.
- [8] **Joe, H.**, 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts* , Chapman & Hall, London.
- [9] **Kotz S., Nadarajah S.**, 2000. *Extreme Value Distributions Theory and Applications*.
- [10] **Kotz S.**, 2001. *Correlation and Dependence*, George Washington University, USA.
- [11] **Özbakiş Y. G.**, 2006. Bazı Kopula Tahmin Yöntemleri ve Bir Uygulama, *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Bilim ANKARA.
- [12] **Nelsen R.**, 1998. *An introduction to copulas*, Springer.
- [13] **Nelsena R. B, Quesada-Molina J., Rodriguez J. A U'beda-Flores L. M.**, 2006. On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal Sect., *Mathematics and Economics*, **42**, 473-483.
- [14] **Shabazov A.**, 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınları.
- [15] **Shih J. H., Louis T.A.**, 1995. Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data, *Biometrics*, **51**, 1384,1399.
- [16] **Yağcı B.**, 2002. Archimedian Kopulanın Genelleştirilmesi ve Archimax Kopulalar *Yüksek Lisans Tezi*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara.

- [17] **Yapakçı G.**, 2007. Kopulalar Teorisinin Finasta Uygulamaları, *Yüksek Lisans Tezi*, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

EKLER

EK -1 Önemli kopula aileleri, üreteçleri, Kendal Tau ve Spearman Rho

Kopula Ailesi	Üretici $\gamma(t)$	Paremetre (θ, α, β)	Kendal Tau $\tau_K(\theta)$	Spearman Rho $\rho_S(\theta)$
Gumbel Hougaard Ailesi	$(-Int)^\theta$	$\theta \geq 1$	$\frac{\theta-1}{\theta}$	-
Clayton Ailesi	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq -1$	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-
Alı Mikhail Haq Ailesi	$ln\left(\frac{1-\theta(t-1)}{t}\right)$	$\theta \in [-1,1]$	$1 - \frac{2(\theta + (1-\theta)^2 \ln(1-\theta))}{3\theta^2}$	
Farlie-Gumbel Morgenstein Ailesi	-	$\theta \in [-1,1]$	$\frac{2\theta}{9}$	$\frac{\theta}{3}$
Elliptical Aile	-	$\theta \in [-1,1]$	$\frac{2}{\Pi} \arcsin \theta$	$\frac{6}{\Pi} \arcsin \frac{\theta}{2}$
Frechet-Mardia Ailesi	-	$\alpha, \beta \geq 0$	$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$	$\alpha - \beta$
Frank Ailesi	$-ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right)$	$\theta \geq 0$	$1 - 4 \frac{D_1(-ln\theta) - 1}{ln\theta}$	$1 - 12 \frac{D_2(-ln\theta) - D_1(-ln\theta)}{ln\theta}$
Joe Ailesi	$-\ln[1 - (1-t)^\theta]$	$\theta > 1$	-	-
Marshall Olkin Ailesi	-	$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}$	$\frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}$

