

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KORELASYON MATRİSİNİN CAYLEY- HAMILTON TEOREMİ
İLE ÇÖZÜMLENMESİ: HAYVANCILIK VERİLERİNDE BAZI
UYGULAMALAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ABDULMENAF DİNLER**

ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI

**TEZ DANIŞMANI:
Doç. Dr. Şenol ÇELİK**

BİNGÖL-2025

**KORELASYON MATRİSİNİN CAYLEY- HAMILTON TEOREMİ İLE
ÇÖZÜMLENMESİ: HAYVANCILIK VERİLERİNDE BAZI UYGULAMALAR**

Doç. Dr. Şenol ÇELİK danışmanlığında, Abdulmenaf DİNLER tarafından hazırlanan bu çalışma 30/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Zootekni Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Turgay ŞENGÜL	İmza :
Üye	: Prof. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU	İmza :
Üye	: Doç. Dr. Şenol ÇELİK	İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun// tarih ve/
nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmaları süresince bana rehber olan ve çalışmalarım esnasında bana bilgi desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Şenol ÇELİK hocama şükranlarımı sunarım. Beni yüksek lisans tezi başvurusuna ikna eden Prof. Dr. Hakan İNCİ hocama teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım ve eğitimim sürecinde her türlü maddi ve manevi desteğini gördüğüm aile bireylerine, arkadaşlarıma ve dostlarıma teşekkürü borç bilirim. Bu süreçte her haliyle bana destek olan amcam Muharrem DİNLER' e ayrıca sevgi ve saygılarımı sunarım.

Abdulmenaf DİNLER
BİNGÖL 2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
2.1. Materyal.....	3
2.2. Yöntem.....	3
2.2.1. Matrisler	3
2.2.2. Kare Matrisler	4
2.2.3. Matrisin Köşegeni	4
2.2.4. Birim Matris	4
2.2.5. Skalar Matris.....	5
2.2.6. Matrisin Devriği	5
2.2.7. Simetrik Matris	6
2.2.8. Matrislerin Toplamı	6
2.2.9. Matrisi Skalarla Çarpma	6
2.2.10. Matrislerin Çarpımı	7
2.2.11. Lineer Denklem Sistemleri	7
2.2.12. Matris Denklem Sistemleri	8
2.2.13. Bir Matrisin Tersi.....	8
2.2.14. Bir Matrisin Karakteristik Polinomu ve Denklemi.....	8
2.2.15. Determinant	9
2.2.16. Salihu's Rule	10
2.2.17. İlk Üç Satırın Dördüncü Satırın Altına Yazılması	10
2.2.18. İkinci ve Üçüncü Sütunların Yer Değiştirmesi	11

2.2.19. Üçüncü ve Dördüncü Sütunların Yer Değiştirmesi	11
3. CAYLEY- HAMILTON TEOREMİ.	13
4. KORELASYON	14
4.1. Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon Katsayısının Yorumu	14
4.2. Varyans- Kovaryans matrisi ile korelasyon katsayıları hesabı.....	16
5. UYGULAMALAR	17
5.1. A, 2 x 2 Matrisinin 20'nci Kuvvetinin Hesaplanması	21
5.2. A, 2 x 2 Matrisinin 250'nci Kuvvetinin Hesaplanması	22
5.3. A, 2 x 2 Matrisinin Karekökünün Hesaplanması	22
5.4. A, 2 x 2 Matrisinin Üstel Fonksiyon Hesaplanması	23
5.5. A, 3 x 3 Matrisinin 4. Kuvvetinin Hesaplanması	25
5.6. A, 3 x 3 Matrisinin Karekökünün Hesaplanması	26
5.7. A, 4 x 4 Matrisinin 12. Kuvvetinin Hesaplanması	28
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	31
6.1. A, 4 x 4 Matrisinin 10. Kuvvetinin Hesaplanması	34
6.2. A, 4 x 4 Matrisinin 25. Kuvvetinin Hesaplanması	37
6.3. A, 4 x 4 Matrisinin -5. Kuvvetinin Hesaplanması	39
6.4. A, 4 x 4 Matrisinin Kare Kök Hesaplanması	41
6.5. A, 4 x 4 Matrisinin Küp Kök Hesaplanması	43
6.6. A, 4 x 4 Matrisinin Sinüs Fonksiyonu Hesaplanması	45
6.7. A, 4 x 4 Matrisinin Kosinüs Fonksiyonu Hesaplanması	46
6.8. A, 4 x 4 Matrisinin Tanjant Fonksiyonu Hesaplanması	48
6.9. A, 4 x 4 Matrisinin Logaritma Fonksiyonu Hesaplanması	50
6.10. A, 4 x 4 Matrisinin Üstel Fonksiyonu Hesaplanması	52
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR.....	56

SİMGELER VE KISALTMA LİSTESİ

$A, B, C, D,$	: Matrisler
A^n	: A, Matrisinin n. kuvveti
a_{ij}	: i satır j sütun boyutlu matris
A^T	: A, Matrisinin Devriği
B	: 4 x 4 matrisinde özdeğer katsayı sabitleri matrisi
B^{-1}	: B matrisinin tersi
C_1	: Özdeğerlerin 10. kuvvetlerinin sabitleri
C_2	: Özdeğerlerin 25. kuvvetlerinin sabitleri
C_3	: Özdeğerlerin-5. kuvvetlerinin sabitleri
C_4	: Özdeğerlerin karekök kuvvetlerinin sabitleri
C_5	: Özdeğerlerin küp kök kuvvetlerinin sabitleri
C_6	: Özdeğerlerin Sinüs fonksiyonu sabitleri
C_7	: Özdeğerlerin Kosinüs fonksiyonu sabitleri
C_8	: Özdeğerlerin Tanjant fonksiyonu sabitleri
C_9	: Özdeğerlerin Logaritma fonksiyonu sabitleri
C_{10}	: Özdeğerlerin Üstel fonksiyonu sabitleri
$\cos(A)$	: A, Matrisinin Kosinüs fonksiyonu ile Cayley - Hamilton Teoremi
$\det(A)$	: Bir A Matrisinin Determinantı
e^A	: A, Matrisinin Üstel Fonksiyonu ile Cayley - Hamilton Teoremi
$\log(A)$	: A, Matrisinin Logaritma Fonksiyonu ile Cayley-Hamilton Teoremi
$P(A)$	: Bir Polinomun Karakteristik Denklemi
$\sin(A)$	: A, Matrisinin Sinüs Fonksiyonu ile Cayley -Hamilton Teoremi
$\tan(A)$	: A, Matrisinin Tanjant Fonksiyonu ile Cayley -Hamilton Teoremi
I	: Birim Matris
α	: Katsayı(alfa)
λ	: Özdeğer değişkeni(lambda)
k	: k skaler sayısı
n	: Sayma Sayısı

Σ	: Toplam Sembolü
r	: Pearson Korelasyon katsayısı
R	: Korelasyon Matrisi
R	: RStudio Programı
$\sqrt{}$	: Köklü ifade
S	: Kovaryans Matrisi
$\bar{X}$	: Ortalama Vektörü



TABLÖLER LİSTESİ

Tablo 4.1. Pearson korelasyon katsayısının nitelendirilmesi	15
Tablo 5.1. Korelasyon testi	17
Tablo 5.2. Kovaryans matrisi hesaplama tablosu.....	18



KORELASYON MATRİSİNİN CAYLEY- HAMILTON TEOREMİ İLE ÇÖZÜMLENMESİ: HAYVANCILIK VERİLERİNDE BAZI UYGULAMALAR

ÖZET

Bu çalışmada, Cayley- Hamilton teoremi kullanılarak 4×4 boyutlu A kare matrisinin farklı mertebeden kuvvetlerine ait işlemler yapılmıştır. Literatür taraması sonucunda Meksika, Colima'daki Pelibuey koyunlarının morfolojik özellikleri arasındaki ilişki için Pearson korelasyonları elde edilmiştir. Bu koyunların morfolojik özelliklerine ait değişkenler cidago yüksekliği (WIH), göğüs çevresi (CHG), göğüs genişliği (CHW) ve vücut uzunluğu (BOL)'dur. Bu değişkenler arasında hesaplanan korelasyon katsayıları $0,23 - 0,83$ aralığında bulunmuştur. Elde edilen korelasyon matrislerinin özdeğerleri hesaplanarak matrislerin yüksek mertebeden kuvvetlerinin hesaplanması kolaylaşmıştır. Bu öz değerlere karşılık 4×4 'lük korelasyon matrislerinin yüksek dereceden kuvvetleri, karekökü, küp kökü, sinüsü, kosinüsü, tanjantı, logaritması ve üstel kuvveti hesaplanarak farklı matrisler elde edilmiştir. Yüksek mertebeden işlemleri ve bulunmaları zor elde edilen farklı türden polinom ve çeşitli fonksiyonların matrisleri Cayley- Hamilton teoremiyle çözülebilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Cayley- Hamilton Teoremi, Determinant, Korelasyon, Özdeğer, Matris.

ANALYSIS OF CORRELATION MATRICES USING THE CAYLEY-HAMILTON THEOREM: SOME APPLICATIONS IN LIVESTOCK DATA

ABSTRACT

This work employed the Cayley-Hamilton Theorem to perform operations on various powers of a 4×4 square matrix. Following a literature research, Pearson correlation coefficients were calculated to analyse the correlations among the morphological traits of Pelibuey sheep in Colima, Mexico. The morphological factors examined for these sheep comprise withers height (WIH), chest girth (CHG), chest width (CHW), and body length (BOL). The computed correlation coefficients between these variables ranged from 0.23 to 0.83. The calculation of higher-order powers of the resulting correlation matrices was streamlined by determining their eigenvalues. In connection to these eigenvalues, many matrices were derived by computing the higher-order powers, square roots, cube roots, sine, cosine, tangent, logarithm, and exponential functions of the 4×4 correlation matrices. High – order operations and matrices of diverse polynomials and complex functions, which are otherwise challenging to acquire, were effectively produced utilising the Cayley- Hamilton Theorem.

Keywords: Cayley- Hamilton Theorem, Determinant, Eigenvalue, Correlation, Matrix.

1. GİRİŞ

Matris polinomları ile ilgili uygulamalar Cayley- Hamilton teoremi ile yapılabilir. Bir $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ polinomunu ele alalım $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin $P(A)$ ile; $p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$ polinomları alınsın. Eğer tüm sabit terimler birim matrisin ilgili sabit katı ile değiştirilirse (yukarıdaki $p(A)$ polinomunda a_0 sabit terimine yapıldığı gibi) her polinomsal özdeşlik matris değişkenlerle de sağlanır. Ayrıca benzer şekilde matris katsayılı polinomlar da ele alınabilir, bu durumda λ değişkenini skaler olarak alacağız. Bu tip polinomlar alışılmış şekilde toplanıp çarpılabilir fakat çarpmada sıra dikkate alınmalıdır. Bundan dolayı bu polinomlar üzerinde işlemler klasik polinomlara göre daha karmaşıktır. Bu tür polinomlar hakkında şunun bilinmesi yeterlidir, matris katsayılı iki polinomun eşit olması için gerek ve yeter koşul bunların katsayılarının aynı olmasıdır. Hem katsayıları hem de değişkeni matris olan polinomlar çok daha karmaşık cebirsel özelliklere sahiptir (Öğrekçi, 2020).

