



**T.C.
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

KORTEWEG DE VRIES DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Gamze GÜLŞEN TORPİL

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ**

**RİZE
2023**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ danışmanlığında, Gamze GÜLŞEN TORPİL tarafından hazırlanan *Korteweg de Vries Denkleminin Soliton Çözümü* adlı bu tez çalışması, 09/01/2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nilüfer TOPSAKAL	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Korteweg de Vries Denkleminin Soliton Çözümü” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

09/01/2023

Gamze GÜLŞEN TORPİL

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında Korteweg de Vries (KdV) denkleminin soliton çözümü ele alınmaktadır. Bu denklemi elde etmek için Lax ve Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) yöntemleri kullanılmaktadır.

Yüksek lisans eğitimim süresince emeği geçen, tüm bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, özveriyle bana destek olan ve yönlendiren tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ'ye, çalışmalarımın büyük destekçisi yol arkadaşım Yasin TORPİL'e ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gamze GÜLŞEN TORPİL

2023 / RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
KISALTMALAR	VII
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	2
1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	2
1.2. Korteweg de Vries Denklemleri.....	122
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	15
2.1. Schrödinger Denklemleri ve Saçılma Verileri	15
2.2. Ters Saçılma Problemi	18
2.3. Lax Yöntemi ve Saçılma Verilerinin Evolüsyonu	25
2.4. AKNS Yöntemiyle KdV Denkleminin Oluşturulması.....	31
2.5. KdV için Cauchy Probleminin Çözümü	36
2.6. KdV için Soliton Çözümleri.....	43
3. SONUÇLAR.....	49
3.1. Öneriler	49
KAYNAKÇA.....	50

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ

Hazırlayan : Gamze GÜLŞEN TORPİL

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 51

ÖZET

KORTEWEG DE VRIES DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMÜ

Bu tezde lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerden biri olan Korteweg de Vries (KdV) denklemi ele alınmaktadır. Bu denklem, Lax ve Ablowitz-Kaup-Newel-Segur (AKNS) yöntemleri ile elde edilmektedir. KdV denkleminin başlangıç değer probleminin çözümü için ters saçılma dönüşümü tanımlanmaktadır. Ayrıca KdV denkleminin soliton çözümleri oluşturulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Korteweg de Vries, Soliton, Ters Saçılma Dönüşümü

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics

Thesis Type : Master Thesis

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet ÜNLÜ

Author : Gamze GÜLŞEN TORPİL

Year : 2023

Pages : 51

ABSTRACT

THE SOLITON SOLUTION OF THE KDV EQUATION

In this thesis, we consider one of the partial differential equations, which is the Korteweg de Vries equation (KdV). The equation is obtained by using the Lax method and the AKNS method. Furthermore, we describe the inverse scattering transform to solve the initial-value problem and derive the soliton solution to the KdV equation.

Keywords: Korteweg de Vries Equation, Soliton, Inverse Scattering Transform

KISALTMALAR

AKNS	: Ablowitz, Kaup, Newel ve Segur
c_{lj}, c_{rj}	: Normalleştirici sabitler
γ_j	: Bağımlılık sabiti
det	: Matris determinatı
$D(t)$	: Saçılma verileri kümesi
$\delta(t - t_0)$	: Dirac delta fonksiyonu
f_l	: Sol Jost çözümü
f_r	: Sağ Jost çözümü
KdV	: Korteweg de Vries
$L(k)$	: Sol yansıma katsayısı
$L_n^1(R)$	: Ölçülebilir potansiyeller sınıfı
λ	: Spektral parametre
m_l, m_r	: Faddeev fonksiyonları
$R(k)$	: Sağ yansıma katsayısı
$S(k)$	: Saçılma matrisi
ss.	: Sayfadan sayfaya/sayfalar
$T(k)$	: İletim katsayısı
$u(x, t)$	: Potansiyel
$V(x)$	: $u(x, 0)$ potansiyeli
$\varphi_j(x)$	: Normalleştirilmiş bağıl durum çözümü
$\{R, \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$	: Sol saçılma verileri
$\{L, \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$	: Sağ saçılma verileri
$\dagger$	: Matris transpoz ve kompleks eşlenik

GİRİŞ

Bu çalışma 3 ana bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde, genel bilgilere dair iki alt başlıkta tanımlar ile bazı temel kavramlar verildi. 2. bölümde yapılan çalışmalar temel başlığı altında, 2.1. bölümünde, (2.1.1) Schrödinger denkleminin saçılma çözümleri ve bağlı durum çözümleri ele alınmaktadır. Ayrıca saçılma katsayıları, bağlı durum normalleştirici sabitleri ve Faddeev olarak adlandırılan bir sınıftaki bir potansiyele karşılık gelen bağımlılık sabitleri tanıtılmaktadır. 2.2. bölümde, (2.1.1) denklemi için ters saçılma probleminin bir özeti sunulmaktadır. Ayrıca ilgili bir Riemann-Hilbert problemini çözmeye dayalı bazı çözüm yöntemleri ele alınacaktır. 2.3. bölümde, $u(x, 0)$ potansiyelinden $u(x, t)$ potansiyeline geçtiğinde, saçılma katsayılarının, bağlı durum normalleştirici sabitlerinin ve bağımlılık sabitlerinin zaman evölüsyonu ele almaktadır. Ayrıca KdV denklemi ile ilişkili Lax çifti tanıtılmakta ve Lax yöntemi kullanılarak KdV denklemi elde edilmektedir. 2.4. bölümde, AKNS yöntemi incelenmekte ve KdV denklemi bu yöntemle elde edilmektedir. 2.5. bölümde, KdV denklemi için başlangıç değer problemini çözmek için bazı yöntemler tanıtılmaktadır. 2.6. bölümde, KdV denkleminin soliton çözümlerine odaklanılmakta ve N-soliton çözümünün çeşitli durumları elde edilmektedir. 3. bölümde, son ana başlıkta sonuç ve sonuca bağlı olarak öneriler ele alınmaktadır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1. Tanım

Bir denklemde, bilinmeyen fonksiyonun belirli bir değişkene göre türevli olması durumunda bu değişkene bağımsız değişken ve denklemde türevi bulunan fonksiyona da bağımlı değişken denir. Bağımsız değişken, aranan fonksiyon ve aranan fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere *diferansiyel denklem* denir.

Adi türevli diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler olmak üzere diferansiyel denklemler iki grupta toplanır.

1.1.2. Tanım

Bir diferansiyel denklemde aranan fonksiyon tek bir bağımsız değişken içeriyorsa bu denkleme *adi türevli diferansiyel denklem* denir. Bir adi türevli diferansiyel denklemde x bağımsız değişken, y bağımlı değişken ve y nin x e göre n . türevi $y^{(n)}$ olmak üzere

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazılabilir.

1.1.3. Tanım

Bir diferansiyel denklemde, aranan fonksiyon ve türevlerinin kuvvetleri bir ve katsayılar ile kuvvet terimi en fazla bağımsız değişkenin fonksiyonundan oluşuyor ise bu denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer bir denklem lineer değilse bu denkleme *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

1.1.4. Tanım

Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişkenin, iki veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu olması ve bu bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini içermesi durumunda bu tür diferansiyel denklemlere *kısmi türevli diferansiyel denklemler* denir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde x ve y bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere

$$f(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde yazılabilir.

1.1.5. Tanım

Kısmi türevli diferansiyel denklemde içerisinde yer alan bağımlı değişkenlerden en yüksek kısmi türevlenme sayısı, denklemin mertebesini ve en yüksek kısmi türevin kuvveti denklemin derecesini verir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden kısmi türevler birinci dereceden ve ayrıca bu bağımlı değişkenler ve her mertebeden kısmi türevlerin katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise böyle denklemlere *lineer kısmi türevli diferansiyel denklem* denir. Birinci mertebeden bir bağımlı ve iki bağımsız değişkeni olan lineer kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y)$$

şeklinde gösterilebilir.

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden terimlerin dereceleri bir ve bu terimler denklemde çarpım halinde bulunmuyor ise (denklemdaki diğer düşük mertebeden terimlerin ve bağımlı değişkenlerin bulunuş şekline bağımsız olarak) bu denkleme *yarı-lineerdir* (kuasi lineer) denir. Örneğin

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Bir kısmi türevli diferansiyel denklem lineer değilse bu denkleme *lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem* denir.

1.1.6. Tanım

Yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri sağlayan çözümlere *tam çözümler* denir.

1.1.7. Tanım

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi, ters saçılma yöntemi yardımıyla çözülebilirse buna *integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem* denir.

1.1.8. Tanım

n . mertebeden bir $f(x)$ lineer diferansiyel denkleminin $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = c_{n-1}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, *başlangıç değer problemi* denir.

1.1.9. Tanım

Bir diferansiyel denklemde keyfi sabitlere bağlı bulunan çözüme *genel çözüm*, keyfi sabitlere değer verilmesiyle elde edilen çözüme *özel çözüm* denir.

1.1.10. Tanım

$x = x_0$ noktasında bir $f(x)$ fonksiyonu Taylor serisine açılabilirken, x_0 'ı içeren bir açık aralıktaki bütün x değerleri için bu Taylor açılımının bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak olması durumunda, $f(x)$ 'e $x = x_0$ noktasında *analitik fonksiyon* denir.

1.1.11. Tanım

$D(T)$ ve $R(T)$ iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $D(T)$ uzayından alınan herhangi bir f fonksiyonuna $R(T)$ uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir T kuralı varsa, buna $D(T)$ uzayında, *bir operatördür* denir ve $T(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir.

1.1.12. Tanım

$D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi aynı skaler F cismi üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. $T: D(T) \rightarrow R(T)$ olmak üzere, her $x, y \in D(T)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ skalerleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğine sahip olan T operatörüne *lineer operatör* denir.

1.1.13. Tanım

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde, bilinen potansiyele karşılık gelen saçılma verisini belirleme problemine *düz saçılma problemi* denir. Bu problem çoğu kez belirli özel çözümler bulunarak çözülür. Bulunan çözümler ilgili lineer adi türevli diferansiyel denklem için Jost çözümü olarak adlandırılır. Uygun saçılma verileri, sonsuzda Jost çözümlerinin asimptotik davranışlar yardımıyla veya Jost çözümlerinin Wronskiyanı yardımıyla oluşturulabilir.

1.1.14. Tanım

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde, düz saçılma probleminin tersine verilen saçılma verilerine karşılık gelen potansiyeli belirleme problemine *ters saçılma problemi* denir.

1.1.15. Tanım

Lineer adi türevli diferansiyel denklem için düz ve ters saçılma problemlerinin çözümlerinden yola çıkarak, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem için başlangıç değer probleminin çözümünü elde etme yöntemine *ters saçılma dönüşümü* yöntemi denir.

1.1.16. Tanım

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} t_0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona *Dirac Delta fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon $t = t_0$ civarında çok büyük değer alan ve orjini çevreleyen çok küçük bir alanın dışında sıfır olan bir fonksiyon olarak anlaşılmalıdır.

Dirac Delta fonksiyonunun bazı özellikleri:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$2) \quad \delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{ita} dt$$

$$3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

1.1.17. Tanım

Bir $f(x)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta Dirichlet şartlarını sağlasın. $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx = \mathcal{F}(f(x)) \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanan $F(u)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier dönüşümü* denir ve bu integral dönüşümü $\mathcal{F}(f(x))$ şeklinde gösterilir. x değişkeninin tüm reel değerleri için tanımlanan $f(x)$ ana fonksiyonu reel veya kompleks olabilir.

$$\mathcal{F}^{-1}(F(u))$$

sembolü ise ters operatördür,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du = \mathcal{F}^{-1}(F(u)) \quad (1.1.2)$$

$f(x)$ fonksiyonuna da $F(u)$ fonksiyonunun *ters Fourier dönüşümü* denir. (1.1.1) ve (1.1.2) formüllerine *Fourier dönüşüm çifti* denir.

1.1.1 Örnek:

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk$$

$$\psi(k, x) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} \alpha(x, y) e^{-iky} dy$$

olmak üzere $\alpha(x, y)$ ifadesinin Fourier dönüşümünün $\psi(k, x)$ değerine eşit olduğunu gösterelim.

$$\psi(k, x) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} \alpha(x, y) e^{-iky} dy$$

denkleminde y yerine z alınıp ve eşitliğin her iki tarafı e^{iky} ile çarpılırsa

$$[\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} = \int_x^{\infty} \alpha(x, z) e^{-ikz} e^{iky} dz$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $-\infty$ 'dan ∞ 'a integrallenirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_x^{\infty} \alpha(x, z) e^{-ikz} e^{iky} dz \right] dk$$

ve ardından $1/2\pi$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = \frac{1}{2\pi} \int_x^{\infty} \alpha(x, z) dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} e^{iky} dk$$

olur.