EK-2 2008–2009 En Düşük ve En Yüksek Sıcaklık Ölçümleri

TARİH	İSTANBUL		ROMA		BAKÜ		TOKYO	
	En düş.	En yük.	En düş.	En yük.	En düş.	En yük.	En düş.	En yük.
01.Oca.08	2	9	2	12	2	6	6	11
02.Oca.08	4	8	0	10	4	6	-5	10
03.Oca.08	-1	3	4	12	1	4	-5	10
04.Oca.08	-1	3	3	13	-2	0	2	8
05.Oca.08	-1	4	7	16	-3	0	0	8
06.Oca.08	-2	6	8	16	-3	0	-3	11
07.Oca.08	1	5	7	15	-3	-1	5	11
08.Oca.08	2	9	5	14	-5	-4	5	12
09.Oca.08	1	7	8	13	1	2	2	12
10.Oca.08	0	6	10	13	0	2	2	12
11.Oca.08	1	6	6	16	-4	2	5	10
12.Oca.08	1	7	7	15	-5	0	4	12
13.Oca.08	0	9	5	11	-4	1	1	8
14.Oca.08	0	8	3	12	-3	1	0	7
15.Oca.08	2	9	5	10	-1	5	0	5
16.Oca.08	2	9	5	14	-2	6	1	6
17.Oca.08	3	11	10	14	-6	3	0	8
18.Oca.08	4	11	5	12	-6	3	0	9
19.Oca.08	6	10	4	15	0	3	1	6
20.Oca.08	5	9	4	15	-1	3	2	5
21.Oca.08	3	11	6	14	0	5	0	3
22.Oca.08	4	12	9	15	1	7	0	5
23.Oca.08	4	11	5	12	1	6	0	4
24.Oca.08	3	6	2	11	2	7	0	4
25.Oca.08	3	7	4	13	0	5	0	5
26.Oca.08	3	8	4	15	-4	6	0	7
27.Oca.08	2	10	4	12	-1	6	1	8
28.Oca.08	3	4	5	14	1	9	0	7
29.Oca.08	2	4	6	15	2	8	3	7
30.Oca.08	1	6	8	15	0	6	0	11
31.Oca.08	0	7	6	15	-4	1	1	6
01.Şub.08	1	10	5	15	0	2	-2	9
02.Şub.08	3	12	8	16	1	3	1	8
03.Şub.08	3	11	6	14	-2	5	3	6
04.Şub.08	5	11	11	14	-3	5	-12	5
05.Şub.08	4	9	5	14	-1	6	-11	5
06.Şub.08	3	9	8	15	-2	6	1	7
07.Şub.08	3	9	3	16	1	7	1	10

08.Şub.08	4	9	2	14	2	6	1	10
09.Şub.08	5	9	2	14	1	5	1	10
10.Şub.08	5	7	2	13	1	7	0	10
11.Şub.08	4	6	1	12	3	7	0	10
12.Şub.08	3	7	2	12	0	3	3	10
13.Şub.08	1	6	3	13	-1	2	1	8
14.Şub.08	2	5	3	13	0	5	-4	8
15.Şub.08	1	5	1	13	-2	3	0	7
16.Şub.08	1	3	0	11	-4	9	-7	7
17.Şub.08	0	2	0	5	3	7	-7	7
18.Şub.08	-3	1	0	10	0	7	-2	10
19.Şub.08	-3	6	2	12	1	14	-2	8
20.Şub.08	0	9	5	13	-2	15	-2	10
21.Şub.08	4	11	8	14	-1	1	2	10
22.Şub.08	6	10	6	15	0	6	3	11
23.Şub.08	4	11	4	14	3	10	0	11
24.Şub.08	6	1	5	14	4	11	1	10
25.Şub.08	4	10	8	14	2	5	-1	7
26.Şub.08	4	12	7	16	6	10	0	11
27.Şub.08	5	13	8	15	7	11	3	12
28.Şub.08	7	14	6	16	7	12	0	11
29.Şub.08	8	15	5	16	5	13	2	8
01.Mar.08	5	17	9	17	5	11	0	15
02.Mar.08	10	15	6	18	5	13	5	12
03.Mar.08	9	17	8	16	7	12	2	12
04.Mar.08	7	18	8	16	8	11	2	10
05.Mar.08	12	17	4	14	9	14	3	8
06.Mar.08	8	14	3	11	8	18	-1	11
07.Mar.08	7	14	3	15	8	17	-1	12
08.Mar.08	7	14	3	11	8	17	-1	12
09.Mar.08	8	15	5	14	4	12	1	13
10.Mar.08	7	15	8	15	3	14	2	13
11.Mar.08	7	15	8	15	3	14	2	13
12.Mar.08	9	15	5	16	5	9	8	17
13.Mar.08	8	14	7	16	5	10	7	17
14.Mar.08	8	13	5	15	5	9	8	18
15.Mar.08	6	17	7	16	5	12	8	14
16.Mar.08	8	16	7	16	5	14	7	17
17.Mar.08	9	18	7	16	4	11	8	14
18.Mar.08	12	16	7	16	6	14	10	17
19.Mar.08	12	18	5	16	10	20	11	17
20.Mar.08	9	13	5	14	9	18	8	14
21.Mar.08	8	12	3	15	8	19	6	15