Bir K cismi üzerinde bir $n - kare$ matrisi A olsun. A nın kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanır: $A^2 = A A$, $A^3 = A^2 A$, $A^4 = A^3 A$, $\dots$, $A^{n+1} = A^n A$ ve $A^0 = I$. A matrisinin polinomları da tanımlanabilir. Özel olarak $a_i \in K$ olmak üzere, herhangi bir $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ polinomu için $f(A)$ aşağıdaki matris olarak tanımlanır: $f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$ [$f(A)$ nın, $f(x)$ 'te x yerine A matrisini koyarak ve a_0 skaları için de $a_0 I$ skalar matrisini alarak elde edildiğini belirtelim]. Eğer $f(A) = 0$ sıfır matrisi ise A ya $f(x)$ in bir kökü adı verilir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

A , herhangi bir $n \times n$ boyutlu kare matris olmak üzere $Ax = \lambda x$ eşitliğinin $x \neq 0$ için bir çözümün olmasını sağlayan λ değerlerine A matrisinin öz değerleri denir. Söz konusu eşitlik $Ax - \lambda x = 0$ şeklinde yazılabilir ve buradan $(A - \lambda I)x = 0$ halini alır. Bu eşitliğin $x \neq 0$ için bir çözümünün olması için; $(A - \lambda I)$ matrisinin singüler(tekil) olması, yani determinantının sıfır olması gerekmektedir. O halde A matrisinin öz değerleri $|A - \lambda I| = 0$ denklem sisteminin çözümünden elde edilir (Bulut, 2018).

Cayley- Hamilton Teoremi, matris teorisinde kullanılan oldukça önemli bir teoremdir. Cayley- Hamilton Teoremi, değişmeli bir halka üzerindeki her kare matrisin kendi karakteristik denklemini sağladığını gösterir (Sullivan, 1993).

A , $n \times n$ matrisi verilsin. $AX = \lambda X$ olacak şekilde $X \neq 0$ sütun matrisi varsa λ değerine A matrisinin karakteristik değeri veya özdeğeri ve $X \neq 0$ sütun matrisine de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen karakteristik veya öz vektörü denir. $AX = \lambda X$ eşitliğinden $(\lambda I_n - A)X = 0$ homojen lineer denklem sistemi elde edilir. $X \neq 0$ olduğundan bu sistemin aşikâr olmayan çözümünün olması için, $\det(\lambda I_n - A) = 0$ olmalıdır. Burada I_n ; $n \times n$ tipinde bir matristir. (λ, X) ikilisine A matrisinin öz çifti denir (Yüce, 2022).

Verilen n mertebeli bir A matrisi için λ gibi bir skala ve X gibi sıfır olmayan bir vektör belirlenir ki bu değerler $AX = \lambda X$ denklem sistemini sağlarlar. Yapılan bu işleme öz değer (eigen values) problemi denir. $AX = \lambda X$ sisteminde A , n . dereceden bir kare matristir. Bu sistem matris şeklinde $(A - \lambda I)X = 0$ olarak yazılır. $(A - \lambda I)X = 0$ bir homojen denklem sistemidir. Bilindiği gibi, X in sıfırdan farklı çözümleri olabilmesi için $(A - \lambda I)$ matrisin determinantının sıfır olması gerekir. Yani $|A - \lambda I| = 0$ olmalıdır. Bu denkleme karakteristik denklem denir (Alper, 2017).

Genellikle özdeğerler (karakteristik kök- eigen values) optimumu temsil ederler. Faktör analizinde maksimum varyansı, kanonik korelasyon analizinde maksimum belirlilik katsayısını (korelasyon katsayısının karesi), diskriminant analizinde ise maksimum açıklanan / açıklanamayan varyans değerini gösterilirler. (λ) lambda ile tanımlanırlar (Orhunbilge, 2017).

Bu çalışmada, Matrislerde önemli bir yer teşkil eden Cayley- Hamilton teoremiyle matrisler üzerinde işlemler yapılması, korelasyon matrislerinin Cayley- Hamilton teoremi ile çözümlenmesi ve bazı hayvancılık verileri üzerinde oluşturulan korelasyon matrislerinin uygulanması amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Materyal

Meksika, Colima'daki Pelibuey koyunlarının morfolojik özellikleri arasındaki Pearson korelasyonları. Ölçülen morfolojik değişkenler; Cidago yüksekliği (wither height, WIH), göğüs çevresi (chest girth, CHG), göğüs genişliği (chest width, CHW), ve vücut uzunluğu (body length, BOL) idi. Trop Anim Health Prod (2013).

	CHG	WIH	BOL	CHW
CHG	1	0,83	0,39	0,61
WIH	0,83	1	0,39	0,23
BOL	0,39	0,39	1	0,37
CHW	0,61	0,23	0,37	1

Ölçülen morfolojik değişkenler arasında pozitif korelasyonlar görülmüştür. En yüksek korelasyon 0,83 değerle, CHG ile WIH arasında oluşmuştur. En düşük korelasyon ise 0,23 değerle CHW ile WIH arasında oluşmuştur. Çalışmaya ait hesaplamalar R İstatistiksel Yazılımı (v4.1.2; R Çekirdek Ekibi 2021) kullanılarak gerçekleştirildi.

2.2. Yöntem

2.2.1. Matrisler

Bir K cismi üzerinde bir A matrisi veya A matrisi (eğer K belliyse), skalarların dikdörtgensel bir tablosu olup genellikle aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2, 1)$$

Böyle bir A matrisinin satırları aşağıdaki skalarların yatay $m - tane$ listesinden oluşur:
 $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

A 'nın kolonları da skalarların $n - tane$ dikey listesinden meydana gelir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

i. satır j . kolon bulunan a_{ij} elemanına $ij - giriş$ veya $ij - eleman$ denilir. Böyle bir matrisi basit bir biçimde $A = [a_{ij}]$ gösterimiyle kullanacağız. m satır ve n kolondan oluşan matris, $m \times n$ matris olarak adlandırılır. (m, n) sayı çiftine matrisin boyutu denir. Bir matris sadece bir satıra sahipse satır matrisi veya satır vektörü, sadece bir koluna sahipse kolon matrisi veya kolon vektörü olarak adlandırılır. Eğer matrisin tüm elemanları sıfırsa sıfır matrisi adı verilir ve genellikle 0 ile gösterilir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

2.2.2. Kare Matrisler

Bir kare matris satır ve kolon sayısı birbirine eşit olan matristir. Bir $n \times n$ kare matrise n . mertebeden denir ve $n - kare$ matrisi olarak adlandırılır.

2.2.3. Matrisin Köşegeni

$A = [a_{ij}]$ bir $n - kare$ matrisi olsun. A 'nın köşegeni veya esas köşegeni aynı indisli elemanlardan oluşur. Yani; $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ matrisin köşegen elemanlarıdır.

2.2.4. Birim Matris

Köşegen elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 olan $n - kare$ matrise birim matris denir ve I_n veya I ile gösterilir. Herhangi bir $n - kare$ matrisi A için, $AI = IA = A$ olduğundan, çarpma işleminde I birim matrisi 1 skaları gibi davranır. Daha genel olarak, B bir $m \times n$ matrisi ise $BI_n = I_m B = B$ dir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisi 3. mertebeden birim matristir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

2.2.5. Skalar Matris

Herhangi bir k skaları için köşegen elemanları k , diğer bütün elemanları 0 olan kI matrisine k ye karşılık gelen skalar matris adı verilir. $(kI)A = k(IA) = kA$ olduğu da görülebilir. Yani bir A matrisini kI skalar matrisiyle çarpmak, A matrisini k skalarıyla çarpmak demektir.

Örnek:

3. Mertebeden birim matrisler ve $k = 5$ için bunlara karşılık gelen skalar matris aşağıdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.6. Matrisin Devriği

Bir A matrisinin transpozu (devriği) A^T ile gösterilir ve sırasıyla A nın kolonlarını satırlar olarak yazmakla elde edilir. Başka bir ifadeyle, $A = [a_{ij}]$ bir $m \times n$ matris ise $b_{ij} = a_{ji}$ olmak üzere $A^T = [b_{ij}]$ de bir $n \times m$ matristir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

2.2.7. Simetrik Matris

Eğer $A^T = A$ ise A matrisi simetriktir. Başka bir ifadeyle, eğer simetrik elemanlar (Köşegene göre ayna görüntüleri) eşit, yani her bir $a_{ij} = a_{ji}$ ise $A = [a_{ij}]$ simetriktir. Bir A matrisi için eğer $A^T = -A$ veya eş değer olarak her $a_{ij} = -a_{ji}$ ise $A = [a_{ij}]$ ters simetriktir. $A^T = A$ ve $A^T = -A$ ise A matrisinin kare matris olması gereklidir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{için}$$

$A^T = A$ olduğundan simetrik matristir, $B^T = -B$ olduğu için ters simetrik matristir. C ise kare matris olmadığı için ne simetrik ne de ters simetrik matristir (Akkuş, 2016).

2.2.8. Matrislerin Toplamı

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ boyutunda iki matris olsun. A ve B nin toplamı $A + B$ şeklinde de yazılır ve A ile B nin karşılıklı elemanları toplanarak elde edilir. Böylece $A + B$ matriside $m \times n$ boyutlu olur. Yani;

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{Lipschutz ve Lipson, 2016}).$$

(2, 2)

2.2.9. Matrisi Skalarla Çarpma

$A = [a_{ij}]$ matrisi $m \times n$ boyutlu bir k skalarıyla çarpımı $k.A$ veya kA biçiminde yazılır. Ve A nın her bir elemanının k ile çarpılmasıyla elde edilir. kA matriside $m \times n$ boyutludur.

$$\text{Yani; } kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix} \text{ olur (Lipschutz ve Lipson, 2016).} \quad (2, 3)$$

2.2.10. Matrislerin Çarpımı

$A = [a_{ik}]$ ve $B = [b_{kj}]$ matrisleri, A nın kolon sayısı B nin satır sayısına eşit olacak şekilde iki matris, yani A matrisi bir $m \times p$ matrisi ve B matrisi bir $p \times n$ matrisi olsun. O halde AB çarpımı $m \times n$ tipinde bir matris olup ij – elemanı A nın i . satırı ile B nin j . kolunu çarpılarak elde edilir. Yani;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (2, 4)$$

Burada $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{i=1}^p a_{ik}b_{kj}$ dir. $p \neq q$ olmak üzere

A bir $m \times p$ matris ve B bir $q \times n$ matris ise AB çarpımı tanımlı değildir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

2.2.11. Lineer Denklem Sistemleri

Bir lineer denklem sistemi, aynı bilinmeyenli lineer denklemlerin bir listesidir. Özel olarak n tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenli, m tane $L_1, L_2, \dots, L_m$ lineer denklem sisteminin standart biçimi; a_{ij} ve b_i sabitler olmak üzere;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad \text{şeklinde dir.} \quad (2, 5)$$

a_{ij} sayısı L_i denkleminde x_j bilinmeyeninin katsayısı, b_i sayısı da L_i denkleminin sabitidir. Bunu $m \times n$ sistem olarak adlandırılır. Eğer $m = n$ ise yani m denklem sayısı, n bilinmeyen sayısına eşitse bir kare sistemi adı verilir.

