

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOZMOLOJİK MODELLERDE TEDİRGEME VE FOTON JEODEZİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

IRMAK ILDIR

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Ocak 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOZMOLOJİK MODELLERDE TEDİRGEME VE FOTON JEODEZİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**IRMAK ILDIR
(5091121106)**

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR

Ocak 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 5091121106 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **IRMAK ILDIR**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**KOZMOLOJİK MODELLERDE TEDİRGEME VE FOTON JEODEZİĞİ**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR**
Istanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç.Dr.A. Savaş Arapoğlu**
Istanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Özgür Akarsu
Koç Üniversitesi

Teslim Tarihi : **15 Aralık 2014**
Savunma Tarihi : **23 Ocak 2015**

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca gösterdiği ilgi, cesaretlendirici desteği ve eşsiz emekleri için danışman hocam Sayın Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR 'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Aileme, hayatım boyunca yanımda oldukları için minnettarım.

Ocak 2015

IRMAK ILDIR
Fizik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR.....	ix
SEMBOL LİSTESİ.....	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. DÜZ UZAYDA ALAN DENKLEMİ VE FRIEDMANN DENKLEMLERİ.....	3
2.1 Eylem ve Einstein Alan Denklemi	3
2.2 FRW Metriği ve Friedmann Denklemleri.....	5
2.3 Enerji-Momentum Tensörünün Korunumu	6
3. METRİK TEDİRGEME.....	9
3.1 Giriş	9
3.2 Metrik Tedirgemelerin Tanımlanması	9
3.3 Newtonyen Ayar Dönüşümü Altında Skaler Tedirgeme	11
4. FOTON JEODEZİĞİ VE INTEGRATED SACHS-WOLFE ETKİSİ.....	15
4.1 4-Hız Vektörü ve Enerji.....	15
4.2 Integrated Sachs-Wolfe Etkisi	17
5. $f(R)$ TEORİSİ ve INTEGRATED SACHS-WOLFE ETKİSİ.....	21
5.1 $f(R)$ Etkisi Altında Aksiyon ve Alan Denklemi.....	21
5.2 $f(R)$ Teorisi ve Tedirgenmiş Metrikte Alan Denklemleri.....	24
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	31

KISALTMALAR

GR	: Genel Relativite
FRW	: Friedmann Robertson Walker
CMBR	: Kozmik Mikrodalga ArdAlan Radyasyonu
LSS	: Son Saçılma Yüzeyi
ISW	: Integrated Sachs-Wolfe

SEMBOL LİSTESİ

$(-, +, +, +)$	: Metriğin İşareti
$,$	: Kısmi Türev
$;$	: Kovaryant Türev
$T_{\mu\nu}$	: Enerji-Momentum Tensörü
$R_{\mu\nu\gamma}^{\sigma}$	: Riemann Tensörü
$R_{\mu\nu}$	: Ricci Tensörü
R	: Ricci Skaleri
$\square$	: D'Alembert Operatörü

KOZMOLOJİK MODELLERDE TEDİRGEME VE FOTON JEODEZİĞİ

ÖZET

Kozmologlar bugüne değin modern kozmolojide iki nokta üzerinde durmuşlardır. İlki Evrenin geçirdiği tüm evrelerin açıklanması, ikincisi ise Evrenin geçmişinin ne olduğu, bugünü ve geleceğinde yapısının ne olacağıdır. Kozmolojinin son 30 yılda yaşadığı hızlı değişim her iki noktada daha detaylı cevapların ve soruların bulunmasına neden olurken, kozmolojinin ilk dönemlerinde oluşturduğu külliyatın ürünü olarak ortaya çıkmıştır.

Einstein'ın pek çok noktada yeni kulvarlar yarattığı öncü çalışması olan Genel Görelilik teorisinin ortaya çıkışının üzerinden bir yüzyıl geçmesinin ardından kozmoloji geniş ölçekteki olgulardan, yüksek enerji fiziğinin ilgilendiği noktalara kadar pek çok farklı alana değinmiş durumda. Özellikle A.Guth'un 1981'de yayınladığı çalışma yüksek enerji fiziği ile kozmoloji arasında yeni bir bağ kurarken, geliştirdiği enflasyon mekanizması ile Evrenin ilk dönemlerinde ortaya çıkan ve kozmologların uzunca bir süredir ilgilendiği ufuk problemi, ilksel tedirgeme vb... gibi sorunlara yenilikçi bir çözüm getiriyordu [1].