22.Mar.08	6	18	10	15	8	20	5	15
23.Mar.08	9	17	4	13	8	17	10	15
24.Mar.08	13	21	4	13	5	15	12	16
25.Mar.08	11	14	4	16	8	16	12	15
26.Mar.08	9	13	5	17	10	21	11	16
27.Mar.08	5	14	7	15	9	17	3	14
28.Mar.08	8	15	4	17	11	16	9	17
29.Mar.08	7	12	7	17	6	18	0	16
30.Mar.08	7	11	5	15	5	17	0	17
31.Mar.08	7	11	7	14	6	18	1	16
01.Nis.08	7	12	8	19	13	18	8	15
02.Nis.08	6	15	6	16	10	21	0	16
03.Nis.08	7	14	5	18	7	12	2	19
04.Nis.08	8	15	4	16	6	13	7	17
05.Nis.08	7	16	4	19	6	11	3	18
06.Nis.08	10	16	7	17	8	18	10	19
07.Nis.08	9	15	8	16	5	15	10	15
08.Nis.08	9	19	8	17	8	13	10	16
09.Nis.08	8	18	8	17	7	12	13	16
10.Nis.08	10	18	10	20	7	14	9	14
11.Nis.08	12	21	8	17	6	14	6	15
12.Nis.08	13	24	8	16	11	20	11	18
13.Nis.08	16	25	8	16	8	16	10	13
14.Nis.08	14	19	7	17	8	17	9	14
15.Nis.08	11	18	8	15	8	17	8	13
16.Nis.08	11	18	7	16	9	15	12	20
17.Nis.08	11	18	7	17	11	15	12	21
18.Nis.08	11	21	8	18	5	12	11	20
19.Nis.08	10	20	9	17	9	17	11	15
20.Nis.08	14	23	11	17	7	14	9	14
21.Nis.08	15	22	12	15	7	17	9	14
22.Nis.08	14	25	8	17	8	16	11	21
23.Nis.08	16	21	8	19	10	20	14	18
24.Nis.08	14	18	10	18	17	27	15	19
25.Nis.08	12	19	7	18	11	21	12	17
26.Nis.08	10	14	8	20	11	16	10	17
27.Nis.08	11	14	6	18	11	19	6	16
28.Nis.08	10	16	8	17	16	30	11	18
29.Nis.08	11	17	9	18	15	31	12	17
30.Nis.08	10	18	9	18	14	26	16	23
01.May.08	11	19	9	18	12	16	14	20
02.May.08	12	20	9	20	11	16	12	19

03.May.08	13	20	8	19	11	17	16	21
04.May.08	12	16	9	19	15	20	16	22
05.May.08	12	17	10	20	11	16	15	21
06.May.08	12	18	9	19	10	14	12	22
07.May.08	10	18	9	20	7	15	11	22
08.May.08	12	17	10	20	9	18	12	21
09.May.08	10	16	11	22	10	18	9	19
10.May.08	8	18	12	22	11	17	12	15
11.May.08	10	19	12	21	11	17	12	16
12.May.08	10	18	10	19	11	17	13	17
13.May.08	10	20	9	21	10	19	11	16
14.May.08	11	20	10	20	11	17	9	16
15.May.08	12	20	12	20	12	20	10	16
16.May.08	11	21	11	20	12	20	12	20
17.May.08	12	22	13	21	12	18	12	22
18.May.08	13	23	13	18	14	19	14	21
19.May.08	14	26	13	26	14	22	14	17
20.May.08	15	27	9	19	16	23	16	24
21.May.08	18	30	10	20	17	24	16	26
22.May.08	18	26	12	22	18	29	13	24
23.May.08	15	25	11	20	17	28	14	25
24.May.08	18	26	12	23	16	27	17	25
25.May.08	14	26	15	26	16	28	17	23
26.May.08	17	26	13	22	17	24	16	22
27.May.08	17	27	14	25	16	24	17	22
28.May.08	17	30	13	22	17	22	17	23
29.May.08	19	24	14	23	17	25	16	22
30.May.08	18	24	13	21	15	20	16	22
31.May.08	16	25	12	26	16	22	16	21
01.Haz.08	17	27	13	23	14	23	12	15
02.Haz.08	18	24	15	22	14	24	12	15
03.Haz.08	16	24	13	24	16	24	13	15
04.Haz.08	15	25	13	22	15	23	12	16
05.Haz.08	17	25	13	25	14	22	16	24
06.Haz.08	18	25	11	25	15	21	21	28
07.Haz.08	17	22	11	22	16	23	16	24
08.Haz.08	18	24	12	22	18	29	19	24
09.Haz.08	17	25	12	22	17	22	18	22
10.Haz.08	17	23	13	22	14	23	17	22
11.Haz.08	17	25	16	24	16	24	17	28
12.Haz.08	18	27	13	22	18	25	18	22
13.Haz.08	17	29	12	25	19	25	15	25