2.2.12. Matris Denklem Sistemleri

Bu n bilinmeyenli m lineer denklemlili genel sistemi aşağıdaki matris denklemine denktir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2, 6)$$

Veya $AX = B$ burada $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi, $X = [x_j]$ bilinmeyenlerin kolon vektörü $B = [b_i]$ de sabitlerin kolon vektörüdür. Lineer denklem sistemi ile matris denkleminin denk olması, sistemin herhangi bir vektör çözümünün matris denkleminin de bir çözümü olduğu ve bu ifadenin tersinin de doğru olduğu anlamına gelir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

2.2.13. Bir Matrisin Tersi

A , n . mertebeden bir matris ise $AX = B$, n bilinmeyenli n denklemlili bir lineer denklem sistemidir. A matrisinin tersi mevcut ve A^{-1} olsun. Bu durumda $AX = B$ denkleminin her iki yanını A^{-1} ile çarpılarak $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \rightarrow I_n X = X = A^{-1}B$ elde edilir. Buradan A matrisinin tersi mevcut olması durumunda $AX = B$ sisteminin tek çözümü $X = A^{-1}B$ olarak bulunur (Yeşilot ve Sönmez, 2022). (2, 7)

2.2.14. Bir Matrisin Karakteristik Polinomu ve Denklemi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{matrisi } n. \text{ mertebeden bir matris olsun.}$$

$$\lambda I_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2, 8)$$

Matrisinin determinantına A matrisinin karakteristik polinomu ve $|\lambda I_n - A| = 0$ denkleminde A nın karakteristik denklemi denir. A , n . mertebeden bir matris olsun. A matrisinin öz değerleri karakteristik polinomunun kökleridir (Yeşilot ve Sönmez, 2022).

2.2.15. Determinant

Her $n - \text{kare}$ $A = [a_{ij}]$ matrisi, A nın determinanı olarak adlandırılan ve $\det(A)$ veya

$$|A| \text{ Veya } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ile gösterilen özel bir skalara karşılık gelir.} \quad (2, 9)$$

Düz çizgiler arasına yerleştirilmiş skalarların bir $n \times n$ tablosuna mertebesi n olan bir determinant (kapalı matris) denir ve bu bir matris olmayıp çizgiler arasına yerleştirilmiş skalarların determinantını gösterir.

Birinci mertebeden bir determinant yandaki gibi tanımlanır. $|a_{11}| = a_{11}$ olur. Böylece 1×1 bir $A = [a_{11}]$ matrisinin determinanı a_{11} skalarıdır; $|a_{11}| = a_{11}$

İkinci mertebeden bir determinant aşağıdaki diyagram kullanılarak kolayca hatırlanabilir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (2, 10)$$

Bu determinant, sağa dönük ok yönündeki elemanların çarpımı ve sola dönük ok yönündeki elemanların çarpımının farkına eşittir.

Üçüncü mertebeden bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin, determinanı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned} \quad (2, 11)$$

Ki bu ifade, katsayıları (alterne işaretli) verilen matrisin birinci satırı olan 2 mertebeli üç determinantın bir lineer bileşimidir (Lipschutz ve Lipson, 2016).

2.2.16. Salihu's Rule

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

4 x 4 Matrisinin determinanı aşağıdaki metotlarla bulunur (Maltepeler, 2017). (2, 12)

2.2.17. İlk Üç Satırın Dördüncü Satırın Altına Yazılması

A matrisinin ilk üç satırı dördüncü satırın altına yazılarak, D_1 determinantındaki gibi gösterilen çapraz çarpımlar yapılp belirtilen işaretler $(+, -, +, -, +, -, +, -)$ şeklinde alındığında, elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_1 olsun.

$$D_1 = \begin{vmatrix} +a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & + \\ -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & - \\ +c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & + \\ -d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & - \\ \hline \triangle a_1 & \triangle a_2 & \triangle a_3 & \triangle a_4 & \triangle \\ \triangle b_1 & \triangle b_2 & \triangle b_3 & \triangle b_4 & \triangle \\ \triangle c_1 & \triangle c_2 & \triangle c_3 & \triangle c_4 & \triangle \end{vmatrix}$$

Bu durumda; $D_1 = a_1b_2c_3d_4 + c_1d_2a_3b_4 + a_4b_3c_2d_1 + c_4d_3a_2b_1 - b_1c_2d_3a_4 - d_1a_2b_3c_4 - b_4c_3d_2a_1 - d_4a_3b_2c_1$ olarak bulunur. (2, 13)

2.2.18. İkinci ve Üçüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

A matrisinde 2. ve 3. sütunların yerleri karşılıklı olarak değiştirildikten sonra ilk üç satır dördüncü satırın altına yazılarak D_2 determinantındaki gibi gösterilen çapraz çarpımlar yapıp belirtilen işaretler $(-, +, -, +, -, +, -, +)$ şeklinde alındığında, elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_2 olsun.

$$D_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & a_3 & a_2 & a_4 & - \\ +b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & + \\ -c_1 & c_3 & c_2 & c_4 & - \\ +d_1 & d_3 & d_2 & d_4 & + \\ a_1 & a_3 & a_2 & a_4 & \\ b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & \\ c_1 & c_3 & c_2 & c_4 & \end{vmatrix}$$

Bu durumda; $D_2 = -a_1b_3c_2d_4 - c_1d_3a_2b_4 - a_4b_2c_3d_1 - c_4d_2a_3b_1 + b_1c_3d_2a_4 + d_1a_3b_2c_4 + b_4c_2d_3a_1 + d_4a_2b_3c_1$ olarak bulunur. (2, 14)

2.2.19. Üçüncü ve Dördüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

A matrisinde 3. ve 4. sütunların yerleri karşılıklı olarak değiştirildikten sonra ilk üç satır dördüncü satırın altına yazılarak D_3 determinantındaki gibi gösterilen çapraz çarpımlar yapıp belirtilen işaretler $(-, +, -, +, -, +, -, +)$ şeklinde alındığında, elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_3 olsun.

$$D_3 = \begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & - \\ +b_1 & b_2 & b_4 & b_3 & + \\ -c_1 & c_2 & c_4 & c_3 & - \\ +d_1 & d_2 & d_4 & d_3 & + \\ a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & \\ b_1 & b_2 & b_4 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_3 & \end{vmatrix}$$

Bu durumda; $D_3 = b_2c_4d_3 - c_1d_2a_4b_3 - a_3b_4c_2d_1 - c_3d_4a_2b_1 + b_1c_2d_4a_3 + d_1a_2b_4c_3 + b_3c_4d_2a_1 + d_3a_4b_2c_1$ olarak bulunur. (2, 15)

Elde edilen dörütlü çarpımların toplanması $\det(A) = D_3 + D_3 + D_3$ şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_1b_2c_3d_4 + c_1d_2a_3b_4 + a_4b_3c_2d_1 + c_4d_3a_2b_1 - b_1c_2d_3a_4 - d_1a_2b_3c_4 \\ & - b_4c_3d_2a_1 - d_4a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2d_4 - c_1d_3a_2b_4 - a_4b_2c_3d_1 - c_4d_2a_3b_1 + b_1c_3d_2a_4 \\ & + d_1a_3b_2c_4 + b_4c_2d_3a_1 + d_4a_2b_3c_1 - a_1b_2c_4d_3 - c_1d_2a_4b_3 - a_3b_4c_2d_1 - c_3d_4a_2b_1 \\ & + b_1c_2d_4a_3 + d_1a_2b_4c_3 + b_3c_4d_2a_1 + d_3a_4b_2c_1 \text{ değeri bulunur (Maltepeler, 2017).} \end{aligned}$$

(2, 16)



3. CAYLEY- HAMILTON TEOREMİ

Her kare matrisin kendi karakteristik denklemini sağladığını gösterir. $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ denklemi A matrisinin karakteristik denklemi ise $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0I = 0$ olur.

(2×2) , boyutunda bir kare matris verildiğinde, bunun öz değerlerini bulmak için $\det(A - \lambda I_2) = 0$ hesaplanır. İki tane öz değer bulunur. Bunlar λ_1 ve λ_2 farklı öz değerleridir. Buna göre;

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$f(\lambda_1) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_1$$

$$f(\lambda_2) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_2$$

Eşitliklerinde yerlerinde konularak tüm matris hesaplamaları yapılabilir. (3, 1)

(3×3) , boyutunda bir kare matris olsun. Bu matrisin öz değerlerini elde etmek için $\det(A - \lambda I_3) = 0$ hesaplanır. Üç tane öz değer bulunur. Buna göre;

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \text{ olup;}$$

$$f(\lambda_1) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2$$

$$f(\lambda_2) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2$$

$$f(\lambda_3) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_3 + \alpha_2 \lambda_3^2$$

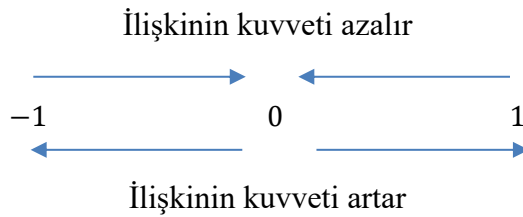
Burada λ_1 , λ_2 ve λ_3 farklı öz değerlerdir (Arslan, 2015; Çelik, 2022). (3, 2)

4. KORELASYON

Korelasyon iki ya da daha fazla değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi gösterir. İki değişken arasındaki ilişki miktarı, ikili ya da basit korelasyon denilen teknikleriyle hesaplanır. Bir değişkenin iki ya da daha çok değişken ile olan ilişkisi çoklu korelasyon; bu değişkenlerden birinin sabitlenerek diğer değişkenler ile olan ilişkisi ise kısmi korelasyon teknikleriyle hesaplanır (Köklü ve diğ., 2006).

4.1. Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon Katsayısının Yorumu

Korelasyon katsayısı, iki değişken arasındaki ilişkinin gücünü gösteren ölçü korelasyon katsayısıdır. «r» sembolü ile gösterilir. Değişkenler arasındaki ilişki pozitif ise işareti artı, negatif ise eksi olur. Korelasyon katsayısı -1 ile $+1$ arasında herhangi bir değer alabilir. $(-1 \leq r \leq +1)$. Hiçbir zaman -1 'den küçük, $+1$ 'den büyük olamaz. Her iki yönde sıfırdan 1 'e yaklaştıkça ilişkinin kuvveti artar, 1 'den sıfıra doğru yaklaştıkça ilişkinin kuvveti azalır, sıfıra gelince kaybolur.