Bu yenilikçi çözümle birlikte astrofizikçilerin ortaya koyduğu Kozmik Mikrodalga Ard alan Işıması (CMBR) olarak bilinen olgunun önemi daha çok arttı. Sachs-Wolfe'un 1967 yılında ortaya koyduğu çözümde CMBR'ın metrikte yaşanan ilksel tedirgemelerin ve Son Saçılma Yüzeyinden (LSS) gelen fotonların bilgisi ile yakından ilgili olduğunu ifade edilmişti. Sachs-Wolfe'un çalışmalarında ortaya koyduğu ve onun bir parçası olan Integrated Sachs Wolfe (ISW) etkisi olarak bilinen fiziksel etki, gözlemlerle de uyumlu olarak modern kozmolojik modellerin sınanmasında ve hangilerinin geçerli olup, hangilerinin geçerli olmadığı konusunda önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte ISW, modern kozmolojinin ortaya attığı ve bazı mekanizmaları ile olguları açıklamakta kullanılan alternatif gravite teorileri, karanlık enerjinin doğası vb.. gibi olgular için de önemli bir kıstas sunmaktadır.

Çalışmamızda odaklandığımız alternatif gravite modellerinden olan $f(R)$ teorisi, GR'da oluşturulan teorisinin altyapısına dayanmakla birlikte ondan önemli farkı GR'da Lagrangeyenin oluşturduğu Ricci skalerinin rastgele bir fonskiyon olarak tanıtılmasıdır. Bununla birlikte, $f(R)$ teorisi ivmelenerek genişleyen Evreni ve Evrenin yapısını ortaya koymak için önemli bir kaynak sağlarken, geniş ölçekteki yapılarda zayıf gravitasyonel mercekleme ya da geç zaman ISW etkilerinde gözlemlenebilmektedir [2]. ISW etkisi $f(R)$ teorisini de sınırlandırmak açısından da önemli kaynaklar sağlamaktadır.

Çalışmamızın ikinci bölümde genel kozmolojinin tarihsel gelişimine uygun bir sunum yapılırken, üçüncü bölümde metrik tedirgemelere bir giriş üzerinde duruldu. Dördüncü bölümde bu tedirgemelerin fiziksel sonucu olan Sachs-Wolfe etkisi üzerinde durulurken, beşinci bölümde $f(R)$ teorisine bir giriş yapıldı.

Çalışmamızda foton jeodeziği, metrik tedirgeme ve bunların fiziksel gözlemlerine ait sonuçlar üzerinde literatür taraması gerçekleştirildi. Alternatif gravite modellerinin Sachs-Wolfe ve Integrated Sachs Wolfe gibi etkilerin fotonların izi olduğu kanısı üzerinde

durduk. İleriki çalışmalarımızda yakın bir gelecekte bu alternatif modellerin etkileri üzerinin sayısal analizleri üzerinde duracağız.

PERTURBATIONS AND PHOTON GEODESIC ON COSMOLOGIC MODELS

SUMMARY

Cosmologists have been dealing with two points since the beginning of the modern cosmology area. One point is trying to describe the evolution of the universe and the other point is to find out the past, today and the future of the universe. Evolution of cosmology has been focused on to figure out detailed answers of these questions and to guess the final fate of the universe. These new aspects have been based on cumulative corpus of modern cosmology. Although there are many differences, new aspects are the product of old fashioned cosmology.

After a hundred years of Einstein's relativity theory, cosmology have been focused on many ranges such as large scale structures or high energy physics. In 1981, A. Guth pointed out the relation between high energy physics and cosmology.

The wide ranged work clarified that the inflation mechanism of Guth's trying to give a great aspect to solve flatness, horizon and initial perturbation problems [1]. Furthermore, importance of the Cosmic Microwave Background Radiation which is discovered in 1964, have been risen up after this progressive work of Guth's.

Consequences of perturbations on metric have a significant role on explanation of Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR). In the "old-fashioned cosmology" Friedmann-Robertson Walker metric is considered unperturbatively.

Unperturbed universe can not produce a physical phenomena such as CMBR. On the other hand, primordial gravitational fluctuations could not be occurred. Thus, metric perturbations are necessary for modern cosmology and consequences of observations which are made by astro-physicists.

Moreover, the theoretical products of Sachs-Wolfe works have revealed the secret of CMBR and have associated the knowledge of photons, which are coming from the last scattering surface (LSS), with gravitational potential in 1967. This theory have been based on calculation of photons' geodesic with perturbed Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metric. R.Sachs and A.M Wolfe predicted, which are the fluctuations over temperature over large scale structure in order of 10^{-2} .

These effect can be observed by frequency shifts of light or Doppler effect and the observations provide some information of gravitational fields. Furthermore, the part of Sachs-Wolfe study, provides new aspects such as examination and also validation of alternative gravitational theories or the nature of dark energy. This effect called up Integrated Sachs-Wolfe (ISW) effect.

