

**KOROVKİN TİP TEOREMLER**

**Şule Yüksel GÜNGÖR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2012  
ANKARA**

Şule Yüksel GÜNGÖR tarafından hazırlanan “KOROVKİN TİP TEOREMLER”  
adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR .....  
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek  
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL .....  
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR .....  
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL .....  
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 30/05/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini  
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU .....  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şule Yüksel GÜNGÖR

**KOROVKİN TİP TEOREMLER****(Yüksek Lisans Tezi)****Şule Yüksel GÜNGÖR****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Mayıs 2012****ÖZET**

Bu tezde, Korovkin altkümeleri ve Korovkin altuzayları üzerinde lineer pozitif operatör dizileri ve lineer pozitif operatör ağları için Korovkin tip teoremler incelendi. Bu amaçla ilk olarak  $C_0(X)$  uzayında tanımlı lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin altuzaylarını karakterize eden Korovkin tip teoremler verildi. Daha sonra bu teoremler Korovkin kapanış uzayında tanımlı lineer pozitif operatör ağlarına genelleştirildi.

**Bilim Kodu : 204.1.095****Anahtar Kelimeler : Korovkin tip teoremler, lineer pozitif operatör dizileri, lineer pozitif operatör ağları, Korovkin altkümümesi, Korovkin altuzayı, Korovkin kapanışı****Sayfa Adedi : 64****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR**

**KOROVKIN-TYPE THEOREMS****(M.Sc. Thesis)****Sule Yuksel GUNGOR****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****MAY 2012****ABSTRACT**

**In this thesis, Korovkin-type theorems for the sequences and the nets of positive linear operators on Korovkin subsets and Korovkin subspaces are investigated. Firstly Korovkin-type theorems characterizing the Korovkin subspaces are given for sequences of positive linear operators defined on  $C_0(X)$ . Later, the generalization of these theorems are given the nets of positive linear operators defined on Korovkin closure spaces.**

**Science Code : 204.1.095****Key Words : Korovkin type theorems, sequences of positive linear operators, nets of positive linear operators, Korovkin subset, Korovkin subspace, Korovkin closure****Page Number : 64****Adviser : Prof. Dr. Nurhayat ISPIR**

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteği ile beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli danışmanım Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e ve bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan sevgili aileme ve dostlarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca bu tezin hazırlanmasında mali desteği olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                            | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                 | iv    |
| ABSTRACT .....                                                             | v     |
| TEŞEKKÜR .....                                                             | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                          | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR .....                                              | viii  |
| 1. GİRİŞ .....                                                             | 1     |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....                                          | 3     |
| 2.1. Bazı Fonksiyon Uzaylarının Yapısı .....                               | 3     |
| 2.2. Lineer Pozitif Operatörler .....                                      | 6     |
| 2.3. Latisler .....                                                        | 8     |
| 2.4. Ağlar .....                                                           | 13    |
| 2.5. Radon Ölçüsü .....                                                    | 16    |
| 3. KOROVKİN'İN BİRİNCİ TEOREMİ .....                                       | 19    |
| 4. LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TİP<br>TEOREMLER .....   | 29    |
| 5. $C_0(X)$ 'TE BİRİM OPERATÖR İÇİN KOROVKİN TİP TEOREMLER .....           | 35    |
| 6. AĞIRLIKLİ SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARINDA KOROVKİN TİP<br>TEOREMLER ..... | 41    |
| 7. LİNEER POZİTİF OPERATÖR AĞLARI İÇİN KOROVKİN TİP<br>TEOREMLER .....     | 48    |
| 7.1. Korovkin Altkümesi, Korovkin Altuzayı ve Korovkin Kapanışı .....      | 48    |
| 7.2. Kesin Korovkin Altkümeleri .....                                      | 55    |
| KAYNAKLAR .....                                                            | 62    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                             | 64    |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simge                    | Açıklama                                                             |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $B(X)$                   | $X$ 'te tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı                           |
| $C(X)$                   | $X$ 'te tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı                           |
| $C_b(X)$                 | $X$ 'te tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı                |
| $C_0(X)$                 | Sonsuzda sıfır olan $X$ 'te sürekli fonksiyonlar uzayı               |
| $F(X)$                   | $X$ 'te tanımlı reel değerli fonksiyonlar uzayı                      |
| $\tilde{f}$              | $f$ 'nin $X_w$ 'ya kanonik (doğal) genişlemesi                       |
| $K(X)$                   | $X$ 'te tanımlı, sürekli ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar uzayı |
| $K_+ - \text{altkümesi}$ | Korovkin altkümesi                                                   |
| $K_+(H, T)$              | $H$ kümesinin $T$ operatörü için Korovkin kapanışı                   |
| $L(f; x)$                | $L$ operatörünün $f$ fonksiyonuna uygulanması                        |
| $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$ | Lineer pozitif operatör ağı                                          |
| $M_b^+(X)$               | Pozitif sınırlı Radon ölçülerinin uzayı                              |
| $\mu$                    | Radon ölçüsü                                                         |
| $UC_b(X)$                | $X$ 'te düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı                 |

| Simge                | Açıklama                            |
|----------------------|-------------------------------------|
| $x \vee y$           | $x$ ve $y$ 'nin supremumu           |
| $x \wedge y$         | $x$ ve $y$ 'nin infimumu            |
| $x^+$                | $x$ ve $0$ 'in supremumu            |
| $x^-$                | $-x$ ve $0$ 'in supremumu           |
| $ x $                | $-x$ ve $x$ 'in supremumu           |
| $\lim_{i \in I} x_i$ | $(x_i)_{i \in I}$ ağının limiti     |
| $X_w$                | $X$ 'in tek nokta kompaktlaştırması |
| $\  \cdot \ _\infty$ | düzgün yakınsama normu (sup-norm)   |

## 1. GİRİŞ

Korovkin tip teoremler, verilen bir lineer pozitif operatör dizisinin, bazı fonksiyon uzayları üzerinde bir yaklaşım yöntemi olup olmadığı ile ilgili, diğer bir deyimle, bu dizinin birim operatöre kuvvetli yakınsaklığı ile ilgili basit ve yararlı ölçütler sağlar.

Kısaca bu teoremler, yaklaşım özelliğinin tüm uzay üzerinde sağlandığını garanti eden, fonksiyonların test altkümelerinin türünü gösterir.

Bu tür sonuçlara “Korovkin tip teoremler” denilmesi alışkanlığı P. P. Korovkin’e dayanır. Korovkin, 1953’te  $[a, b]$  reel aralığı üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayı  $C([a, b])$ ’deki  $\mathbf{1}$ ,  $x$  ve  $x^2$  fonksiyonları için ve benzer şekilde, reel eksen üzerindeki  $2\pi$  periyotlu tüm sürekli fonksiyonlar uzayındaki  $\mathbf{1}$ ,  $\cos$  ve  $\sin$  fonksiyonları için yaklaşım koşullarını elde etmiştir [1,2].

Bu buluştan sonra birçok Matematikçi, Korovkin Teoremi’ni genişletmeye başlamıştır. Bu genişletmelerin amacı  $\{\mathbf{1}, x, x^2\}$  kümesi ile aynı özelliklere sahip başka fonksiyon altkümeleri bulmak, fonksiyon uzayları, soyut Banach latisleri, Banach cebirleri, Banach uzayları ve benzeri uzaylarda ve lineer operatörlerin başka sınıfları için Korovkin Teoremi benzeri sonuçlar elde etmektir.

Bu araştırmaların sonucu olarak “Korovkin tip yaklaşım teorisi” olarak adlandırılan yeni bir teori oluşturulmuştur.

Bu teorinin sadece klasik yaklaşım teorisiyle değil, reel analiz, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, olasılık teorisi ve kısmi diferensiyel denklemlerle de oldukça güçlü bağları vardır.

Bu tezin amacı, Korovkin altkümeleri ve Korovkin altuzayları ile bağlantılı Korovkin tip teoremler üzerine bir inceleme sunmak, lineer pozitif operatör dizileri için elde edilen sonuçları lineer pozitif operatör ağırları için genelleştirmektir.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

Temel tanım ve teoremlerin verildiği ikinci bölümde bazı fonksiyon uzayları, lineer pozitif operatörler, latisler, ağlar ve Radon ölçüsü kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Korovkin'in Birinci Teoremi ifade edilmiş ayrıca bu teoremin yerel kompakt metrik uzaylara genelleştirmeleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Banach latis üzerinde tanımlı  $T$  lineer pozitif operatörü ve birim operatör için Korovkin altkümesi ve Korovkin altuzayı tanıtılmış ve ilgili teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde bu inceleme  $C_0(X)$  Banach latisinde birim operatör için yapılmış ve  $C(X)$ 'in bir  $M$  altkümesinin  $X$ 'in noktalarını ayırması halinde  $C_0(X)$ 'in Korovkin altkümelerinin belirlenmesi araştırılmıştır.

Altıncı bölümde  $C_0(X)$ 'te tanımlı latis homomorfizmleri için Korovkin altuzaylarını karakterize eden teoremler çalışılmıştır.

Üç, dört, beş ve altıncı bölümler için F. Altomare'nin "Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators" [3] adlı makalesinin gerekli kısımları incelenmiştir.

Son olarak yedinci bölümde, daha önceki bölümlerde lineer pozitif operatör dizileri için verilen özellikler F. Altomare ve M. Campiti'nin "Korovkin-type Approximation Theory and its Applications" [4] isimli kitapları kullanılarak incelenmiştir. Bu bölümde özellikle  $C_0(X)$ 'teki fonksiyonların Korovkin kapanış uzayı tanımı yardımıyla,  $C_0(X)$ 'te tanımlı lineer pozitif operatör ağlarının Korovkin kapanış uzayındaki fonksiyonlara yakınsama koşullarını veren Korovkin tip teoremler verilmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız temel kavramlar ve sonuçlar verilmiştir.

### 2.1. Bazı Fonksiyon Uzaylarının Yapısı

$X$  kümesi üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların uzayını  $F(X)$  ile,  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere  $X$  üzerinde tanımlı tüm reel değerli, sürekli fonksiyonların uzayını  $C(X)$  ile gösterelim.

$X$  kümesi üzerinde tanımlı tüm reel değerli, sınırlı fonksiyonların uzayını  $B(X)$  ile gösterelim. Bu uzay üzerinde, düzgün yakınsama normu (kısaca sup-norm), her  $f \in B(X)$  için,

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.  $B(X)$  uzayı bu norm ile birlikte bir Banach uzayıdır.

$C_b(X) = C(X) \cap B(X)$  diyelim.

Ayrıca  $X$  topolojik uzayı üzerinde tanımlı tüm düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayını  $UC_b(X)$  ile gösterelim.

$C_b(X)$  ve  $UC_b(X)$  uzayları,  $B(X)$  'te kapalıdır dolayısıyla bu uzaylar sup-norm ile birer Banach uzayıdır.

#### 2.1.1. Tanım:

$X$  'in tek nokta kompaktlaştırması olan ve  $X_w = X \cup \{w\}$  olarak tanımlanan  $X_w$  'yı göz önüne alalım. Burada  $w$ ,  $X$  'e ait değildir ve genellikle  $X$  'in sonsuzluk noktası olarak isimlendirilir.

$\tau$ ,  $X$  üzerindeki topolojiyi göstermek üzere  $X_w$  'daki  $\tau_w$  topolojisi

$$\tau_w = \tau \cup \{X_w / K : K \subset X, K \text{ kompakt}\}$$

olarak tanımlanır.

$(X_w, \tau_w)$  uzayına,  $(X, \tau)$  topolojik uzayının bir-nokta veya Alexandroff kompaktlaştırması denir. Bu topolojik uzay bir kompakt Hausdorff uzayıdır ve  $X$ ,  $X_w$ 'da açıktır. Ayrıca,  $X$  kompakt değilse,  $X$ ,  $X_w$ 'da yoğundur.

$X$  bir yerel kompakt uzay olmak üzere sonsuzda sıfır olan bütün  $f \in C(X)$  fonksiyonlarının uzayını  $C_0(X)$  ile gösterelim.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  reel sayısı için

$$\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kümesi kompakt ise veya eş değer olarak,

her  $\varepsilon > 0$  reel sayısı ve her  $x \in X / K$  için  $|f(x)| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $X$ 'in bir kompakt  $K$  altkümesi varsa,  $f \in C(X)$  fonksiyonu sonsuzda sıfır oluyor denir.

Diğer bir deyimle,  $f \in C_0(X)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{x \rightarrow w} f(x) = 0$$

veya

$$\tilde{f} : X_w \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in X \text{ ise} \\ 0, & x = w \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlı  $\tilde{f}$  fonksiyonunun  $X_w$ 'da sürekli olmasıdır.

Yukarıdaki  $\tilde{f}$  fonksiyonu,  $f$ 'nin  $X_w$ 'ya kanonik (doğal) genişlemesi olarak isimlendirilir.

$C_0(X)$  uzayındaki fonksiyonların başka bir karakterizasyonu da,  $X$  'in sonsuzluk noktasında yakınsak olan  $X$  'teki diziler yardımıyla verilebilir. Yani,  $X$  kompakt olmayan bir uzay,  $(x_n)$   $X$  'te bir dizi olmak üzere  $X$  'in her  $K$  kompakt altkütmesi ve her  $n \geq \nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) için  $x_n \in X \setminus K$  ise  $(x_n)$  dizisi  $X$  'in sonsuzluk noktasında yakınsaktır denir. Böylece, bu özellikteki her dizi ve her  $f \in C_0(X)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \quad (2.1)$$

olur.

Tersine,  $X$  'in sonsuzluk noktasında yakınsak olan her  $(x_n)$  dizisi için Eş. 2.1'i sağlayan bir  $f \in C(X)$  fonksiyonunun  $C_0(X)$  'te olması,  $X$  'in sonsuzda sayılabilir olmasını sağlar. Bununla birlikte  $X$  'in sonsuzda sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul her  $x \in X$  için  $f_0(x) > 0$  olacak biçimde bir  $f_0 \in C_0(X)$  olmasıdır. Ayrıca,  $X$  sayılabilir bir tabana sahipse,  $X$  sonsuzda sayılabilir.