İki değişken arasında pozitif tam bir ilişki varsa korelasyon katsayısı $+1$, negatif tam bir ilişki varsa -1 , ilişki yoksa 0 olur. Korelasyon katsayısı $0,0 - 0,50$ arasında ise ilişkinin zayıf, $0,50 - 1,0$ arasında ise ilişkinin kuvvetli olduğu kabul edilir (Sümbüloğlu ve Sümbüloğlu, 2021).

Pearson korelasyon katsayısı -1 ile $+1$ arasında değişir $(-1 \leq r \leq +1)$. Korelasyon katsayısı, her iki yönde 0 'a yaklaşırken ilişkinin kuvveti azalır. Her iki yönde 1 'e yaklaşırken ilişkinin kuvveti artar. İlişkinin kuvveti yönünden bağımsızdır.

Örneğin; $r = 0,88$ ile $r = -0,88$ yönleri farklı ancak, kuvvet yönünden aynı olan iki ilişkiyi tanımlar. İki değişken arasında ilişki yoksa, korelasyon katsayısı 0 ya da 0'a çok yakındır.

Tablol 4.1. Pearson korelasyon katsayısının nitelendirilmesi

$ r $	Nitelendirme
0,00 – 0,19	İlişki yok ya da önemsenmeyecek düzeyde düşük ilişki
0,20 – 0,39	Zayıf (düşük düzeyde) ilişki
0,40 – 0,69	Orta düzeyde ilişki
0,70 – 0,89	Kuvvetli (yüksek düzeyde) ilişki
0,90 – 1,00	Çok kuvvetli düzeyde ilişki (Alper, 2022).

Korelasyon matrisi köşegene göre simetriktir. Korelasyon matrisinin asıl köşegen elemanları 1'e eşittir. Çünkü bir değişkenin kendisi ile yaptığı korelasyon 1' dir. Korelasyon matrisi $R = (r_{ij})$ ile gösterilir. n . mertebeden bir kare matris için

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ olur (Alper, 2017).} \quad (4, 1)$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}} \quad \text{veya} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\text{veya} \quad r = \frac{\sum (X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y})}{\sqrt{(\sum X_i^2 - n \bar{X}^2)(\sum Y_i^2 - n \bar{Y}^2)}}$$

$$\text{veya} \quad r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{n}}{\sqrt{(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}) \cdot (\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n})}} \quad (\text{Bayram, 2016}). \quad (4, 2)$$

4.2. Varyans-Kovaryans Matrisi ile Korelasyon Katsayıları Hesabı

Varyansın çok değişkenli analizlerdeki karşılığı, $n \times n$ boyutlu simetrik varyans – kovaryans matrisidir.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & \dots & S_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \quad (4, 3)$$

x_1 ve x_2 gibi iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı kovaryans değerine bağlı olarak aşağıdaki bağıntı ile bulunabilir.

$$r_{x_1x_2} = \frac{\text{Kov}(x_1x_2)}{\sqrt{\text{Var}(x_1)\text{Var}(x_2)}} \quad (4, 4)$$

Örneğin; r_{23} 'ü bulmak için: $\text{Kov}(x_2x_3)$ 'ü, $\text{Var}(x_2)$ ve $\text{Var}(x_3)$ 'ün kara köklerinin çarpımına bölmek yeterli olur (Alper, 2017).

5. UYGULAMALAR

Örnek:

İki farklı bitkinin farklı zamanlara bağlı yedi farklı ağırlık ölçümleri sonuçları ve buna bağlı gelişimleri sonucu oluşan korelasyon ilişkilerinin durumunu inceleyelim.

Tablo 5.1. Korelasyon testi

Boy	Ağırlık(X)	Ağırlık(Y)	X ²	Y ²	XY
1	12	10	144	100	120
2	15	14	225	196	210
3	13	11	169	121	143
4	18	17	324	289	306
5	20	19	400	361	380
6	23	22	529	484	506
7	26	27	676	729	702
n = 7	Σ x = 127	Σ y = 120	Σ x ² = 2467	Σ y ² = 2280	Σ x y = 2367

$$r = \frac{2367 - \frac{127 \cdot 120}{7}}{\sqrt{\left(2467 - \frac{(127)^2}{7}\right) \left(2280 - \frac{(120)^2}{7}\right)}} = \frac{189,8}{190,5} = 0,99$$

pozitif doğrusal bir korelasyon vardır.

Örnek:

İki farklı bitkinin farklı zamanlara bağlı yedi farklı ağırlık ölçümleri sonuçları ve buna bağlı gelişimleri sonucu oluşan korelasyon ilişkilerinin durumunu inceleyelim.

Tablo 5.2. Kovaryans matrisi hesaplama tablosu

Boy	Ağırlık (X_n)	Ağırlık (Y_n)	$(X_n - \bar{x})$	$(Y_n - \bar{y})$	$(X_n - \bar{x})^2$	$(Y_n - \bar{y})^2$	$(X_n - \bar{x})(Y_n - \bar{y})$
1	12	10	-6,14	-7,14	37,69	50,97	43,83
2	15	14	-3,14	-3,14	9,85	9,85	9,85
3	13	11	-5,14	-6,14	26,41	37,69	31,55
4	18	17	-0,14	-0,14	0,01	0,01	0,01
5	20	19	1,86	1,86	3,45	3,45	3,45
6	23	22	4,86	4,86	23,61	23,61	23,61
7	26	27	7,86	9,86	61,77	97,21	77,49
$n = 7$	$\Sigma x = 127$ $\bar{x} = 18,14$	$\Sigma y = 120$ $\bar{y} = 17,14$			$\Sigma = 162,79$	$\Sigma = 222,79$	$\Sigma = 189,79$

$$\text{Cov}(xy) = S_{xy} = \frac{189,79}{7-1} = 31,63$$

$$\text{Cov}(xx) = S_{xx} = \frac{162,79}{7-1} = 27,13$$

$$\text{Cov}(yy) = S_{yy} = \frac{222,79}{7-1} = 37,13$$

$$\text{Korelasyon } (x, y) = r = \frac{31,63}{\sqrt{(27,13)(37,13)}} = 0,99 \text{ pozitif korelasyon var.}$$

Örnek:

Aşağıdaki gözlemler için kovaryans matrisi hesabıyla, korelasyon matrisinin elde edilmesi.

$$x_1 : 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ -6; \text{ için } \bar{x}_1 = \frac{2 + 3 + 4 + 5 - 6}{5} = 1,6$$

$$x_2 : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5; \text{ için } \bar{x}_2 = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

$$x_3 : -1 \ 0 \ 2 \ 5 \ 6; \text{ için } \bar{x}_3 = \frac{0 + 2 + 5 + 6 - 1}{5} = 2,4$$

$$S_{11} = \frac{(2 - 1,6)^2 + (3 - 1,6)^2 + (4 - 1,6)^2 + (5 - 1,6)^2 + (-6 - 1,6)^2}{5 - 1} = 19,3$$

$$S_{22} = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5 - 1} = 2,5$$

$$S_{33} = \frac{(-1 - 2,4)^2 + (0 - 2,4)^2 + (2 - 2,4)^2 + (5 - 2,4)^2 + (6 - 2,4)^2}{5 - 1} = 9,3$$

$$S_{12} = \frac{(2 - 1,6)(1 - 3) + (3 - 1,6)(2 - 3) + (4 - 1,6)(3 - 3)}{5 - 1} + \frac{(5 - 1,6)(4 - 3) + (-6 - 1,6)(5 - 3)}{5 - 1} = \frac{-14}{5 - 1} = -3,5$$

$$S_{13} = \frac{(2 - 1,6)(-1 - 2,4) + (3 - 1,6)(0 - 2,4) + (4 - 1,6)(2 - 2,4)}{5 - 1} + \frac{(5 - 1,6)(5 - 2,4) + (-6 - 1,6)(6 - 2,4)}{5 - 1} = \frac{-24,2}{5 - 1} = -6,05$$

$$S_{23} = \frac{(1 - 3)(-1 - 2,4) + (2 - 3)(0 - 2,4) + (3 - 3)(2 - 2,4)}{5 - 1} + \frac{(4 - 3)(5 - 2,4) + (5 - 3)(6 - 2,4)}{5 - 1} = \frac{19}{5 - 1} = 4,75$$

Yukarıdaki bilgilere ve (4, 3) e göre oluşacak, 3 x 3 boyutlu kovaryans matrisi aşağıdaki gibi simetrik matristir.

$$S = \begin{bmatrix} 19,3 & -3,5 & -6,05 \\ -3,5 & 2,5 & 4,75 \\ -6,05 & 4,75 & 9,3 \end{bmatrix}$$

Kovaryans matrisinden ve (4, 4) e göre hesaplanan korelasyon katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$r_{23} = \frac{4,75}{\sqrt{(2,5) \cdot (9,3)}} = 0,32$$

$$r_{13} = \frac{-6,05}{\sqrt{(19,3) \cdot (9,3)}} = -0,14$$

$$r_{12} = \frac{-3,5}{\sqrt{(19,3)(2,5)}} = -0,31 \text{ elde edilir.}$$

Buradan oluşacak korelasyon matrisi, (4, 1) e göre $R = \begin{bmatrix} 1 & -0,31 & -0,14 \\ -0,31 & 1 & 0,32 \\ -0,14 & 0,32 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, 2 x 2 boyutlu matrisinin öz değer ve öz vektörlerini bulalım.

(2, 8)'e göre işlem düzenlenirse; $\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - (\lambda) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$= \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ olur. (2, 10) a göre çözüm yapılırsa;

$= (5 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 \cdot 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 - 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ ise

$(\lambda - 7)(\lambda - 1) = 0$ için, $\lambda_1 = 7$ ve $\lambda_2 = 1$ olur.

$(A - \lambda I_2)X = 0$, homojen denklem sistemine göre çözüm yapılırsa;

$\lambda_1 = 7$ için, $(A - 7I_2)X = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2, 5) e göre işlem yapılırsa;

$-2x_1 + 2x_2 = 0$

$4x_1 - 4x_2 = 0$, denklemleri elde edilir.

Denklemler çözülürse, sıfırdan farklı çözüm için $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 \neq 0$ dır .

$x_1 = 1$ keyfi değeri için $\lambda_1 = 7$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

$$\lambda_2 = 1 \text{ için, } (A - 1I_2)X = 0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 + 2x_2 = 0$$

$4x_1 + 2x_2 = 0$, denklemleri oluşur

Denklemler çözülürse, sıfırdan farklı çözüm için; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0$,

$x_1 = 1$ keyfi değeri için $\lambda_2 = 1$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ olur.