Integrated Sachs Wolfe effect is based on a unique mechanism which depends on the evolution of gravitational potential with respect to time derivative. Cosmic Microwave Background Radiation photons comoving from LSS pass on through time dependent gravitational potential. It was proven that, photons gain or lost their energy by

the gravitational potential wells or peaks. The integration of time derivative of the gravitational potential can be measured and observable today.

In matter dominated Universe, the gravitational potential is static. Thus, Integrated Sachs-Wolfe effect has to be vanished in matter dominated universe. This result of ISW effect triggers a new result. ISW effect must be observed on radiation dominated universe or dark energy-curvature dominated universe. Thus, ISW effect provides a great probe for understanding accelerating expansion of the Universe [2].

In GR, theory has a significant imprint on large scale structures which is scale independent density growth factor at sub horizon scale [2]. On the other hand, alternative gravity models, which introduce arbitrary function with respect to Ricci scalar on Lagrangian, provides scale dependent due to nature of itself.

These unique features of modified gravity, provide answers to the large scale structures and have been observed on some physical phenomenon such as galaxy clusters or late ISW effect. Some theoretical physicists predicted that $f(R)$ theories can be observed and produce by observable early time ISW effect.

In our thesis we focus on metric perturbations with respect to gravitational potential. These gravitational fluctuations cause an external effect on physical phenomenon which are related with metric perturbations. Then we study on photon geodesies in perturbed space. Finally, we examine metric perturbations in $f(R)$ gravity as an example of alternative gravity theories, which are candidate to explanation of dark energy and also nature of dark matter.

In section one, we give some basic definitions our work and describe how modern cosmology models have motivated. In section two, we describe the physical interpretation of unperturbed, expanded Universe. Also, second section has description about how "old-fashioned Cosmology" has begun and how the Einstein-Hilbert action has a physical role.

The physical meaning of variation of action gives the field equations of gravity. Historically these equations are called Einstein field equations. Furthermore, in the second part of our work, we give the perfect fluid solution of the Einstein field equation, in the flat De-Sitter space which are called Friedmann equations.

In the third part of our work, we tried to give an introduction the metric perturbations. We describe perturbed FRW metric and its physical interpretations. Besides, in this section we try to understand how we transform the coordinates and how these transformations have gauge-freedom. Although, we do not describe it detailed way, we choose Newtonian gauge and we focus on consequences of this gauge.

Fourth part contains the physical interpretation of perturbed universe and consequences of itself. These consequences are called Integrated Sachs Wolfe effect and it derived from photons geodesic equation, which are coming from LSS.

Last part of our thesis contains alternative gravitational model. We introduce how action changes in modified gravity and also change of field equations. Furthermore, we examine to understand how potential fields act on composition of Universe, which is a new type of Poisson equation. Moreover, we have to give an answer to how ISW effect related with $f(R)$ theory and how it can validate the other theories.

Also the last part of the thesis examine $f(R)$ theory with General Relativity. These theory contains the generalizing the Einstein-Hilbert action and gives the answer about how the gravitational fields act with R .

Also we show that ISW effect has a same meaning in $f(R)$ theory except it is act with modified R , which also gives an answer to generalize the action. Generalizing of the R action has a significant meaning and has physical role.

The results of the thesis also contains how the alternative gravity models can be reproduced. The relation between these effects are constraining the limits of alternative gravity models. Numerical methods shows that the limitation of the alternative gravity models, such as $f(R)$ theory. Also, these results are pointing out the evidence of dark energy.

In this thesis we review photon geodesies, metric perturbations and their observable results. Since alternative gravity theories may have imprints on the photons geodesics, such as Sachs- Wolfe and Integrated Sachs-Wolfe effect, we will study effects of alternative models on these effects in near future.

.

1. GİRİŞ

Kozmolojinin son 30 yıldaki değişimi, daha önceki bilgi birikimi ile kıyaslandığında, oldukça yeni kanallar açmış ve farklı problemleri de yanında getirmiştir. Kozmoloji biliminin GR teorisinin yola çıkışı ile birlikte anılan geçmişi, 1980'lerde yeni bir evreye girmiş durumda. Kozmologların büyük problemlerinden biri olan ufuk(horizon), düzlük(flatness), ilksel tedirgeme gibi problemler enflasyon mekanizması ile bir takım açıklamalar getirilmiş oldu. A.Guth'un 1981'de yürüttüğü çalışmada yüksek enerji fiziği ile kozmoloji arasında yeni bir köprü inşa ediyordu [3].