Dirac delta fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = \int_x^{\infty} \alpha(x, z) \delta(z - y) dz$$

bulunur.

$$\int_x^\infty \alpha(x, z) \delta(z - y) dz = \int_{-\infty}^\infty \alpha(x, z) \delta(z - y) dz - \int_{-\infty}^x \alpha(x, z) \delta(z - y) dz$$

olduğu göz önüne alınıp

$$\int_{-\infty}^\infty \alpha(x, z) \delta(z - y) dz = \alpha(x, y) \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^x \alpha(x, z) \delta(z - y) dz = 0$$

özelliklerinden yararlanılırsa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\psi(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = \alpha(x, y)$$

elde edilir.

1.1.18. Tanım

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

fonksiyonuna

$$Ly \equiv y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.1.3)$$

denkleminin *Jost çözümü* adı verilir.

1.1.19. Tanım

$$e(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(0, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

fonksiyonuna (1.1.3) denkleminin *Jost fonksiyonu* denir.

1.1.20 Tanım

$$s(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna (1.1.3) denkleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

1.1.21. Tanım

$e(\lambda)$ saçılma fonksiyonunun sıfırları ia_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ($n < \infty$), $a_k > 0$ ise

$$m_k^{-2} = \int_0^\infty e^2(x, ia_k) dt$$

olmak üzere

$$\begin{cases} ia_1, ia_2, \dots, ia_n, & a_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ a_1 < a_2 < \dots < a_n \\ m_1, m_2, \dots, m_n \\ s(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

kümesine (1.1.3) denkleminin *saçılma verileri* denir.

1.1.22. Tanım

A bir kare matris, X ve B sütun matrisleri olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

verilsin. Burada $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ dir. n -bilinmeyenden oluşan $AX = B$ sistemine *linear denklem sistemi* denir. Bu sistemin $\det(A) \neq 0$ olmak üzere tek bir çözümü vardır ve *Cramer metodu* ile çözülebilir. Bu çözüm

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

şeklindedir. Burada A_j , A matrisinin j . sütundaki bileşenlerinin $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ matrisi ile

yer değiştirmesi sonucunda elde edilir.

1.1.23 Tanım

Herhangi bir A matrisinin satırlarının sütun ya da sütunlarının satır olarak yazılması ile elde edilen matrise A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir. Yani

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ise } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olur.

1.1.24. Tanım

A ve B herhangi iki $n \times n$ kare matris ve $V(x)$ ise potansiyel olsun. Eğer $V(x)$ potansiyeli

$$V(x) = V(x)^\dagger, \quad x \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } \int_0^\infty dx (1+x)|V(x)| < +\infty$$

ifadelerini sağlarsa,

$$D := \{V, A, B\}$$

ile verilen D kümesi *Faddeev sınıfına aittir* denir. Burada $\dagger$ işareti kompleks eşlenik ve matris transpozu temsil etmektedir.

1.1.25. Tanım

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ aynı D tanım kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere, bazı $C > 0$ sabitleri ve her $x \in D$ için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ ifadesi “ $f = O(g)$ ” ile gösterilir. Bu şekilde yazılabilen notasyona *büyük O notasyonu* denir. Örneğin,

- 1) $D = [1, \infty)$ için, $x^2 + 23x + 149 = O(x^2)$,
- 2) $(x, y) \in [-1.1] \times \mathbb{R}$ için, $xe^y = O(e^y)$,
- 3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ için, $\frac{xy}{x^2+y^2} = O(1)$.

1.1.26. Tanım

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde iki fonksiyon olmak üzere, $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) ifadesi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ anlamına gelir. Burada a sonsuz yada sonlu bir

değer olabilir. $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow a$) gösterimi ise $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ anlamındadır. Bu durumda $x \rightarrow a$ için $f(x)$ 'in $g(x)$ 'e asimptotik olduğu ifade edilmektedir. $f(x) = o(g(x))$ gösterimi $x \rightarrow a$ için $f(x)$, $g(x)$ 'e göre daha küçük bir büyüme sırasına sahiptir anlamına gelir. Bu şekilde yazılabilen notasyona *küçük o notasyonu* denir. Örneğin,

- 1) $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow a$) yazmanın başka bir yolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ dır.
- 2) $x^2 = o(x^3)$ ($x \rightarrow \infty$).
- 3) $(x \rightarrow a)$ $f(x) = g(x) + o(1)$ değeri, $(x \rightarrow a)$ için $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ değerine eşdeğerdir.
- 4) $(x \rightarrow 0)$ için $\sin x \sim x$.

1.1.27. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tanım kümesinde verilen reel değerli p ($1 \leq p < \infty$) için $\int_{\Omega} |f|^p < \infty$ olmak üzere ölçülebilir bir f fonksiyonuna $L^p(\Omega)$ uzayı denir. $L^p = L^p(\Omega)$ iken L^p uzayı bir vektör uzayı olduğundan

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f|^p \right]^{1/p}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\| \cdot \|$ gösterimi fonksiyonun normunu tanımlar.

1.1.28. Tanım

Birinci mertebeden

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.1.4)$$

ve

$$G(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.1.5)$$

denklemleri verilsin. (1.1.4) denkleminin her çözümü aynı zamanda (1.1.5) denkleminin de bir çözümü ise bu denklemlere *bağdaşabilir denklemler* denir.

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}$$

olmak üzere, bağdaşabilirlik koşulu

$$[F, G]: \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, p)} + p \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, q)} + q \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, q)} = 0$$

ile verilir.

1.2. Korteweg de Vries Denklemi

Korteweg de Vries denklemi (KdV), su dalgalarının uzun, dar ve sık kanallarda yayılmasını modellemek için kullanılır. İlk olarak 1895 yılında Hollandalı matematikçiler Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından formüle edilmiştir (Korteweg ve Vries, 1895). Korteweg, zamanının iyi bilinen bir matematikçisiydi ve de Vries, Korteweg danışmanlığında konuyla ilgili bir doktora tezi yazdı.

Birkaç hesaplamadan sonra, KdV denklemi genel olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.2.1)$$

şeklinde yazılır. Burada $-u(x, t)$, suyun t zamanında x konumundaki denge noktasından yükselmesine karşılık gelir. Eğer (1.2.1)'deki u , $-u$ ile yer değiştirilirse, -6 ile $+6$ yer değiştirir. Ayrıca x , t ve u 'yu ölçeklendirerek, yani onları bazı pozitif sabitlerle çarparak, (1.2.1)'in sol tarafındaki üç terimin her birinin önündeki sabitleri değiştirmek mümkündür.

(1.2.1) denklemindeki uu_x teriminin varlığı KdV denklemini lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem yapar. (1.2.1) denkleminde, u_{xxx} teriminin varlığı bu denklemi yayılımlı hale getirir, yani genel olarak bir başlangıç dalgası $u(x, 0)$, zaman ilerledikçe uzaya doğru genişleyecektir. Lineer olmama ve yayılma davranışı gösteren çözümlerine ek olarak KdV denklemi, soliter dalga olarak bilinen bazı özel çözümlere sahiptir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tekil bir soliter dalga çözümü, sola veya sağa hareket eder ve şeklini korur. (1.2.1) denkleminin böyle bir çözümünün sadece sağa doğru hareket ettiği görülür. Genel olarak, herhangi bir soliter dalga çözümü asimptotik olarak tekil bir soliter dalga çözümleri dizisine benzer.

Soliter bir su dalgasını ilk gözlemleyen John Scott Russell adında bir İskoç mühendisti. Bu olay 1834'te Edinburgh-Glasgow kanalında, KdV denkleminin su dalgaları için bir model olarak formüle edilmesinden yaklaşık 60 yıl önce oldu. Russell gözlemini, 1844'te British Association da raporladı (Russell, 1844). Soliter su dalgalarının varlığına inanmayan George Airy ile arasındaki rekabet de dahil olmak üzere Russell'ın gözleminin detayları (Ablowitz ve Clarkson, 1991; Ablowitz ve Segur, 1981; Drazin, 1986; Lamb Jr., 1980)'de bulunabilir.

Hiçbir zaman bir dergi makalesi olarak yayınlanmayan ünlü ön baskıda (Fermi ve diğerleri, 1955) belirtildiği gibi, Enrico Fermi'nin Los Alamos'a yaptığı yaz ziyaretlerinde, J. Pasta ve S. Ulam ile ortaklaşa lineer olmayan terimler içeren iki komşu arasındaki kuvvetlere sahip 64 parçacıktan oluşan tek boyutlu dinamik bir sistem üzerinde çalıştılar. Bu hesaplama çalışmaları Maniac I adlı Los Alamos bilgisayarında gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın temel amacı, çeşitli serbestlik dereceleri arasında enerjinin eşit dağılım yaklaşım oranını belirlemektir. Fermi'nin Kasım 1954'te ölümünden sonra, Pasta ve Ulam, onların kalan son birkaç hesaplama örneğini de tamamladılar.

1965'te Zabusky ve Kruskal, Fermi-Pasta-Ulam'ın ortaya koyduğu problemi, KdV denkleminin soliter dalga çözümleri cinsinden açıklayabildiler (Zabusky ve Kruskal, 1965). Böylece KdV denkleminin önemi ortaya çıktı. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemi için sayısal çözümlerin analizinde, parçacık benzeri davranışları nedeniyle bu tür darbelerle soliton adı verilen soliter dalga darbelerini gözlemlediler. Bu tür darbelerin birbirleriyle lineer olmayan bir şekilde etkileştiğini, ancak etkileşimlerinden boyut ve şekil olarak neredeyse etkilenmeden çıktıklarını gözlemlediler. KdV denkleminin soliton çözümleri arasındaki bu tür olağandışı lineer olmayan etkileşimler çok fazla heyecan yarattı, ancak o zamanlar sayısal çözümleri dışında kimse böyle bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin nasıl çözüleceğini bilmiyordu.

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, 1967 tarihli ünlü makalelerinde (Gardner ve diğerleri, 1967) KdV denkleminin başlangıç değer problemini çözmek için, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u(x, 0)$ başlangıç değerinin bir sabite yeterince hızlı bir şekilde yaklaştığını varsayarak, şimdi ters saçılma dönüşümü olarak bilinen bir yöntem sundular. Bu sabitin sıfır olarak seçilmesinde genellikle herhangi bir sakınca yoktur. Zamana bağlı

saçılma verilerini içeren 1-D Schrödinger denklemi için ters saçılma probleminin çözümü yardımıyla $u(x, t)$ 'nin $u(x, 0)$ 'dan elde edilebileceğini göstermişlerdir. Ayrıca KdV denkleminin soliton çözümlerinin, saçılma verilerindeki sıfır yansıma katsayısı durumuna karşılık geldiğini açıkladılar. KdV denkleminin çeşitli sayısal çözümlerinden, büyük t için genel olarak $u(x, t)$ 'nin pozitif x yönünde hareket eden sonlu bir soliton dizisinden ve ters yönde yayılan bir salınımlı diziden oluştuğunu gözlemlediler.

Bu çalışmada, KdV denklemi için ters saçılma dönüşümünün temel bir incelemesi sunuluyor. (2.1.1)'deki $V(x)$ 'in $u(x, t)$ ile yer değiştirildiği zamana bağlı Schrödinger denklemi ele alınmaktadır. Şöyle ki, $t > 0$ genellikle bir zaman parametresi olmak üzere

$$\frac{d^2\psi(k, x; t)}{dx^2} + k^2\psi(k, x; t) = u(x, t)\psi(k, x; t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.2)$$

şeklinde. Böylece, $V(x)$ 'in aslında $u(x, t)$ potansiyelinin $u(x, 0)$ başlangıç değerine karşılık geldiği görülür. Benzer şekilde, (2.1.1)'deki $\psi(k, x)$ ise zamana bağlı $\psi(k, x; t)$ fonksiyonunun $t = 0$ başlangıç zamanına karşılık gelir. (1.2.2) denklemi ile ilişkili $T(k; t)$, $R(k; t)$ ve $L(k; t)$ saçılma katsayılarının, $t = 0$ olduğunda (2.1.1) denklemi ile ilişkili, sırasıyla $T(k)$, $R(k)$ ve $L(k)$ saçılma katsayılarına karşılık geldiği görülür. Bu yüzden

$$\begin{aligned} V(x) &= u(x, 0), \quad \psi(k, x) = \psi(k, x; 0), \\ T(k) &= T(k; 0), \quad R(k) = R(k; 0), \quad L(k) = L(k; 0) \end{aligned}$$

notasyonları kullanılacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Schrödinger Denklemleri ve Saçılma Verileri

$$\frac{d^2\psi(k, x)}{dx^2} + k^2\psi(k, x) = V(x)\psi(k, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.1)$$

Schrödinger denkleminin ele alalım. Burada V reel değerlidir ve $L^1_1(\mathbb{R})$ 'ye aittir. Ayrıca $L^1_n(R)$, ölçülebilir potansiyeller sınıfını ifade eder şöyle ki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + |x|^n) |V(x)|$$

integrali sonludur. $L^1_1(\mathbb{R})$ 'deki reel değerli potansiyeller sınıfı bazen Faddeev sınıfı olarak adlandırılır (Faddeev, 1967).