5.1. A, 2 x 2 Matrisinin 20'nci Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = A^{20}$$

$\lambda_1 = 7$ ve $\lambda_2 = 1$, değerleri için, (3, 1) e göre işlem düzenlenirse;

$$f(7) = \alpha_0 + 7\alpha_1 = 7^{20}$$

$$f(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = (1)^{20} = 1$$

$$\alpha_0 + 7\alpha_1 = 7^{20}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = (1)^{20} = 1, \quad \text{Bu iki denklemin ortak çözümünden} \quad (\alpha_0 = 1 - \alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{7^{20} - 1}{6}, \quad \alpha_0 = 1 - \frac{7^{20} - 1}{6} = \frac{7 - 7^{20}}{6} \text{ bulunur.}$$

$$f(A) = A^{20} = \left(\frac{7 - 7^{20}}{6} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{7^{20} - 1}{6} \right) * \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{bmatrix} \frac{7 - 7^{20}}{6} + 5 \cdot \frac{7^{20} - 1}{6} & 0 + 2 \cdot \frac{7^{20} - 1}{6} \\ 0 + 4 \cdot \frac{7^{20} - 1}{6} & \frac{7 - 7^{20}}{6} + 3 \cdot \frac{7^{20} - 1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot 7^{20} + 2}{6} & \frac{2 \cdot 7^{20} - 2}{6} \\ \frac{4 \cdot 7^{20} - 4}{6} & \frac{2 \cdot 7^{20} + 4}{6} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

5.2. A, 2 x 2 Matrisinin 250'nci Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = A^{250}$$

$\lambda_1 = 7$ ve $\lambda_2 = 1$ değerleri için

$$f(7) = \alpha_0 + 7\alpha_1 = 7^{250}$$

$$f(1) = \alpha_0 + 1\alpha_1 = (1)^{250}$$

$$\alpha_0 + 7\alpha_1 = 7^{250}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = (1)^{250} = 1 \quad \text{Bu iki denklemin ortak çözümünden} \quad (\alpha_0 = 1 - \alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{7^{250} - 1}{6}, \quad \alpha_0 = 1 - \frac{7^{250} - 1}{6} = \frac{7 - 7^{250}}{6} \quad \text{bulunur.}$$

$$f(A) = A^{250} = \left(\frac{7 - 7^{250}}{6} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{7^{250} - 1}{6} \right) * \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{250} = \begin{bmatrix} \frac{7 - 7^{250}}{6} + 5 \cdot \frac{7^{250} - 1}{6} & 0 + 2 \cdot \frac{7^{250} - 1}{6} \\ 0 + 4 \cdot \frac{7^{250} - 1}{6} & \frac{7 - 7^{250}}{6} + 3 \cdot \frac{7^{250} - 1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{250} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot 7^{250} + 2}{6} & \frac{2 \cdot 7^{250} - 2}{6} \\ \frac{4 \cdot 7^{250} - 4}{6} & \frac{2 \cdot 7^{250} + 4}{6} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

5.3. A, 2 x 2 Matrisinin Karekökünün Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \sqrt{A}$$

$\lambda_1 = 7$ ve $\lambda_2 = 1$ değerleri için

$$f(7) = \alpha_0 + 7\alpha_1 = \sqrt{7}$$

$$f(1) = \alpha_0 + 1\alpha_1 = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha_0 + 7\alpha_1 = \sqrt{7}$$

$$\alpha_0 + 1\alpha_1 = \sqrt{1} = 1 \quad \text{Bu iki denklemin ortak çözümünden} \quad (\alpha_0 = 1 - \alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{7} - 1}{6} \text{ ve } \alpha_0 = 1 - \frac{\sqrt{7} - 1}{6} = \frac{7 - \sqrt{7}}{6} \text{ olur}$$

$$f(A) = \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6}\right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) * \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) & 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) \\ 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) & 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) & 0 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) \\ 0 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) & \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{7} + 2}{6} & \frac{2\sqrt{7} - 2}{6} \\ \frac{4\sqrt{7} - 4}{6} & \frac{2\sqrt{7} + 4}{6} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

5.4. A, 2 x 2 Matrisinin Üstel Fonksiyon Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = e^A$$

$\lambda_1 = 7$ ve $\lambda_2 = 1$ değerleri için

$$f(7) = \alpha_0 + 7\alpha_1 = e^7$$

$$f(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = e^1 = e \quad \text{Bu iki denklemin ortak çözümünden } (\alpha_0 = e - \alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \frac{e^7 - e}{6}, \quad \alpha_0 = \frac{7e - e^7}{6} \text{ olur.}$$

$$f(A) = e^A = \left(\frac{7e - e^7}{6}\right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{e^7 - e}{6}\right) * \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} \frac{7e - e^7}{6} & 0 \\ 0 & \frac{7e - e^7}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot \frac{e^7 - e}{6} & 2 \cdot \frac{e^7 - e}{6} \\ 4 \cdot \frac{e^7 - e}{6} & 3 \cdot \frac{e^7 - e}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4e^7 + 2e}{6} & \frac{2e^7 - 2e}{6} \\ \frac{4e^7 - 4e}{6} & \frac{2e^7 + 4e}{6} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ (3x3) matrisinin özdeğerlerini bulalım (Lipschutz ve Lipson, 2016).}$$

(2, 8) e göre işlem düzenlenirse; $\det(A - \lambda I_3) = 0$ ve

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - (\lambda) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ olur. (2, 11) e göre çözüm yapılırsa;}$$

$$= (4 - \lambda)((5 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 1 \cdot (-2)) - (1)((2)(2 - \lambda) - 1(-2))$$

$$+ (-1)(2(1) - 1(5 - \lambda))$$

$$= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) - (6 - 2\lambda) - (\lambda - 3)$$

$$= (4 - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 3) + (\lambda - 3) = (5 - \lambda)(\lambda - 3)^2 = 0 \text{ olur.}$$

Buradan A matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ olarak bulunur.

$$(A - \lambda I_3)X = 0 \text{ ise}$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ için, } (A - 3I_3)X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (2, 4)e göre işlem yapılırsa;}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \text{ denklemleri elde edilir.}$$

Denklemler çözülürse, sıfırdan farklı çözümler için; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0,$

$x_1 = 1$ keyfi değeri için $\lambda_1 = 3$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olur.

$(A - \lambda_2 I_3)X = 0$ ve $\lambda_2 = 5$ için $(A - 5I_3)X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ buradan

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \text{ denklemleri elde edilir.}$$

Denklemler çözülürse, sıfırdan farklı çözümler için; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0,$

$x_1 = 1$ Keyfi değeri için $\lambda_2 = 5$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

5.5. A, 3 x 3 Matrisinin 4. Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = A^4$$

$\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$, değerleri için (3, 2) e göre işlem yapılırsa;

$$f(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 3^4 = 81$$

$$f(5) = \alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 = 5^4 = 625$$

$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 81$$

$$\alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 = 625, \text{ denklemlerin ortak çözümü yapılırsa;}$$

$$\alpha_0 = -735 - 15\alpha_2, \quad \alpha_1 = 272 - 8\alpha_2$$

$$\alpha_0 = -735, \quad \alpha_1 = 272, \quad \alpha_2 = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$f(A) = A^4 = (-735) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (272) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ + (0) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = (-735) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (272) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + (0) * \begin{bmatrix} 17 & 8 & -8 \\ 16 & 25 & -16 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 353 & 272 & -272 \\ 544 & 625 & -544 \\ 272 & 272 & -191 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

5.6. A, 3 x 3 Matrisinin Karekökünün Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = \sqrt{A}$$

$\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ değerleri için

$$f(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$f(5) = \alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 = 5^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 = 5^{1/2} = \sqrt{5}, \text{ Bu denklem sistemleri ortak çözülürse;}$$

$$\alpha_0 = \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 30\alpha_2}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 16\alpha_2}{2}, \quad \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \text{ ve } \alpha_2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$f(A) = \sqrt{A} = \left(\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ + (0) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) * \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + (0) * \begin{bmatrix} 17 & 8 & -8 \\ 16 & 25 & -16 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right) & \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) & \left(\frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right) \\ (\sqrt{5} - \sqrt{3}) & (\sqrt{5}) & (-\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) & \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) & \left(\frac{-\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}{2} \right) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \text{ } 4 \times 4 \text{ mertebeden matris olsun (Yeşilot ve Sönmez, 2022).}$$

(2, 8) e göre düzenlenirse; $\det(A - \lambda I_4) = 0$ olur. Buradan;

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} - (\lambda) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \text{ olur.}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \text{ (2, 13) e göre düzenlenip işlemin çözümü yapılırsa;}$$

$$D_1 = (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - (0).1.5.0 + (2).2.1.1 - (-5).0.0.1 + 0.0.1(-5) \\ - (1).(1-\lambda).2.(-\lambda) + (1).5.0.0 - (-1-\lambda).1.(-\lambda).2$$

$$D_1 = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 \text{ olur.}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ -5 & 5 & 2 & -1-\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2, 14) \text{ e göre düzenlenip işlemin çözümü yapılsa;}$$

$$D_2 = -(-\lambda).0.1.(1-\lambda) + (0).(1-\lambda).2.0. - (2).5.0.1. + (-5).1.(-\lambda).1 \\ - (0).(-\lambda).(1-\lambda).(-5) + 1.1.5.(-\lambda) - (1).2.1.0. + (-1-\lambda).0.0.2$$

$$D_2 = 0 \text{ olur.}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1-\lambda \\ -5 & 2 & -1-\lambda & 5 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (2, 15) \text{ e göre düzenlenip işlemin çözümü yapılsa;}$$

$$D_3 = -(-\lambda).(-\lambda).1.5 + (0).1.(-1-\lambda).1 - (2).2.0.0 + (-5).0.1.(1-\lambda) \\ - (1).(1).(1).(-5) + 0.1.2.(-\lambda) - (1-\lambda).(-1-\lambda).0.0. + 5.0.(-\lambda).2$$

$$D_3 = -5\lambda^2 + 5 \text{ olur.}$$

$\det(A) = D_1 + D_2 + D_3 = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 - 5\lambda^2 + 5 = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = 0$ ise
 $(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$, determinantın özdeğerleri;
 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$ ve $\lambda_4 = 1$ olur. (2, 16) e göre işlemin çözümü yapıldı.