Bununla birlikte Büyük patlamanın ilk evrelerinde yaşanan tedirgemelerin bir takım etkileri daha önceki gözlemlerle açıklanmıştı. Kozmik mikrodalga ardalan ışıması (CMBR) 1964 yılındaki keşfiyle birlikte, metrik tedirgemenin fiziksel etkilerinin neler olduğu araştırılmaya başlandı [4] [5]. Sachs-Wolfe ortaya koydukları model ile CMBR'da anizotropinin varlığını modellerken, bu anizotropik modelin kozmolojik modelleri ve karanlık enerji türünden açıklanamayan fenomenleri kısıtladığını da işaret etmiş oldular. Bu önemli açılım, modern kozmolojik modellerin öngördüğü ve $f(R)$ benzeri alternatif gravite modelleri ile desteklenen teoriler için çok önemli bir aracın da varlığını sağlamış oldu.

Tarihsel gelişim açısından farklı evrelerde öngörülen Friedmann-Robertson-Walker metriğine ulaşma ile evrenin gelişim seyrini açıklayan modeller bugün enflasyon mekanizmasının tariflediği bir biçimde birleşirken, Büyük Patlama'nın içerdiği evrelerin özellikleri de giderek daha fazla deşifre olmaktadır. Bununla birlikte günümüzde gerek gözlemsel, gerekse de teorik çalışmaların ortaya koyduğu gerçeklerde tarihsel gelişim seyri içerisinde ortaya atılan bir dizi teori elenmiş olup, günümüzde gelişkin başka mekanizmalar bu daha karmaşık resmi açıklamak için kullanılmaktadır. Karanlık enerjinin günümüzde giderek hızlanarak genişleyen evrenin, bu hızlanmasını tetikleyen neden olarak görüldüğü kozmolojide, $f(R)$ teorisi bu durum için önemli bir açıklayıcılık getiriyor. Bununla birlikte farklı modellerin devreye girdiği anda ise Integrated Sachs Wolfe (ISW) olarak bilinen test aracı bu modellere iyi bir sınırlama getirmektedir [2]. Gene karanlık madde, $f(R)$ teorisinin bir başka görünümü olarak ifade edilebilir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde genel hatları ile düz uzayda alan denklemleri incelenirken, üçüncü bölüm ile birlikte tedirgenmiş bir metrikte büyüklüklerin ne ölçüde değiştiği incelenmiştir. Dördüncü bölümde tedirgenmiş metriğin fiziksel sonuçları üzerinde durulurken, 5.bölümde $f(R)$ teorisine bir giriş yapılmıştır. $f(R)$ teorisinin ISW ile etkisi, nasıl sınırlandırılacağı ise çalışmamızın ileriki aşamasında verilecektir.

2. DÜZ UZAYDA ALAN DENKLEMİ VE FRIEDMANN DENKLEMLERİ

2.1 Eylem ve Einstein Alan Denklemi

Bugüne değin kozmolojinin başlangıç noktalarından bir tanesi 1929 yılında Edwin Hubble'ın gözlemsel sonuçları olarak ele alınsa da, esasen Einstein'ın, ilk büyük birleşme kuramı olarak da adlandırılan, 1915 yılında yayımladığı GR çalışmaları üzerine bina edilmiştir. Öte yandan Einstein, bu çalışması ile genel bir yaklaşım öne sürerken incelediği ve ortaya koyduğu nokta ise metrik tensör alan için ikinci dereceden bir diferansiyel denklem takımıydı [6].

Bu öncü çalışmayla birlikte açılan kulvarda pek çok farklı yaklaşım sunulmuş; ancak kozmologların ortaklaştığı bir nokta ise Evren'in büyük ölçeklerde homojen ve izotropik olmasıdır, bu izotropi ve homojenlik ise ölçeğin 100 Mpc'den daha büyük olduğu noktalarda sağlanmaktadır [1]. Mevcut durumda Evren'in her noktası çeşitli yapılardan, yıldız kümeleri, galaksiler veya galaksi kümeleri gibi, ötürü homojen olmadığı iyi bilinmektedir. Ancak ölçek büyüdükçe homojen, izotropik davranış netleşmekte ve Evren'in içeriği mükemmel bir akışkan olarak kinematik ve dinamik özellikler göstermektedir.

Evren'in mevcut yapısını incelemekten önce hem tarihsel gelişime uygun olması açısından, hem de daha temel olan bir noktadan başlamak gerekiyor. Bunun için önce hareketin tanımlanması ve bu hareketin yasalarının ortaya konulması gerekli. Klasik mekanikte olduğu gibi en basit cinsten bir Lagrangian alınır ve bunun "eylemi" tariflenirse aşağıdaki şekilde bir model ortaya çıkar:

$$S(g) = \int \left[\frac{1}{2\kappa} (R + L_m) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.1)$$

Buradaki eylem, Einstein-Hilbert eylemi olarak tanımlanır ve hareketin denklemi eylemin metrikle olan bağından türemiş olması gerekir [6]. Eylemin varyasyonu sıfıra eşitlenirse ve denklem (2.1) düzenlenirse şöyle olur:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.2)$$

Burada, Riemann eğriliği ve Ricci tensörü varyasyon olmadan şöyledir:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{\rho} &= \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \\ R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ricci tensörü varyasyon altında şöyle bir içeriğe sahip olur:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^{\alpha} - \delta \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \quad (2.4)$$

Ricci tensörünün bu dönüşümü denklem (2.2)'de bulunan δR 'yi bulmak için yazılmıştır.