(2.1.1) için iki tür çözüm vardır. Saçılma çözümleri, $x \rightarrow \pm\infty$ ve $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için e^{ikx} ve e^{-ikx} fonksiyonlarının lineer kombinasyonlarından oluşur. Ayrıca, (2.1.1)'in bir bağlı durumu, x değişkenine göre $L^2(\mathbb{R})$ 'ye ait bir çözümdür. V , Faddeev sınıfına ait olduğunda, $x \rightarrow \pm\infty$ iken (2.1.1)'in bağlı durum çözümleri üstel olarak azalır ve bunlar $\mathbb{C}^+$ üst-yarı kompleks düzlemdeki sanal ekseninde sadece belirli k -değerlerinde meydana gelir. Burada $\overline{\mathbb{C}^+} := \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ dir. Ayrıca kabul edelim ki bağlı durumlar $0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_N$ olmak üzere $k = i\kappa_j$ 'de meydana gelsin ve bağlı durumların sayıları N ile gösterilsin. Eğer V , Faddeev sınıfında ise N 'ler sonlu olur.

(2.1.1)'in saçılma çözümleri olan f_l sol Jost çözümü ve f_r sağ Jost çözümü aşağıdaki sınır koşullarını sağlar.

$$e^{-ikx}f_l(k, x) = 1 + o(1), \quad e^{-ikx}f'_l(k, x) = ik + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.1.2)$$

$$e^{ikx}f_r(k, x) = 1 + o(1), \quad e^{ikx}f'_r(k, x) = -ik + o(1), \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.1.3)$$

Burada türev x 'e göredir.

$$f_l(k, x) = \frac{e^{ikx}}{T(k)} + \frac{L(k)e^{-ikx}}{T(k)} + o(1) \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.1.4)$$

$$f_r(k, x) = \frac{e^{-ikx}}{T(k)} + \frac{R(k)e^{ikx}}{T(k)} + o(1) \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.1.5)$$

asimptotiklerinden iletim katsayısı T , sol yansıma katsayısı L ve sağ yansıma katsayısı R elde edilir. Ayrıca bu saçılma katsayıları, f_l ve f_r içeren belirli Wronskian cinsinden de ifade edilebilir (Chadan ve Sabatier, 1989; Deift ve Trubowitz, 1979; Faddeev, 1967; Marchenko, 1986; Newton, 1983).

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{2ik}{[f_r(k, x); f_l(k, x)]}, \\ L(k) &= \frac{[f_l(k, x); f_r(-k, x)]}{[f_r(k, x); f_l(k, x)]}, \\ R(k) &= \frac{[f_l(-k, x); f_r(k, x)]}{[f_r(k, x); f_l(k, x)]}, \end{aligned}$$

Burada Wronskian $[F; G] := FG' - F'G$ olarak tanımlanır.

(Chadan ve Sabatier, 1989; Deift ve Trubowitz, 1979; Faddeev, 1967; Marchenko, 1986; Newton, 1983)'ten bilinmektedir ki, her sabit $x \in \mathbb{R}$ için, $f_l(\cdot, x)$ ve $f_r(\cdot, x)$ Jost çözümleri $\mathbb{C}^+$ üst-yarı düzleminde analitik genişlemeye sahiptir. Ayrıca, yıldız işareti kompleks eşleniği göstermek üzere

$$f_l(-k^*, x) = f_l(k, x)^*, \quad f_r(-k^*, x) = f_r(k, x)^*, \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

$$T(-k) = T(k)^*, \quad R(-k) = R(k)^*, \quad L(-k) = L(k)^*, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$R(k)T(k)^* = -L(k)^*T(k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.1.6)$$

$$|T(k)|^2 + |L(k)|^2 = 1 = |T(k)|^2 + |R(k)|^2 \quad k \in \mathbb{R},$$

eşitlikleri doğrudur. Böylece, saçılma katsayıları, reel k için mutlak değerde bir'i aşamaz. Bundan başka, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise $T(k) \neq 0$ ve dolayısıyla yansıma katsayıları

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olduğunda mutlak değerce kesinlikle birden daha küçüktür. Genel olarak R ve L yalnızca reel değerli k için tanımlanır. k 'nın büyük değerleri için

$$T(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \overline{\mathbb{C}^+} \text{ de } k \rightarrow \infty,$$

$$R(k) = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad L(k) = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \pm\infty,$$

eşitlikleri doğrudur. Her bağıl durum, $\mathbb{C}^+$ 'da bir T kutbuna karşılık gelir ve bunun tersi de geçerlidir. Bağıl durumların basit olduğu bilinmektedir, yani her $k = i\kappa_j$ de $L^2(\mathbb{R})$ 'ye ait (2.1.1)'in sadece bir lineer bağımsız çözümü vardır. Bağıl durum normalleştirici sabitleri c_{lj} ve c_{rj} ise

$$c_{lj} := \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_l(i\kappa_j, x)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad c_{rj} := \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_r(i\kappa_j, x)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

şeklinde tanımlanır ve T rezidüleri ile

$$\text{Res}(T, i\kappa_j) = ic_{lj}^2 \gamma_j = i \frac{c_{rj}^2}{\gamma_j}, \quad (2.1.7)$$

şeklinde birbirleriyle ilişkilendirilir. Burada γ_j bağımlılık sabiti olmak üzere

$$\gamma_j := \frac{f_l(i\kappa_j, x)}{f_r(i\kappa_j, x)} \quad (2.1.8)$$

şeklindedir. γ_j 'nin işareti $(-1)^{N-j}$ ifadesiyle aynıdır ve dolayısıyla

$$c_{rj} = (-1)^{N-j} \gamma_j c_{lj}$$

olur. $k = i\kappa_j$ 'de normalleştirilmiş bağıl durum çözümü $\varphi_j(x)$ ise

$$\varphi_j(x) := c_{lj}f_l(i\kappa_j, x) = (-1)^{N-j}c_{rj}f_r(i\kappa_j, x)$$

şekilde tanımlanır. (2.1.1) ile ilgili saçılma matrisi

$$S(k) := \begin{bmatrix} T(k) & R(k) \\ L(k) & T(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

şeklinde verilir ve bu matris bağıl durum enerjileri ile R ve L yansıma katsayılarından biri cinsinden oluşturulabilir. $k \in \mathbb{R}$ için $R(k)$ ve bağıl durum kutupları $k = i\kappa_j$ verildiğinde, iletim katsayısı T

$$T(k) = \left(\prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} \right) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\ln(1 - |R(s)|^2)}{s - k - i0^+} \right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+}, \quad (2.1.9)$$

şeklinde oluşturulur ve $k \in \mathbb{R}$ için (2.1.6) kullanılarak $L(k)$ oluşturulur. Benzer şekilde, $k \in \mathbb{R}$ için $L(k)$ ve $k = i\kappa_j$ bağıl durum kutupları verildiğinde, iletim katsayısı T

$$T(k) = \left(\prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} \right) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\log(1 - |L(s)|^2)}{s - k - i0^+} \right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+},$$

şeklinde oluşturulur ve $k \in \mathbb{R}$ için $R(k)$, (2.1.6) ile elde edilir.

2.2.Ters Saçılma Problemi

Hiçbir bağıl durum olmadığında, R ve L yansıma katsayılarından biri, Faddeev sınıfında karşılık gelen potansiyeli tekil bir şekilde belirler. Ancak bağıl durumlar olduğunda, V 'nin tekil tespiti için bir yansıma katsayısına ve bağıl durum enerjilerine ek olarak bir bağıl durum normalleştirici sabiti veya eşdeğer olarak her bağıl durum için bağımlılık sabiti de belirtilmelidir. Tekil bir şekilde V 'yi elde etmek için saçılma verilerimiz olarak $\{R, \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$ sol saçılma verilerini veya $\{L, \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$ sağ saçılma verilerini kullanabiliriz. Bu ikisi birbirine ve aynı zamanda her biri $\{S, \{\gamma_j\}\}$ 'ye eşittir.

Belirli bir potansiyel sınıfı için bir karakterizasyon, saçılma verileri üzerinde o sınıfta karşılık gelen tekil bir potansiyelin varlığını garanti eden bazı gerekli ve yeterli koşulların belirtilmesinden oluşur. Bu tür koşullar genellikle Faddeev-Marchenko yöntemi (Aktosun ve Klaus, 2001a; Aktosun ve Klaus, 2001b; Chadani ve Sabatier, 1989; Deift ve Trubowitz, 1979; Faddeev, 1967; Marchenko, 1986; Melin, 1985; Newton, 1983) kullanılarak elde edilir. Bu yöntem aynı zamanda Marchenko yöntemi olarak da bilinir. Bu bir yanlış adlandırma olsa da bazen literatürde Gel'fand-Levitan-Marchenko yöntemi olarak anılır (Newton, 1980). Sol saçılma verileri, sağ saçılma verileri veya her ikisinin birleşimi için karakterizasyon koşulları belirtilebilir. Reel değerli potansiyeller sınıfındaki bir karakterizasyon $L^1_2(\mathbb{R})$ aittir (Deift ve Trubowitz, 1979). Faddeev sınıfındaki çeşitli karakterizasyonlar (Aktosun ve Klaus, 2001a; Aktosun ve Klaus, 2001b; Marchenko, 1986; Melin, 1985)'de bulunabilir.

k , (2.1.1)'de k^2 olarak görüldüğünden $f_l(-k, x)$ ve $f_r(-k, x)$ fonksiyonları da (2.1.1) Schrödinger denkleminin çözümüdür. Bu çözümler $f_l(k, x)$ ile $f_r(k, x)$ Jost çözümlerinin lineer kombinasyonları olarak

$$\begin{aligned} f_l(-k, x) &= T(k)f_r(k, x) - R(k)f_l(k, x), & k \in \mathbb{R}, \\ f_r(-k, x) &= T(k)f_l(k, x) - L(k)f_r(k, x), & k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilirler veya eşdeğer olarak

$$m_l(-k, x) = T(k)m_r(k, x) - R(k)e^{2ikx}m_l(k, x), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.2.1)$$

$$m_r(-k, x) = T(k)m_l(k, x) - L(k)e^{-2ikx}m_r(k, x), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

şeklinde gösterilir. Burada m_l ve m_r fonksiyonları

$$m_l(k, x) := e^{-ikx}f_l(k, x), \quad m_r(k, x) := e^{ikx}f_r(k, x) \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanan Faddeev fonksiyonlarıdır. (2.2.1) ve (2.2.2) ifadelerinin her biri bir Riemann-Hilbert problemi olarak görülebilir (Ablowitz ve Clarkson, 1991; Newton, 1983). Riemann-Hilbert problemlerinde $k \in \mathbb{R}$ için saçılma katsayıları bilinirse, amaç m_l ve m_r ifadelerini oluşturmaktır, şöyle ki her $x \in \mathbb{R}$ için $m_l(\cdot, x)$ ve

$m_r(\cdot, x)$ fonksiyonları $\mathbb{C}^+$ 'da analitik, $\overline{\mathbb{C}^+}$ 'da sürekli ve $\overline{\mathbb{C}^+}$ 'da $k \rightarrow \infty$ için $1 + O(\frac{1}{k})$ gibi davranır. $m_l(k, x)$ veya $m_r(k, x)$ oluşturulduğunda, (2.1.1) ve (2.2.3) yardımıyla potansiyel elde edilebilir, yani

$$V(x) = \frac{m_l''(k, x)}{m_l(k, x)} + 2ik \frac{m_l'(k, x)}{m_l(k, x)}, \quad V(x) = \frac{m_r''(k, x)}{m_r(k, x)} - 2ik \frac{m_r'(k, x)}{m_r(k, x)},$$

kullanılır. Burada sağ taraflar herhangi bir belirli $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ değerinde hesaplanabilir.

Potansiyel, alternatif olarak Faddeev-Marchenko yöntemiyle oluşturulabilir, yani V , $\{R, \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$ sol saçılma verisinden sol Marchenko integral denklemini çözerek veya $\{L, \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$ sağ saçılma verisinden sağ Marchenko integral denklemini çözerek elde edilebilir.