### 2.1.2. Tanım:

$X$  bir yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere  $f$  'nin sıfırdan farklı değerler aldığı noktaların kümesinin kapanışına fonksiyonun desteği denir ve  $\text{supp}(f)$  ile gösterilir.

$X$  üzerinde reel değerli, sürekli ve kompakt desteğe sahip bütün fonksiyonların uzayını  $K(X)$  ile gösterelim.

Kompakt uzaylar üzerinde tanımlı her reel değerli sürekli fonksiyon, bu uzaylar üzerinde sınırlı olduğundan  $K(X) \subset C_b(X)$  olur.

$K(X)$  'in  $C_b(X)$  içinde sup-norma göre kapanışı  $C_0(X)$  'tir ve böylece  $C_0(X)$ ,  $C_b(X)$  'in kapalı bir altuzayıdır dolayısıyla  $C_0(X)$  sup-norm ile bir Banach uzayıdır.

## 2.2. Lineer Pozitif Operatörler

### 2.2.1. Tanım:

$X$  ve  $Y$  aynı cisim üzerinde tanımlı reel değişkenli reel değerli fonksiyon uzayı olsun.  $X$  'ten alınmış herhangi bir  $f$  fonksiyonuna  $Y$  'de bir  $g$  fonksiyonu karşılık getiren  $L: X \rightarrow Y$  dönüşümüne (ya da fonksiyonuna) bir operatör denir.

$f \in X$  ,  $g \in Y$  ve  $x$  ,  $g$  'nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f; x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde,  $t$  ,  $f$  'nin ve  $x$  ,  $g$  'nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t); x) = g(x)$$

gösterimi kullanılır.

$X$  uzayına  $L$  operatörünün tanım bölgesi denir ve  $X = D(L)$  ile gösterilir. Bu durumda  $L(f; x) = g(x)$  ,  $Y$  uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki  $g$  fonksiyonları kümesine  $L$  operatörünün değer kümesi denir. Bu küme  $R(L)$  ile gösterilir ve  $R(L) \subset Y$  dir.

### 2.2.2. Tanım:

Her  $\alpha, \beta$  skaleri ve her  $f_1, f_2 \in X$  için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

ise  $L$  'ye lineer operatör denir.

### 2.2.3. Tanım:

Her  $t \in D(f)$  için  $f(t) \geq 0$  ise  $f$  'ye pozitif fonksiyon denir, kısaca  $f \geq 0$  yazılır.

Eğer  $L$  lineer operatörü, pozitif fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürüyorsa yani her  $t \in D(f)$  için  $f(t) \geq 0$  olduğunda her  $x \in D(g)$  için,

$$L(f(t); x) = L(f; x) = g(x) \geq 0$$

ise  $L$  'ye lineer pozitif operatör denir.

Eş değer olarak,

$$X^+ = \{f \in X : \forall t \in D_f \text{ için } f(t) \geq 0\} \text{ ve } Y^+ = \{g \in Y : \forall x \in D_g \text{ için } g(x) \geq 0\}$$

olmak üzere,  $L(X^+) \subset Y^+$  ise  $L$  'ye lineer pozitif operatör denir.

2.2.4. Tanım:

$L: X \rightarrow X$ ,  $L(f; x) = f(x)$  olarak tanımlanan operatöre birim (özdeş) operatör denir ve  $I_X$  ile gösterilir.

2.2.5. Tanım:

$(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  birer normlu fonksiyon uzayı ve  $L: X \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun. Her  $f \in D(L)$  için,

$$\|L(f)\|_Y \leq K \cdot \|f\|_X$$

olacak biçimde  $K \geq 0$  sayısı varsa  $L$  'ye  $D(L) \subseteq X$  'te sınırlı operatör denir.

Bu eşitsizliğin anlamı sınırlı kümelerin görüntüsünün de sınırlı olacağıdır. Dolayısıyla operatörün sınırlılığı kavramı analizden bilinen fonksiyonların sınırlılığı kavramından farklıdır.

Eğer  $f = 0$  ise bu eşitsizliği sağlayan en küçük  $K$  sayısı sıfırdır.

O halde  $f \neq 0$  olmak üzere eşitsizliği sağlayan en küçük  $K$  'yi bulalım.

$\|f\|_X \neq 0$  ise  $\frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X} \leq K$  olup  $\left\{ \frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X} \right\} \subset \mathbb{R}$  olduğundan ve reel sayıların üstten

sınırlı her altkümesinin bir en küçük üst sınırı var olduğundan  $\sup_{\substack{f \in D(L) \\ f \neq 0}} \frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X}$

mevcuttur.

Bu sayı en küçük  $K$  sayısıdır ve  $\|L\|$  ile gösterilir.

Yani  $\|L\| = \sup_{\substack{f \in D(L) \\ f \neq 0}} \frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X}$  dir.

Bu norm  $\|L\| = \sup_{\|f\|_X=1} \{\|L(f)\|_Y\}$  olarak da alınır.

2.2.6. Lemma:

$L: X \rightarrow Y$  lineer pozitif operatör olsun.  $f_1, f_2 \in X$  olmak üzere,  $f_1 \leq f_2$  ise  $L(f_1; x) \leq L(f_2; x)$  'tir. Yani lineer pozitif operatörler monoton artandır.

2.2.7. Lemma:

$L: X \rightarrow Y$  lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

### 2.3. Latisler

2.3.1. Tanım:

$M \neq \emptyset$  olsun.  $M$  üzerinde tanımlı " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa " $\leq$ " bağıntısına (kısmi) sıralama bağıntısı,  $(M, \leq)$  ikilisine de (kısmi) sıralı küme denir:

i) Her  $x \in M$  için  $x \leq x$  (yansıma özelliği)

ii) Her  $x, y \in M$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq x$  ise  $x = y$  (ters simetri özelliği)

iii) Her  $x, y, z \in M$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq z$  ise  $x \leq z$  (geçişme özelliği)

### 2.3.2. Tanım:

$(M, \leq)$  sıralı bir küme ve  $\emptyset \neq A \subseteq M$  olsun.

Her  $a \in A$  için  $a \leq x$  olacak şekilde  $x \in M$  varsa  $x$ 'e  $A$  kümesinin bir üst sınırı,  $A$  kümesine de üstten sınırlı küme denir.  $A$ 'nın her  $z$  üst sınırı için  $x \leq z$  oluyorsa  $x$ 'e  $A$ 'nın en küçük üst sınırı (supremumu) denir,  $\sup A = x$  biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde, her  $a \in A$  için  $y \leq a$  olacak şekilde  $y \in M$  varsa  $y$ 'ye  $A$  kümesinin bir alt sınırı,  $A$  kümesine de alttan sınırlı küme denir.  $A$ 'nın her  $w$  alt sınırı için  $w \leq y$  oluyorsa,  $y$ 'ye  $A$ 'nın en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve  $\inf A = y$  biçiminde gösterilir.

Hem alttan hem üstten sınırlı kümelere sınırlı küme denir.

Eğer bir  $A$  kümesinin supremumu mevcutsa bu değer  $\sup A$  ile gösterilebileceği gibi sıralama teorisinde daha çok kullanılan gösterim  $\vee A$  dir. Benzer şekilde  $\inf A$  yerine de  $\wedge A$  gösterimi kullanılır.

### 2.3.3. Tanım:

$L \neq \emptyset$  bir sıralı küme olsun.

i) Her  $x, y \in L$  için

$$\sup\{x, y\} := x \vee y \text{ ve } \inf\{x, y\} := x \wedge y$$

mevcut ise  $L$ 'ye bir latîs denir.

ii) Her  $S \subseteq L$  için

$$\sup S := \vee S \text{ ve } \inf S := \wedge S$$

mevcut ise  $L$  'ye bir tam latis denir.

#### 2.3.4. Uyarı:

$L$  kümesi sonlu ise, her latis bir tam latistir. Yani bir latiste her sonlu alt küme bir supremuma ve infimuma sahiptir.

#### 2.3.5. Tanım:

$E$  reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı " $\leq$ " olmak üzere her  $x, y \in E$  ve  $x \leq y$  için

i) Her  $z \in E$  için  $x + z \leq y + z$

ii) Her  $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$  için  $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan  $E$  uzayına sıralı vektör uzayı denir. Yani " $\leq$ " bağıntısı vektör işlemleriyle uyumludur.

#### 2.3.6. Tanım:

$x \geq 0_E$  koşulunu sağlayan  $x \in E$  elemanına pozitif eleman denir.

#### 2.3.7. Tanım:

$E$  ve  $F$  sıralı vektör uzayı,  $T: E \rightarrow F$  lineer dönüşüm olsun. Her  $x \in E^+ = \{x \in E : x \geq 0_E\}$  için  $T(x) \in F^+$  ise  $T$  'ye pozitif operatör denir.

#### 2.3.8. Tanım:

Sıralı bir  $(E, \leq)$  vektör uzayı aynı zamanda bir latis ise,  $E$  'ye vektör latis (Riesz uzayı) denir.

Bir vektör latiste,

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = -x \vee 0 \quad \text{ve} \quad |x| = x \vee (-x)$$

elemanlarına sırasıyla  $x$  'in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri denir.

### 2.3.9. Tanım:

$E$  bir normlu vektör latis ve  $x, y \in E$  olsun.

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

monotonluk şartını sağlayan norma latis normu denir.

### 2.3.10. Tanım:

$E$  bir reel Banach uzayı,  $(E, \leq)$  bir vektör latis ve  $E$  üzerindeki norm latis normu ise  $E$ 'ye bir Banach latis denir.

Örneğin,  $C_0(X)$  uzayı sup-norm ile bir Banach uzayıdır. Ayrıca her  $f \in C_0(X)$  için  $|f| \in C_0(X)$  olacağından bu uzay bir vektör latis olup üzerindeki sup-norm bir latis normudur. Böylece  $C_0(X)$  bir Banach latistir.

Bununla birlikte

$$\|f\| = \||f|\| = \max \{\|f^+\|, \|f^-\|\}$$

eşitliği gerçekleşir.

### 2.3.11. Tanım:

$F$  latis uzayının  $E$  altuzayını alalım. Her  $x \in E$  için  $|x| \in E$  oluyorsa,  $E$ 'ye latis altuzayı denir.

Örneğin  $B(X)$ ,  $C(X)$ ,  $C_b(X)$  ve  $UC_b(X)$  uzayları  $F(X)$ 'in birer latis altuzayıdır.

$x \in X$  için,

$$\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x)) \text{ ve } \inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$$

eşitlikleri gerçekleşir ve her  $f, g \in E$  için  $\sup(f, g), \inf(f, g) \in E$  dir.

Daha genel olarak, eğer  $n \geq 3$  için ise  $\sup_{1 \leq i \leq n} f_i, \inf_{1 \leq i \leq n} f_i \in E$  dir.

## 2.3.12. Tanım:

$E$  ve  $F$  birer vektör latis,  $S : E \rightarrow F$  bir lineer operatör olsun. Her  $f, g \in E$  için

$$S(f \vee g) = S(f) \vee S(g)$$

ve

$$S(f \wedge g) = S(f) \wedge S(g)$$

oluyorsa  $S$  'ye bir latis homomorfizmi denir.

Bu,  $S$  'nin sonlu latis işlemlerini koruduğu anlamına gelir. Yani, her  $f_1, \dots, f_n \in E$ ,  $n \geq 2$  için,

$$S(\sup_{1 \leq i \leq n} f_i) = \sup_{1 \leq i \leq n} S(f_i)$$

ve

$$S(\inf_{1 \leq i \leq n} f_i) = \inf_{1 \leq i \leq n} S(f_i)$$

olur.

Örneğin,  $X$  ve  $Y$  kompakt uzaylar ve  $\varphi : Y \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm olmak üzere, bileşke operatörü

$$T_\varphi(f) := f \circ \varphi \quad (f \in C(X)),$$

$C(X)$  'ten  $C(Y)$  'ye bir latis homomorfizmidir.

## 2.3.13. Uyarı:

Her latis homomorfizmi pozitifdir.

## 2.3.14. Teorem:

$(E, \|\cdot\|_E)$  Banach latis,  $(F, \|\cdot\|_F)$  normlu latis ve  $T : E \rightarrow F$  pozitif operatör olsun.

Bu durumda  $T$  süreklidir.

### 2.3.15. Tanım:

$S: E \rightarrow F$  latis homomorfizmi, birebir ve örten ise  $S$  'ye bir latis izomorfizmi ve bu durumda  $E$  ile  $F$  'ye latis izomorfiktir denir.

$S: E \rightarrow F$  birebir ve örten dönüşümünün bir latis izomorfizmi olması için gerek ve yeter koşul  $S$  ve  $S^{-1}$  in pozitif olmasıdır.

## 2.4. Ağlar

Metrik uzaylarda bir kümenin kapanışı ve bir fonksiyonun sürekliliği gibi birçok kavram dizilerin yakınsaklığı yardımıyla belirlenebilmekte ve birçok ispatta diziler bir araç olarak sık sık kullanılmaktadır. Topolojik uzaylarda ise durum genel olarak aynı değildir. Herhangi bir topolojik uzayda bir kümenin kapanışı ve bir fonksiyonun sürekliliği gibi birçok kavramın karakterize edilmesinde diziler yetersiz kalmaktadır. Ayrıca dizilerin yakınsaklığı ile oluşturulan topolojik yapılar, genel topolojik uzayların küçük bir alt sınıfı olan birinci sayılabilir uzaylardır. Yani dizilerin yakınsaklığı genel topolojik uzayları tanımlamaya yeterli değildir. Dizilerin bu amaca uygun bir genelleştirmesi olarak ağlar veya diğer bir adıyla Moore-Smith dizileri tanımlanmıştır [5,6].

### 2.4.1. Tanım:

$I \neq \emptyset$  kümesi üzerinde " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

- i) Her  $i \in I$  için  $i \leq i$
- ii) Her  $i, j, k \in I$  için  $i \leq j$  ve  $j \leq k$  ise  $i \leq k$
- iii) Her  $i, j \in I$  için öyle bir  $k \in I$  vardır ki  $i \leq k$  ve  $j \leq k$ .

Bu durumda " $\leq$ " bağıntısına yönlendirme bağıntısı,  $I$  kümesine de " $\leq$ " bağıntısıyla yönlendirilmiş küme denir. Yani  $(I, \leq)$  bir yönlendirilmiş kümedir. Burada (iii) özelliği pozitif yönlendirme olarak bilinir. En önemli yönlendirilmiş küme örnekleri  $(\mathbb{N}, \leq)$  ve  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  dir.