Ricci skaleri, Ricci tensörü ile olduğuna göre aşağıdaki gibi yazılmalıdır:

$$\delta R = \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Ricci tensörü iki farklı Christoffel sembolünün kovaryant türevlerinin farkı olarak yazılabilir. Bu fark şöyle yazılabilir:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}(\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}). \quad (2.6)$$

Denklem (2.5) her iki taraftan $\sqrt{-g}$ ile çarpılırsa şu hale gelir:

$$\sqrt{-g} \delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2.7)$$

Bu denklem (2.2)'nin ilk terimin çözümüydü. İkinci terimin çözümü için ise basit bir eşitlikten yararlanmak gerekiyor. Bu eşitliği şöyle ifade edecek olursak:

$$\begin{aligned} Tr(\ln M) &= \ln \det M \\ Tr(M^{-1} \delta M) &= \frac{\delta(\det M)}{\det M}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bu durumda $M = g^{\mu\nu}$ olarak ele alınırsa δg^{-1} denklem (2.8)'den yola çıkılarak şöyle yazılabilir:

$$\frac{g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{g} = \delta g^{-1}. \quad (2.9)$$

Denklem (2.9)'un sonucundan yola çıkarak $\delta \sqrt{-g}$ nasıl bir dönüşüme sahip olacağını ifade edersek:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{2}. \quad (2.10)$$

Böylece denklem (2.8), (2.9) ve (2.2) birlikte kullanılırsa, alan denklemi elde edilmiş olur:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

ve şeklinde ifade edilir. Buradaki alan denklemi kozmolojik sabit içermemektedir ve eyleme Λ eklenirse Einstein alan denklemini vermektedir [7].

2.2 FRW Metriği ve Friedmann Denklemleri

2.1 bölümünde ortaya koyulan Einstein alan denklemleri, Einstein'ın kendi öngörüsüne göre statik bir evreni temel alırken, Hubble'ın 1929 yılındaki gözlemsel sonuçları statik olmayan bir evren modelinin mümkün olabileceğini öngördü. Elbette bu gözlemsel verinin haricinde, Friedmann-Robertson-Walker metriği, Lemaitre de dahil olmak üzere, statik olmayan evrenin altyapısını ortaya koydu. Uzaysal olarak genişleyen Robertson-Walker metriği, şöyle ifade edebiliriz:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^i dx_j \delta_{ij} \quad (2.12)$$

Burada $a(t)$ ölçek faktörü olarak uzaysal kısmın aynı oranla genişlediğini ya da daraldığını vermektedir. Bu uzay her doğrultuda zamana bağlı olarak aynı faktörle değiştiği için izotropiktir. Denklem (2.11)'in 00 ve ij bileşenleri, farklı tipte denklemler verecektir. Bunun için denklem (2.11)'in içindeki elemanların karşılıklarını bulmak gerekiyor. Ricci skaleri için, Ricci tensörünü ve Ricci tensörü için ise Christoffel sembolünü bulacak olursak, denklem daha açık bir biçimde yazılabilir. Christoffel sembolünün genel ifadesi şöyledir:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.13)$$

Bu denklik kullanılarak FRW metriğine ait Ricci tensörleri yazılacak olursa:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \quad (2.14)$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)(1 + r^2(1 + \sin^2 \theta)) \quad (2.15)$$

Ricci skaleri ise

$$R_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu} \quad (2.16)$$

$$R = R_{\mu}^{\mu} = \frac{6(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{a^2} \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemlerde $\dot{} \doteq \frac{d}{d\eta}$ olarak tanımlanmıştır. Bu noktadan itibaren enerji-momentum tensörünün nasıl olduğunu ifade etmek gerekiyor. Enerji-momentum tensörü, mükemmel bir akışkan özellik gösteren bir yapı için şöyle ifade edilir:

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + p_m)u_{\mu}u_{\nu} + g_{\mu\nu}p_m. \quad (2.18)$$

Enerji-momentum tensöründe ρ_m maddenin enerji yoğunluğunu, p_m basıncı, u_{μ} dört hızı vermektedir. O halde enerji-momentum tensörünün 00 bileşeni yazılırsa:

$$T_{00} = p_m \delta_{ij} \quad (2.19)$$

Enerji momentum tensörünü bu şekilde ifade ettikten sonra, denklem (2.11)'in 00 bileşeni