Girdi olarak sol saçılma verileri kullanılarak sol Marchenko denklemi

$$B_l(x, y) + \Omega_l(2x + y) + \int_0^\infty dz \Omega_l(2x + y + z) B_l(x, z) = 0 \quad y > 0, \quad (2.2.4)$$

şeklinde verilir. Burada $\Omega_l(y)$

$$\Omega_l(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk R(k) e^{iky} + \sum_{j=1}^N c_{lj}^2 e^{-\kappa_j y}$$

şeklinde tanımlanır. Bir Fourier dönüşümü ile (2.2.1)'den (2.2.4) elde edilebilir. (2.2.4) çözüldüğünde ve $B_l(x, y)$ elde edildiğinde, $V(x)$ potansiyeli

$$V(x) = -2 \frac{dB_l(x, 0^+)}{dx}, \quad (2.2.5)$$

şeklinde ve Faddeev fonksiyonu ise

$$m_l(k, x) = 1 + \int_0^\infty dy B_l(x, y) e^{iky} \quad (2.2.6)$$

şeklinde elde edilir.

2.2.1 Örnek:

(2.2.4) sol Marchenko denklemi için $R(k) = 0$ ve $N = 1$ olmak üzere $B_l(x, y)$, $V(x)$ ve $f_l(k, x)$ değerlerini elde edelim.

$$\Omega_l(2x + y) = c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+y)} = \phi(x, y) \quad (2.2.7)$$

olarak alınırsa,

$$\Omega_l(2x + y + z) = c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+y+z)} = \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} \quad (2.2.8)$$

olur.

(2.2.7) ve (2.2.8) eşitlikleri (2.2.4) sol Marchenko denkleminde yazılırsa,

$$B_l(x, y) + \phi(x, y) + \int_0^\infty dz B_l(x, z) \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} = 0 \quad (2.2.9)$$

bulunur.

$$B_l(x, y) = \phi(x, y) H(x) \quad (2.2.10)$$

seçilsin. Bu durumda

$$B_l(x, z) = \phi(x, z) H(x) = c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+z)} H(x)$$

olur. (2.2.9) ifadesinde $B_l(x, y)$, $B_l(x, z)$ yerine yazılırsa,

$$\phi(x, y) H(x) + \phi(x, y) + \int_0^\infty dz \left(c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+z)} H(x) \right) \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} = 0$$

$$H(x) + 1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x} H(x) \int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = 0$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = \frac{1}{2\kappa_1}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$H(x) \left[1 + \frac{c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}{2\kappa_1} \right] = -1$$

$$H(x) = \frac{-2\kappa_1}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}$$

bulunur. $H(x)$, (2.2.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_l(x, y) = \frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}$$

olur. Bu sonuçtan yola çıkarak $V(x)$ potansiyeli, (2.2.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} V(x) &= -2 \frac{dB_l(x, 0^+)}{dx} = -2 \frac{d}{dx} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} B_l(x, y) \right] = -2 \frac{d}{dx} \left[\frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}} \right] \\ &= -2 \left[\frac{4\kappa_1^2 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x} (2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}) + 2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x} (2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x})}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x})^2} \right] \\ &= \frac{-16\kappa_1^3 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x})^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(2.2.6)'da $B_l(x, y)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_l(k, x) &= 1 + \int_0^\infty dy \frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-\kappa_1(2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}} e^{iky} \\ &= 1 - \frac{2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \end{aligned}$$

olur. $m_l(k, x)$, (2.2.3) eşitliğinde kullanılarak gerekli düzenlemeler sonucu

$$f_l(k, x) = e^{ikx} \left[1 - \frac{2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{-2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \right]$$

bulunur.

Benzer şekilde, sağ saçılma verilerini kullanarak, (2.2.2) üzerinde bir Fourier dönüşümü ile sağ Marchenko denklemi

$$B_r(x, y) + \Omega_r(-2x + y) + \int_0^\infty dz \Omega_r(-2x + y + z) B_r(x, z) = 0 \quad y > 0, \quad (2.2.11)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\Omega_r(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk L(k) e^{iky} + \sum_{j=1}^N c_{rj}^2 e^{-\kappa_j y}$$

dir. (2.2.11) çözüldüğünde ve $B_r(x, y)$ elde edildiğinde, $V(x)$ potansiyeli

$$V(x) = -2 \frac{dB_r(x, 0^+)}{dx}, \quad (2.2.12)$$

şeklinde ve Faddeev fonksiyonu ise

$$m_r(k, x) = 1 + \int_0^{\infty} dy B_r(x, y) e^{iky} \quad (2.2.13)$$

şeklinde elde edilir.

2.2.2 Örnek:

(2.2.11) sağ Marchenko denklemi için $L(k) = 0$ ve $N = 1$ olmak üzere $B_r(x, y)$, $V(x)$ ve $f_r(k, x)$ değerlerini elde edelim.

$$\Omega_r(-2x + y) = c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+y)} = \phi(x, y) \quad (2.2.14)$$

olarak alınsın

$$\Omega_r(-2x + y + z) = c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+y+z)} = \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} \quad (2.2.15)$$

olur.

(2.2.14) ve (2.2.15) eşitlikleri (2.2.11) sağ Marchenko denkleminde kullanılırsa,

$$B_r(x, y) + \phi(x, y) + \int_0^{\infty} dz B_r(x, z) \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} = 0 \quad (2.2.16)$$

bulunur.

$$B_r(x, y) = \phi(x, y) H(x) \quad (2.2.17)$$

seçilsin. Bu durumda

$$B_r(x, z) = \phi(x, z) H(x) = c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+z)} H(x)$$

olur, (2.2.16) ifadesinde $B_r(x, y)$, $B_r(x, z)$ yerine yazılırsa,

$$\phi(x, y) H(x) + \phi(x, y) + \int_0^\infty dz \left(c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+z)} H(x) \right) \phi(x, y) e^{-\kappa_1 z} = 0$$

$$H(x) + 1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x} H(x) \int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = 0$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = \frac{1}{2\kappa_1}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$H(x) \left[1 + \frac{c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}{2\kappa_1} \right] = -1$$

$$H(x) = \frac{-2\kappa_1}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}$$

bulunur. $H(x)$, (2.2.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_r(x, y) = \frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}$$

olur. Bu sonuçtan yola çıkarak $V(x)$ potansiyeli (2.2.12) ifadesinden

$$\begin{aligned} V(x) &= 2 \frac{dB_r(x, 0^+)}{dx} = 2 \frac{d}{dx} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} B_r(x, y) \right] = 2 \frac{d}{dx} \left[\frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}} \right] \\ &= 2 \left[\frac{-4\kappa_1^2 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x} (2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}) - 2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x} (-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x})}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x})^2} \right] \\ &= -\frac{16\kappa_1^3 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x})^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(2.2.13)'te $B_r(x, y)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_r(k, x) &= 1 + \int_0^\infty dy \frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-\kappa_1(-2x+y)}}{2\kappa_1 + c_1^2 e^{2\kappa_1 x}} e^{iky} \\ &= 1 - \frac{2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \end{aligned}$$

olur. $m_r(k, x)$ ifadesi (2.2.3) eşitliğinde kullanılarak gerekli düzenlemeler sonucu

$$f_r(k, x) = e^{-ikx} \left[1 - \frac{2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \right]$$

bulunur.

Faddeev sınıfındaki potansiyellere karşılık gelen saçılma verileri üzerindeki karakterizasyon koşulları sağlandığında, hem sol hem de sağ Marchenko denklemleri tekil bir şekilde çözülebilir, (2.2.5) ve (2.2.12)'nin sağ tarafları birbirine eşittir ve $L_1^1(\mathbb{R})$ 'ye aittir. Böylece V potansiyeli (2.2.5) veya (2.2.12)'den elde edilebilir. Uygun bir saçılma verisi kümesinden V 'yi elde etmek için çeşitli başka yöntemler vardır (Aktosun ve Klaus, 2001a; Chadani ve Sabatier, 1989; Kurt, 2015).

2.3. Lax Yöntemi ve Saçılma Verilerinin Evolüsyonu

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'nın KdV denklemi için başlangıç değer probleminin ters saçılma dönüşümü ile çözülebileceğini göstermelerinin ardından Peter Lax, KdV denklemi çözümlerinin zaman evolüsyonu ile ilgili bir bağdaştırılabilirlik koşulu olarak görülebileceğini göstermek için bir kriter verdi. Lax'ın kriteri, diğer çözülebilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere bir ters saçılma dönüşümü ile uygulanabilir. Lax yönteminin arkasındaki genel fikir şudur:

$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ probleminde verilen bir lineer $\mathcal{L}$ operatörü için başka bir A operatörü bulunur (A ve $\mathcal{L}$ operatörleri bir Lax çifti olarak adlandırılır). Şöyle ki

- (i) Spektral parametre λ zamanla değişmez, yani $\lambda_t = 0$ dır.
- (ii) $\psi_t - A\psi$ değeri aynı zamanda $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ probleminin çözümü olmalıdır.
- (iii) $\mathcal{L}_t + \mathcal{L}A - A\mathcal{L}$ değeri bir çarpımsal operatör olmalıdır.

$$\mathcal{L}_t + \mathcal{L}A - A\mathcal{L} = 0$$

denklemini integrallenebilir lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem olarak yorumlanır. Yukarıdaki (ii) koşulundan

$$\mathcal{L}(\psi_t - A\psi) = \lambda(\psi_t - A\psi) \quad (2.3.1)$$

olduğu görülür. $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ ve $\lambda_t = 0$ yardımıyla (2.3.1)'den

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi_t - A\psi) &= \lambda\psi_t - A(\lambda\psi) \\ &= \partial_t(\lambda\psi) - A\mathcal{L}\psi \\ &= \partial_t(\mathcal{L}\psi) - A\mathcal{L}\psi \\ &= \mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t - A\mathcal{L}\psi \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

elde edilir. (2.3.1) ve (2.3.2) ifadeleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi_t - A\psi) &= \lambda(\psi_t - A\psi) = \mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t - A\mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}(\psi_t - A\psi) &= \mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t - A\mathcal{L}\psi \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikten $\mathcal{L}\psi_t$ terimleri sadeleştirilirse

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}A\psi - A\mathcal{L}\psi = 0$$

veya

$$(\mathcal{L}_t + \mathcal{L}A - A\mathcal{L})\psi = 0$$

bulunur ve (iii) koşulundan

$$\mathcal{L}_t + \mathcal{L}A - A\mathcal{L} = 0 \quad (2.3.3)$$

elde edilir.

KdV denklemi için verilen $\mathcal{L}$ operatörüne karşılık gelen A operatörü şöyle bulunur.

$$\mathcal{L} := -\partial_x^2 + u(x, t)$$

şeklinde verilsin. Bu $\mathcal{L}$ operatörü ile ilişkili A operatörü

$$A = \alpha \partial_x^3 + \beta \partial_x^2 + \gamma \partial_x + \varepsilon$$