#### 2.4.2. Tanım:

$X \neq \emptyset$  herhangi bir küme ve  $I$  yönlendirilmiş bir küme olsun. Her  $i \in I$  için  $f(i) = x_i$  olacak şekilde  $I$  'dan  $X$  'e tanımlı her fonksiyona  $X$  'te bir ağ denir ve  $(x_i)_{i \in I}$  veya kısaca  $(x_i)$  ile gösterilir.

Diğer bir deyimle  $X$  kümesinde bir ağ elemanları yönlendirilmiş bir küme tarafından indislenmiş bir altkümedir, yani,

$$(x_i) = \{x_i \in X : i \in I\} \text{ dir.}$$

#### 2.4.3. Uyarı:

$\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi yönlendirilmiş bir küme olduğundan  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  fonksiyonu  $X$  'te bir ağdır. Hâlbuki biliyoruz ki  $f$  aynı zamanda  $X$  'te bir dizidir. Bu nedenle ağlar dizilerin bir genelleştirmesidir. Bu ifadenin tersi doğru değildir. Gerçekten  $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$  altkümesi " $\leq$ " alışılmış sıralama ile yönlendirilmiş bir küme olup  $i \in I$  ve her reel  $x$  için  $f_i(x) = \cos ix$  şeklinde tanımlanan reel değişkenli, reel değerli  $(f_i)$  fonksiyonu bir ağdır. Ancak bir dizi değildir.

#### 2.4.4. Tanım:

$(x_i)$ ,  $X$  kümesinde bir ağ ve  $A \subset X$  olsun. Eğer  $(x_i)$  ağının her elemanı  $A$  altkümesinin elemanı ise  $(x_i)$  ağı  $A$  'nın içindedir denir. Eğer  $(x_i)$  ağının belirli bir elemanından sonraki bütün elemanları  $A$  'nın elemanları ise, yani belirli bir  $i_0 \in I$  için  $i_0 \leq i$  iken  $x_i \in A$  ise,  $(x_i)$  ağı sonunda  $A$  'nın içinde kalıyor denir.

#### 2.4.5. Tanım:

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $(x_i)$ ,  $X$  'te bir ağ olsun. Eğer bir  $x \in X$  noktasının her  $N \in N(x)$  komşuluğu sonunda  $(x_i)$  ağını kapsıyor ise  $(x_i)$  ağı  $x$  noktasına yakınsıyor veya  $x$  noktası  $(x_i)$  ağının bir limiti denir ve

$$x_i \rightarrow x \text{ veya } \lim_{i \in I} x_i = x$$

gösterimlerinden birisi kullanılır.

Yani,  $\lim_{i \in I} x_i = x \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}(x)$  için  $\exists i_0 \in I$  vardır  $\ni \forall i$  için  $i_0 \leq i \Rightarrow x_i \in N$  dir.

2.4.6. Teorem:

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i)  $(X, \tau)$  uzayı bir Hausdorff uzayıdır.
- ii)  $(X, \tau)$  uzayındaki yakınsak her ağın limiti tektir.

*İspat:*

(i)  $\Rightarrow$  (ii).  $(X, \tau)$  Hausdorff uzayı ve  $x_i \rightarrow x$  olsun. Kabul edelim ki  $(x_i)$  ağının  $x \neq y$  gibi iki farklı limiti olsun.  $x, y \in X, x \neq y$  olduğundan  $\exists N \in \mathcal{N}(x)$  ve  $\exists M \in \mathcal{N}(y)$  var  $\ni N \cap M = \emptyset$  dir. Diğer taraftan  $x_i \rightarrow x$  olduğundan  $(x_i)$  ağı sonunda  $N$  'dedir.  $x_i \rightarrow y$  olduğunda  $(x_i)$  ağı sonunda  $M$  'dedir. Bu  $N \cap M = \emptyset$  olması ile çelişir. O halde  $x_i \rightarrow y$  olamaz.

(ii)  $\Rightarrow$  (i).  $(X, \tau)$  uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her  $N \in \mathcal{N}(x)$  ve her  $M \in \mathcal{N}(y)$  için  $N \cap M \neq \emptyset$  dir.  $I = \{(N, M) : N \in \mathcal{N}(x) \text{ ve } M \in \mathcal{N}(y)\}$  kümesini göz önüne alalım. Herhangi  $N, N' \in \mathcal{N}(x)$  ve  $M, M' \in \mathcal{N}(y)$  için  $(N', M') \leq (N, M) \Leftrightarrow N \subseteq N' \text{ ve } M \subseteq M'$  bağıntısı  $I$  üzerinde bir yönlendirme bağıntısı olup,  $I$  bu bağıntı ile bir yönlendirilmiş kümedir. Eğer  $i = (N, M) \in I$  seçersek  $x_i \in N \cap M$  olur ve bu durumda  $(x_i)$  ağı  $x$  ve  $y$  noktalarını limit noktası olarak içerir. Gerçekten,  $x \in N$ ,  $y \in M$  olsun. Bu durumda  $(N', M') \leq (N, M)$  özelliğindeki her  $(N, M) \in I$  için  $N \subseteq N'$  ve  $M \subseteq M'$  olur. Böylece  $(x_i) \in N \cap M \subseteq N' \cap M'$  olacağından  $(x_i) \in N'$

ve  $(x_i) \in M'$  olur. Böylece  $(x_i)$  ağı hem  $x$ 'e hem de  $y$ 'ye yakınsar. Bu ise (ii) ile çelişir. O halde  $(X, \tau)$  uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

#### 2.4.7. Uyarı:

$\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi alışılmış " $\leq$ " bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir. Böylece  $(x_n)$  dizisi bir ağ olup, dizinin limiti ve ağın limiti tanımları çakışır. Yani yakınsak her dizi yakınsak bir ağdır.

#### 2.4.8. Tanım:

$X$  ve  $Y$  iki metrik uzay,  $\mathcal{F}$ ,  $X$ 'ten  $Y$ 'ye tüm fonksiyonların ailesi ve  $x_0 \in X$  olsun. Verilen her  $\varepsilon > 0$  ve her  $f \in \mathcal{F}$  için  $d_X(x, x_0) < \delta$  olduğunda  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $\mathcal{F}$  ailesi  $x_0 \in X$  noktasında eş süreklidir denir.

$\mathcal{F}$ 'nin bir  $A \subset X$  kümesi üzerinde eş sürekli olması,  $\mathcal{F}$ 'nin  $A$ 'nın her bir noktasında eş sürekli olması demektir. Bu durumda her bir  $f$ ,  $A$  üzerinde düzgün süreklidir.

#### 2.4.9. Uyarı:

Normlu uzaylarda tanımlı bir lineer operatörün sürekli olması bu operatörün sınırlı olmasını gerektireceği için, lineer operatörlerin eş sürekli bir dizisi aynı zamanda eş sınırlı olacaktır.

### 2.5. Radon Ölçüsü

#### 2.5.1. Tanım:

$X$  bir yerel kompakt Hausdorff uzayı  $B$ ,  $X$  üzerinde Borel cebiri olsun. Kompakt kümeler üzerinde sonlu ve iç düzenli olan  $\mu: B \rightarrow [0, \infty]$  pozitif Borel ölçüsüne Radon ölçüsü denir.

$\mu$ 'nün iç düzenli olması demek, her  $E$  Borel kümesi için

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \in \mathcal{K}\}$$

olmasıdır. Burada  $\mathcal{K}$  bütün kompakt kümelerin ailesidir.

$X$ 'in her kompakt  $K$  altkümesi ve desteği  $K$ 'da olan  $f \in K(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli, kompakt desteğe sahip}\}$  fonksiyonunu göz önüne alalım.

Riesz-Markov Teoremi,  $\Lambda : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$  lineer pozitif fonksiyoneli için

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu$$

olacak biçimde tek bir  $\mu$  Radon ölçüsünün varlığını ifade eder.

Yani Radon ölçüleri yardımıyla lineer fonksiyoneller tanımlayabiliriz. Böylece  $\mu : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$  lineer dönüşümünü  $X$  üzerinde bir Radon ölçüsü olarak ele alabiliriz.

$X$  üzerindeki tüm Radon ölçülerinin uzayını  $M(X)$  ile göstereceğiz.

$\mu$ 'nın normu

$$\|\mu\| := \sup\{|\mu(f)| : f \in K(X), |f| \leq 1\}$$

ile tanımlanır. Bu değere  $\mu$ 'nın toplam kütlesi de denir.

Bütün sınırlı Radon ölçülerinin uzayını  $M_b(X)$  ile ve bütün pozitif Radon ölçülerinin uzayını  $M^+(X)$  ile göstereceğiz. Yani  $\mu \in M(X)$  ve her  $f \in K(X)$ ,  $f \geq 0$  için  $\mu(f) \geq 0$  ise  $\mu \in M^+(X)$  olacaktır.

Ayrıca  $M_b^+(X) = M^+(X) \cap M_b(X)$  olarak alınacaktır.

Pozitif sınırlı Radon ölçüsüne basit bir örnek bir  $a \in X$  noktasında

$$\delta_a(f) = f(a), (f \in C_0(X)) \quad (2.2)$$

olarak tanımlanan Dirac ölçüsüdür.

Dirac ölçülerinin lineer pozitif bir kombinasyonuna diskre (ayrık) ölçü denir.

Diğer bir deyimle,

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}$$

olacak biçimde sonlu sayıda  $a_1, \dots, a_n \in X$  noktaları ve  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pozitif reel sayıları varsa yani, her  $f \in C_0(X)$  için

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

oluyorsa  $\mu \in M_b^+(X)$  Radon ölçüsü diskredir.

Bu durumda  $\|\mu\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  olur ve  $\mu$ ,  $\{a_1, \dots, a_n\}$  üzerinde destekleniyor denir.

### 3. KOROVKİN'İN BİRİNCİ TEOREMİ

$(L_n)_{n \geq 1}$ ,  $C([a, b])$  üzerindeki lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Korovkin'in Birinci Teoremi, genellikle Korovkin Teoremi olarak bilinir, her  $f \in C([a, b])$  için  $[a, b]$  üzerinde düzgün olarak  $L_n(f) \rightarrow f$  olup olmadığı hakkında basit ve kullanışlı bir ölçüt verir.

3.1. Teorem (Korovkin) [1-4]:

$[a, b] \supseteq [c, d]$  olmak üzere  $(L_n)_{n \geq 1} : C([a, b]) \rightarrow C([c, d])$  lineer pozitif operatör dizisi, ve  $e_m(t) := t^m$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $m = 0, 1, 2$  olsun. Her  $g \in \{1, e_1, e_2\}$  için,  $[a, b]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = g$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda her  $f \in C([a, b])$  için  $[a, b]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f \text{ dir.}$$

Şimdi, bu teoremin genel bir sonucunu verelim.

Her  $x \in [a, b]$  için  $d_x(t) := |t - x|$ ,  $(a \leq t \leq b)$  fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu durumda

$$d_x^2 = e_2 - 2xe_1 + x^2 \mathbf{1}$$

olup  $(L_n)_{n \geq 1}$ , Korovkin Teoremi'nin koşullarını sağlayan bir lineer pozitif operatör dizisi ise her  $x \in [a, b]$  için düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(d_x^2; x) = 0 \text{ dir; çünkü } n \geq 1 \text{ için}$$

$$L_n(d_x^2) = (L_n(e_2) - x^2) + 2x(L_n(e_1) - x) + x^2(L_n(\mathbf{1}) - \mathbf{1}) \text{ dir.}$$

Bundan sonraki kısımda bir latis altuzayından  $X$  metrik uzayı üzerinde tanımlı olan fonksiyonlar uzayına dönüşüm yapan lineer pozitif operatör dizisi için Korovkin tip teoremleri vereceğiz.

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $x \in X$  olsun.  $d_x \in C(X)$  ile

$$d_x(y) := d(x, y), \quad (y \in X)$$

fonksiyonunu gösterelim.

3.2. Teorem [3]:

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $E, F(X)$ 'in  $\mathbf{1}$  sabit fonksiyonunu ve bütün  $d_x^2$  ( $x \in X$ ) fonksiyonlarını içeren bir latis altuzayı olsun.  $(L_n)_{n \geq 1}$ ,  $E$ 'den  $F(X)$ 'e lineer pozitif operatör dizisi ve  $Y \subseteq X$  olmak üzere,

i)  $Y$  üzerinde düzgün olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

ii)  $x \in Y$  noktasına göre düzgün olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(d_x^2; x) = 0$

ise, her  $f \in E \cap UC_b(X)$  için,  $Y$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f \text{ dir.}$$

*İspat:*

$f \in E \cap UC_b(X)$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun.  $f$  fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan her  $x, y \in X$  için  $d(x, y) \leq \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $\delta > 0$  vardır.

Diğer taraftan  $d(x, y) \geq \delta$  ise,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} d^2(x, y)$$

olur.

Buradan, sabit bir  $x \in X$  için

$$|f - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} d_x^2 + \varepsilon \cdot \mathbf{1}$$

ve her  $n \geq 1$  için,

$$|L_n(f; x) - f(x)L_n(\mathbf{1}; x)| \leq L_n(|f - f(x)|)(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} L_n(d_x^2; x) + \varepsilon L_n(\mathbf{1}; x)$$

elde edilir.

Böylece (i) ve (ii) hipotezlerinden,  $Y$  üzerinde düzgün olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f$  dir.

3.3. Teorem [3]:

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $E, F(X)$ 'in  $\mathbf{1}$  sabit fonksiyonunu ve bütün  $d_x^2$  ( $x \in X$ ) fonksiyonlarını içeren bir latıs altuzayı olsun.  $(L_n)_{n \geq 1}$ ,  $E$ 'den  $F(X)$ 'e lineer pozitif operatörler dizisi ve bir  $x \in X$  için

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\mathbf{1}; x) = \mathbf{1}$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(d_x^2; x) = 0$$

olsun. Bu durumda  $x$  noktasında sürekli olan her  $f \in E$  sınırlı fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$$

dir.