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa \rho_m \quad (2.20)$$

olur. Bu 1.tip Friedmann denklemidir. Denklem(2.11)'in ij bileşeni yazılırsa, denklem

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{K}{2}[\rho_m + p_m \delta_{ij}] \quad (2.21)$$

şeklinde olur. Böylece 2.tip Friedmann denklemi de elde edilmiş olur. Bu noktada $H = \frac{\dot{a}}{a}$ olarak tanımlanır ve Hubble parametresidir [6]. Her iki denkleme aynı zamanda ivmelenme denklemleri adı da verilir [8].

2.3 Enerji-Momentum Tensörünün Korunumu

Genel olarak GR'de enerji-momentum tensörü incelendiğinde, bu tensörün korunumu esas alınır. Einstein denklemleri (2.11) genel olarak kovaryant olduğu için çözümün de kovaryant olması beklenir.(2.12) uzayı (2.11) denklemlerinin sol kısmının çözümü olduğu için sağ kısmının da kovaryant türevi sıfır olan bir büyüklüğe eşit olması gerekir. Enerji-momentum tensörünün korunumu şöyle ifade edilir:

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = T_{\nu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.22)$$

Bu denklemde $\mu = 0$ olarak yazarsak denklem (2.18)'deki ifadeleri kullanırsak

$$T_{0;\nu}^{\nu} = T_{0,\nu}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T_0^{\alpha} - \Gamma_{0\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} = 0 \quad (2.23)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(p_m + \rho_m) = 0 \quad (2.24)$$

Genel olarak denklem (2.24) ile süreklilik denklemi bulunmuş olur. Ancak diğer yandan evrenin o andaki bileşenlerinin ne olduğu çok önemlidir. Örneğin kıızıla kaymanın 3600 civarında olduğu ana kadar radyasyon baskın bir evrende denklem (2.24)'un vereceği sonuçlar ile tekrar birleşme (re-combination) anının sona erdiği kıızıla kaymanın 1100 olduğu ana kadar geçen sürede madde baskın bir evrendeki sonuçlar birbiriyle farklı olacaktır. Bununla birlikte enerjinin kaybı ile ilgili beklediğimiz sonuçlar denklem (2.24)'un verecekleri ile son derece uyumludur. Eğer enerji yoğunluğu ile basınç arasında şöyle bir bağ kurulursa:

$$p = \omega \rho \quad (2.25)$$

denklem (2.24) şöyle olacaktır:

$$\dot{\rho} = -3H\rho(1 + \omega) \quad (2.26)$$

Bununla birlikte yalnızca madde baskın bir evrende, denklem(2.24) şöyle ifade edilecektir:

$$\dot{\rho}_{matter} + 3H(\rho_{matter}) = 0. \quad (2.27)$$

Öte yandan radyasyon baskın bir evrede ise denklem (2.24) biraz daha farklı olacaktır:

$$\dot{\rho}_{rad} + 4H\rho_{rad} = 0 \quad (2.28)$$

Bunun açık sebebi ise radyasyon baskın bir evrende, basınca $p_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{3}$ 'luk bir katkının gelmesidir.(2.27) ve (2.28) denklemlerinden:

$$\frac{\dot{\rho}_{rad}}{\rho_{rad}} = -3H = -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.29)$$

Burada radyasyon basıncı zamana bağlı olarak bulunur. Elde ettiğimiz uzay izotrop ve homojen bir uzaydır.

3. METRİK TEDİRGEME

3.1 Giriş

Evrenin ilk dönemlerinde tanımlanan küçük homojenite farklılıkları temel olarak gözlemsel veriler sonucunda bulunmuş olup, temel alınan veriler mevcut metrik üzerindeki küçük değişimlerdir [9]. Geometride oluşan bu farklılıklar esasen mevcut metrik üzerine verilen küçük pertürbasyonlar olup, metrik pertürbasyonlar başlığı altında incelenecektir.

Büyük ölçeklerde GR'de FRW metriği üzerinde çalışıldığı iyi bilinen bir gerçektir. FRW metriği üzerinde yapılan küçük değişimler ard alandaki temel verilerin değişimine sebebiyet verecektir. FRW metriği konformal tipte yazılırsa şu şekilde ifade edilir:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + g_{ij}dx^i dx^j), \quad (3.1)$$

konformal zaman η ile komoving zaman koordinatı t arasında

$$a(\eta)d\eta = dt \quad (3.2)$$

bağıntısı vardır.