şeklinde aransın. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ katsayıları x ve t 'ye bağlı ancak λ 'ya bağlı olmayan bilinmeyen katsayılardır. $[\mathcal{L}, A] = \mathcal{L}A - A\mathcal{L}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, A] &= [-\partial_x^2 + u(x, t), \alpha \partial_x^3 + \beta \partial_x^2 + \gamma \partial_x + \varepsilon] \\ &= [-\partial_x^2, \alpha \partial_x^3 + \beta \partial_x^2 + \gamma \partial_x + \varepsilon] + [u(x, t), \alpha \partial_x^3 + \beta \partial_x^2 + \gamma \partial_x + \varepsilon] \\ &= [-\partial_x^2, \alpha \partial_x^3] + [-\partial_x^2, \beta \partial_x^2] + [-\partial_x^2, \gamma \partial_x] + [-\partial_x^2, \varepsilon] + [u(x, t), \alpha \partial_x^3] \\ &\quad + [u(x, t), \beta \partial_x^2] + [u(x, t), \gamma \partial_x] + [u(x, t), \varepsilon] \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikteki terimler tek tek hesaplanır. Şöyle ki,

$$[-\partial_x^2, \alpha \partial_x^3] = -\partial_x^2 \alpha \partial_x^3 + \alpha \partial_x^3 \partial_x^2 = -(\alpha'' + 2\alpha' \partial_x + \alpha \partial_x^2) \partial_x^3 + \alpha \partial_x^5 = 0$$

$$\begin{aligned} [-\partial_x^2, \beta \partial_x^2] &= -\partial_x^2 \beta \partial_x^2 + \beta \partial_x^2 \partial_x^2 = -(\beta'' + 2\beta' \partial_x + \beta \partial_x^2) \partial_x^2 + \beta \partial_x^4 \\ &= -(\beta'' + 2\beta' \partial_x) \partial_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-\partial_x^2, \gamma \partial_x] &= -\partial_x^2 \gamma \partial_x + \gamma \partial_x \partial_x^2 = -(\gamma'' + 2\gamma' \partial_x + \gamma \partial_x^2) \partial_x + \gamma \partial_x^3 \\ &= -(\gamma'' + 2\gamma' \partial_x) \partial_x \end{aligned}$$

$$[-\partial_x^2, \varepsilon] = -\partial_x^2 \varepsilon + \varepsilon \partial_x^2 = -(\varepsilon'' + 2\varepsilon' \partial_x + \varepsilon \partial_x^2) + \varepsilon \partial_x^2 = -\varepsilon'' - 2\varepsilon' \partial_x$$

$$\begin{aligned} [u(x, t), \alpha \partial_x^3] &= u \alpha \partial_x^3 - \alpha \partial_x^3 u = u \alpha \partial_x^3 - \alpha(u'''' + 3u'' \partial_x + 3u' \partial_x^2 + u \partial_x^3) \\ &= -\alpha u'''' - \alpha 3u'' \partial_x - \alpha 3u' \partial_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u(x, t), \beta \partial_x^2] &= u \beta \partial_x^2 - \beta \partial_x^2 u = u \beta \partial_x^2 - \beta(u'' + 2u' \partial_x + u \partial_x^2) \\ &= -\beta u'' - 2\beta u' \partial_x \end{aligned}$$

$$[u(x, t), \gamma \partial_x] = u \gamma \partial_x - \gamma \partial_x u = u \gamma \partial_x - \gamma(u' + u \partial_x) = -\gamma u'$$

$$[u(x, t), \varepsilon] = u \varepsilon - \varepsilon u$$

bulunur. Bu ifadeler, $[\mathcal{L}, A]$ da yerine yazılırsa

$$[\mathcal{L}, A] = (-2\alpha_x)\partial_x^4 + (-\alpha_{xx} - 2\beta_x)\partial_x^3 + (-\beta_{xx} - 2\gamma_x - 3\alpha u_x)\partial_x^2 \\ + (-\gamma_{xx} - 2\varepsilon_x - 3\alpha u_{xx} - 2\beta u_x)\partial_x + (-\varepsilon_{xx} - \beta u_{xx} - \gamma u_x - \alpha u_{xxx})\partial_x^0$$

olur. (2.3.3) eşitliğinde $\mathcal{L}_t = u_t$ ve $[\mathcal{L}, A]$ yerine yazıldığında

$$\mathcal{L}_t + \mathcal{L}A - A\mathcal{L} = (-2\alpha_x)\partial_x^4 + (-\alpha_{xx} - 2\beta_x)\partial_x^3 \\ + (-\beta_{xx} - 2\gamma_x - 3\alpha u_x)\partial_x^2 + (-\gamma_{xx} - 2\varepsilon_x - 3\alpha u_{xx} - 2\beta u_x)\partial_x \\ + (-\varepsilon_{xx} - \beta u_{xx} - \gamma u_x - \alpha u_{xxx} + u_t)\partial_x^0 = 0$$

elde edilir. $\partial_x^5, \partial_x^4, \partial_x^3, \partial_x^2, \partial_x, \partial_x^0$ katsayıları (2.3.3) eşitliği gereği sıfıra eşit olmalıdır. Böylece c_0, c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} (-2\alpha_x)\partial_x^4 &= 0 \Rightarrow \alpha = c_3 \\ (-\alpha_{xx} - 2\beta_x)\partial_x^3 &= 0 \Rightarrow \beta = c_2 \\ (-\beta_{xx} - 2\gamma_x - 3\alpha u_x)\partial_x^2 &= 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{3}{2}c_3 u - \frac{1}{2}c_1 \\ (-\gamma_{xx} - 2\varepsilon_x - 3\alpha u_{xx} - 2\beta u_x)\partial_x &= 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{3}{4}c_3 u_x - c_2 u - \frac{c_0}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Burada $c_3 = -4$ ve $c_1 = 0$ olarak seçilirse (1.2.1) KdV denklemi elde edilir. Ayrıca $c_0 = c_2 = 0$ seçilirse A operatörü

$$A = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x \quad (2.3.4)$$

bulunur.

Yukarıda belirtilen (ii) koşulu, başlangıç potansiyeli $u(x, 0)$, $u(x, t)$ 'ye evrilirken, (1.2.2) Schrödinger denkleminin herhangi bir çözümünün zaman evolüsyonunu tanımlar. Örneğin, $f_l(k, x; t)$ sol Jost çözümünün zaman evolüsyonunu bulalım. (2.1.2) ve (2.1.5) kullanılarak $T(k)$ ve $R(k)$ sırasıyla $T(k; t)$ ve $R(k; t)$ ile değiştirilirse,

$$e^{-ikx}f_l(k, x; t) = 1 + o(1), \quad e^{-ikx}f_l'(k, x; t) = ik + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.3.5)$$

$$f_r(k, x; t) = \frac{e^{-ikx}}{T(k; t)} + \frac{R(k; t)e^{ikx}}{T(k; t)} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.3.6)$$

olduğu görülür.

Lax yönteminin (ii) koşulundan ve (2.3.4)'ten

$$\begin{aligned} \partial_t f_l(k, x; t) + (4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x)f_l(k, x; t) &= p(k, t)f_l(k, x; t) \\ &+ q(k, t)f_r(k, x; t) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

elde edilir. Burada $\partial_t f_l - Af_l$ değerinin (1.2.2)'nin bir çözümü olarak kaldığı ve dolayısıyla iki lineer bağımsız $f_l(k, x; t)$ ve $f_r(k, x; t)$ Jost çözümlerinin sırasıyla $p(k, t)$ ve $q(k, t)$ katsayıları ile lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebileceği kullanıldı. Kabul edelim ki $x \rightarrow +\infty$ iken $u(x, t) = o(1)$ ve $u_x(x, t) = o(1)$ olsun. O halde her sabit t için, $p(k, t)$ ve $q(k, t)$ katsayıları $x \rightarrow +\infty$ iken (2.3.7)'de hesaplanabilir. (2.3.7)'de (2.3.5) ve (2.3.6) kullanılarak

$$\partial_t e^{ikx} + 4\partial_x^3 e^{ikx} = p(k, t)e^{ikx} + q(k, t) \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx} + \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx} \right] \quad (2.3.8)$$

elde edilir. (2.3.8)'den, her iki taraftaki e^{ikx} ve e^{-ikx} katsayıları karşılaştırılarak

$$q(k, t) = 0, \quad p(k, t) = -4ik^3 \quad (2.3.9)$$

bulunur. Böylece, $f_l(k, x; t)$ 'nin zaman evolüsyonu üçüncü mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklem tarafından

$$\partial_t f_l(k, x; t) - Af_l(k, x; t) = -4ik^3 f_l(k, x; t) \quad (2.3.10)$$

ile belirlenir. Benzer şekilde, (2.1.3), (2.1.4) ve (2.3.9) eşitlikleri yardımıyla (2.3.7)'de $x \rightarrow -\infty$ iken

$$\partial_t \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} + \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} \right] = [-4\partial_x^3 - 4ik^3] \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} + \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} \right], \quad (2.3.11)$$

elde edilir. Burada yine $x \rightarrow -\infty$ iken $u(x, t) = o(1)$ ve $u_x(x, t) = o(1)$ olduğu kullanıldı. (2.3.11)'den, her iki taraftaki e^{ikx} ve e^{-ikx} katsayıları karşılaştırılarak

$$\partial_t T(k; t) = 0, \quad \partial_t L(k; t) = -8ik^3 L(k; t)$$

ve dolayısıyla

$$T(k; t) = T(k; 0) = T(k), \quad L(k; t) = L(k; 0)e^{-8ik^3 t} = L(k)e^{-8ik^3 t} \quad (2.3.12)$$

elde edilir. Böylece, iletim katsayısı değişmeden kalır ve sol yansıma katsayısı, t ilerledikçe basit bir faz değişikliğine uğrar.

Benzer şekilde devam edilerek, $f_r(k, x; t)$ Jost çözümünün ve $R(k; t)$ sağ yansıma katsayısının zaman evolüsyonu elde edilebilir. (2.3.4)'teki A operatörü kullanılarak

$$\partial_t f_r(k, x; t) - A f_r(k, x; t) = 4ik^3 f_r(k, x; t), \quad (2.3.13)$$

$$R(k; t) = R(k; 0)e^{8ik^3 t} = R(k)e^{8ik^3 t} \quad (2.3.14)$$

bulunur.

γ_j bağımlılık sabitlerinin zaman evolüsyonunu hesaplamak için, (2.1.8)'den $f_l(k, x; t)$ yerine $\gamma_j(t)f_r(i\kappa_j, x; t)$ kullanılabilir ve $k = i\kappa_j$ de (2.3.10) hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} f_r(i\kappa_j, x; t)\partial_t \gamma_j(t) + \gamma_j(t)\partial_t f_r(i\kappa_j, x; t) - \gamma_j(t)A f_r(i\kappa_j, x; t) \\ = -4\kappa_j^3 \gamma_j(t)f_r(i\kappa_j, x; t) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Öte yandan $k = i\kappa_j$ de (2.3.13)'ten

$$\gamma_j(t)\partial_t f_r(i\kappa_j, x; t) - \gamma_j(t)A f_r(i\kappa_j, x; t) = 4\kappa_j^3 \gamma_j(t)f_r(i\kappa_j, x; t) \quad (2.3.16)$$

elde edilir. (2.3.16), (2.3.15)'den çıkarıldığında $\partial_t \gamma_j(t) = -8\kappa_j^3 \gamma_j(t)$ elde edilir.

Böylece

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(0)e^{-8\kappa_j^3 t} = \gamma_j e^{-8\kappa_j^3 t}$$

bulunur. (2.1.7) ve (2.3.12)'den, $c_{lj}(t)$ ve $c_{rj}(t)$ normalleştirici sabitlerinin zaman evolüsyonu

$$c_{lj}(t) = c_{lj}(0)e^{4\kappa_j^3 t} = c_{lj} e^{4\kappa_j^3 t}, \quad c_{rj}(t) = c_{rj}(0)e^{-4\kappa_j^3 t} = c_{rj} e^{-4\kappa_j^3 t}$$

şeklinde elde edilir.

2.4. AKNS Yöntemiyle KdV Denkleminin Oluşturulması

Bir önceki bölümde KdV denkleminin Lax yönteminde bir bağdaşabilirlik koşulu olarak ortaya çıktığı görülmüştü. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri elde etmek için başka yöntemler de vardır. Şöyle ki, ilgili bir lineer diferansiyel denklem için zamana bağlı saçılma verileriyle ters problemi çözmektir. Bu yöntemlerden biri Ablowitz, Kaup, Newel ve Segur (AKNS) tarafından geliştirilmiş ve ilk kez Sine-Gordon denkleminde uygulanmıştır (Ablowitz ve diğerleri, 1973). Bu bölümde AKNS yönteminin ardındaki temel fikir özetlenecek ve bu fikir kullanılarak KdV denklemi oluşturulacaktır.

$v_x = Xv$ sistemi verilsin. Eğer X lineer operatörü verilirse başka bir T operatörü (X ve T operatörleri AKNS çifti olarak adlandırılır) bulunabilir. Şöyle ki,

- (i) Spektral parametre λ zamanla değişmez, yani $\lambda_t = 0$ dır.
- (ii) $v_t - Tv$ değeri aynı zamanda $v_x = Xv$ denkleminin bir çözümü olmalıdır.
- (iii) $X_t - T_x + XT - TX$ değeri çarpımsal (matris) operatörü olmalıdır.

Genel olarak X 'in λ spektral parametresini içerdiği ve dolayısıyla T 'nin de λ 'ya bağlı olduğu görülür. X ve T genellikle x, t ve λ bileşenlerine bağlı matrislerdir. Lax yönteminde, A operatörü $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ denkleminin çözümlerinin zaman evolüsyonunu belirlediği gibi, AKNS yönteminde de T operatörü, yukarıda listelenen (ii) koşuluna göre $v_x = Xv$ denkleminin çözümlerinin zaman evolüsyonunu belirler.