14.Haz.08	19	27	13	25	18	26	16	25
15.Haz.08	19	26	12	23	18	25	18	22
16.Haz.08	19	27	14	23	18	25	17	23
17.Haz.08	20	29	15	24	20	26	19	26
18.Haz.08	20	30	16	24	18	27	18	24
19.Haz.08	21	31	14	25	16	26	17	23
20.Haz.08	21	28	14	26	15	25	16	24
21.Haz.08	20	28	16	26	18	28	21	25
22.Haz.08	21	28	17	27	17	26	21	26
23.Haz.08	21	28	15	25	19	28	21	30
24.Haz.08	21	31	16	25	19	22	18	24
25.Haz.08	22	33	16	25	19	24	18	24
26.Haz.08	22	33	16	25	21	25	17	21
27.Haz.08	22	33	17	27	21	28	18	26
28.Haz.08	21	33	17	26	21	27	19	25
29.Haz.08	22	31	17	26	21	27	19	25
30.Haz.08	21	31	19	27	21	27	19	25
01.Tem.08	22	32	17	30	17	26	19	25
02.Tem.08	22	31	18	27	18	26	18	26
03.Tem.08	21	29	18	27	20	27	20	25
04.Tem.08	21	30	19	27	20	24	20	25
05.Tem.08	22	31	19	28	18	27	24	29
06.Tem.08	21	29	19	28	18	27	21	27
07.Tem.08	22	30	19	28	20	28	20	28
08.Tem.08	19	29	18	29	15	31	21	26
09.Tem.08	22	30	17	26	20	25	21	24
10.Tem.08	21	30	17	26	19	27	20	25
11.Tem.08	20	30	18	26	20	26	20	25
12.Tem.08	21	29	17	26	21	27	23	30
13.Tem.08	22	30	17	25	21	27	23	30
14.Tem.08	21	30	17	28	25	29	23	28
15.Tem.08	20	32	16	29	24	30	24	30
16.Tem.08	22	27	17	27	21	26	22	28
17.Tem.08	19	26	17	26	20	30	24	31
18.Tem.08	21	29	17	26	21	29	25	30
19.Tem.08	21	31	16	28	21	27	25	28
20.Tem.08	20	30	16	26	23	30	23	30
21.Tem.08	21	31	17	26	23	30	23	27
22.Tem.08	21	30	17	27	23	29	23	29
23.Tem.08	22	33	15	26	24	30	25	32
24.Tem.08	22	28	16	26	23	31	22	30
25.Tem.08	21	29	17	26	24	31	21	31