5.7. A, 4 x 4 Matrisinin 12. Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = A^{12}$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$ ve $\lambda_4 = 1$ değerleri için; (3,1) ve (3, 2) e göre düzenlenirse.

$$f(\lambda_1) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \alpha_3 \lambda_1^3$$

$$f(\lambda_2) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \alpha_3 \lambda_2^3$$

$$f(\lambda_3) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_3 + \alpha_2 \lambda_3^2 + \alpha_3 \lambda_3^3$$

$$f(\lambda_4) = \alpha_0 I + \alpha_1 \lambda_4 + \alpha_2 \lambda_4^2 + \alpha_3 \lambda_4^3$$

$$f(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 = 3^{12}$$

$$f(-3) = \alpha_0 - 3\alpha_1 + 9\alpha_2 - 27\alpha_3 = (-3)^{12} = 3^{12}$$

$$f(-1) = \alpha_0 - 1\alpha_1 + 1\alpha_2 - 1\alpha_3 = (-1)^{12} = 1$$

$$f(1) = \alpha_0 + 1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 = (1)^{12} = 1, \quad \text{denklemleri ortak çözümlürse;}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{9 - 3^{12}}{8} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{3^{12} - 1}{8} \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\begin{aligned} f(A) = A^{12} &= \left(\frac{9 - 3^{12}}{8} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (0) * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ \left(\frac{3^{12} - 1}{8} \right) * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ (0) * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{12} &= \left(\frac{9 - 3^{12}}{8} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \left(\frac{3^{12} - 1}{8} \right) * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 8 & 1 \\ 15 & 3 & -5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{12} = \left(\frac{9 - 3^{12}}{8} \right) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{3^{12} - 1}{8} \right) * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 8 & 1 \\ 15 & 3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \left(\frac{3^{12}+7}{8}\right) & \left(\frac{3^{12}-1}{8}\right) & \left(\frac{3^{12}-1}{8}\right) & \left(\frac{3^{12}-1}{8}\right) \\ \left(\frac{-5.3^{12}+5}{8}\right) & \left(\frac{3^{12}+7}{8}\right) & \left(\frac{5.3^{12}-5}{8}\right) & \left(\frac{-3^{12}+1}{8}\right) \\ \left(\frac{-3^{13}+3}{8}\right) & \left(\frac{3^{13}-3}{8}\right) & \left(\frac{7.3^{12}+1}{8}\right) & \left(\frac{3^{12}-1}{8}\right) \\ \left(\frac{5.3^{13}-15}{8}\right) & \left(\frac{3^{13}-3}{8}\right) & \left(\frac{-5.3^{12}+5}{8}\right) & \left(\frac{7.3^{12}+1}{8}\right) \end{bmatrix} olur.$$

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Meksika, Colima'daki Pelibuey koyunlarının morfolojik özellikleri arasındaki Pearson korelasyonlarını ve ölçülen morfolojik değişkenleri bir A, 4 x 4 matris olarak ifade edip özdeğerlerini bulup n. mertebeden matris kuvvetlerini alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için}$$

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} - (\lambda) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 - \lambda & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 - \lambda & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$|A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 - \lambda & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 - \lambda & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

```
R = matrix (c (1, 0.83, 0.39, 0.61, 0.83, 1, 0.39, 0.23, 0.39, 0.39, 1, 0.37, 0.61, 0.23, 0.37, 1),4,4)
```

```
R
```

```
eigen (R)$values
```

RStudio programıyla yukarıdaki bilgi ve komutlarla özdeğerler aşağıdaki gibi bulunur.

```
> R = matrix (c (1, 0.83, 0.39, 0.61, 0.83, 1, 0.39, 0.23, 0.39, 0.39, 1, 0.37, 0.61, 0.23, 0.37, 1), 4, 4)
```

```
> R
```

```

[,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 1.00 0.83 0.39 0.61
[2,] 0.83 1.00 0.39 0.23
[3,] 0.39 0.39 1.00 0.37
[4,] 0.61 0.23 0.37 1.00

```

> eigen(R)\$values

[1] 2.44843530 0.80016902 0.68601735 0.06537833 olarak bulunur.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1-\lambda & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1-\lambda & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1-\lambda & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1-\lambda & 0,37 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - (0,83)(0,39)(0,37)(0,61) \\
&\quad + (0,39)(0,23)(0,39)(0,23) - (0,61)(0,83)(0,39)(0,37) \\
&\quad + (0,61)(0,39)(0,39)(0,61) - (0,23)(1-\lambda)(0,23)(1-\lambda) \\
&\quad + (0,37)(0,37)(0,83)(0,83) - (1-\lambda)(0,39)(1-\lambda)(0,39) \\
D_1 &= (1-\lambda)^4 - (0,07305909) + (0,00804609) - (0,07305909) + (0,05659641) \\
&\quad - (0,0529)(1-\lambda)^2 + (0,09431041) - (0,1521)(1-\lambda)^2 \\
D_1 &= (1-\lambda)^4 - (0,2050)(1-\lambda)^2 + (0,01283473)
\end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,39 & 0,83 & 0,61 \\ 0,83 & 0,39 & 1-\lambda & 0,23 \\ 0,39 & 1-\lambda & 0,39 & 0,37 \\ 0,61 & 0,37 & 0,23 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0,39 & 0,83 & 0,61 \\ 0,83 & 0,39 & 1-\lambda & 0,23 \\ 0,39 & 1-\lambda & 0,39 & 0,37 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= - (1-\lambda)(0,39)(0,39)(1-\lambda) + (0,83)(1-\lambda)(0,23)(0,61) \\
&\quad - (0,39)(0,37)(0,83)(0,23) + (0,61)(0,39)(1-\lambda)(0,37) \\
&\quad - (0,61)(1-\lambda)(1-\lambda)(0,61) + (0,23)(0,39)(0,37)(1-\lambda) \\
&\quad - (0,37)(0,23)(0,39)(0,83) + (1-\lambda)(0,83)(0,39)(0,39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= -(0,1521)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)(0,116449) - (0,02754687) \\
&\quad + (1-\lambda)(0,088023) - (1-\lambda)^2(0,3721) + (1-\lambda)(0,033189) \\
&\quad - (0,02754687) + (1-\lambda)(0,126243) \\
D_2 &= -(1-\lambda)^2(0,5242) + (1-\lambda)(0,363904) - (0,05509374)
\end{aligned}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,83 & 0,61 & 0,39 \\ 0,83 & 1-\lambda & 0,23 & 0,39 \\ 0,39 & 0,39 & 0,37 & 1-\lambda \\ 0,61 & 0,23 & 1-\lambda & 0,37 \\ 1-\lambda & 0,83 & 0,61 & 0,39 \\ 0,83 & 1-\lambda & 0,23 & 0,39 \\ 0,39 & 0,39 & 0,37 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= -(1-\lambda)(1-\lambda)(0,37)(0,37) + (0,83)(0,39)(1-\lambda)(0,39) \\
&\quad - (0,39)(0,23)(0,61)(0,39) + (0,61)(0,83)(0,23)(1-\lambda) \\
&\quad - (0,39)(0,23)(0,39)(0,61) + (0,39)(0,37)(0,23)(1-\lambda) \\
&\quad - (1-\lambda)(1-\lambda)(0,83)(0,83) + (0,37)(0,61)(1-\lambda)(0,39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= -(0,1369)(1-\lambda)^2 + (0,126243)(1-\lambda) - (0,02133963) \\
&\quad + (0,116449)(1-\lambda) - (0,02133963) + (1-\lambda)(0,033189) \\
&\quad - (0,6889)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)(0,088023)
\end{aligned}$$

$$D_3 = -(1-\lambda)^2(0,8258) + (1-\lambda)(0,363904) - (0,04267926)$$

$$\begin{aligned}
\text{Det}(A) = D_1 + D_2 + D_3 &= (1-\lambda)^4 - (1-\lambda)^2(0,2050) + (0,01283473) \\
&\quad - (1-\lambda)^2(0,5242) + (1-\lambda)(0,363904) - (0,05509374) \\
&\quad - (1-\lambda)^2(0,8258) + (1-\lambda)(0,363904) - (0,04267926)
\end{aligned}$$

$$\text{Det}(A) = (1-\lambda)^4 - (1,5550)(1-\lambda)^2 + (0,727808)(1-\lambda) - (0,08493827)$$

RStudio programıyla λ nın özdeğerleri ([eigen\(R\)](#))

[1] 2.44843530 0.80016902 0.68601735 0.06537833 olarak bulunmuştu.

$\lambda_1 = 2,4484$, $\lambda_2 = 0,8001$, $\lambda_3 = 0,6860$, $\lambda_4 = 0,0653$ olarak alalım.

I , A , A^2 ve A^3 ; 4×4 boyutlu matrislerin satır ve sütun değerleri, işlemlerde aşağıdaki sonuçlar gibi alınacaktır.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.1. A, 4 x 4 Matrisinin 10. Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = A^{10}$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653 \text{ değerleri için;}$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = (2,4484)^{10}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = (0,8001)^{10}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = (0,6860)^{10}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = (0,0653)^{10}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 7741,474869$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,107508476$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,023080284$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 1,40972E - 12$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_ TERS, enter

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 7741,474869 \\ 0,107508476 \\ 0,023080284 \\ 1,40972E - 12 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur. (2, 7) ye göre matris çözümü yapılırsa;}$$

$$B^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 7741,474869 \\ 0,107508476 \\ 0,023080284 \\ 1,40972E - 12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} -40,01782757 \\ 721,2284681 \\ -1732,983769 \\ 1117,661578 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X \text{ olur. Buradan}$$

$$\alpha_0 = -40,01782757, \alpha_1 = 721,2284681, \alpha_2 = -1732,983769 \text{ ve } \alpha_3 = 1117,661578$$

$$\begin{aligned}
f(A) = A^{10} = & (-40,01782757) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& + (721,2284681) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \\
& + (-1732,983769) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix} \\
& + (1117,661578) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix} \\
A^{10} = & \begin{bmatrix} -40,01782757 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40,01782757 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40,01782757 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,01782757 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 721,2284681 & 598,6196285 & 281,2791026 & 439,9493655 \\ 598,6196285 & 721,2284681 & 281,2791026 & 165,8825477 \\ 281,2791026 & 281,2791026 & 721,2284681 & 266,8545332 \\ 439,9493655 & 165,8825477 & 266,8545332 & 721,2284681 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -3835,26638 & -3383,477511 & -2303,828623 & -2695,136358 \\ -3383,477511 & -3282,097961 & -2060,171105 & -1924,651774 \\ -2303,828623 & -2060,171105 & -2497,40291 & -1850,133472 \\ -2695,136358 & -1924,651774 & -1850,133472 & -2706,747349 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 5924,422256 & 5214,377444 & 3944,640126 & 4298,661666 \\ 5214,377444 & 4731,577819 & 3464,503889 & 3550,829834 \\ 3944,640126 & 3464,503889 & 3149,805036 & 3001,105751 \\ 4298,661666 & 3550,829834 & 3001,105751 & 3532,952837 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2770,366517 & 2429,519562 & 1922,090606 & 2043,474674 \\ 2429,519562 & 2130,690499 & 1685,611886 & 1792,060607 \\ 1922,090606 & 1685,611886 & 1333,612766 & 1417,826812 \\ 2043,474674 & 1792,060607 & 1417,826812 & 1507,416128 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.2. A, 4 x 4 Matrisinin 25. Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = A^{25}$$