Bağdaşabilirlik için,

$$X_t - T_x + XT - TX = 0 \quad (2.4.1)$$

denkleminin integrallenebilir bir kısmi türevli diferansiyel denklem olması gerekir. (ii) koşulundan

$$(v_t - Tv)_x = X(v_t - Tv)$$

veya

$$\begin{aligned} v_{tx} - T_x v - Tv_x &= Xv_t - XTv \\ &= (Xv)_t - X_t v - XTv \\ &= (v_x)_t - X_t v - XTv \\ &= v_{xt} - X_t v - XTv \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

olur. v fonksiyonunun birinci türevleri v_x, v_t ve ikinci türevleri v_{xt}, v_{tx} fonksiyonları sürekli olduğundan $v_{xt} = v_{tx}$ olur. $v_{xt} = v_{tx}$ ve $Tv_x = TXv$ eşitlikleri (2.4.2)'de kullanırsa

$$v_{tx} - T_x v - TXv = v_{xt} - X_t v - XTv$$

olur. Böylece

$$(X_t - T_x + XT - TX)v = 0$$

elde edilir. O halde (iii) koşulunun bir sonucu olarak (2.4.1) bağdaşabilirlik koşulu elde edilir.

$$v = \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & u(x, t) - \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

şeklinde seçilerek ve k^2 spektral parametresi λ ile değiştirilerek, (1.2.2) Schrödinger denklemi $v_x = Xv$ birinci mertebeden lineer denklem sistemi formunda yazılsın. T ve X operatörü bir AKNS çifti oluşturacak şekilde T operatörü

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

şeklinde seçilsin. Burada T operatörünün α, β, ρ ve σ matris bileşenleri x, t ve λ 'ya bağlı olabilir. (2.4.1)'deki X_t, T_x, XT ve TX ifadelerini hesaplayalım. (2.4.3) ve (2.4.4)'den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} X_t &= \begin{bmatrix} 0 & u_t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_x = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \rho_x & \sigma_x \end{bmatrix} \\ XT &= \begin{bmatrix} 0 & u - \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(u - \lambda) & \sigma(u - \lambda) \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \\ TX &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u(x, t) - \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha(u - \lambda) \\ \sigma & \rho(u - \lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (2.4.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \rho_x & \sigma_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho(u - \lambda) & \sigma(u - \lambda) \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & \alpha(u - \lambda) \\ \sigma & \rho(u - \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

veya eşdeğer olarak

$$\begin{bmatrix} \rho(u - \lambda) - \alpha_x - \beta & \sigma(u - \lambda) - \beta_x - \alpha(u - \lambda) + u_t \\ \alpha - \rho_x - \sigma & \beta - \sigma_x - \rho(u - \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

bulunur. (2.4.5) eşitliğinin sol tarafındaki matris Y olsun. i . satırı ile j . sütunu içinde yer alan matris bileşeni $[Y]_{ij}$ olarak gösterilsin. Bu durumda (2.4.5) matris denklem sisteminden

$$[Y]_{11} = -\alpha_x + \rho(u - \lambda) - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha_x + \rho(u - \lambda) \quad (2.4.6)$$

$$[Y]_{12} = u_t - \beta_x + \sigma(u - \lambda) - \alpha(u - \lambda) = 0 \Rightarrow u_t = \beta_x - \sigma(u - \lambda) + \alpha(u - \lambda) \quad (2.4.7)$$

$$[Y]_{21} = -\rho_x + \alpha - \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -\rho_x + \alpha \quad (2.4.8)$$

$$[Y]_{22} = -\sigma_x + \beta - \rho(u - \lambda) = 0 \Rightarrow \sigma_x = \beta - \rho(u - \lambda) \quad (2.4.9)$$

eşitlikleri elde edilir. T matris operatörünün bileşenlerini bulmak için (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8) ve (2.4.9) eşitliklerinden yararlanarak α, β, ρ ve σ ifadeleri birbiri türünden yazılarak bilinmeyen sayısı en aza indirmek amaçlanır. Şöyle ki (2.4.6) den

$$\beta_x = -\alpha_{xx} + \rho_x u - \rho_x \lambda + \rho u_x$$

olup β_x ve $\sigma = -\rho_x + \alpha$ değerleri (2.4.7) denkleminde yazılsın,

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha_{xx} + \rho_x u - \rho_x \lambda + \rho u_x - (-\rho_x + \alpha)(u - \lambda) + \alpha(u - \lambda) \\ u_t &= -\alpha_{xx} + 2\rho_x(u - \lambda) + \rho u_x \\ 0 &= u_t + \alpha_{xx} - 2\rho_x(u - \lambda) - \rho u_x \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

bulunur. (2.4.6), (2.4.8) ve (2.4.9) eşitliklerinden yararlanarak

$$\alpha_x = -\sigma_x \text{ ve } \sigma = -\rho_x + \alpha \Rightarrow \rho_{xx} = -2\sigma_x \Rightarrow \rho_{xxx} = -2\sigma_{xx}$$

$$\alpha_{xx} = -\sigma_{xx} \text{ ve } \rho_{xxx} = -2\sigma_{xx} \Rightarrow \alpha_{xx} = \frac{1}{2}\rho_{xxx}$$

elde edilir. Bu ifadeler (2.4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_t + \frac{1}{2}\rho_{xxx} - 2\rho_x(u - \lambda) - \rho u_x = 0 \quad (2.4.11)$$

olur. ρ parametresi $\rho = \lambda a + b$ şeklinde seçilip x e göre üçüncü mertebeye kadar türevleri (2.4.11) denkleminde yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} \rho_x &= \lambda a_x + b_x \Rightarrow \rho_{xx} = \lambda a_{xx} + b_{xx} \Rightarrow \rho_{xxx} = \lambda a_{xxx} + b_{xxx}, \\ u_t + \frac{1}{2}(\lambda a_{xxx} + b_{xxx}) - 2(\lambda a_x + b_x)(u - \lambda) - (\lambda a + b)u_x &= 0 \Rightarrow \\ \lambda^2(2ax) + \lambda\left(\frac{1}{2}a_{xxx} - 2a_x u + 2b_x - u_x a\right) + \lambda^0\left(u_t + \frac{1}{2}b_{xxx} - 2b_x u - u_x b\right) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. λ 'nın aynı kuvvetli terimlerinin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned} \lambda^2(2ax) &= 0 \Rightarrow 2ax = 0 \Rightarrow a = c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ \lambda\left(\frac{1}{2}a_{xxx} - 2a_x u + 2b_x - u_x a\right) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a_{xxx} - 2a_x u + 2b_x - u_x a = 0 \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{2}c_1 u + c_2 \quad (c_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Bulunan b değeri ve

$$b_x = \frac{1}{2}c_1 u_x, \quad b_{xx} = \frac{1}{2}c_1 u_{xx}, \quad b_{xxx} = \frac{1}{2}c_1 u_{xxx},$$

türevleri $\lambda^0\left(u_t + \frac{1}{2}b_{xxx} - 2b_x u - u_x b\right) = 0$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\lambda^0\left(u_t + \frac{1}{4}c_1 u_{xxx} - c_1 u_x u - u_x\left(\frac{1}{2}c_1 u + c_2\right)\right) = 0$$

veya

$$\left(u_t - \frac{3}{2}c_1 u u_x + \frac{1}{4}c_1 u_{xxx} - c_2 u_x\right) = 0 \quad (2.4.12)$$

elde edilir. (2.4.12) denkleminde özel olarak $c_1 = 4$, $c_2 = 0$ seçilmesi halinde (1.2.1) KdV denklemi elde edilmiş olur. Ayrıca

$$a = c_1 \Rightarrow a = 4 \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{2}c_1u + c_2 \Rightarrow b = 2u$$

olmak üzere ρ parametresi

$$\rho = 4\lambda + 2u$$

olarak elde edilir.

$\alpha_x = -\sigma_x$ eşitliğinin x 'e göre integrali alınırsa c_3 keyfi sabit olmak üzere $\sigma = -\alpha + c_3$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (2.4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$-\alpha + c_3 = -\rho_x + \alpha \Rightarrow \alpha = c_3 + u_x$$

olur. α ve ρ , (2.4.6) eşitliğinde yazılarak

$$\beta = -u_{xx} - 4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2$$

sonucu elde edilir. Son olarak (2.4.8) eşitliğinde α , ρ kullanılarak

$$\sigma = c_3 - u_x$$

olur. $c_3 = 0$ alınırsa, T operatörü

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & -u_{xx} - 4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 \\ 4\lambda + 2u & -u_x \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

şeklinde bulunur.

AKNS yöntemi yardımıyla Jost çözümlerinin ve saçılma verilerinin zaman evolüsyonunu elde etmek mümkündür. Bazı skaler $p(t, \lambda)$ katsayıları için AKNS yönteminin (ii) koşulu

$$v_t - T v = p(t, \lambda)v, \quad (2.4.14)$$

ifadesine eşdeğerdir. Örneğin, (2.1.2) kullanılarak ve (2.4.14) denkleminde $x \rightarrow +\infty$ alınarak

$$v = \begin{bmatrix} f_l'(k, x; t) \\ f_l(k, x; t) \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilirse, (2.3.10)'da verilen $f_l(k, x; t)$ 'nin zaman evolüsyonu elde edilir. (2.4.14) denkleminde $x \rightarrow -\infty$ alınarak ve (2.1.4)'te $T(x)$ yerine $T(k; t)$, $L(k)$ yerine $L(k; t)$ kullanılarak ve (2.1.2) yardımıyla (2.3.12)'de verilen zaman evolüsyonu elde edilir. Benzer şekilde, (2.4.14) denkleminde $x \rightarrow \pm\infty$ alınarak ve

$$v = \begin{bmatrix} f_r'(k, x; t) \\ f_r(k, x; t) \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilerek, (2.1.3), (2.3.6) ve (2.4.13) yardımıyla (2.3.13) ve (2.3.14) elde edilir.

2.5. KdV için Cauchy Probleminin Çözümü

KdV denklemi için Cauchy problemi (başlangıç değer problemi), $u(x, 0)$ bilindiği zaman $u(x, t)$ 'nin bulunmasından ibarettir. Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından gösterildiği gibi, bu problem ters saçılma dönüşümü kullanılarak çözülebilir (Gardner ve diğerleri, 1967). $D(t)$, zamana bağlı $u(x, t)$ potansiyelini içeren Schrödinger denklemi için saçılma verileri kümesinden herhangi birini gösterebilir. Başka bir deyişle,

$$\begin{aligned} D(t) &:= \{R(k; t), L(k; t), T(k; t), \{\kappa_j(t)\}, \{\gamma_j(t)\}, \{c_{lj}(t)\}, \{c_{rj}(t)\}\} \\ &= \{R(k)e^{8ik^3t}, L(k)e^{-8ik^3t}, T(k), \{\kappa_j\}, \{\gamma_j e^{-8\kappa_j^3t}\}, \{c_{lj} e^{4\kappa_j^3t}\}, \{c_{rj} e^{-4\kappa_j^3t}\}\} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

şeklindedir.

Eğer $u(x, 0) = V(x)$ ise $D(0)$, $V(x)$ potansiyeli ile ilgili başlangıç saçılma verilerine karşılık gelir.

Aşağıda KdV denklemi için Cauchy probleminin çözümü özetlenmektedir.

(i) $u(x, 0)$ verildiğinde, karşılık gelen $D(0)$ saçılma verileri tanımlanır. Bu, düz saçılma problemi $V(x) \mapsto D(0)$ çözülerek yapılır. Bu problemin çözümü esasen (2.1.1) denklemini çözmeye ve $D(0)$ 'ın oluşturulabileceği $f_l(k, x)$ ve $f_r(k, x)$ Jost çözümlerini elde etmeye eşdeğerdir.

(ii) (2.5.1) saçılma verileri kümesine göre $D(0) \mapsto D(t)$ olur. Saçılma verilerinin zaman evolüsyonunu bulmak kolaydır. Öte yandan, $u(x, 0) \mapsto u(x, t)$ potansiyelinin zaman evolüsyonunu bulmak çok daha karmaşık olacaktır. Benzer şekilde, (2.3.10)'daki denklemden $f_l(k, x) \mapsto f_l(k, x; t)$ ve (2.3.13)'teki denklemden $f_r(k, x) \mapsto f_r(k, x; t)$ Jost çözümlerinin zaman evolüsyonunu bulmak karmaşık olacaktır.

(iii) Zamana bağlı $D(t)$ saçılma verilerini elde ettikten sonra, (1.2.2) için karşılık gelen $D(t) \mapsto u(x, t)$ ters saçılma problemi çözülür. Başlangıç potansiyeli V , Faddeev sınıfına ait olduğunda bu problemin tekil bir şekilde çözülebilir olduğu bilinmektedir (Marchenko, 1986).