3.4. Lemma [3]:

$(X, d)$  yerel kompakt bir metrik uzay olsun. Bu durumda  $X$  'in her  $K$  kompakt altkümesi, her  $\varepsilon > 0$  ve her  $x \in K$  için

$$B'(x, \varepsilon^*) \subset K_\varepsilon$$

olacak biçimde  $X$  'in kompakt bir  $K_\varepsilon$  altkümesi ve  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$  vardır.

*İspat:*

Verilen bir  $x \in K$  için  $B'(x, \varepsilon(x))$  kompakt olacak biçimde  $0 < \varepsilon(x) < \varepsilon$  vardır.

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{\varepsilon(x)}{2})$  olduğundan  $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$  olacak biçimde  $x_1, \dots, x_p \in K$  vardır.

$\varepsilon^* : \min_{1 \leq i \leq p} \varepsilon(x_i) < \varepsilon$  ve  $K_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^p B'(x_i, \varepsilon(x_i))$  olarak alalım.

Eğer  $x \in K, y \in X$  ve  $d(x, y) \leq \varepsilon^*$  ise  $d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon(x_i)}{2}$  olacak biçimde  $i \in \{1, \dots, p\}$  vardır ve buradan  $d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) \leq \varepsilon(x_i)$  olur. Bundan dolayı  $y \in K_\varepsilon$  olur.

3.5. Teorem [3]:

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $E, F(X)$ 'in,  $\mathbf{1}$  sabit fonksiyonunu ve bütün  $d_x^2(x \in X)$  fonksiyonlarını içeren bir latis altuzayı olsun.  $(L_n)_{n \geq 1}, E$ 'den  $F(X)$ 'e lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Eğer  $X$  'in kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olarak

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(d_x^2; x) = 0$$

ise, her  $f \in E \cap C_b(X)$  için  $X$  'in kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f \text{ olur.}$$

*İspat:*

$f \in E \cap C_b(X)$  olsun ve  $X$ 'in kompakt  $K$  altkümesini göz önüne alalım.  $\varepsilon > 0$  verilsin.  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  olacak biçimdeki  $\varepsilon'$  ve  $X$ 'in kompakt  $K_{\varepsilon}$  altkümesi Lemma 3.4'ün koşullarını sağlasın.

$f$ ,  $K_{\varepsilon}$  üzerinde düzgün sürekli olduğundan, her  $x, y \in K_{\varepsilon}$  ve  $d(x, y) \leq \delta$  için  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $0 < \delta < \varepsilon'$  vardır.

$x \in K$  ve  $y \in X$  alalım.  $d(x, y) \leq \delta$  ise  $y \in B'(x, \varepsilon') \subset K_{\varepsilon}$  ve buradan  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  dur.

$d(x, y) \geq \delta$  ise  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\delta^2} d^2(x, y)$  olur.

Böylece, bir kez daha

$$|f - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\delta^2} d_x^2 + \varepsilon$$

elde edilir ki bu da  $x \in K$ 'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$$

anlamına gelir.

Teorem 3.1, P. P. Korovkin tarafından 1953'te elde edilmiştir [1,2]. Halbuki H. Bohman Teorem 3.1 benzeri bir sonucu,  $(a_i)_{i \in I}$ ,  $[0,1]$  de sonlu bir aile ve  $\varphi_i \in C([0,1])$  ( $i \in I$ ) ve  $0 \leq x \leq 1$  olmak üzere,  $C([0,1])$  üzerindeki lineer pozitif operatörlerin

$$L(f, x) = \sum_{i \in I} f(a_i) \varphi_i(x)$$

biçimindeki dizilerini göz önüne alarak elde etmiştir [7].

Korovkin Teoremi,  $C([a,b])$ 'deki pozitif yaklaşımlarla ilgili birçok önemli uygulamaya sahiptir. Bunlardan biri  $C([0,1])$  üzerindeki Bernstein operatörü ile ilgilidir.

Bernstein operatörü,  $n \geq 1, f \in C([0,1]), 0 \leq x \leq 1$  olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir  $B_n(f)$  derecesi  $n$ 'den büyük olmayan bir polinomdur. Bu operatör 1912 yılında S. N. Bernstein [8] tarafından, Weierstrass yaklaşım teoreminin [9] cebirsel versiyonunun ispatını yapmak için verilmiştir.

*Örnek:*

Her  $f \in C([0,1])$  için,  $[0,1]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f) = f$$

dir. Gerçekten;

her bir  $B_n, C([0,1])$  üzerinde lineer pozitif operatör olup,

her  $n \geq 1$  için

$$B_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, B_n(e_1) = e_1 \text{ ve } B_n(e_2) = \frac{n-1}{n} e_2 + \frac{1}{n} e_1$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece,  $[0,1]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(e_1) = e_1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(e_2) = e_2$$

olduğundan Korovkin teoreminin koşulları sağlanmış olur.

Bu ise her  $f \in C([0,1])$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f) = f$$

olduğunu gösterir.

3.6. Teorem (Weierstrass) [3, 9-11]:

Her  $f \in C([0,1])$  için,  $[0,1]$  üzerinde  $f$ 'ye düzgün yakınsayan bir cebirsel polinomlar dizisi vardır.

Bu teorem şöyle de ifade edilebilir:

Bütün cebirsel polinomların altcebiri, sup-norma göre  $C([0,1])$ 'de yoğundur.

Teorem 3.6 ile görülüyor ki, Weierstrass Yaklaşım Teoremi, Korovkin Teoremi'nden elde edilebilir.

Her  $n \geq 1$  için  $L_n(C([0,1])) \subset B([0,1])$  olacak biçimde  $(L_n)_{n \geq 1}$  lineer pozitif operatörler dizisi alınmasıyla elde edilen Korovkin Teoremi'ne, kısıtlanmış Korovkin Teoremi denir.

3.7. Teorem [3]:

Kısıtlanmış Korovkin Teoremi ve Weierstrass Yaklaşım Teoremi birbirine denktir.

*İspat:*

Kısıtlanmış Korovkin Teoremi'nin sadece Weierstrass Teoremi'ne dayanan bir ispatını elde etmek zorundayız.

Her  $g \in \{1, e_1, e_2\}$  için,  $[0, 1]$  üzerinde düzgün olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = g$  olacak biçimde

$C([0, 1])$ 'den  $B([0, 1])$ 'e  $(L_n)_{n \geq 1}$  lineer pozitif operatör dizisini göz önüne alalım.

Korovkin Teoremi'nin ispatında olduğu gibi  $x \in [0, 1]$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(d_x^2; x) = 0$  dır.

$m \geq 1$  ve  $x, y \in [0, 1]$  için

$$|x^m - y^m| \leq m|y - x|$$

olup bu eşitsizlikten,  $e_m(x) = x^m$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) fonksiyonları için

$$|e_m - y^m \mathbf{1}| \leq m|e_1 - y \mathbf{1}| \quad (y \in [0, 1])$$

yazılır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla, her  $n \geq 1$  ve  $y \in [0, 1]$  için,

$$|L_n(e_m) - y^m L_n(1)| \leq m L_n(|e_1 - y \mathbf{1}|) \leq m \sqrt{L_n(1)} \sqrt{L_n((e_1 - y \mathbf{1})^2)} = m \sqrt{L_n(1)} \sqrt{L_n(d_y^2)}$$

bulunur.

Böylece, her  $m \geq 1$  için,  $[0, 1]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(e_m) = e_m$$

ve dolayısıyla  $[0, 1]$  üzerinde her cebirsel  $P$  polinomu için bu aralıkta düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(P) = P$$

olur.

İspatı sonuçlandırmak için  $M = \sup_{n \geq 1} \|L_n\| = \sup_{n \geq 1} \|L_n(1)\| < +\infty$  ve sabit  $f \in C([0, 1])$

ve  $\varepsilon > 0$  alalım.  $[0, 1]$  üzerinde öyle bir  $P$  polinomu vardır ki  $\|f - P\| \leq \varepsilon$

olduğunda bir  $r \in \mathbb{N}$  ve her  $n \geq r$  için  $\|L_n(P) - P\| \leq \varepsilon$  olur ve buradan

$$\begin{aligned}
\|L_n(f) - f\| &\leq \|L_n(f) - L_n(P)\| + \|L_n(P) - P\| + \|P - f\| \\
&\leq M \|f - P\| + \|L_n(P) - P\| + \|P - f\| \\
&\leq (M + 2)\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bernstein operatörleri ile süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak uygun olmadığından, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında Korovkin Teoremi'ni incelemek için, Kantorovich ve Durrmeyer ilk toplamsal integral tip operatörleri tanımlamışlardır.

Kantorovich polinomları, L. V. Kantorovich tarafından şöyle tanımlanmıştır [12]:

Her  $n \geq 1$ ,  $f \in L_p([0,1])$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için,

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left[ (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Her bir  $K_n(f)$ , derecesi  $n$  den büyük olmayan bir polinomdur ve her  $K_n$ ,  $L_p([0,1])$ 'den (özel olarak  $C([0,1])$ 'den)  $C([0,1])$ 'e bir lineer pozitif operatördür.

Aynı zamanda,

$f \in C([0,1])$  ise,  $[0,1]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(f) = f$$

dir.

Gerçekten, her  $n \geq 1$  için

$$K_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, K_n(e_1) = \frac{n}{n+1} e_1 + \frac{1}{2(n+1)} \text{ ve } K_n(e_2) = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} e_2 + \frac{2n}{(n+1)^2} e_1 + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

dir. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(e_1) = e_1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(e_2) = e_2$$

olduğundan Korovkin Teoremi'nin şartları sağlanmış olur.

Böylece, her  $f \in C([0,1])$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(f) = f \text{ dir.}$$

#### 4. LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TİP TEOREMLER

Bu bölümde  $E$  bir Banach latis olmak üzere birim operatör ve bir  $T$  operatörü için  $E$ 'nin Korovkin altkümesi ve Korovkin altuzayı kavramları tanıtılmış ve  $C_0(X)$ 'in bir  $M$  altkümesinin hangi koşullarda  $T$  operatörü için Korovkin altkümesi olacağı açıklanmıştır.

Korovkin Teoremi sonucunda elde edilen ve bu teoremin en önemli ögesi olan aşağıdaki tanım ilk kez V. A. Baskakov tarafından verilmiştir [13].

4.1. Tanım:

$E$  bir Banach latis ve  $M \subseteq E$  olsun.  $E$ 'den  $E$ 'ye her  $(L_n)_{n \geq 1}$  lineer pozitif operatör dizisi için,

$$i) \sup_{n \geq 1} \|L_n\| < \infty$$

$$ii) \text{ Her } g \in M \text{ için, } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = g$$

koşulları sağlanıyor iken, her  $f \in E$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f$$

oluyorsa,  $M$ 'ye  $E$ 'nin bir Korovkin altkümesi veya  $E$ 'nin birim operatöre göre Korovkin altkümesi denir.

Dikkat edilirse,  $X$  kompakt uzay ve  $\mathcal{L}(M)$ ,  $M$  tarafından üretilen lineer altuzay olmak üzere,  $E = C(X)$  ve  $\mathbf{1}$  sabit fonksiyonu  $\mathcal{L}(M)$ 'ye ait ise, (i) koşulu gereksizdir çünkü bu koşul (ii) koşulunun bir sonucu olacaktır.

Buna göre, Korovkin Teoremi'ndeki  $\{\mathbf{1}, e_1, e_2\}$  kümesi  $C([a, b])$ 'de bir Korovkin altkümesidir.

Bir  $M$  altkümesinin  $E$ ’de bir Korovkin altkümesi olması için gerek ve yeter koşul  $M$  tarafından üretilen  $\mathcal{L}(M)$  lineer altuzayının bir Korovkin altkümesi olmasıdır. Bundan sonra, Korovkin altkümesi olan bir lineer altuzay,  $E$ ’nin Korovkin altuzayı olarak belirtilecektir.

Eğer  $E$  ve  $F$  Banach latis ve  $S: E \rightarrow F$  bir latis izomorfizmi ise,  $E$ ’nin bir  $M$  altkümesinin,  $E$ ’de Korovkin altkümesi olması için gerek ve yeter koşul  $S(M)$ ’nin  $F$ ’de bir Korovkin altkümesi olmasıdır.

Korovkin kümeleri (var olduklarında) lineer pozitif operatörlerin eş sınırlı dizilerinin, birim operatöre veya  $(L_n(f))_{n \geq 1}$  dizisinin  $f$ ’ye yaklaşımının araştırılmasında kullanışlıdır.

Aşağıda 4.1.’deki tanım birim operatör yerine herhangi bir lineer pozitif operatör için genelleştirilecektir.

#### 4.2. Tanım:

$E$  ve  $F$  birer Banach latis olsun ve  $T: E \rightarrow F$  lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım.  $E$ ’den  $F$ ’ye her  $(L_n)_{n \geq 1}$  lineer pozitif operatör dizisi için

$$i) \sup_{n \geq 1} \|L_n\| < \infty$$

$$ii) M \subseteq E \text{ ve her } g \in M \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = T(g)$$

koşulları sağlanıyor iken, her  $f \in E$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = T(f)$$

oluyorsa,  $M$ ’ye  $E$ ’nin  $T$  için bir Korovkin altkümesi denir.

Böyle altkümeler, lineer pozitif operatörlerin eş sınırlı dizilerinin verilen bir  $T: E \rightarrow F$  lineer pozitif operatörüne yakınsama koşullarının araştırılmasında kullanılabilir.

#### 4.3. Teorem [3]:

$X$  ve  $Y$  yerel kompakt Hausdorff uzayları olsun. Ayrıca  $X$  sayılabilir bir tabana sahip ve  $Y$  metriklenabilir olsun.  $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  lineer pozitif operatör ve  $M$ ,  $C_0(X)$ 'in bir altkümesi olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- i)  $M$ ,  $C_0(X)$ 'in  $T$  için bir Korovkin altkümesidir.
- ii) Her  $g \in M$  ve  $\mu(g) = T(g; y)$  eşitliğini sağlayan her  $y \in Y$  için  $\mu \in M_b^+(X)$  ve  $f \in C_0(X)$  olmak üzere,  $\mu(f) = T(f; y)$  dir.