$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653$ değerleri için;

$$(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = (2,4484)^{25}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = (0,8001)^{25}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = (0,6860)^{25}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = (0,0653)^{25}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 5273018204$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,003789717$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 8,09288E - 05$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 2,35955E - 30$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY *TERS*, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 5273018204 \\ 0,003789717 \\ 8,09288E - 05 \\ 2,35955E - 30 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 5273018204 \\ 0,003789717 \\ 8,09288E - 05 \\ 2,35955E - 30 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} -27299697,11 \\ 491981638,9 \\ -1181680444 \\ 761686505,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X, \text{ olur. Buradan}$$

$$\alpha_0 = -27299697,11, \alpha_1 = 491981638,9, \alpha_2 = -1181680444 \text{ ve } \alpha_3 = 761686505,1$$

$$f(A) = A^{25} = (-27299697,11) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (491981638,9) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1181680444) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (761686505,1) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$A^{25} = \begin{bmatrix} -27299697,11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -27299697,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27299697,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27299697,11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 491981638,9 & 408344760,3 & 191872839,2 & 300108799,7 \\ 408344760,3 & 491981638,9 & 191872839,2 & 113155776,9 \\ 191872839,2 & 191872839,2 & 491981638,91 & 182033206,4 \\ 300108799,7 & 113155776,9 & 182033206,4 & 491981638,9 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -2615176991 & -2307112899 & -1570925982 & -1837749427 \\ -2307112899 & -2237984593 & -1404781712 & -1312374301 \\ -1570925982 & -1404781712 & -1702919688 & -1261562042 \\ -1837749427 & -1312374301 & -1261562042 & -1845666686 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 4037494508 & 3553598880 & 2688272739 & 2929538463 \\ 3553598880 & 3224570875 & 2361059833 & 2419890976 \\ 2688272739 & 2361059833 & 2146592526 & 2045253945 \\ 2929538463 & 2419890976 & 2045253945 & 2407707800 \end{bmatrix} \\
A^{25} = & \begin{bmatrix} 1886999459 & 1654830741 & 1309219596 & 1391897836 \\ 1654830741 & 1451268224 & 1148150961 & 1220672451 \\ 1309219596 & 1148150961 & 908354779,5 & 965725108,9 \\ 1391897836 & 1220672451 & 965725108,9 & 1026723056 \end{bmatrix} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

6.3. A, 4 x 4 Matrisinin –5. Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = A^{-5}$$

$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653$ değerleri için;

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = (2,4484)^{-5}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = (0,8001)^{-5}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = (0,6860)^{-5}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = (0,0653)^{-5}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 0,01136549$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 3,049851179$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 6,582326513$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 842236,5681$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0,01136549 \\ 3,049851179 \\ 6,582326513 \\ 842236,5681 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_3 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 0,01136549 \\ 3,049851179 \\ 6,582326513 \\ 842236,5681 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_3 = \begin{bmatrix} 1041333,612 \\ -3244735,804 \\ 3048706,722 \\ -774860,8974 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X, \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = 1041333,612, \alpha_1 = -3244735,804, \alpha_2 = 3048706,722, \alpha_3 = -774860,8974$$

$$f(A) = A^{-5} = (1041333,612) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-3244735,804) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (3048706,722) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (-774860,8974) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$A^{-5} = \begin{bmatrix} 436362,2495 & -355898,8648 & 52733,72156 & -218148,9165 \\ -355898,8648 & 290199,3042 & -43041,95058 & 177858,2064 \\ 52733,72156 & -43041,95058 & 6368,335437 & -26382,31304 \\ -218148,9165 & 177858,2064 & -26382,31304 & 109020,4934 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.4. A, 4 x 4 Matrisinin Karekök Kuvvetinin hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \sqrt{A}$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653 \text{ değerleri için;}$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = \sqrt{2,4484}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = \sqrt{0,8001}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = \sqrt{0,6860}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \sqrt{0,0653}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 1,5647364$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,894483091$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,82825117$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 0,255538647$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınırsa; DİZEY_ TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1,5647364 \\ 0,894483091 \\ 0,82825117 \\ 0,255538647 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_4 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 1,5647364 \\ 0,894483091 \\ 0,82825117 \\ 0,255538647 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_4 = \begin{bmatrix} 0,16890364 \\ 1,372083052 \\ -0,704700817 \\ 0,154038094 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X, \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = 0,16890364, \alpha_1 = 1,372083052, \alpha_2 = -0,704700817 \text{ ve } \alpha_3 = 0,154038094$$

$$f(A) = \sqrt{A} = (0,16890364) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (1,372083052) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-0,704700817) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (0,154038094) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 0,79792766 & 0,481625774 & 0,141940398 & 0,3334691 \\ 0,481625774 & 0,858468233 & 0,174848108 & 0,022320018 \\ 0,141940398 & 0,174848108 & 0,959554042 & 0,168949836 \\ 0,3334691 & 0,022320018 & 0,168949836 & 0,92723229 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.5. A, 4 x 4 Matrisinin Küp Kök Kuvvetinin Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \sqrt[3]{A}$$

$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653$ değerleri için;

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = \sqrt[3]{2,4484}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = \sqrt[3]{0,8001}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = \sqrt[3]{0,6860}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \sqrt[3]{0,0653}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 1,347806222$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,928356445$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,881944735$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 0,4026902$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_ TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1,347806222 \\ 0,928356445 \\ 0,881944735 \\ 0,4026902 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur}$$

$$B^{-1}C_5 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 1,347806222 \\ 0,928356445 \\ 0,881944735 \\ 0,4026902 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_5 = \begin{bmatrix} 0,323819078 \\ 1,257024176 \\ -0,764654669 \\ 0,172383912 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X, \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = 0,323819078, \alpha_1 = 1,257024176, \alpha_2 = -0,764654669 \text{ ve } \alpha_3 = 0,172383912$$

$$f(A) = \sqrt[3]{A} = (0,323819078) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (1,257024176) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-0,764654669) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (0,172383912) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt[3]{A} = \begin{bmatrix} 0,802346577 & 0,354664224 & 0,082113945 & 0,240603188 \\ 0,354664224 & 0,862444515 & 0,115569987 & -0,012443298 \\ 0,082113945 & 0,115569987 & 0,964713473 & 0,111632866 \\ 0,240603188 & -0,012443298 & 0,111632866 & 0,931438463 \end{bmatrix} \text{ olur}$$

6.6. A, 4 x 4 Matrisinin Sinüs Fonksiyonunun Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \sin A$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653 \text{ değerleri için;}$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = \sin(2,4484)$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = \sin(0,8001)$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = \sin(0,6860)$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \sin(0,0653)$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 0,638996255$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,717425758$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,633447114$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 0,065253602$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınırsa; DİZEY TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0,638996255 \\ 0,717425758 \\ 0,633447114 \\ 0,065253602 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_6 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 0,638996255 \\ 0,717425758 \\ 0,633447114 \\ 0,065253602 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_6 = \begin{bmatrix} -0,002444221 \\ 1,044499498 \\ -0,113639868 \\ -0,084121518 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = -0,002444221, \alpha_1 = 1,044499498, \alpha_2 = -0,113639868, \alpha_3 = -0,084121518$$

$$f(A) = \text{Sin}A = (-0,002444221) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (1,044499498) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-0,113639868) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (-0,084121518) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sin}A = \begin{bmatrix} 0,344653431 & 0,252600631 & -0,040613914 & 0,136870434 \\ 0,252600631 & 0,470707481 & 0,011501614 & -0,153229046 \\ -0,040613914 & 0,011501614 & 0,64121676 & 0,039262735 \\ 0,136870434 & -0,153229046 & 0,039262735 & 0,598651198 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.7. A, 4 x 4 Matrisinin Kosinüs Fonksiyonu Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \text{Cos}A$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653 \text{ değerleri için;}$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1 (2,4484) + \alpha_2 (2,4484)^2 + \alpha_3 (2,4484)^3 = \text{Cos}(2,4484)$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1 (0,8001) + \alpha_2 (0,8001)^2 + \alpha_3 (0,8001)^3 = \text{Cos}(0,8001)$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1 (0,6860) + \alpha_2 (0,6860)^2 + \alpha_3 (0,6860)^3 = \text{Cos}(0,6860)$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \text{Cos}(0,0653)$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = -0,769209845$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 0,69663497$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,773785987$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 0,997868712$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınırsa; DİZEY_TERS, enter

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} -0,769209845 \\ 0,69663497 \\ 0,773785987 \\ 0,997868712 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_7 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} -0,769209845 \\ 0,69663497 \\ 0,773785987 \\ 0,997868712 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_7 = \begin{bmatrix} 0,003982386 \\ 0,064997237 \\ -0,173405009 \\ 0,144141951 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = 0,003982386, \alpha_1 = 0,064997237, \alpha_2 = -0,173405009 \text{ ve } \alpha_3 = 0,144141951$$

$$\begin{aligned}
f(A) = \text{CosA} &= (0,003982386) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&+ (0,064997237) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \\
&+ (-0,173405009) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix} \\
&+ (0,144141951) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix} \\
\text{CosA} &= \begin{bmatrix} 0,449274563 & 0,387876671 & 0,303554437 & 0,32435623 \\ 0,387876671 & 0,35078735 & 0,269995627 & 0,280307191 \\ 0,303554437 & 0,269995627 & 0,225307953 & 0,225966712 \\ 0,32435623 & 0,280307191 & 0,225966712 & 0,253774219 \end{bmatrix} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

6.8. A, 4 x 4 Matrisinin Tanjant Fonksiyonu Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \text{TanA}$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = \text{Tan}(2,4484)$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = \text{Tan}(0,8001)$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = \text{Tan}(0,6860)$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \text{Tan}(0,0653)$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = -0,830717729$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 1,029844594$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 0,818633478$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 0,065392974$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_ TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} -0,830717729 \\ 1,029844594 \\ 0,818633478 \\ 0,065392974 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_8 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0,830717729 \\ 1,029844594 \\ 0,818633478 \\ 0,065392974 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_8 = \begin{bmatrix} 0,004300828 \\ 0,096086266 \\ -0,183455307 \\ 0,009446003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X, \text{ olur. Buradan}$$

$$\alpha_0 = 0,004300828, \alpha_1 = 0,096086266, \alpha_2 = -0,183455307 \text{ ve } \alpha_3 = 0,009446003$$

$$f(A) = \text{Tan}A = (0,004300828) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + (0,096086266) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix} \\
& + (-0,183455307) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix} \\
& + (0,009446003) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix} \\
\text{TanA} = & \begin{bmatrix} -0,255547134 & -0,234356827 & -0,173073411 & -0,1903666 \\ -0,234356827 & -0,207069617 & -0,151337503 & -0,151635511 \\ -0,173073411 & -0,151337503 & -0,137369529 & -0,13494089 \\ -0,1903666 & -0,151635511 & -0,13494089 & -0,156292727 \end{bmatrix} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