2.2. Ters Saçılma Problemi başlıklı bölümde belirtildiği gibi, yukarıdaki (iii) adımı, örneğin zamana bağlı

$$m_l(-k, x; t) = T(k)m_r(k, x; t) - R(k)e^{2ikx+8ik^3t}m_l(k, x; t), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.5.2)$$

Riemann-Hilbert problemini çözerek ters saçılma probleminin çözümü elde edilebilir.

$$u(x, t) = \frac{m_l''(k, x; t)}{m_l(k, x; t)} + 2ik \frac{m_l'(k, x; t)}{m_l(k, x; t)}, \quad k \in \mathbb{C}^+ \quad (2.5.3)$$

eşitliği kullanılarak $u(x, t)$ elde edilir. Burada sağ taraf, $k = 0$ ve $k = \pm\infty$ dahil olmak üzere herhangi bir k değerinde hesaplanabilir. Benzer şekilde, zamana bağlı

$$m_r(-k, x; t) = T(k)m_l(k, x; t) - L(k)e^{-2ikx-8ik^3t}m_r(k, x; t), \quad k \in \mathbb{R},$$

Riemann-Hilbert problemini çözerek ters saçılma probleminin çözümü elde edilebilir.

$$u(x, t) = \frac{m_r''(k, x; t)}{m_r(k, x; t)} - 2ik \frac{m_r'(k, x; t)}{m_r(k, x; t)}, \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+},$$

eşitliği kullanılarak $u(x, t)$ elde edilir. Burada sağ taraf, $\overline{\mathbb{C}^+}$ 'da herhangi bir k değerinde hesaplanabilir.

Alternatif olarak,

$$\Omega_l(y; t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk R(k) e^{8ik^3 t + ik y} + \sum_{j=1}^N c_{lj}^2 e^{8\kappa_j^3 t - \kappa_j y},$$

olmak üzere zamana bağlı,

$$B_l(x, y; t) + \Omega_l(2x + y; t) + \int_0^{\infty} dz \Omega_l(2x + y + z; t) B_l(x, z; t) = 0, \quad y > 0, \quad (2.5.4)$$

sol Marchenko denklemi çözülebilir. $u(x, t)$ potansiyeli

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial B_l(x, 0^+; t)}{\partial x} \quad (2.5.5)$$

ile elde edilir.

2.5.1 Örnek:

(2.5.4) zamana bağlı sol Marchenko denklemi için $R(k) = 0$ ve $N = 1$ olmak üzere $B_l(x, y; t)$, $u(x, t)$ ve $f_l(k, x; t)$ değerlerini elde edelim.

$$\Omega_l(2x + y; t) = c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+y)} = \phi(x, y; t) \quad (2.5.6)$$

olarak alınırsa

$$\Omega_l(2x + y + z) = c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+y+z)} = \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} \quad (2.5.7)$$

olur

(2.5.6) ve (2.5.7) eşitlikleri (2.5.4) zamana bağlı sol Marchenko denkleminde kullanılırsa

$$B_l(x, y; t) + \phi(x, y; t) + \int_0^\infty dz B_l(x, z; t) \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} = 0 \quad (2.5.8)$$

bulunur.

$$B_l(x, y; t) = \phi(x, y; t) H(x; t) \quad (2.5.9)$$

seçilsin. Bu durumda

$$B_l(x, z; t) = \phi(x, z; t) H(x; t) = c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+z)} H(x; t)$$

olur, (2.5.8) ifadesinde $B_l(x, y)$, $B_l(x, z)$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \phi(x, y; t) H(x; t) + \phi(x, y; t) \\ & + \int_0^\infty dz \left(c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+z)} H(x; t) \right) \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} = 0 \end{aligned}$$

$$H(x; t) + 1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x} H(x; t) \int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = 0$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = \frac{1}{2\kappa_1}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$H(x; t) \left[1 + \frac{c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x}}{2\kappa_1} \right] = -1$$

$$H(x; t) = \frac{-2\kappa_1}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x}}$$

bulunur. $H(x; t)$, (2.5.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_l(x, y; t) = \frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x}}$$

olur. Bu sonuçtan yola çıkarak $u(x, t)$ potansiyeli, (2.5.5) ifadesinden

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -2 \frac{\partial B_1(x, 0^+; t)}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x)}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x}} \right] \\
&= \frac{-16\kappa_1^3 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x)}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x})^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.2.6)'da zamana bağılı $B_l(x, y; t)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
m_l(k, x; t) &= 1 + \int_0^\infty dy \frac{-2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1(2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x}} e^{iky} \\
&= 1 - \frac{2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - 2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x})(\kappa_1 - ik)}
\end{aligned}$$

olur. $m_l(k, x; t)$, (2.2.3) eşitliğinde kullanılarak gerekli düzenlemeler sonucu

$$f_l(k, x; t) = e^{ikx} \left[1 - \frac{2\kappa_1 c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - 2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{l1}^2 e^{8\kappa_1^3 t - \kappa_1 2x})(\kappa_1 - ik)} \right]$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\Omega_r(y; t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk L(k) e^{-8ik^3 t + ik y} + \sum_{j=1}^N c_{rj}^2 e^{-8\kappa_j^3 t - \kappa_j y},$$

olmak üzere zamana bağılı

$$B_r(x, y; t) + \Omega_r(-2x + y; t) + \int_0^\infty dz \Omega_r(-2x + y + z; t) B_r(x, z; t) = 0 \quad y > 0 \quad (2.5.10)$$

sağ Marchenko denklemi çözülebilir. $u(x, t)$ potansiyeli

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial B_r(x, 0^+; t)}{\partial x} \quad (2.5.11)$$

ile elde edilir.

2.5.2 Örnek:

(2.5.10) zamana bağlı sağ Marchenko denklemi için $L(k) = 0$ ve $N = 1$ olmak üzere $B_r(x, y; t)$, $u(x, t)$ ve $f_r(k, x; t)$ değerlerini elde edelim.

$$\Omega_r(-2x + y; t) = c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+y)} = \phi(x, y; t) \quad (2.5.12)$$

olarak alınırsa

$$\Omega_r(-2x + y + z; t) = c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+y+z)} = \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} \quad (2.5.13)$$

olur.

(2.5.12) ve (2.5.13) eşitlikleri (2.5.10) sağ Marchenko denkleminde kullanılırsa,

$$B_r(x, y; t) + \phi(x, y; t) + \int_0^\infty dz B_r(x, z; t) \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} = 0 \quad (2.5.14)$$

elde edilir.

$$B_r(x, y; t) = \phi(x, y; t) H(x; t) \quad (2.5.15)$$

seçilsin. Bu durumda

$$B_r(x, z; t) = \phi(x, z; t) H(x; t) = c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+z)} H(x; t)$$

olur, (2.5.14) ifadesinde $B_r(x, y; t)$, $B_r(x, z; t)$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \phi(x, y; t) H(x; t) + \phi(x, y; t) \\ & + \int_0^\infty dz \left(c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+z)} H(x; t) \right) \phi(x, y; t) e^{-\kappa_1 z} = 0 \\ & H(x; t) + 1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x} H(x; t) \int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty dz e^{-2\kappa_1 z} = \frac{1}{2\kappa_1}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$H(x; t) \left[1 + \frac{c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}{2\kappa_1} \right] = -1$$

$$H(x; t) = \frac{-2\kappa_1}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}$$

bulunur. $H(x; t)$, (2.5.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_r(x, y; t) = \frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}$$

olur. Bu sonuçtan yola çıkarak $u(x, t)$ potansiyeli (2.5.11) ifadesinden

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \frac{\partial B_r(x, 0^+; t)}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} B_r(x, y; t) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}} \right] \\ &= \frac{-8\kappa_1^2 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x} (2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})^2} \\ &\quad + \frac{-4\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x} (-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})^2} \\ &= -\frac{16\kappa_1^3 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(2.2.13)'te $B_r(x, y; t)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_r(k, x; t) &= 1 + \int_0^\infty dy \frac{-2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t - \kappa_1(-2x+y)}}{2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}} e^{iky} \\ &= 1 - \frac{2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \end{aligned}$$

olur. $m_r(k, x; t)$ ifadesi (2.2.3) eşitliğinde kullanılarak gerekli düzenlemeler sonucu

$$f_r(k, x; t) = e^{-ikx} \left[1 - \frac{2\kappa_1 c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x}}{(2\kappa_1 + c_{r1}^2 e^{-8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x})(\kappa_1 - ik)} \right]$$

bulunur.

2.6. KdV için Soliton Çözümler

Başlangıç saçılma verisine karşılık gelen KdV denklemi için Cauchy problemini dikkate alalım. Buradaki saçılma verisinde, yansıma katsayısı sıfır, N bağlı durumlar $k = i\kappa_j$, bağımlılık sabiti γ_j , $0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_N$ sıralaması şeklindedir. Eğer $R \equiv 0$ ise (2.1.9)'dan görüleceği üzere iletim katsayısı,

$$T(k) = \prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} \quad (2.6.1)$$

şeklinde verilir. Bu durumda ters saçılma problemi $D(t) \mapsto u(x, t)$ cebirsel olarak kapalı bir formda çözülebilir, elde edilen KdV denkleminin $u(x, t)$ çözümü, genel olarak N soliton çözüm olarak adlandırılır. (2.6.1)'i kullanarak (2.5.2) ifadesi

$$m_l(-k, x; t) \prod_{j=1}^N (k - i\kappa_j) = m_r(k, x; t) \prod_{j=1}^N (k + i\kappa_j), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.6.2)$$

şeklinde yazılabilir. k , Faddeev fonksiyonlarında ik olarak görüldüğünden (2.6.2)'deki eşitliğin her iki tarafı da

$$k^N + ik^{N-1}a_{N-1}(x, t) + \dots + i^N a_0(x, t), \quad (2.6.3)$$

şeklinde bir polinom olmalıdır. Burada $a_j(x, t)$ reel değerlidir ve

$$\gamma_j e^{2\kappa_j x - 8\kappa_j^3 t} = \frac{m_l(i\kappa_j, x; t)}{m_r(i\kappa_j, x; t)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.6.4)$$

ile tanımlanır. (2.6.2) ve (2.6.3)'ten

$$m_l(k, x; t) = \frac{k^N - ik^{N-1}a_{N-1}(x, t) + \dots + (-i)^N a_0(x, t)}{\prod_{j=1}^N (k + i\kappa_j)}, \quad (2.6.5)$$

$$m_r(k, x; t) = \frac{k^N + ik^{N-1}a_{N-1}(x, t) + \dots + i^N a_0(x, t)}{\prod_{j=1}^N (k + i\kappa_j)} \quad (2.6.6)$$

elde edilir. ω_j 'nin işareti $(-1)^{N-j}$ ile aynı olmak üzere

$$\omega_j := \gamma_j e^{2\kappa_j x - 8\kappa_j^3 t} \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.6.7)$$

şeklinde tanımlanır. (2.6.5), (2.6.6) ve (2.6.7) ifadeleri (2.6.4)'te yerine yazılırsa, N bilinmeyen $a_j(x, t)$ için lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Şöyle ki

$$\omega_j = \frac{\kappa_j^N - \kappa_j^{N-1}a_{N-1}(x, t) + \dots + (-1)^N a_0(x, t)}{\kappa_j^N + \kappa_j^{N-1}a_{N-1}(x, t) + \dots + a_0(x, t)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.6.8)$$

dir. Burada ω_j

$$\begin{bmatrix} \kappa_1^{N-1}(\omega_1 + 1) & \kappa_1^{N-2}(\omega_1 - 1) & \dots & \omega_1 - (-1)^N \\ \kappa_2^{N-1}(\omega_2 + 1) & \kappa_2^{N-2}(\omega_2 - 1) & \dots & \omega_2 - (-1)^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_N^{N-1}(\omega_N + 1) & \kappa_N^{N-2}(\omega_N - 1) & \dots & \omega_N - (-1)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N-1}(x, t) \\ a_{N-2}(x, t) \\ \vdots \\ a_0(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1^N(1 - \omega_1) \\ \kappa_2^N(1 - \omega_2) \\ \vdots \\ \kappa_N^N(1 - \omega_N) \end{bmatrix} \quad (2.6.9)$$

şeklinde yazılabilir. (j, n) bileşeni

$$M_{jn}^{(N)} := \kappa_j^{N-1} [\omega_j - (-1)^n], \quad j, n = 1, \dots, N \quad (2.6.10)$$

şeklinde verilen (2.6.9)'daki $M^{(N)}$ katsayılar matrisini tanımlasın. (2.6.9)'dan Cramer kuralı yardımı ile $a_{N-j}(x, t)$ matris bileşenleri

$$a_{N-j}(x, t) = -\frac{\det P^{(N-j)}}{\det M^{(N)}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.6.11)$$