Metriğe birinci mertebeden lineer (doğrusal) bir tedirgeme eklersek, uzunluk elemanı aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (3.3)$$

$g_{\mu\nu}$ (3.3) denkleminde ard alan metriğini temsil eder. Bundan sonra tanımlanması gereken $g_{\mu\nu}$ ile tedirgenmiş metrik olan $\bar{g}_{\mu\nu}$ arasındaki ilişkinin mevcut metriği nasıl değiştireceği ve bunların nasıl yorumlanacağıdır. Bu durumda tedirgemelerin tanımlanması ve ayrımı gerekmektedir.

3.2 Metrik Tedirgemelerin Tanımlanması

Metrik pertürbasyonların tanımlanması etkilerin skaler mi, vektörel mi, yoksa tensörel mi olduğuna göre yapılır. En genel haliyle metrik her yönde lineer olarak tedirgenirse (3.1) metriği şu şekilde ifade edilir:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2A)d\eta^2 - 2B_id\eta dx^i + ((1-2D\delta_{ij}) + 2E_{ij})dx^i dx^j\} \quad (3.4)$$

Metriğin kendisi böylece skaler, vektörel ve tensörel modlara indirgenebilir hale gelir. Burada A ve D skaler, B_i vektörel ve E_{ij} ise tensörel kısmı temsil etmektedir. Esasen tedirgemelerin bu biçimde yazılabilmeli sağlayan şey; Helmholtz indirgemesi adı verilen yöntemdir. Helmholtz'un bu teorimine göre vektörel ifade diverjansına ve rotasyoneline göre yazılabilir. Mevcut vektör alanı 3 boyutta diverjans ve vektörüne göre yazıldığında şu şekilde ifade edilir:

$$V = \nabla\phi + V^\perp \quad (3.5)$$

Aynı şekilde izi sıfır olan bir E_{ij} tensörü için de uygulandığında durum şu şekilde ifade edilecektir:

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T, \quad (3.6)$$

Skaler, vektörel ve tensörel parçalar ise şu şekilde ifade edilir:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_l E_{lk}^S = 0, \quad \partial_i\partial_j E_{ij}^V = 0, \quad \partial_i E_{ij}^T = 0 \quad (3.7)$$

Böylece elde edilen denklemlerle, (3.6), skaler ve vektörel parça ile bağ bulunur. Skaler ve vektörel parçalar şu şekilde ifade edilebilir:

$$E_{ij}^S = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)E, \\ E_{ij}^V = -\frac{1}{2}(\partial_i F_j + \partial_j F_i), \quad \partial_i F_i = 0 \quad (3.8)$$

E bir skaler ve F_i ise bir vektördür.

Denklem (3.3)'te ard alan ve tedirgenmiş metrik ifadeleri belirtilmişti. Tedirgenmiş metrik, skaler, vektörel ve tensörel parçalara ayrılırsa şöyle ifade edilir:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}^S + \bar{g}_{\mu\nu}^V + \bar{g}_{\mu\nu}^T \quad (3.9)$$

Şimdi metriğin 00 bileşeni ile ilgilenelim. 00 bileşeni olan kısım bir skaler ve burada ifade edilen A bir skaler ifadeye sahiptir. Metriğin uzay ve zaman kısımlarının karışık kısma odaklanacak olursak B_i bileşeninin bir vektör olduğunu görürüz. Bu durumda ise

ifadeyi daha önce yaptığımız gibi skaler ve vektör kısma indirgemek gerekecek. Ancak buradaki vektör kısım diverjansı sıfır olduğu için düşürülebilir. O halde vektör ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$B_i = -\partial_i B \quad (3.10)$$

Bu durumda ard alan metriğine eklenen metriğin skaler parçası belirlenmiş olur. Tedirgenmiş kısmın metriği şöyle ifade edilir:

$$\bar{g}^s_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -2A & B_{,i} \\ B_{,i} & 2(-(D + \frac{1}{3}\nabla^2 E)\delta_{ij} + E_{,ij}) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Skaler kısmını bu şekilde yazabileceğimiz metriğin vektörel kısmı ise aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{g}^v_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & -(F_{i,j} + F_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Tensörel kısmı ifade etmek ise daha kolaydır, çünkü sadece metrikte ifade edilen E_{ij}^T kısmını içerir. O halde tedirgenmiş metriğin tensörel kısmı şu olur:

$$\bar{g}^t_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij}^T \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Tedirgenmiş metriğin her bir parçasının fiziksel olarak bir karşılığı bulunmaktadır. A,B,D ve E ile karakterize edilen kısımlar skaler parçaları oluşturmaktadır. Skaler parçalar en önemli kısımları oluşturmaktadır, çünkü gravitasyonel dengesizliği doğuran kısım burası olduğu için, evrenin yapısını oluşturan kısmı en çok skaler kısım etkilemiştir [1]. S_i ve F_i kısımları ise vektörel kısımlardır ve tıpkı Newtonyen teoride olduğu gibi hızlıca kaybolurlar. Bu yüzden önemleri yoktur. Tensörel dalgalanmalar ise gravitasyonel dalgayı karakterize eder.