26.Tem.08	21	30	17	27	24	32	22	31
27.Tem.08	20	29	16	25	24	32	25	30
28.Tem.08	22	29	17	26	24	30	24	30
29.Tem.08	22	29	17	26	24	32	25	32
30.Tem.08	21	29	17	26	26	31	22	29
31.Tem.08	22	30	18	27	25	29	21	30
01.Ağu.08	21	28	18	27	25	30	22	30
02.Ağu.08	22	29	17	27	24	29	21	29
03.Ağu.08	22	29	19	28	24	29	20	28
04.Ağu.08	23	29	18	28	23	29	26	31
05.Ağu.08	21	29	18	28	23	32	25	28
06.Ağu.08	21	32	18	29	26	33	25	30
07.Ağu.08	21	31	19	30	24	30	25	32
08.Ağu.08	24	30	19	28	22	26	25	32
09.Ağu.08	24	30	18	28	22	25	25	32
10.Ağu.08	20	29	19	28	24	28	26	33
11.Ağu.08	20	29	19	28	22	29	25	28
12.Ağu.08	21	31	19	28	23	29	26	29
13.Ağu.08	21	31	19	28	23	29	27	30
14.Ağu.08	22	31	18	27	23	29	26	31
15.Ağu.08	22	33	17	32	26	31	25	32
16.Ağu.08	23	33	18	27	22	30	23	32
17.Ağu.08	23	34	18	27	23	31	19	23
18.Ağu.08	23	33	17	27	23	33	23	27
19.Ağu.08	21	30	17	27	23	33	23	31
20.Ağu.08	23	32	17	26	22	30	21	30
21.Ağu.08	24	33	18	30	23	32	22	29
22.Ağu.08	24	34	18	27	23	30	22	25
23.Ağu.08	25	33	18	27	25	35	20	25
24.Ağu.08	24	33	17	27	22	29	22	27
25.Ağu.08	24	32	18	26	23	33	22	29
26.Ağu.08	23	31	17	26	25	32	22	29
27.Ağu.08	24	32	17	27	25	32	21	28
28.Ağu.08	25	32	16	28	21	25	23	28
29.Ağu.08	23	30	17	26	23	29	23	26
30.Ağu.08	23	31	17	26	23	30	20	28
01.Eyl.08	19	27	17	28	19	30	24	28
02.Eyl.08	21	28	17	27	21	26	17	21
03.Eyl.08	22	28	17	26	22	25	24	29
04.Eyl.08	21	29	18	27	24	28	22	26
05.Eyl.08	19	29	18	27	23	28	21	26
06.Eyl.08	19	29	19	29	20	25	23	29

07.Eyl.08	20	29	18	27	21	26	22	27
08.Eyl.08	21	30	17	27	21	26	21	28
09.Eyl.08	20	29	16	26	21	28	19	27
10.Eyl.08	20	27	18	27	20	29	21	26
11.Eyl.08	20	29	18	27	22	26	17	27
12.Eyl.08	18	29	16	29	18	27	23	29
13.Eyl.08	19	31	17	26	21	28	22	28
14.Eyl.08	20	28	18	29	19	28	20	27
15.Eyl.08	21	29	15	25	19	23	21	24
16.Eyl.08	22	30	15	25	19	23	21	24
17.Eyl.08	20	26	12	24	19	24	19	25
18.Eyl.08	17	23	12	24	17	22	20	26
19.Eyl.08	15	23	12	24	17	22	19	25
20.Eyl.08	17	25	13	26	18	24	21	25
21.Eyl.08	14	19	11	20	19	25	21	23
22.Eyl.08	15	21	10	22	19	25	19	22
23.Eyl.08	15	21	12	22	19	25	19	26
24.Eyl.08	14	21	12	20	15	21	18	20
25.Eyl.08	15	23	11	22	19	23	20	26
26.Eyl.08	16	22	11	23	19	23	20	28
27.Eyl.08	17	18	10	22	15	19	17	24
28.Eyl.08	13	17	11	21	14	18	15	20
29.Eyl.08	13	17	12	21	14	16	15	17
30.Eyl.08	13	20	12	22	12	16	16	19
01.Eki.08	13	22	12	23	18	23	17	20
02.Eki.08	14	24	15	23	18	21	13	21
03.Eki.08	17	23	14	22	15	19	18	22
04.Eki.08	17	23	12	21	12	20	17	23
05.Eki.08	19	24	8	21	14	18	18	20
06.Eki.08	15	22	12	23	14	25	18	22
07.Eki.08	13	21	15	22	15	23	19	24
08.Eki.08	14	21	12	22	16	21	19	23
09.Eki.08	15	21	12	23	16	21	18	23
10.Eki.08	14	21	12	22	15	20	14	23
11.Eki.08	15	19	12	22	13	18	14	22
12.Eki.08	14	20	11	21	13	17	14	23
13.Eki.08	14	21	12	22	13	21	13	21
14.Eki.08	15	22	12	22	14	20	17	22
15.Eki.08	16	21	12	22	13	22	18	22
16.Eki.08	16	20	13	21	14	20	17	22
17.Eki.08	15	23	14	21	14	20	15	22
18.Eki.08	15	19	12	21	15	20	12	22