*İspat:*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Sabit bir  $\mu \in M_b^+(X)$  ve her  $g \in M$  için  $\mu(g) = T(g; y)$  eşitliğini sağlayan  $y \in Y$  alalım. Her  $n \geq 1$  için,  $(U_n)_{n \geq 1}$ ,  $Y$ 'nin açık komşuluklarının azalan sayılabilir bir tabanı olsun.

Urysohn Lemması'ndan [3],

$0 \leq \varphi_n \leq 1$ ,  $\varphi_n(y) = 1$  ve  $\text{supp}(\varphi_n) \subset U_n$  olacak biçimde  $\varphi_n \in K(Y)$  seçelim.

$L_n : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  operatörünü,  $f \in C_0(X)$  olmak üzere

$$L_n(f) = \mu(f)\varphi_n + T(f)(1 - \varphi_n)$$

şeklinde tanımlayalım.

Her bir  $L_n$  lineer pozitifdir ve  $\|L_n\| \leq \|\mu\| + \|T\|$  dir.

Ayrıca  $g \in M$  ise,  $C_0(Y)$ 'de  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = T(g)$  dir çünkü verilen bir  $\varepsilon > 0$  için bir

$\nu \in \mathbb{N}$  vardır ki her  $z \in U_\nu$  için  $|T(g; z) - T(g; y)| \leq \varepsilon$  dur.

Böylece, her  $n \geq \nu$  (dolayısıyla  $U_n \subset U_\nu$ ) ve her  $z \in Y$  için

$$L_n(g; z) = \mu(g)\varphi_n(z) + T(g; z) - T(g; z)\varphi_n(z)$$

$$|L_n(g; z) - T(g; z)| = |\mu(g)\varphi_n(z) + T(g; z) - T(g; z)\varphi_n(z) - T(g; z)|$$

ve  $\mu(g) = T(g; y)$  olduğundan

$$|L_n(g; z) - T(g; z)| = \varphi_n(z) |T(g; z) - T(g; y)| \text{ ve böylece}$$

$$|L_n(g; z) - T(g; z)| = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin U_n \text{ ise} \\ \leq \varepsilon & , \quad z \in U_n \text{ ise} \end{cases}$$

olur ve buradan

$$|L_n(g; z) - T(g; z)| \leq \varepsilon$$

elde ederiz.

$M$ ,  $T$  için bir Korovkin altkümesi olduğundan, her  $f \in C_0(X)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = T(f)$  dir bu ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; y) = T(f; y)$  olmasıdır. Fakat her  $n \geq 1$  için  $L_n(f; y) - T(f; y) = \varphi_n(y)[\mu(f) - T(f; y)]$

ve  $\varphi_n(y) = 1$  olduğundan  $L_n(f; y) = \mu(f)$  dir ve bu da (ii)'nin ispatını tamamlar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Bununla birlikte  $X$  sayılabilir bir tabana sahip olduğu için  $M_b^+(X)$ 'teki her sınırlı dizi yakınsak bir altdiziye sahiptir.

$(L_n)_{n \geq 1} : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  lineer pozitif operatör dizisi Tanım 4.2.'nin (i) ve (ii) koşullarını sağlasın ve bazı  $f_0 \in C_0(X)$ 'ler için  $(L_n(f_0))_{n \geq 1}$  dizisinin  $T(f_0)$ 'a düzgün yakınsamadığını kabul edelim.

Bu durumda her bir  $n \geq 1$  için

$$|L_{k(n)}(f_0; y_n) - T(f_0; y_n)| \geq \varepsilon_0 \tag{4.1}$$

olacak biçimde  $(L_n)_{n \geq 1}$  dizisinin bir  $(L_{k(n)})_{n \geq 1}$  altdizisi,  $Y$ 'de  $(y_n)_{n \geq 1}$  dizisi ve  $\varepsilon_0 > 0$  vardır.

Şimdi,  $(y_n)_{n \geq 1}$  dizisinin  $Y$ 'nin sonsuzluk noktasında yakınsak olduğu ve olmadığı durumlara göre iki inceleme yapalım.

İlk durum, sadece  $Y$  kompakt olmadığında ortaya çıkar. Her  $h \in C_0(Y)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = 0$  olsun.

Her  $n \geq 1$  için  $\mu_n \in M_b^+(X)$ 'i şöyle tanımlayalım:

$$\mu_n(f) = L_{k(n)}(f; y_n), \quad (f \in C_0(X))$$

$\|\mu_n\| \leq \|L_{k(n)}\| \leq M = \sup_{n \geq 1} \|L_n\|$  olduğundan, gerekli olursa  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  dizisi yerine uygun bir alt dizi alınabilir.  $\mu_n \rightarrow \mu$  olacak biçimde bir  $\mu \in M_b^+(X)$  olduğunu kabul edebiliriz.

Fakat, eğer  $g \in M$  ise,

$$\begin{aligned} |\mu_n(g)| &\leq |L_{k(n)}(g; y_n) - T(g; y_n)| + |T(g; y_n)| \\ &\leq \|L_{k(n)}(g) - T(g)\| + |T(g; y_n)| \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\mu(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(g) = 0$$

elde edilir.

Eğer  $\mu \in M_b^+(X)$  ve her  $g \in M$  için  $\mu(g) = 0$  ise bu durumda  $\mu = 0$  dir. Buradan

$\mu(f_0) = 0$  dir ve böylece Eş. 4.1'in tersi olarak

$$|L_{k(n)}(f_0; y_n) - T(f_0; y_n)| = |\mu_n(f_0) - T(f_0; y_n)| \rightarrow 0$$

elde edilir.

Şimdi,  $(y_n)_{n \geq 1}$  dizisinin  $Y$  'nin sonsuzluk noktasında yakınsak olmadığı durumu göz önüne alalım. Bu durumda  $(y_n)$  dizisini uygun bir altdizi ile yer değiştirerek, bu dizinin bir  $y \in Y$  noktasına yakınsadığını varsayalım.

Yine, her  $n \geq 1$  için,

$$\mu_n(f) := L_{k(n)}(f; y_n), \quad (f \in C_0(X))$$

olarak alalım.

İlk durumdakine benzer şekilde  $\mu_n \rightarrow \mu$  olacak biçimde bir  $\mu \in M_b^+(X)$  olduğunu kabul edebiliriz.

Bu durumda,  $g \in M$  için,

$$|\mu_n(g) - T(g; y_n)| \leq \|L_{k(n)}(g) - T(g)\| \rightarrow 0$$

olduğundan

$$\mu(g) = T(g; y)$$

elde ederiz.

Böylece, (ii) koşulu  $\mu(f_0) = T(f_0; y)$  yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_{k(n)}(f_0; y_n) - T(f_0; y_n)) = 0$$

olmasını gerektirir. Fakat bu durum Eş. 4.1'den imkansızdır.

## 5. $C_0(X)$ 'TE BİRİM OPERATÖR İÇİN KOROVKİN TİP TEOREMLER

Bu bölümde, daha önce bir  $E$  Banach latisi ve bir  $T$  operatörü için verilen Korovkin altkümesi ve Korovkin altuzayı tanımı,  $C_0(X)$  'te birim operatör için verilmiştir. Daha sonra  $C_0(X)$  'in Korovkin altkümelerini farklı bir yönden belirlemek için bir önerme verilmiş ve bu önermeye göre  $C(X)$  'in bir  $M$  altkümesinin  $X$  'in noktalarını ayırması halinde  $C_0(X)$  'in Korovkin altkümelerinin belirlenmesi araştırılmıştır.

Bu kısmın tamamında  $X$  sayılabilir tabana sahip yerel kompakt Hausdorff uzayıdır.

Önce Teorem 4.3'ün bir sonucu olan aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

5.1. Teorem [3]:

$M$  ,  $C_0(X)$  'in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- i)  $M$  ,  $C_0(X)$  'in bir Korovkin altkümesidir.
- ii) Her  $g \in M$  ve  $\mu(g) = g(x)$  eşitliğini sağlayan her  $x \in X$  için  $\mu \in M_b^+(X)$  ve  $f \in C_0(X)$  olmak üzere  $\mu(f) = f(x)$  , yani Eş. 2.2'den  $\mu = \delta_x$  'tir.

5.2. Önerme [3]:

$M$  ,  $C_0(X)$  'in bir altkümesi olsun ve her  $x, y \in X$  ,  $x \neq y$  için  $h(x) = 0$  ve  $h(y) > 0$  olacak biçimde  $h \in \mathcal{L}(M)$  ,  $h \geq 0$  var olsun. Bu durumda  $M$  ,  $C_0(X)$  'in bir Korovkin altkümesidir.

*İspat:*

Teorem 5.1'in (ii) koşulunun doğruluğunu göstermeliyiz. Bu nedenle,  $\mu \in M_b^+(X)$  ve her  $g \in M$  , dolayısıyla  $g \in \mathcal{L}(M)$  , için  $\mu(g) = g(x)$  eşitliğini sağlayan  $x \in X$  'i göz önüne alalım.

Eğer  $y \in X$ ,  $y \neq x$  ise  $h(y) > 0$  ve  $0 = h(x) = \mu(h)$  olacak biçimde  $h \in \mathcal{L}(M)$ ,  $h \geq 0$  vardır. Bu nedenle Eş. 2.2'den,  $\mu = \alpha \delta_x$  olacak biçimde  $\alpha \geq 0$  vardır.  $h > 0$  olacak biçimde  $h \in \mathcal{L}(M)$  seçerek,  $\alpha h(x) = \mu(h) = h(x)$  elde ederiz. Burada  $\alpha = 1$  ve  $\mu = \delta_x$  olur.

Şimdi bu önermenin önemli bir sonucunu verelim.

### 5.3. Teorem [3]:

$M$ ,  $C_0(X)$ 'in bir altkümesi ve  $f_0 \in C(X)$  olmak üzere

$$f_0 M = \{f_0 \cdot f : f \in M\} \text{ ve}$$

$$f_0 M^2 = \{f_0 \cdot f^2 : f \in M\}$$

kümelerini ele alalım.

$f_0 \in C(X)$  kesin pozitif bir fonksiyon olsun ve  $C(X)$ 'in  $M$  altkümesi  $X$ 'in noktalarını ayırsın. Ayrıca  $f_0 M \cup f_0 M^2 \subset C_0(X)$  olsun. Bu durumda  $\{f_0\} \cup f_0 M \cup f_0 M^2$ ,  $C_0(X)$ 'in bir Korovkin altkümesidir.

Eğer  $M = \{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $n \geq 1$ , sonlu ise  $\left\{f_0, f_0 f_1, \dots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2\right\}$  kümesi de  $C_0(X)$

'in bir Korovkin altkümesidir.

*İspat:*

$x, y \in X$ ,  $x \neq y$  ise  $f(x) \neq f(y)$  olacak biçimde  $f \in M$  vardır. Böylece  $h = f_0(f - f(x))^2$  fonksiyonu  $\mathcal{L}(\{f_0\} \cup f_0 M \cup f_0 M^2)$  ye aittir.  $h$  pozitifdir ve  $h(x) = 0 < h(y)$  dir. Önerme 5.2'den  $\{f_0\} \cup f_0 M \cup f_0 M^2$ ,  $C_0(X)$  in bir Korovkin altkümesidir.

Eğer,  $M = \{f_1, \dots, f_n\}, n \geq 1$ , sonlu ise  $h = f_0 \sum_{i=1}^n (f_i - f_i(x))^2$  seçilirse benzer şekilde

$\left\{ f_0, f_0 f_1, \dots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2 \right\}$  kümesi de  $C_0(X)$ 'in bir Korovkin altkümesidir.

#### 5.4. Uyarı [3]:

1)  $f_0$  bire bir ise,  $\{f_0, f_0^2, f_0^3\}$ ,  $C_0(X)$ 'in Korovkin altkümesidir.

2) i)  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $C_0((0,1])$ 'in bir Korovkin altkümesidir.

ii) Her  $x \in [1, +\infty)$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $e_{-k}(x) := x^{-k}$  olmak üzere  $\{e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}\}$ ,  $C_0([1, +\infty))$ 'un bir Korovkin altkümesidir.

iii) Her  $x \in [0, +\infty)$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $f_k(x) := \exp(-kx)$  olmak üzere  $\{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $C_0([0, +\infty))$ 'un bir Korovkin altkümesidir.

Bu uyarıların bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

#### 5.5. Önerme [3]:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  ve  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  olsun. Bu durumda

i) Her  $x \in (0, 1]$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $e_{\lambda_k}(x) := x^{\lambda_k}$  olmak üzere  $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, e_{\lambda_3}\}$ ,  $C_0((0, 1])$ 'in bir Korovkin altkümesidir.

ii) Her  $x \in [1, +\infty)$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $e_{-\lambda_k}(x) := x^{-\lambda_k}$  olmak üzere  $\{e_{-\lambda_1}, e_{-\lambda_2}, e_{-\lambda_3}\}$ ,  $C_0([1, +\infty))$ 'un bir Korovkin altkümesidir.

iii) Her  $x \in [0, +\infty)$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $f_{\lambda_k}(x) := \exp(-\lambda_k x)$  olmak üzere  $\{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$ ,  $C_0([0, +\infty))$ 'un bir Korovkin altkümesidir.

*İspat:*

(i) ve (ii) daha genel anlamda 7. bölümde ele alınacaktır.

iii)  $M = \{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$  diyelim ve sabit bir  $x_0 \in [0, +\infty)$  seçelim.

$$\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)x_0) \text{ ve } \beta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \exp((\lambda_3 - \lambda_1)x_0) \text{ olmak üzere}$$

$$h(x) = \exp(-\lambda_1 x) + \alpha \exp(-\lambda_2 x) + \beta \exp(-\lambda_3 x) \quad (x \geq 0)$$

fonksiyonu her  $y \in [0, +\infty)$ ,  $y \neq x_0$  için  $h(x_0) = 0 < h(y)$  özelliğini sağlar. Böylece  $h \in \mathcal{L}(M)$  fonksiyonu bulduğumuzdan Önerme 5.2'den sonuç elde edilir.

Bu önermenin bir uygulaması olarak  $C_0([0, \infty))$  üzerindeki Szász-Mirakjan operatörünü ele alalım.  $(S_n)_{n \geq 1}$  lineer pozitif operatörler dizisi, ilk kez Mirakjan [14], Favard [15] ve Szász [16] tarafından ele alınmıştır ve  $[0, \infty)$  üzerindeki fonksiyon uzaylarındaki lineer pozitif operatörler dizilerinden en çok çalışılmış olanlarından biridir.