şeklinde açıkça yazılabilir. Burada $Q^{(N)}$, $j = 1, \dots, N$ için j 'ninci satırı $\kappa_j^N(1 - \omega_j)$ bileşenini içeren $N \times 1$ matris, $M^{(N)}$, (2.6.10)'da verilen $N \times N$ kare matris ve $Y^{(N,j)}$, j 'ninci sütunu 1 ancak diğer tüm bileşenleri sıfır olan $1 \times N$ matris olmak üzere $P^{(N-j)}$,

$$P^{(N-j)} := \begin{bmatrix} 0 & Y^{(N,j)} \\ Q^{(N)} & M^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (2.6.12)$$

şeklinde verilen $(N + 1) \times (N + 1)$ kare matrisdir. Örneğin

$$P^{(N-1)} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1^N(1 - \omega_1) & \kappa_1^{N-1}(\omega_1 + 1) & \kappa_1^{N-2}(\omega_1 - 1) & \dots & \omega_1 - (-1)^N \\ \kappa_2^N(1 - \omega_2) & \kappa_2^{N-1}(\omega_2 + 1) & \kappa_2^{N-2}(\omega_2 - 1) & \dots & \omega_2 - (-1)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_N^N(1 - \omega_N) & \kappa_N^{N-1}(\omega_N + 1) & \kappa_N^{N-2}(\omega_N - 1) & \dots & \omega_N - (-1)^N \end{bmatrix}$$

dir. $u(x, t)$, yalnızca $a_{N-1}(x, t)$ 'den veya yalnızca $a_0(x, t)$ 'den oluşturulabilir. Örneğin, $k \rightarrow \pm\infty$ iken (2.5.3) ve (2.6.5)'ten

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial a_{N-1}(x, t)}{\partial x} \quad (2.6.13)$$

veya (2.5.3) ve (2.6.5) ifadelerinde $k = 0$ alınarak

$$u(x, t) = \frac{1}{a_0(x, t)} \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.6.14)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.5.3)'te (2.6.5) ifadesi yazılarak aşağıdaki $(N + 1)$ denklemden herhangi biri kullanılarak $u(x, t)$ potansiyelinin

$$u(x, t) = \frac{1}{a_{N-j}(x, t)} \left[\frac{\partial^2 a_{N-j}(x, t)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial a_{N-j-1}(x, t)}{\partial x} \right], \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

şeklinde elde edilebileceği görülür. Burada $a_{-1}(x, t) := 0$ ve $a_N(x, t) := 1$ olarak tanımlanmıştır.

2.6.1 Örnek:

KdV denkleminin tek soliton çözümünü araştıralım. Bu durumda $N = 1$ için $j = 1$ olur. (2.6.7) denkleminde

$$\omega_1 := \gamma_1 e^{2\kappa_1 x - 8\kappa_1^3 t}$$

olsun. O halde (2.6.8) eşitliğinden

$$\omega_1 = \frac{\kappa_1 - a_0(x, t)}{\kappa_1 + a_0(x, t)}$$

veya

$$a_0(x, t) = \frac{\kappa_1(1 - \gamma_1 e^{2\kappa_1 x - 8\kappa_1^3 t})}{\gamma_1 e^{2\kappa_1 x - 8\kappa_1^3 t} + 1}$$

bulunur. (2.6.13) denkleminde bulunan $a_0(x, t)$ değeri yerine yazılırsa

$$u(x, t) = -\frac{8e^{(8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x)} \kappa_1^2 \gamma_1}{(e^{8\kappa_1^3 t} + e^{2\kappa_1 x} \gamma_1)^2}$$

elde edilir.

2.6.2 Örnek:

KdV denkleminin iki soliton çözümünü araştıralım. Bu durumda $N = 2$ için sırasıyla $j = 1$ ve $j = 2$ durumlarını ele alalım. Önce $N = 2$ için (2.6.10)'dan

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} \kappa_1(\omega_1 + 1) & (\omega_1 - 1) \\ \kappa_2(\omega_2 + 1) & (\omega_2 - 1) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$N = 2$ için $j = 1$ incelenirse, (2.6.7) denkleminde

$$\omega_1 := \gamma_1 e^{2\kappa_1 x - 8\kappa_1^3 t}$$

olsun. O halde (2.6.8) eşitliğinden

$$\omega_1 = \frac{\kappa_1^2 - \kappa_1 a_1(x, t) + a_0(x, t)}{\kappa_1^2 + \kappa_1 a_1(x, t) + a_0(x, t)}$$

bulunur. Ayrıca (2.6.12)'den

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \kappa_1^2(1 - \omega_1) & \kappa_1(\omega_1 + 1) & (\omega_1 - 1) \\ \kappa_2^2(1 - \omega_2) & \kappa_2(\omega_2 + 1) & (\omega_2 - 1) \end{bmatrix}$$

olur.

(2.6.11)'dan

$$a_1(x, t) = -\frac{\det P^{(1)}}{\det M^{(2)}}$$

olmak üzere

$$a_1(x, t) = -\frac{\kappa_2^2(\omega_1 - 1)(1 - \omega_2) - \kappa_1^2(1 - \omega_1)(\omega_2 - 1)}{-\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1\omega_1 - \kappa_2\omega_1 + \kappa_1\omega_2 + \kappa_2\omega_2 + \kappa_1\omega_1\omega_2 - \kappa_2\omega_1\omega_2}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} d_1 &= (\kappa_2^2 - \kappa_1^2)(e^{8\kappa_1^3 t} - \gamma_1 e^{2\kappa_1 x})(e^{8\kappa_2^3 t} - \gamma_2 e^{2\kappa_2 x}) \\ d_2 &= (e^{8(\kappa_1^3 + \kappa_2^3)t} - \gamma_1 \gamma_2 e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)x})(\kappa_2 - \kappa_1) \\ d_3 &= -(\kappa_1 + \kappa_2)(\gamma_1 e^{2\kappa_1 x + 8\kappa_2^3 t} + \gamma_2 e^{2\kappa_2 x + 8\kappa_1^3 t}) \\ a_1(x, t) &= \frac{d_1}{d_2 + d_3} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$N = 2$ için $j = 2$ incelenirse, (2.6.7) denkleminde

$$\omega_2 := \gamma_2 e^{2\kappa_2 x - 8\kappa_2^3 t}$$

olsun. (2.6.8) eşitliğinden

$$\omega_2 = \frac{\kappa_2^2 - \kappa_2 a_1(x, t) + a_0(x, t)}{\kappa_2^2 + \kappa_2 a_1(x, t) + a_0(x, t)}$$

elde edilir. Ayrıca (2.6.12)'den

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \kappa_1^2(1 - \omega_1) & \kappa_1(\omega_1 + 1) & (\omega_1 - 1) \\ \kappa_2^2(1 - \omega_2) & \kappa_2(\omega_2 + 1) & (\omega_2 - 1) \end{bmatrix}$$

olur.

(2.6.11)'den

$$a_0(x, t) = -\frac{\det P^{(0)}}{\det M^{(2)}}$$

olmak üzere

$$a_0(x, t) = -\frac{-\kappa_1 \kappa_2^2 (1 + \omega_1)(1 - \omega_2) + \kappa_1^2 \kappa_2 (1 - \omega_1)(1 + \omega_2)}{-\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \omega_1 - \kappa_2 \omega_1 + \kappa_1 \omega_2 + \kappa_2 \omega_2 + \kappa_1 \omega_1 \omega_2 - \kappa_2 \omega_1 \omega_2}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} d_4 &= \kappa_1 \kappa_2 (e^{8(\kappa_1^3 + \kappa_2^3)t} (\kappa_1 - \kappa_2) - e^{8\kappa_2^3 t + 2\kappa_1 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_1) \\ d_5 &= \kappa_1 \kappa_2 (e^{8\kappa_1^3 t + 2\kappa_2 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_2 - e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)x} (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_1 \gamma_2) \\ d_6 &= e^{8(\kappa_1^3 + \kappa_2^3)t} (\kappa_1 - \kappa_2) + e^{8\kappa_2^3 t + 2\kappa_1 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_1 \\ d_7 &= -e^{8\kappa_1^3 t + 2\kappa_2 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_2 - e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)x} (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_1 \gamma_2 \\ a_0(x, t) &= \frac{d_4 + d_5}{d_6 + d_7} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak $N = 2$ için $u(x, t)$, (2.6.13) denkleminde bulunan $a_1(x, t)$ değeri yerine yazılarak veya (2.6.14) denkleminde bulunan $a_0(x, t)$ değeri yerine yazılarak

$$\begin{aligned} d_8 &= 8(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(-e^{(8\kappa_1^3 t + 16\kappa_2^3 t + 2\kappa_1 x)} \kappa_1^2 \gamma_1 + e^{(16\kappa_1^3 t + 8\kappa_2^3 t + 2\kappa_2 x)} \kappa_2^2 \gamma_2) \\ d_9 &= 8(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(2e^{(8\kappa_1^3 t + 8\kappa_2^3 t + 2\kappa_1 x + 2\kappa_2 x)} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \gamma_1 \gamma_2) \\ d_{10} &= 8(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(e^{(8\kappa_2^3 t + 4\kappa_1 x + 2\kappa_2 x)} \kappa_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2 - e^{(8\kappa_1^3 t + 2\kappa_1 x + 4\kappa_2 x)} \kappa_1^2 \gamma_2^2 \gamma_1) \\ d_{11} &= e^{8(\kappa_1^3 + \kappa_2^3)t} (\kappa_1 - \kappa_2) + e^{8\kappa_2^3 t + 2\kappa_1 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_1 \\ d_{12} &= -e^{8\kappa_1^3 t + 2\kappa_2 x} (\kappa_1 + \kappa_2) \gamma_2 - e^{2(\kappa_1 + \kappa_2)x} (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{d_8 + d_9 + d_{10}}{(d_{11} + d_{12})^2}$$

bulunur.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Schrödinger denkleminin saçılma çözümleri ve bağlı durum çözümleri ele alınmıştır. Ayrıca Korteweg de Vries (KdV) denkleminin soliton çözümü ele alınmaktadır. Bu denklemi elde etmek için Lax ve Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) yöntemleri ele alınmıştır.

3.1. Öneriler

Bu tez çalışmasında kullanılan Lax ve AKNS yöntemleri başka kısmi türevli diferansiyel denklemlere de uygulanabilir ve bu denklemler için de soliton çözümler elde edilebilir.

KAYNAKÇA

- Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A. (1991). Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. ve Segur, H. (1973). Method for solving the sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.*, 30, 1262-1264.
- Ablowitz, M. J. ve Segur, H. (1981). *Solitons and the inverse scattering transform*, Philadelphia: SIAM.
- Aktosun, T. ve Klaus, M. (2001a). Chapter 2.2.4, Inverse theory: problem on the line. In E. R. Pike and P. C. Sabatier (Eds.), *Scattering* (ss. 770-785). London: Academic Press.
- Aktosun, T. ve Klaus, M. (2001b). Small-energy asymptotics for the Schrödinger equation on the line. *Inverse Problems*, 17, 619-632.
- Chadan, K. ve Sabatier, P. C. (1989). *Inverse problems in quantum scattering theory* (2. Baskı). New York: Springer.
- Deift, P. ve Trubowitz, E. (1979). Inverse scattering on the line. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 121-251.
- Drazin, P. G. (1986). *Solitons*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Faddeev, L. D. (1967). Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 65(2), 139-166.
- Fermi, E., Pasta, J. ve Ulam, S. (1955, May). *Studies of non linear problems*. Los Alamos National Laboratory, Document LA-1940.
- Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M. (1967). Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095-1097.
- Korteweg, D. J. ve Vries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 39, 422-443.
- Kurt, M. (2015) *Ters Saçılım Dönüşümü (TSD) ve Soliton Teorisi* [Yüksek lisans tezi]. Cumhuriyet Üniversitesi.
- Lamb, Jr., G. L. (1980). *Elements of soliton theory*. New York: Wiley.
- Lax, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21, 467-490.
- Marchenko, V. A. (1986). *Sturm-Liouville operators and applications*. Basel: Birkhäuser.

- Melin, A. (1985). Operator methods for inverse scattering on the real line. *Comm. Partial Differential Equations*, 10, 677-766.
- Newton, R. G. (1980). Inverse scattering. I. One dimension. *J. Math. Phys.*, 21, 493-505.
- Newton, R. G. (1983). The Marchenko and Gel'fand-Levitan methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions. In J. B. Bednar et, al. (Eds.), *Conference on inverse scattering: theory and application* (s. 1-74). Philadelphia: SIAM.
- Russell, J. S. (1844). *Report on waves*. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science (ss. 301-390). London: John Murray.
- Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240-243.