19.Eki.08	15	21	12	22	16	20	16	21
20.Eki.08	15	21	13	23	14	19	14	20
21.Eki.08	14	19	15	21	15	21	13	21
22.Eki.08	14	20	14	20	12	18	12	19
23.Eki.08	15	18	12	21	13	16	10	23
24.Eki.08	14	18	12	21	11	19	19	21
25.Eki.08	13	17	13	23	12	22	18	21
26.Eki.08	13	16	12	21	12	16	14	22
27.Eki.08	13	18	11	21	11	15	12	20
28.Eki.08	12	18	12	21	8	15	8	18
29.Eki.08	11	19	13	23	9	15	10	21
30.Eki.08	11	22	10	20	9	16	13	19
31.Eki.08	15	22	12	22	9	16	10	20
01.Kas.08	13	21	13	21	6	17	8	21
02.Kas.08	13	22	14	22	7	18	10	20
03.Kas.08	13	20	14	22	9	18	10	20
04.Kas.08	14	19	12	23	11	14	12	18
05.Kas.08	13	19	13	21	10	15	5	16
06.Kas.08	12	19	9	18	9	18	15	21
07.Kas.08	14	20	8	18	8	14	13	17
08.Kas.08	13	19	8	18	4	7	14	16
09.Kas.08	13	18	10	18	8	12	10	12
10.Kas.08	13	18	9	19	6	11	10	15
11.Kas.08	14	18	9	19	4	12	9	14
12.Kas.08	11	17	10	19	8	14	11	18
13.Kas.08	9	15	9	17	8	14	6	18
14.Kas.08	11	16	8	18	6	12	13	20
15.Kas.08	7	16	10	17	3	14	8	18
16.Kas.08	8	16	8	18	5	16	13	18
17.Kas.08	8	16	8	18	7	14	9	18
18.Kas.08	9	14	6	16	7	14	10	18
19.Kas.08	11	14	9	17	10	14	2	11
20.Kas.08	10	14	8	18	7	14	7	14
21.Kas.08	11	17	10	19	10	14	7	15
22.Kas.08	14	19	8	16	11	16	9	15
23.Kas.08	5	10	6	13	10	18	2	15
24.Kas.08	5	12	6	16	12	17	6	14
25.Kas.08	8	19	7	15	12	14	10	15
26.Kas.08	14	20	5	14	8	14	7	14
27.Kas.08	8	12	4	14	10	15	10	16
28.Kas.08	5	10	7	19	9	14	5	12
29.Kas.08	4	11	7	18	7	12	9	16

30.Kas.08	6	14	7	16	7	13	10	14
01.Ara.08	13	17	8	17	8	13	2	10
02.Ara.08	10	18	6	15	8	12	8	15
03.Ara.08	11	18	3	15	7	11	7	14
04.Ara.08	13	18	5	13	4	10	10	16
05.Ara.08	16	18	10	17	4	12	6	14
06.Ara.08	12	18	8	16	7	14	6	11
07.Ara.08	10	16	7	16	5	13	5	12
08.Ara.08	9	11	5	15	7	13	8	14
09.Ara.08	6	8	6	16	7	12	5	17
10.Ara.08	4	10	6	16	4	8	10	16
11.Ara.08	5	12	8	16	3	5	9	17
12.Ara.08	5	14	6	15	4	9	11	16
13.Ara.08	9	15	5	14	4	9	10	14
14.Ara.08	7	14	6	14	-2	9	4	10
15.Ara.08	10	15	5	15	0	6	8	14
16.Ara.08	9	16	5	14	1	6	6	12
17.Ara.08	8	15	7	15	-3	4	4	10
18.Ara.08	9	15	4	12	1	7	9	13
19.Ara.08	10	16	5	13	2	8	8	13
20.Ara.08	8	12	4	14	-1	6	7	15
21.Ara.08	8	11	4	15	-2	6	4	15
22.Ara.08	7	9	6	15	4	10	12	17
23.Ara.08	6	9	6	14	4	10	5	11
24.Ara.08	1	4	5	16	4	10	5	10
25.Ara.08	2	4	6	14	2	13	0	14
26.Ara.08	1	8	1	11	4	8	4	7
27.Ara.08	3	7	2	11	2	6	2	9
28.Ara.08	-1	6	2	11	2	7	6	13
29.Ara.08	2	6	5	13	4	7	-3	13
30.Ara.08	1	4	4	11	-6	-4	5	12
31.Ara.08	1	4	4	12	-6	-3	6	9
01.Oca.09	1	6	6	16	1	3	5	10
02.Oca.09	0	7	3	14	1	5	0	10
03.Oca.09	4	7	4	14	-2	5	3	10
04.Oca.09	4	7	0	11	-1	1	2	8
05.Oca.09	4	8	3	13	2	8	5	11
06.Oca.09	4	8	4	14	4	7	2	10
07.Oca.09	4	7	6	13	3	6	0	8
08.Oca.09	3	8	7	13	4	8	-2	8
09.Oca.09	2	6	5	15	2	8	3	10
10.Oca.09	1	7	4	14	-2	5	2	9