Szász-Mirakjan operatörü  $n \geq 1, x \geq 0$  ve  $f \in C_0([0, \infty))$  için

$$S_n(f; x) := \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k x^k}{k!}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada bazı  $M \geq 0$  ve  $\alpha > 0$  için  $|f(x)| \leq M \exp(\alpha x)$  ( $x \geq 0$ ) dır.

5.6. Lemma [3]:

$f \in C_0([0, \infty))$  ise  $S_n(f) \in C_0([0, \infty))$ 'dur ve her  $n \geq 1$  için  $\|S_n(f)\| \leq \|f\|$  dir.

*İspat:*

$S_n$  operatörünün tanımındaki seriler  $[0, \infty)$  aralığının kompakt altkümeleri üzerinde düzgün yakınsak olup limit fonksiyonu  $S_n(f)$  süreklidir. Ayrıca her  $x \geq 0$  için

$$|S_n(f; x)| \leq \|f\| \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!} = \|f\|$$

dir.

$S_n(f) \in C_0([0, \infty))$  olduğunu göstermek için, her  $\varepsilon > 0$  ve her  $k \geq v$  için  $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon$

olacak biçimde  $v \in \mathbb{N}$  seçelim.

Yeteri kadar büyük  $x \geq 0$  için

$$\exp(-nx) \sum_{k=0}^v \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{(nx)^k}{k!} \leq \varepsilon$$

dur. Buradan,

$$\begin{aligned} |S_n(f; x)| &\leq \exp(-nx) \sum_{k=0}^v \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{(nx)^k}{k!} + \exp(-nx) \sum_{k=v+1}^{\infty} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{(nx)^k}{k!} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

5.7. Teorem [3]:

Her  $f \in C_0([0, \infty))$  için,  $[0, \infty)$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = f$$

dir.

*İspat:*

$(S_n)_{n \geq 1}$ ,  $C_0([0, \infty))$ 'dan  $C_0([0, \infty))$ 'a lineer pozitif operatörlerin eş sınırlı bir dizisi olduğundan Önerme 5.5 (iii) 'den, her  $\lambda \geq 0$  için,  $[0, \infty)$  üzerinde düzgün olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f_\lambda) = f_\lambda$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Burada  $f_\lambda$ ,  $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$  ( $x \geq 0$ ) fonksiyonudur.

Her  $x \geq 0$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$S_n(f_\lambda; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda \frac{k}{n}} \frac{n^k x^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx e^{-\lambda/n} k}{k!} \\
&= \exp \left[ -\lambda x \left( \frac{1 - \exp(-\lambda/n)}{\lambda/n} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(-\lambda/n)}{\lambda/n} = 1$  olduğundan  $(S_n(f_\lambda))_{n \geq 1}$  azalandır ve  $f_\lambda$  'ya düzgün yakınsar.

## 6. AĞIRLIKLİ SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARINDA KOROVKİN TİP TEOREMLER

Süreklî fonksiyon uzaylarındaki Korovkin tip teoremleri kullanarak ağırlıklı süreklî fonksiyon uzaylarında sonuçlar elde etmek mümkündür. Korovkin altuzaylarının temel karakterizasyonuna dayanan bu yöntem Bauer ve Donner [17] tarafından çalışılmıştır.

Bu bölüm boyunca  $X$ , sayılabilir bir tabana sahip yerel kompakt Hausdorff uzayını gösterecektir.

6.1. Teorem [3,17]:

$C_0(X)$  'in bir  $H$  altuzayı için aşağıdaki önermeler denktir:

- i)  $H$ ,  $C_0(X)$  'in bir Korovkin altuzayıdır.
- ii) Her  $f \in C_0(X)$  ve her  $\varepsilon > 0$  için sonlu sayıda  $h_0, \dots, h_n \in H$ ,  $k_0, \dots, k_n \in H$  ve  $u, v \in C_0(X)$ ,  $u, v \geq 0$  fonksiyonları vardır öyle ki  $\|u\| \leq \varepsilon$ ,  $\|v\| \leq \varepsilon$  ve

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq n} k_j - \sup_{0 \leq i \leq n} h_i \right\| \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{0 \leq i \leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0 \leq j \leq n} k_j + v$$

dir.

Şimdi bu teoremin iki önemli sonucunu verelim.

6.2. Teorem [3,17]:

$H$ ,  $C_0(X)$  'in bir Korovkin altuzayı olsun. Eğer  $E$  bir Banach latis ve  $S: C_0(X) \rightarrow E$  bir latis homomorfizmi ise bu durumda  $H$ ,  $C_0(X)$  'in  $S$  için bir Korovkin altuzayıdır.

*İspat:*

$(L_n)_{n \geq 1}$ ,  $C_0(X)$  'ten  $E$  'ye lineer pozitif operatörler dizisi,  $M = \sup_{n \geq 1} \|L_n\| < +\infty$  ve her  $h \in H$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(h) = S(h)$  olsun.

Her  $\varepsilon > 0$  ve  $g \in C_0(X)$ ,  $\|g\| \leq \delta$  için  $\|S(g)\| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $\delta \in (0, \varepsilon)$  seçelim.

Teorem 6.1'den  $f \in C_0(X)$  verildiğinde  $u, v \geq 0$ ,  $\|u\| \leq \delta$ ,  $\|v\| \leq \delta$  dolayısıyla  $\|v\| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $u, v \in C_0(X)$  fonksiyonları ve

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq n} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq n} S(h_i) \right\| \leq \delta \text{ ve } \sup_{0 \leq i \leq p} h_i - u \leq f \leq \inf_{0 \leq j \leq p} k_j + v$$

olacak biçimde  $h_0, \dots, h_p, k_0, \dots, k_p \in H$  fonksiyonları vardır.

Buradan,

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right\| \leq \varepsilon$$

dur.

Ayrıca, her  $n \geq 1$  için,

$$\sup_{0 \leq i \leq p} L_n(h_i) - L_n(u) \leq L_n(f) \leq \inf_{0 \leq j \leq p} L_n(k_j) + L_n(v)$$

ve

$$\sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) - S(u) \leq S(f) \leq \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) + S(v)$$

olur.

Dolayısıyla,

$$L_n(f) - S(f) \leq \sum_{j=0}^p |L_n(k_j) - S(k_j)| + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(v) + S(u)$$

ve

$$S(f) - L_n(f) \leq \sum_{i=0}^p |L_n(h_i) - S(h_i)| + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(u) + S(v)$$

elde edilir.

Böylece,

$$\begin{aligned} |S(f) - L_n(f)| &\leq \sum_{i=0}^p |L_n(h_i) - S(h_i)| + \sum_{j=0}^p |L_n(k_j) - S(k_j)| \\ &\quad + \left| \inf_{0 \leq j \leq p} S(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq p} S(h_i) \right| + L_n(u) + L_n(v) + S(u) + S(v) \\ &\leq \sum_{i=0}^p |L_n(h_i) - S(h_i)| + \sum_{j=0}^p |L_n(k_j) - S(k_j)| + 2M\varepsilon + 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.

Her  $i, j = 0, \dots, p$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $L_n(h_i) \rightarrow S(h_i)$  ve  $L_n(k_j) \rightarrow S(k_j)$  olduğundan  $L_n(f) \rightarrow S(f)$  olur.

6.3. Önerme [3,18]:

$E$  bir Banach latis,  $S: C_0(X) \rightarrow E$  bir latis homomorfizmi ve  $S(C_0(X))$ ,  $E$ 'de yoğun olsun. Eğer  $M$ ,  $C_0(X)$ 'in bir Korovkin altuzayı ise bu durumda  $S(M)$  de  $E$ 'nin bir Korovkin altuzayıdır.

*İspat:*

$(L_n)_{n \geq 1}$ ,  $E$  üzerinde lineer pozitif operatörlerin bir eş sınırlı dizisi ve her  $k \in S(M)$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $L_n(k) \rightarrow k$  olsun. Bu ifade, her  $h \in M$  için ve dolayısıyla her  $h \in H = \mathcal{L}(M)$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $L_n(S(h)) \rightarrow S(h)$  olduğu anlamına gelir. Böylece, Teorem 6.2'den her  $f \in C_0(X)$  için  $L_n(S(f)) \rightarrow S(f)$  olur.  $S(C_0(X))$ ,  $E$ 'de yoğun ve  $(L_n)_{n \geq 1}$  eş sınırlı olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Yukarıdakilere benzer yöntemler kullanarak elde edilen sonuçları daha genel ağırlıklı fonksiyon uzaylarına genişletebiliriz [3,19].

$w \in C(X)$  için,

$$C_*^w(X) = \{f \in C(X) : wf \text{ sonsuzda yakınsaktır}\}$$

Banach latisini göz önüne alalım. Bu uzay üzerinde doğal (noktasal) sıralama ve

$$\|f\|_w = \|wf\|_\infty \quad (f \in C_*^w(X))$$

ağırlıklı normu tanımlıdır.

Her  $f \in C_*^w(X)$  için  $X_\infty$  üzerinde  $T(f)$  ile gösterilen fonksiyon,

$$T(f; z) := \begin{cases} w(z)f(z) & , \quad z \in X \quad \text{ise} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} w(x)f(x) & , \quad z = \infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir. Bu durumda  $T(f) \in C(X_\infty)$  ve  $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$  dur. Aynı zamanda

$T : C_*^w(X) \rightarrow C(X_\infty)$  lineer operatörü bir latis izomorfizmidir. T'nin ters operatörünü

$S : C(X_\infty) \rightarrow C_*^w(X)$  ile gösterelim.

Böylece  $C_*^w(X)$ 'in bir  $M$  altkümesinin  $C_*^w(X)$ 'in bir Korovkin altkümesi olması için gerek ve yeter şart  $T(M)$ 'nin  $C(X_\infty)$ 'un bir Korovkin altkümesi olmasıdır.

#### 6.4. Önerme [3]:

Aşağıdaki koşulları sağlayan  $C_*^w(X)$  'in bir  $M$  altkümesi,  $C_*^w(X)$  'in bir Korovkin altkümesidir:

i) Her  $x_0, y_0 \in X$  ,  $x_0 \neq y_0$  , için  $h(x_0) = 0$  ve  $h(y_0) > 0$  olacak biçimde bir  $h \in \mathcal{L}(M)$  ,  $h \geq 0$  vardır.

ii) Her  $x_0 \in X$  için

$$h(x_0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} w(x)h(x) > 0$$

ve

$$k(x_0) > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} w(x)k(x) = 0$$

olacak biçimde  $h, k \in \mathcal{L}(M)$  pozitif fonksiyonları vardır.

*İspat:*

(i) ve (ii) koşulları  $T(M)$  'nin Önerme 5.2.'nin hipotezlerini  $C(X_\infty)$  'da gerçekleştiğini ifade eder. Sonuç Önerme 5.2.'den elde edilir.

#### 6.5. Önerme [3]:

$X$  'in noktalarını ayıran  $C(X)$  'in bir  $M$  altkümesini ve  $f_0 \in C_0^w(X)$  kesin pozitif fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$i) f_0 M \cup f_0 M^2 \subset C_*^w(X)$$

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x)f_0(x)g(x) = 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x)f_0(x)g^2(x) > 0$  olacak biçimde bir  $g \in M$  vardır.

Bu durumda  $\{f_0\} \cup f_0 M \cup f_0 M^2$  ,  $C_*^w(X)$  'in bir Korovkin altkümesidir.

*İspat:*

Önerme 6.4'ün (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

Verilen  $x_0, y_0 \in X$ ,  $x_0 \neq y_0$  için  $f(x_0) \neq f(y_0)$  olacak biçimde  $f \in M$  vardır. Buradan,  $h = f_0(f - f(x_0))^2 \in \{f_0\} \cup f_0M \cup f_0M^2$  fonksiyonu için  $h(x_0) = 0$  ve  $h(y_0) > 0$  olduğundan (i) koşulu sağlanmış olur.

Önerme 6.4'ün (ii) koşulundan dolayı bu teoremin (ii) koşulunu sağlayan bir  $g \in M$  fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda her  $x_0 \in X$  için  $h = f_0(g - g(x_0))^2$  ve  $k = f_0$  fonksiyonları (ii) koşulunu sağlar.

6.6. Önerme [3]:

$X$  'in noktalarını ayıran  $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ ,  $n \geq 1$ , fonksiyonlarını ve kesin pozitif  $f_0 \in C_0^w(X)$  fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $f_0 f_i \in C_0^w(X)$  ve  $f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2 \in C_*^w(X)$ ,

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) f_0(x) \sum_{i=1}^n f_i^2(x) > 0$ .

Bu durumda  $\{f_0, f_0 f_1, \dots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2\}$ ,  $C_*^w(X)$  'in bir Korovkin altkümesidir.

*İspat:*

$h = f_0 \sum_{i=1}^n (f_i - f_i(x_0))^2$  seçilerek Önerme 6.5'e benzer ispat yapılabilir.

6.7. Önerme [3]:

$w \in C_0(X)$  ağırlığı,  $X$  'in noktalarını ayırıyor ve  $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ ,  $n \geq 1$ , için

(i) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $f_i \in C_0^w(X)$  ve  $\sum_{i=1}^n f_i^2 \in C_*^w(X)$ ,

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) \sum_{i=1}^n f_i^2(x) > 0$

koşullarını sağlıyor ise bu durumda  $\left\{1, f_1, \dots, f_n \sum_{i=1}^n f_i^2\right\}$ ,  $C_*^w(X)$ 'te bir Korovkin altkümesidir.

Sonuç [3]:

$f_1, \dots, f_n \in C(X)$ ,  $n \geq 1$ ,  $X$ 'in noktalarını ayırsın ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i^2(x) = \infty$  olsun.

Eğer  $f_0 \in C(X)$  kesin artan bir fonksiyon ise,

$$w = \frac{1}{f_0(1 + \sum_{i=1}^n f_i^2)}$$

olmak üzere,

$\{f_0, f_0 f_1, \dots, f_0 f_n, f_0 \sum_{i=1}^n f_i^2\}$ ,  $C_*^w(X)$ 'in bir Korovkin altkümesidir.