6.9. A, 4 x 4 Matrisinin Logaritma Fonksiyonu Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = \text{LogA}$$

$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653$ değerleri için;

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = \text{Log}(2,4484)$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = \text{Log}(0,8001)$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = \text{Log}(0,6860)$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = \text{Log}(0,0653)$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 0,388882371$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = -0,09685573$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = -0,163675884$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = -1,185086819$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_9 = \begin{bmatrix} 0,388882371 \\ -0,09685573 \\ -0,163675884 \\ -1,185086819 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_9 = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 0,388882371 \\ -0,09685573 \\ -0,163675884 \\ -1,185086819 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_9 = \begin{bmatrix} -1,376373257 \\ 3,07556163 \\ -2,274105868 \\ 0,536033929 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = -1,376373257, \alpha_1 = 3,07556163, \alpha_2 = -2,274105868 \text{ ve } \alpha_3 = 0,536033929$$

$$f(A) = (-1,376373257) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (3,07556163) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-2,274105868) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (0,536033929) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$\text{LogA} = \begin{bmatrix} -0,492264195 & 0,613583309 & 0,068134227 & 0,401054499 \\ 0,613583309 & -0,338461462 & 0,157598696 & -0,115253897 \\ 0,068134227 & 0,157598696 & -0,067369415 & 0,149461923 \\ 0,401054499 & -0,115253897 & 0,149461923 & -0,158322541 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

6.10. A, 4 x 4 Matrisinin Üstel Fonksiyonu Hesaplanması

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = e^A \text{ olur}$$

$$\lambda_1 = 2,4484, \lambda_2 = 0,8001, \lambda_3 = 0,6860, \lambda_4 = 0,0653 \text{ değerleri için;}$$

$$f(2,4484) = \alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(2,4484)^2 + \alpha_3(2,4484)^3 = e^{2,4484}$$

$$f(0,8001) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,8001)^2 + \alpha_3(0,8001)^3 = e^{0,8001}$$

$$f(0,6860) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,6860)^2 + \alpha_3(0,6860)^3 = e^{0,6860}$$

$$f(0,0653) = \alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,0653)^2 + \alpha_3(0,0653)^3 = e^{0,0653}$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(2,4484) + \alpha_2(5,99466256) + \alpha_3(14,67733181) = 11,56982019$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,8001) + \alpha_2(0,64016001) + \alpha_3(0,512192024) = 2,225763494$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,6860) + \alpha_2(0,470596) + \alpha_3(0,322828856) = 1,9857566$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1(0,0653) + \alpha_2(0,00426409) + \alpha_3(0,000278445) = 1,06747922$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2,4484 & 5,99466256 & 14,67733181 \\ 1 & 0,8001 & 0,64016001 & 0,512192024 \\ 1 & 0,6860 & 0,470596 & 0,322828856 \\ 1 & 0,0653 & 0,00426409 & 0,000278445 \end{bmatrix}$$

Excel programıyla tersi alınır; DİZEY_ TERS, enter.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,144449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$C_{10} = \begin{bmatrix} 11,56982019 \\ 2,225763494 \\ 1,9857566 \\ 1,06747922 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^{-1}C_{10} = \begin{bmatrix} -0,005177243 & 0,793649263 & -1,024868036 & 1,236396017 \\ 0,093301714 & -13,63496705 & 17,39427497 & -3,852609632 \\ -0,224099443 & 23,15358318 & -26,54938221 & 3,619898472 \\ 0,1444449815 & -7,236173134 & 8,011763596 & -0,920040278 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 11,56982019 \\ 2,225763494 \\ 1,9857566 \\ 1,06747922 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}C_{10} = \begin{bmatrix} 0,991264373 \\ 1,159487749 \\ 0,085165388 \\ 0,49253695 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = X \text{ olur. Buradan;}$$

$$\alpha_0 = 0,991264373, \alpha_1 = 1,159487749, \alpha_2 = 0,085165388 \text{ ve } \alpha_3 = 0,49253695$$

$$f(A) = e^A = (0,991264373) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (1,159487749) * \begin{bmatrix} 1 & 0,83 & 0,39 & 0,61 \\ 0,83 & 1 & 0,39 & 0,23 \\ 0,39 & 0,39 & 1 & 0,37 \\ 0,61 & 0,23 & 0,37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (0,085165388) * \begin{bmatrix} 2,2131 & 1,9524 & 1,3294 & 1,5552 \\ 1,9524 & 1,8939 & 1,1888 & 1,1106 \\ 1,3294 & 1,1888 & 1,4411 & 1,0676 \\ 1,5552 & 1,1106 & 1,0676 & 1,5619 \end{bmatrix}$$

$$+ (0,49253695) * \begin{bmatrix} 5,30073 & 4,665435 & 3,529369 & 3,846121 \\ 4,665435 & 4,233462 & 3,099779 & 3,177017 \\ 3,529369 & 3,099779 & 2,81821 & 2,685165 \\ 3,846121 & 3,177017 & 2,685165 & 3,161022 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} 4,950037031 & 3,426550862 & 2,303763733 & 2,734093446 \\ 3,426550862 & 4,397183313 & 2,080200531 & 1,926065127 \\ 2,303763733 & 2,080200531 & 3,661556521 & 1,842476016 \\ 2,734093446 & 1,926065127 & 1,842476016 & 3,840692077 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bir kare matrisin kuvvetlerini hesaplamak için önce matrisin özdeğerleri bulundu ve özdeğerler yardımıyla Cayley- Hamilton Teoremi kullanılmıştır. Ayrıca matris polinomları kullanılmıştır. Cayley- Hamilton Teoremi ile 2×2 , 3×3 ve 4×4 kare matrislerinin n . mertebeden kuvvetleri bulunmuştur. Ayrıca 2×2 , 3×3 ve 4×4 kare matrislerin, determinantları ve öz değerleri bulunmuştur.

Ayrıca korelasyon katsayısı değerleri ve kovaryans matrisi ile korelasyon matrisi hesaplanmıştır. Korelasyon değerleri -1 ve 1 aralarında gözlenmiştir. İki değişken arasında doğrusal bir ilişki varsa pozitif korelasyon, ters bir ilişki varsa negatif korelasyon oluşur. Kovaryans matrisi sonucu, korelasyon matrisinin simetrik matris olduğu ve satır ve sütun elemanlarının köşegen elemanlarından, yani 1 'den küçük olduğu görülmüştür.

Morfolojik değerlere bağlı oluşan, 4×4 boyutundaki kare matrisin bulunan özdeğerlerine karşılık aşağıdaki fonksiyonların Cayley- Hamilton Teoremi ile 4×4 kare matrisleri bulunmuştur.

A^{10} , matrisinin simetrik matris kuralını sağladığı görülmüştür.

A^{25} , matrisinin simetrik matris kuralını sağladığı görülmüştür.

A^{-5} , matrisinin simetrik matris kuralını sağladığı görülmüştür.

$\sqrt{A}$, matrisinin simetrik matris kuralını ve pozitif korelasyonu sağladığı görülmüştür.

$\sqrt[3]{A}$, matrisinin simetrik matrisi ve korelasyon kuralını sağladığı görülmüştür.

$\sin A$, matrisinin simetrik matris kuralını, Sinüs fonksiyonun $[-1,1]$ değer aralığını ve korelasyonu sağladığı görülmüştür.

$\text{Cos}A$, matrisinin simetrik matris kuralını ve Kosinüs fonksiyonun $[-1,1]$ değer aralığında pozitif korelasyon sağladığı görülmüştür.

$\text{Tan}A$, matrisinin simetrik matrisi ve negatif korelasyonu sağladığı görülmüştür

$\text{Log}A$, matrisinin simetrik matrisi ve korelasyonu sağladığı görülmüştür.

e^A , Matrisinin simetrik matris kuralını sağladığı görülmüştür.

Sonuç olarak, Cayley- Hamilton teoreminin matris polinomları ile ilgili uygulamalarda kare matrisleri için farklı fonksiyonlar türleri üzerinde n . mertebeden kuvvetlerinin bulunmasında kolaylık sağladığı ve elde edilen matrislerin simetrik veya korelasyon matrisleri olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

Alper, R. (2017). Uygulamalı Çok Değişkenli İstatiksel Yöntemler. Detay Anatolia Akademik Yayıncılık, Ankara.

Alper, R. (2022). Uygulamalı İstatiksel ve Geçerlilik- Güvenirlik. Detay Anatolia Akademik Yayıncılık, Ankara.

Arredondo-Ruiz V, Macedo-Barragán R, Molina-Cárdenas J, Magaña-Álvarez J, Prado-Rebolledo O, García-Márquez L.J, Herrera-Corredor A, Lee-Rangel H. (2013). Morphological characterization of Pelibuey sheep in Colima, México. Trop Anim. Health Prod., 45(4), 895-900. doi:10.1007/s11250-012-0303-1. Epub 2012 Nov 2. PMID: 23114577.

Arslan, F. (2015). Matematiksel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık, Ankara.

Bayram, N. (2016). Veri Analizi Excel ve SPSS Uygulamalarıyla Birlikte. Ezgi Kitapevi, Bursa.

Bulut, H. (2018). R Uygulamaları ile Çok Değişkenli İstatiksel Yöntemler. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık, Ankara.

Çelik, Ş. (2022). Cayley-Hamilton Theorem Applications in Matrices and Correlation Matrices Some Applications in Livestock Data. Quest Journals Journal of Research in Applied Mathematics. 8(8), 28–35

Heiman, G.W. (1996). Basic Statistics for Behavioral Sciences. Boston: Houghton Mifflin Comp.

Köklü, N., Büyüköztürk, Ş. ve Çokluk Bökeoğlu, Ö. (2006). Sosyal Bilimler için İstatistik. Pegem Akademi, Ankara.

Lipschutz, S. ve Lipson, M. L. (2016). Lineer Cebir 4. Basımdan Çeviri. (Çev.: İlker Akkuş).

Maltepeler, S. (2017). 4x4 Tipinde Matrislerin Determinantlarını Hesaplamada Alternatif Bir Yöntem. Kara Harp Okulu Bilim Dergisi, 27(2), 157-166.

Orhunbilge, N. (2017). Uygulamalı Regresyon ve Korelasyon Analizi. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık, Ankara.

R Core Team (2022). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>.

Sönmez, D. ve Yeşilot, G. (2022). Temel Lineer Cebir. Seçkin Akademi ve Mesleki Yayınlar, Ankara.

Sullivan, D. (1993). Matematik Dergisi: [Cilt 66, Sayı 5 \(Aralık, 1993\)](#), Yayınlayan: Taylor and Francis, Ltd. s. 314-316

Sümbüloğlu, K. ve Sümbüloğlu, V. (2021). Biyoistatistik. Hatipoğlu Yayınevi, Ankara.

Yüce, S. (2022). Lineer Cebir. Pegem Akademi, Ankara.