11.Oca.09	0	7	5	15	0	5	3	10
12.Oca.09	1	8	4	14	-1	4	2	10
13.Oca.09	2	9	5	14	0	-2	1	9
14.Oca.09	2	11	5	15	0	3	2	10
15.Oca.09	4	14	5	13	4	10	6	9
16.Oca.09	6	10	3	14	4	12	0	10
17.Oca.09	5	7	4	14	3	9	6	11
18.Oca.09	1	8	6	16	3	7	-2	12
19.Oca.09	2	12	6	15	1	4	6	15
20.Oca.09	6	12	7	16	2	7	5	10
21.Oca.09	7	15	6	14	2	8	7	9
22.Oca.09	9	16	5	14	3	6	6	11
23.Oca.09	8	13	4	16	3	7	3	13
24.Oca.09	10	15	8	17	-1	5	4	7
25.Oca.09	11	17	4	14	4	9	2	11
26.Oca.09	9	13	5	15	3	8	-7	10
27.Oca.09	9	16	4	12	6	8	-6	10
28.Oca.09	7	13	2	13	3	7	5	10
29.Oca.09	7	12	3	12	4	9	6	12
30.Oca.09	7	9	2	14	5	10	7	10
31.Oca.09	5	9	3	13	4	8	8	11
01.Şub.09	5	10	6	12	4	7	4	8
02.Şub.09	5	10	5	16	3	7	2	8
03.Şub.09	6	12	8	16	3	7	-2	12
04.Şub.09	7	18	6	16	0	5	4	7
05.Şub.09	10	15	7	16	-1	9	3	11
06.Şub.09	8	16	7	16	2	12	2	10
07.Şub.09	8	17	7	16	1	7	0	9
08.Şub.09	12	16	5	14	6	12	0	12
09.Şub.09	6	14	4	14	2	7	2	11
10.Şub.09	6	10	6	16	5	11	6	13
11.Şub.09	2	14	6	14	3	8	0	10
12.Şub.09	9	13	1	11	3	7	0	13
13.Şub.09	7	11	0	10	3	9	9	15
14.Şub.09	5	7	-1	10	4	10	7	16
15.Şub.09	2	4	0	11	5	9	4	17
16.Şub.09	2	8	-1	10	6	11	3	10
17.Şub.09	1	6	2	13	4	12	0	8
18.Şub.09	2	10	4	12	2	7	1	9
19.Şub.09	4	11	-1	9	1	8	6	8
20.Şub.09	4	8	-1	12	4	9	9	13
21.Şub.09	3	5	1	12	3	10	2	9