## 7. LİNEER POZİTİF OPERATÖR AĞLARI İÇİN KOROVKİN TİP TEOREMLER

Bu bölümde daha önce lineer pozitif operatör dizileri için verilen tanım ve teoremler, daha genel olan lineer pozitif operatör ağıları için verilecektir. Bu bölümün tamamında F. Altomare ve M. Campiti'nin "Korovkin-type Approximation Theory and its Applications" [4] isimli kitaplarının 3, 4 ve 5. kısımları incelenmiştir.

Ayrıca belirtelim ki  $C_0(X)$  uzayı için verilen tanımların hepsi keyfi bir  $E$  Banach latisi alınarak aynı şekilde yapılabilir.

### 7.1. Korovkin Altkümesi, Korovkin Altuzayı ve Korovkin Kapanışı

7.1.1. Tanım:

$X$  ve  $Y$  yerel kompakt Hausdorff uzayları,  $T: C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  lineer pozitif operatör ve  $H$ ,  $C_0(X)$ 'in bir altkümesi olsun.  $C_0(X)$ 'ten  $C_0(Y)$ 'ye lineer pozitif operatörlerin keyfi bir  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı için

$$i) \sup_{i \in I} \|L_i\| < \infty$$

$$ii) \text{ Her } h \in H \text{ için } \lim_{i \in I} L_i(h) = T(h)$$

koşulları sağlanıyor iken, her  $f \in C_0(X)$  için

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = T(f)$$

oluyorsa, yani  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı  $T$ 'ye kuvvetli yakınsak ise,  $H$  kümesine lineer pozitif operatörlere göre  $T$  için bir Korovkin altkümesi ya da kısaca  $T$  için bir  $K_+$ -altkümesi denir.

Dikkat edilirse,  $X$  kompakt ve  $\mathbf{1} \in H$  ise (ii) koşulu (i) koşulunu gerektireceğinden Tanım 7.1.1'deki  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı yerine uygun bir  $(L_i)_{i \geq i_0}^{\leq}$  ( $i_0 \in I$ ) ailesi alınabilir.

$H$  kümesinin  $C_0(X)$  'te bir Korovkin altkümesi olması için gerek ve yeter koşul  $H$  tarafından üretilen  $\mathcal{L}(H)$  lineer altuzayının bir Korovkin altkümesi olmasıdır. Bu yüzden  $C_0(X)$  'in yukarıdaki koşulları sağlayan altuzaylarını dikkate aldığımızda,  $H$  'ye lineer pozitif operatörlere göre  $T$  için bir Korovkin altuzayı ya da kısaca  $T$  için bir  $K_+$  - altuzayı deriz.

### 7.1.2. Tanım:

$X$  yerel kompakt Hausdorff uzayı,  $H$ ,  $C_0(X)$  'in bir altkümesi ise,  $C_0(X)$  'in şu altuzayını tanımlayabiliriz:

$$K_+(H, T) = \{f \in C_0(X) : \sup_{i \in I} \|L_i\| < \infty \text{ ve her } h \in H \text{ için } \lim_{i \in I} L_i(h) = T(h) \text{ özelliklerini}$$

sağlayan  $C_0(X)$  'ten  $C_0(Y)$  'ye lineer pozitif operatörlerin her bir  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı için

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = T(f) \text{ dir. } \}.$$

Bu  $K_+(H, T)$  altuzayına  $H$  'nin lineer pozitif operatörlere göre  $T$  için bir Korovkin kapanışı ya da  $H$  'nin  $T$  için  $K_+$  kapanışı denir.

Korovkin kapanışlarıyla evrensel Korovkin tip özelliğin eş değerliğini inceleyebilmek için aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

### 7.1.3. Teorem:

$X$  ve  $Y$  yerel kompakt Hausdorff uzayları,  $T: C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  lineer pozitif operatör ve  $H$ ,  $C_0(X)$  'in bir altuzayı olsun. Keyfi bir  $f \in C_0(X)$  için aşağıdaki önermeler denktir:

- i)  $f \in K_+(H, T)$
- ii) (Teklik özelliği) Her  $h \in H$ , her  $\mu \in M_b^+(X)$  ve  $\mu(h) = T(h(y))$  eşitliğini sağlayan her  $y \in Y$  için  $\mu(f) = T(f(y))$  dir.

iii) Her  $\varepsilon > 0$  için  $\|u\| \leq \varepsilon$ ,  $\|v\| \leq \varepsilon$  olacak biçimde  $u, v \in C_0^+(X)$  fonksiyonları ve

$$\left\| \inf_{0 \leq j \leq n} T(k_j) - \sup_{0 \leq i \leq n} T(h_i) \right\| \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{0 \leq i \leq n} h_i - u \leq f \leq \inf_{0 \leq j \leq n} k_j + v$$

olacak biçimde sonlu sayıda  $h_0, \dots, h_n \in H$  ve  $k_0, \dots, k_n \in H$  fonksiyonları vardır.

7.1.4. Teorem:

$T: C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  lineer pozitif operatör ve  $H$ ,  $C_0(X)$ 'in bir altuzayı olsun.

Keyfi bir  $f \in C_0(X)$  için aşağıdaki önermeler denktir:

i)  $f \in K_+(H, T)$

ii) (Lineer pozitif operatörlere göre evrensel Korovkin tip özellik)

Eğer  $E$  bir Banach latis,  $S$ ,  $C_0(Y)$ 'den  $E$ 'ye latis homomorfizmi ve  $(L_i)_{i \in I}^\leq$ ,  $C_0(X)$ 'ten  $E$ 'ye  $\sup_{i \in I} \|L_i\| < \infty$  ve her  $h \in H$  için  $\lim_{i \in I}^\leq L_i(h) = S(T(h))$  olacak biçimde lineer pozitif operatörlerin bir ağı ise bu durumda  $\lim_{i \in I}^\leq L_i(f) = S(T(f))$  dir.

*İspat:*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) olduğunu göstereyim.  $\varepsilon > 0$  olsun. Her bir  $\varphi \in C_0(Y)$  için

$$\|\varphi\| \leq \delta \Rightarrow \|S(\varphi)\| \leq \varepsilon \quad (7.1)$$

olacak biçimde  $\delta > 0$  alalım.

$(L_i)_{i \in I}^\leq$  ağı eş sürekli olduğundan, her  $g \in C_0(X)$  için,

$$\|g\| \leq \eta \Rightarrow \|T(g)\| \leq \delta \text{ ve } \|L_i(g)\| \leq \varepsilon \quad (7.2)$$

olacak biçimde  $\eta > 0$ ,  $\eta \leq \delta$

bulabiliriz.

$f \in K_+(H, T)$  olduğundan, Teorem 7.1.3. (iii)'den,  $u, v \geq 0$ ,  $\|u\| \leq \eta$ ,  $\|v\| \leq \eta$  ve

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq n} h_\alpha - u \leq f \leq \inf_{0 \leq \beta \leq n} k_\beta + v \quad (7.3)$$

$$\left\| \inf_{0 \leq \beta \leq n} T(k_\beta) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} T(h_\alpha) \right\| \leq \delta \quad (7.4)$$

olacak biçimde  $H$  de  $h_0, \dots, h_n$  ve  $k_0, \dots, k_n$  ve  $u, v \in C_0(X)$  vardır.

Buradan,

$$\left\| \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) \right\| \leq \varepsilon \quad (7.5)$$

olur.

Bununla birlikte, Eş. 7.3'ten, her  $i \in I$  için,

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq n} L_i(h_\alpha) - L_i(u) \leq L_i(f) \leq \inf_{0 \leq \beta \leq n} L_i(k_\beta) + L_i(v) \quad (7.6)$$

ve

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) - S(T(u)) \leq S(T(f)) \leq \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) + S(T(v)) \quad (7.7)$$

olur.

Eş. 7.6 ve Eş. 7.7'den her  $i \in I$  için,

$$\begin{aligned} L_i(f) - S(T(f)) &\leq \inf_{0 \leq \beta \leq n} L_i(k_\beta) + L_i(v) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) + S(T(u)) \\ &= \inf_{0 \leq \beta \leq n} L_i(k_\beta) - \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) + \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) \\ &\quad - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) + L_i(v) + S(T(u)) \\ &\leq \sum_{\beta=0}^n \left| L_i(k_\beta) - S(T(k_\beta)) \right| + \left| \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) \right| \end{aligned}$$

$$+|L_i(v)|+|S(T(u))|$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} S(T(f)) - L_i(f) &\leq \sum_{\alpha=0}^n |L_i(h_\alpha) - S(T(h_\alpha))| + \left| \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) \right| \\ &\quad + |L_i(u)| + |S(T(v))| \end{aligned}$$

olur.

Böylece, her  $i \in I$  için,

$$\begin{aligned} |S(T(f)) - L_i(f)| &\leq \sum_{\alpha=0}^n |L_i(h_\alpha) - S(T(h_\alpha))| + \sum_{\beta=0}^n |L_i(k_\beta) - S(T(k_\beta))| \\ &\quad + \left| \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) \right| + |L_i(v)| + |S(T(u))| \\ &\quad + |L_i(u)| + |S(T(v))| \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 7.1, Eş. 7.2 ve elde ettiğimiz son eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} \|S(T(f)) - L_i(f)\| &\leq \sum_{\alpha=0}^n \|L_i(h_\alpha) - S(T(h_\alpha))\| + \sum_{\beta=0}^n \|L_i(k_\beta) - S(T(k_\beta))\| \\ &\quad + \left\| \inf_{0 \leq \beta \leq n} S(T(k_\beta)) - \sup_{0 \leq \alpha \leq n} S(T(h_\alpha)) \right\| + 4\varepsilon \end{aligned} \tag{7.8}$$

olur.

$(L_i(h_\alpha))_{i \in I}^{\leq}$  ağı  $S(T(h_\alpha))$  ya ve  $(L_i(k_\beta))_{i \in I}^{\leq}$  ağı  $S(T(k_\beta))$  ya yakınsak olduğu için, her  $\alpha, \beta = 0, \dots, n$  ve  $i \in I$ ,  $i \geq i_0$  için,

$$\|L_i(h_\alpha) - S(T(h_\alpha))\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}, \quad \|L_i(k_\beta) - S(T(k_\beta))\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$$

olacak biçimde bir  $i_0 \in I$  vardır.

Böylece Eş. 7.8'den, her  $i \in I$ ,  $i \geq i_0$  için

$$\|S(T(f)) - L_i(f)\| \leq 7\varepsilon$$

olur.  $\varepsilon > 0$  keyfi olduğundan,

$$\lim_{i \in I} L_i(f) = S(T(f))$$

elde edilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) olduğu  $K_+(H, T)$  tanımdan açıktır.

7.1.5. Önerme:

$E$  bir Banach latis ve  $S, C_0(X)$ 'ten  $E$ 'ye bir latis homomorfizmi ve  $S(C_0(X))$  görüntüsü  $E$ 'de yoğun olsun. Eğer  $H, C_0(X)$ 'te bir  $K_+$  - altuzayı ise, bu durumda  $S(H)$ ,  $E$ 'nin bir  $K_+$  - altuzayıdır.

*İspat:*

$(L_i)_{i \in I}^\leq$   $E$ 'den  $E$ 'ye lineer pozitif operatörlerin eş sürekli bir ağı ve her  $k \in S(H)$  için  $\lim_{i \in I} L_i(k) = k$  olsun.  $C_0(X)$ 'ten  $E$ 'ye lineer pozitif operatörlerin  $(L_i \circ S)_{i \in I}^\leq$  ağını göz önüne alalım.

Her  $h \in H$  için  $(L_i(S(h)))_{i \in I}^\leq$  ağı  $S(h)$ 'ye yakınsadığı için, evrensel Korovkin tip özellik gereğince her  $f \in C_0(X)$  için,  $(L_i(S(f)))_{i \in I}^\leq$  ağı da  $S(f)$ 'ye yakınsar, yani, her  $g \in S(C_0(X))$  için  $\lim_{i \in I} L_i(g) = g$  dir.  $S(C_0(X))$ ,  $E$ 'de yoğun olduğundan, her  $g \in E$  için  $\lim_{i \in I} L_i(g) = g$  dir, diyebiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

### 7.1.6. Tanım:

$X$  bir yerel kompakt Hausdorff uzayını ve  $H$ ,  $C_0(X)$  'in bir altkümesini gösterebilir.  $C_0(X)$  'teki birim operatör için  $H$  'nin Korovkin kapanışı  $K_+(H, I_{C_0(X)})$ , basit bir şekilde  $K_+(H)$  ile gösterilecek ve  $H$  'nin  $K_+$  kapanışı diye söylenecektir.

Böylece, bir  $f \in C_0(X)$  fonksiyonunun  $K_+(H)$  kapanışına ait olması için gerek ve yeter koşul  $f$  'nin aşağıdaki özelliği sağlamasıdır:

$C_0(X)$  üzerindeki lineer pozitif operatörlerin

$$i) \sup_{i \in I} \|L_i\| < \infty$$

$$ii) \text{ Her } h \in H \text{ için } \lim_{i \in I} L_i(h) = h$$

özelliklerini sağlayan her bir  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı için  $\lim_{i \in I} L_i(f) = f$  mevcuttur.

### 7.1.7. Tanım:

$K_+(H) = C_0(X)$  özelliğini sağlayan bir  $H$  altkümesine  $C_0(X)$  'te bir  $K_+$ -altküme veya lineer pozitif operatörlere göre bir Korovkin altkümesi denir.

Bunun anlamı,  $C_0(X)$  üzerindeki lineer pozitif operatörlerin bir eş sürekli  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$  ağı göz önüne alındığında, her  $h \in H$  için  $\lim_{i \in I} L_i(h) = h$  bağıntısının, her  $f \in C_0(X)$  için  $\lim_{i \in I} L_i(f) = f$  bağıntısını vereceğidir.

### 7.1.8. Teorem:

Her  $f \in C_0(X)$  için aşağıdaki durumlar denktir:

$$i) f \in K_+(H)$$

ii) (Teklik özelliği) Her  $h \in H$  ve  $\mu(h) = h(x)$  eşitliğini sağlayan her  $x \in X$  ve her  $\mu \in M_b^+(X)$  için  $\mu(f) = f(x)$  tir.

iii) (Lineer pozitif operatörlere göre evrensel Korovkin tip özellik) Eğer  $E$  bir Banach latis,  $S, C_0(X)$  'ten  $E$  'ye latis homomorfizmi ve  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}, C_0(X)$  'ten  $E$  'ye  $\sup_{i \in I} \|L_i\| < \infty$  ve her  $h \in H$  için  $\lim_{i \in I} L_i(h) = S(h)$  olacak biçimdeki lineer pozitif operatörlerin bir ağı ise bu durumda  $\lim_{i \in I} L_i(f) = S(f)$  dir.