22.Şub.09	2	5	2	13	3	5	8	12
23.Şub.09	1	6	4	13	2	6	3	10
24.Şub.09	2	7	2	10	2	8	7	10
25.Şub.09	3	6	1	14	4	10	5	13
26.Şub.09	3	5	1	13	4	9	5	9
27.Şub.09	2	5	5	16	2	10	3	7
28.Şub.09	2	7	5	14	5	12	3	11
29.02.2009	8	15	5	16	5	13	2	8
01.Mar.09	2	9	6	15	4	7	4	9
02.Mar.09	4	9	9	14	6	10	2	7
03.Mar.09	3	9	9	14	6	10	2	7
04.Mar.09	5	12	5	16	1	9	6	10
05.Mar.09	6	17	6	14	1	4	4	11
06.Mar.09	11	15	3	11	3	10	6	11
07.Mar.09	10	12	4	16	4	11	7	12
08.Mar.09	7	14	4	16	6	14	7	11
09.Mar.09	6	11	6	16	7	12	8	11
10.Mar.09	8	11	4	15	2	5	8	15
11.Mar.09	5	10	7	16	4	13	0	10
12.Mar.09	4	12	3	16	8	11	5	13
13.Mar.09	3	9	9	15	9	11	6	13
14.Mar.09	4	10	6	15	6	12	8	13
15.Mar.09	4	9	6	15	4	10	0	11
16.Mar.09	3	10	5	17	3	6	6	16
17.Mar.09	5	10	4	16	1	5	4	16
18.Mar.09	4	10	5	15	1	9	7	16
19.Mar.09	4	8	6	15	5	11	10	20
20.Mar.09	2	10	3	12	5	13	13	17
21.Mar.09	4	12	1	13	5	9	9	13
22.Mar.09	6	11	3	15	3	10	7	17
23.Mar.09	6	11	3	15	5	12	10	16
24.Mar.09	4	14	6	16	6	14	10	15
25.Mar.09	9	16	3	15	5	10	5	12
26.Mar.09	5	9	5	15	6	11	4	11
27.Mar.09	4	10	7	16	5	14	0	12
28.Mar.09	4	11	6	15	8	16	6	12
29.Mar.09	4	15	8	17	5	18	4	11
30.Mar.09	7	17	7	17	7	12	6	13
31.Mar.09	12	20	7	16	6	11	3	13
01.Nis.09	10	17	6	15	6	14	9	13
02.Nis.09	8	14	4	15	6	14	6	13
03.Nis.09	7	13	4	17	6	13	7	16

04.Nis.09	7	16	6	16	6	11	3	18
05.Nis.09	7	16	4	19	6	11	3	18
06.Nis.09	8	15	6	16	5	13	12	18
07.Nis.09	6	14	7	16	7	14	10	20
08.Nis.09	8	16	6	16	8	14	10	19
09.Nis.09	8	17	8	17	8	14	10	20
10.Nis.09	7	15	9	19	3	5	12	23
11.Nis.09	7	19	7	17	4	10	11	20
12.Nis.09	7	17	9	18	4	10	10	20
13.Nis.09	9	17	8	18	1	10	10	21
14.Nis.09	9	19	7	18	2	11	15	17
15.Nis.09	9	15	8	18	6	13	11	22
16.Nis.09	10	16	8	17	7	13	10	22
17.Nis.09	9	17	9	17	6	12	10	21
18.Nis.09	8	18	7	17	7	13	10	19
19.Nis.09	10	22	7	16	6	15	12	21
20.Nis.09	11	20	6	17	7	12	10	20
21.Nis.09	10	19	8	18	4	13	10	19
22.Nis.09	10	16	8	19	8	12	14	21
23.Nis.09	9	15	9	18	6	10	14	21
24.Nis.09	8	15	7	17	5	11	10	16
25.Nis.09	8	18	7	18	5	12	12	15
26.Nis.09	8	17	14	20	7	11	14	18
27.Nis.09	8	17	14	21	9	18	8	15
28.Nis.09	8	20	7	18	4	14	4	16
29.Nis.09	9	18	9	18	10	20	11	22
30.Nis.09	9	18	9	18	8	17	13	22

7. ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ da doğdum. İlköğretimi Elazığda lise eğitimimi Samsun da tamamladım. 2003' de Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 2007' de lisansımı tamamladım. 2008' de Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünde yüksek lisans eğitime başladım. 2009'da Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, İstatistiksel Bilgi Sistemleri anabilim dalına araştırma görevlisi olarak atandım. Halen bu göreve devam etmekteyim.