## 7.2. Kesin Korovkin Altkümeleri

Bu bölümde kesin Korovkin altkümeleri adı verilen bazı özel Korovkin altkümelerini tanıtacağız. Böylece farklı özellikteki uzaylarda Korovkin tip teoremlerin gerçekleşme koşullarını elde etmiş olacağız.

### 7.2.1. Tanım:

$C_0(X)$  'in bir lineer  $H$  altuzayı aşağıdaki koşulu sağlasın:

Her  $x, y \in X, x \neq y$  için  $k \geq 0, k(y) > 0$  ve  $k(x) = 0$  olacak biçimde  $k \in H$  vardır.

Bu durumda,  $H, C_0(X)$  'te bir  $K_+$  - altuzayıdır.

### 7.2.2. Tanım:

$X$  bir yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun. Eğer her bir  $x \in X$  'e karşılık

$$k(x) = 0 \text{ ve her } y \in X, y \neq x \text{ için } k(y) > 0 \quad (7.9)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $k \in H$  fonksiyonu bulunuyorsa  $C_0(X)$  'in bir  $H$  altuzayına bir kesin  $K_+$  -altuzayı denir.

Bu durumu sağlayan  $C_0(X)$  'in bazı  $M$  altkümeleri için  $H = \mathcal{L}(M)$  ise  $M$  'ye bir kesin  $K_+$  - altküme denir.

### 7.2.3. Uyarı [4]:

$C_0(X)$  'in her kesin  $K_+$  - altuzayı,  $C_0(X)$  'te bir  $K_+$  - altuzayıdır. Aksi genellelikle doğru değildir.

### 7.2.4. Önerme:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  ve  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  olsun.

Bu durumda

i)  $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}\}$ ,  $C_0((0,1])$  'de bir kesin  $K_+$  - altkümüdür.

ii)  $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}\}$ ,  $C_0((0,1])$  'de bir kesin  $K_+$  - altkümüdür.

*İspat:*

i) Sabit bir  $x_0 \in (0,1]$  alalım. Eğer  $x_0 = 1$  ise her  $t \in (0,1]$  için

$$k(t) = t^{\lambda_1} - t^{\lambda_2}$$

fonksiyonunu ve eğer  $x_0 < 1$  ise her  $t \in (0,1]$  için

$$k(t) = (\lambda_3 - \lambda_2)x_0^{\lambda_3 - \lambda_1}t^{\lambda_1} - (\lambda_3 - \lambda_1)x_0^{\lambda_3 - \lambda_2}t^{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda_1)t^{\lambda_3}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$k$  fonksiyonu Eş. 7.9'u sağladığı için  $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}\}$   $C_0((0,1])$  'de bir kesin  $K_+$  - altkümüdür.

ii) Yine, sabit bir  $x_0 \in (0,1]$  alalım.  $x_0 = 1$  için

$$k(t) = 1 - t^{\lambda_1} \quad (t \in (0,1])$$

fonksiyonunu ve  $x_0 < 1$  olduğunda

$$k(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)x_0^{\lambda_2} - \lambda_2x_0^{\lambda_2 - \lambda_1}t^{\lambda_1} + \lambda_1t^{\lambda_2} \quad (t \in (0,1])$$

$k$  fonksiyonu Eş. 7.9'u sağladığı için  $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}\}, C_0((0,1])$ 'de bir kesin  $K_+$  altkümüdür.

Aşağıda vereceğimiz önerme yardımı ile  $[0, \infty)$ 'da sürekli, limiti veya ağırlıklı limiti mevcut fonksiyonlar uzayında Korovkin tip teoremlerin sağlanma koşulları incelenecek böylelikle  $[0, \infty)$  üzerinde operatör ağlarının (dizilerinin) düzgün yakınsama koşulları elde edilecektir.

7.2.5. Önerme:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  ve  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  olsun. Bu durumda,

(i)  $\|f\|_* = \sup_{x \geq 0} \frac{f(x)}{1+x^{\lambda_2}}$  normu ile donatılmış

$$E_{\lambda_2} = \{g \in C([0, \infty)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{1+x^{\lambda_2}} \text{ mevcut}\}$$

Banach latisi verildiğinde,  $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}\}, E_{\lambda_2}$ 'de bir  $K_+$  - altkümesidir.

(ii)  $C^*([0, \infty)) = \{f \in C[0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ sonlu}\}$  sup-normlu Banach latisi verildiğinde

$\{1, \exp(-\lambda_1 x), \exp(-\lambda_2 x)\}, C^*([0, \infty))$ 'da bir  $K_+$  - altkümesidir.

*İspat:*

(i) Her  $f \in C([0,1])$  ve  $x \in [0, \infty)$  için

$$Sf(x) = (1+x^{\lambda_2})f(\exp(-x))$$

şeklinde tanımlanan  $S : C([0,1]) \rightarrow E_{\lambda_2}$  latis homomorfizmini göz önüne alalım.

$S$  bir izometrik latis izomorfizmidir ve  $S$  operatörünün tersi her  $f \in E_{\lambda_2}$  ve  $t \in [0,1]$  için

$$Tg(t) = \frac{g(\ln 1/t)}{1+\ln^{\lambda_2}(1/t)}$$

şeklinde tanımlanan  $T$  operatörüdür.

Burada  $Tg(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} Tg(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{1+x^{\lambda_2}}$  dir.

Her  $t \in [0,1]$  ve  $k = 1, 2, 3$  için  $f_k(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f_k(t)$  olmak üzere

$$f_1(t) = \frac{1}{1 + \ln^{\lambda_2}(1/t)}$$

$$f_2(t) = \frac{\ln^{\lambda_1}(1/t)}{1 + \ln^{\lambda_2}(1/t)}$$

$$f_3(t) = \frac{\ln^{\lambda_2}(1/t)}{1 + \ln^{\lambda_2}(1/t)}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Bu durumda  $\{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $C([0,1])$ 'de bir kesin  $K_+$  - altkümesidir.

Gerçekten,  $t_0 \in (0,1]$  ise,

$$k(t) = (\lambda_2 - \lambda_1) \ln^{\lambda_2} \left( \frac{1}{t_0} \right) f_1(t) - \lambda_2 \ln^{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{t_0} \right) f_2(t) + \lambda_1 f_3(t), \quad t \in [0,1]$$

fonksiyonu pozitifdir ve sadece  $t_0$  'da sıfır olur.

$t_0 = 0$  'da  $f_1$  fonksiyonunu sadece  $t_0$  'da sıfır olan pozitif bir fonksiyon olarak seçebiliriz.

$$S(f_1; x) = 1, \quad S(f_2; x) = x^{\lambda_1} \quad \text{ve} \quad S(f_3; x) = x^{\lambda_2}, \quad x \in [0, \infty)$$

olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur.

(ii) (i) durumuna benzer bir şekilde,

$f \in C([0,1])$  ve  $x \in [0, \infty)$  olmak üzere

$$Sf(x) = f(\exp(-x))$$

şeklinde tanımlanan  $S : C([0,1]) \rightarrow C^*([0,\infty))$  izometrik latis izomorfizmini göz önüne alalım.

$S$  dönüşümü  $\mathbf{1}$ ,  $x^{\lambda_1}$ ,  $x^{\lambda_2}$  yi sırasıyla  $\mathbf{1}$ ,  $\exp(-\lambda_1 x)$ ,  $\exp(-\lambda_2 x)$  'e dönüştürür.

*Örnek:*

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reel sayıların bir dizisi ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  olsun.

Her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C([0,\infty))$  ve  $x \in [0,\infty)$  için

$$B_n^*(f; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} & , \quad 0 \leq x \leq b_n \quad \text{ise} \\ f(x) & , \quad x > b_n \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $B_n^* : C([0,\infty)) \rightarrow C([0,\infty))$  lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Bu operatör  $E_2 = \left\{ f \in C([0,\infty)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ mevcut} \right\}$ ,  $C^*([0,\infty))$  ve  $C_0([0,\infty))$  fonksiyon uzaylarını kendi üzerine dönüştürür.

$B_n^*$  operatörüne  $n$ . dereceden Bernstein-Chlodovsky operatörü denir ve her  $n \geq 1$ ,  $x \geq 0$  ve  $\lambda > 0$  için

$$B_n^*(\mathbf{1}; x) = \mathbf{1}$$

$$B_n^*(e_1; x) = x$$

ve  $x \leq b_n$  için

$$B_n^*(e_2; x) = x^2 - \frac{1}{n}x^2 + \frac{b_n}{n}x$$

dir.

Ayrıca  $\|B_n^*(e_2) - e_2\|_* \leq \frac{b_n}{n}$  dir.

Böylece Önerme 7.2.5'ten her  $f \in E_2$  için  $[0, \infty)$  aralığının kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^*(f) = f$$

olur.

$x \leq b_n$  ise

$$\begin{aligned} B_n^*(f_\lambda; x) &= \left( \exp(-\lambda b_n / n) \frac{x}{b_n} + 1 - \frac{x}{b_n} \right)^n \\ &= \left( 1 - \lambda x \left( \frac{1 - \exp(-\lambda b_n / n)}{\lambda b_n} \right) \right)^n \end{aligned}$$

olup  $[0, \infty)$  üzerinde  $B_n^*(f_\lambda)$ ,  $f_\lambda$  'ya düzgün yakınsar.

Böylece Önerme 5.5 (iii) gereğince her  $f \in C_0([0, \infty))$  ve  $f \in C^*([0, \infty))$  için  $[0, \infty)$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^*(f) = f$$

olur.

Önerme 7.2.4 (ii)'de  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  alınması durumunda 3. bölümde verilen Korovkin'in meşhur 1. Teoremi elde edilir.

7.2.6. Teorem:

$\{1, x, x^2\}$  kümesi  $C([0, 1])$ 'de bir (kesin)  $K_+$  altkümesidir.

Bu teorem Korovkin Teoremi'nin farklı bir şekilde ifade edilışıdır.

Sonuç olarak, eğer  $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$ ,  $C([0,1])$  üzerinde lineer pozitif operatörlerin bir ağı ise, her  $f \in C([0,1])$  için  $[0,1]$  üzerinde düzgün olarak  $\lim_{i \in I} L_i(f) = f$

sonucunu elde etmek için  $e_k(x) = x^k$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $k = 0,1,2$  olmak üzere  $[0,1]$  üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{i \in I} L_i(e_k) = e_k$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

## KAYNAKLAR

1. Korovkin, P.P., "Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions", *Doklady Akad. Nauk.*, 90: 961-964 (1953).
2. Korovkin, P.P., "Linear Operators and Approximation Theory", *Hindustan Publishing Corp. (India)*, Delhi, 1-63 (1960).
3. Altomare, F., "Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators", *Surveys in Approximation Theory*, 5: 92-164 (2010).
4. Altomare, F., Campiti, M., "Korovkin-type Approximation Theory and its Applications", *Walter de Gruyter*, Berlin, New York, 141-157, 195-218, 347 (1994).
5. Yıldız, C., "Genel Topoloji", *Gazi Kitabevi*, Ankara, 187-197 (2005).
6. Bülbül, A., "Gelen Topoloji", *Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fakülte Yayınları*, Trabzon, 106,119,120 (1994).
7. Bohman, H., "On Approximation of Continuous and Analytic Functions", *Ark. Math.*, 2: 43-46 (1952-1954).
8. Bernstein, S., "Démonstration du théorémé de Weierstrass, fondée sur la calcul des probabilités", *Commun. Soc. Math. Kharkow* (2), 13: 1-2 (1912-1913).
9. Weierstrass, K., "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen", *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639, 789-805 (1885).
10. Pinkus, A., "Weierstrass and Approximation theory", *J. Approx. Theory*, 107: 1-66 (2000).
11. Pinkus, A., "Density in Approximation Theory", *Surveys in Approximation Theory*, 1: 1-45 (2005).
12. Kantorovich, L.V., "Sur Certains Développements Suivant Les Polynômes de la Forme de S. Bernstein", *C.R. Acad*, I,II: 563-568, 595-600 (1930).
13. Baskakov, V.A., "On Various Convergence Criteria for Linear Positive Operators", *Usp. Mat. Nauk*, 16 (197): 131-134 (1961).
14. Mirakjan, G.M., "Approximation of Continuous Functions with the Aid of Polynomials", *Dokl. Akad. Nauk*, 31: 201-205 (1941).

15. Favard, J., “Sur les Multiplicateurs d’interpolation”, *J. Math. Pures Appl.*, 23(9): 219-247 (1944).
16. Szász, O., “Generalization of S. Bernstein’s Polynomials to the Infinite Interval”, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 45: 239-245 (1950).
17. Bauer, H., Donner, K., “Korovkin Approximation in  $C_0(X)$ ”, *Math. Ann.*, 236 (3): 225-237 (1978).
18. Wolff, M., “On the Theory of Approximation by Positive Linear Operators in Vector Lattices”, *Functional Analysis: Surveys and Recent Results*, *Proc. Conf.*, Paderborn, 73-87 (1976).
19. Altomare, F., Milella, S., “On a sequence of Integral Operators on Weighted  $L_p$  Spaces”, *Analysis Math.*, 34: 237-259 (2008).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : GÜNGÖR, Şule Yüksel

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 30.01.1987, Kayseri

e-mail : sulegungor@gazi.edu.tr

### Eğitim

| Derece | Eğitim Birim                          | Mezuniyet tarihi |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| Lisans | Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2009             |
| Lise   | Ankara Anadolu Lisesi                 | 2004             |

### İş Deneyimi

| Yıl         | Yer               | Görev               |
|-------------|-------------------|---------------------|
| 2011- Halen | Gazi Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

### Yabancı Dil

Fransızca, İngilizce

### Hobiler

Kitap okumak, bilim ve coğrafya dergilerini takip etmek, müzik dinlemek, film ve sahne sanatlarını izlemek.