3.3 Newtonyen Ayar Dönüşümü Altında Skaler Tedirgeme

Tüm tedirgemeler esas olarak ayar dönüşümleri altında aynı kalması gerekir ve bu nedenle skaler moda uyumlu bir ayar dönüşümünün seçimi çeşitli olguların açıklamasında işi kolaylaştıracaktır. Newtonyen ayar dönüşümü böylesi bir doğaya sahiptir; çünkü Newtonyen ayar dönüşümünde tedirgenmiş metriğin çapraz olmayan terimleri rahatlıkla elimine olurlar [10]. Bu durumda yazılması gereken metrik şöyle ifade edilir:

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (3.14)$$

Denklem (3.14) Newtonyen dönüşüm altında yazılmış skaler elemanlara sahip bir metriktir. Bu metriği baz olarak yazılacak Christoffel sembolleri ya da Ricci skalerleri ard alan metriğinden gelen kısımlar ile tedirgenmiş kısımları içerecektir. Daha açık ifade ile söylenecek olursa ard alan kısmında kalan ifadeler FRW metriğinin konformal dönüşümler altındaki kısımlarını içerecektir. Christoffel sembolü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(b) \quad (3.15)$$

İlk terim tedirgenmiş ifadeyi, ikinci terim ise arda alan metriğinden gelen ifadeyi içermektedir. (2.13) denkleminde Christoffel sembolleri yazılacak olursa, semboller şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \mathcal{H} + \Psi & \Gamma_{0k}^0 &= \Phi_{,k} & \Gamma_{ij}^0 &= \mathcal{H} \delta_{ij} - [2\mathcal{H}(-\Phi + \Psi) - \dot{\Phi}] \delta_{ij} \\ \Gamma_{00}^i &= \Phi_{,i} & \Gamma_{0j}^i &= \mathcal{H} \delta_j^i + \dot{\Phi} \delta_j^i & \Gamma_{kl}^i &= (\Phi_{,l} \delta_k^i + \Phi_{,k} \delta_l^i) - \Phi_{,i} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada $\mathcal{H} = aH$ olarak ifade edilmektedir. Bir başka şekilde ifade edilirse Hubble sabitinin konformal olarak yazılmasıdır. Burada bulunan Christoffel sembollerinin ilk terimleri (3.15) denkleminde bulunan ard alan metriğinin, FRW metriği, Christoffel sembollerini içermektedir. Diğer ifadeler ise metriğin tedirgenmiş kısmından gelmektedir. O halde Ricci tensörü de aynı şekilde tedirgenmiş ve arda alan metriğinden doğan Ricci tensörünün toplamı olarak yazılmalıdır. Başka bir şekilde ifade edilirse:

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}(b) \quad (3.17)$$

Ricci tensörü denklem (2.3)'e konulursa elde edilecek tensörler ise şöyle ifade edilirler:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\mathcal{H} + 3\ddot{\Phi} - \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) \\ R_{0i} &= 2(\dot{\Phi} - \mathcal{H}\Psi)_{,i} \\ R_{ij} &= (\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2) \delta_{ij} \\ &+ [-\ddot{\Phi} + \nabla^2 \Phi + \mathcal{H}(\dot{\Psi} + 5\dot{\Phi}) - (2\mathcal{H} + 4\mathcal{H}^2)(\Phi - \Psi)] \delta_{ij} \\ &+ (\Phi + \Psi)_{,ij} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ricci tensöründen sonra Ricci skalerini bulmak gerekiyor. Ricci skaleri ise Ricci tensörünün bu formatından elde etmek mümkün. Bununla birlikte tensörün indislerini yukarı kaldırmak istersek elde edilecek denklem şöyle olur:

$$R_{\nu}^{\nu} = R_{\mu\nu}(b) + \bar{g}_{\mu\nu} R_{\mu\nu}(b) + g_{\mu\nu} \bar{R}_{\alpha\nu} \quad (3.19)$$

Böylece elde edilen tensörler Ricci skalerini bulmak için kullanılır. Ricci skaleri aşağıdaki eşitlikle sağlanır.

$$R = R_0^0 + R_i^i \quad (3.20)$$

Bu eşitlikle elde edilecek Ricci skaleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} R = & 6a^{-2}(\mathcal{H} + \mathcal{H}^2) \\ & + a^{-2}[-6\ddot{\Psi} + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}(\dot{\Phi} + 3\dot{\Psi}) - 12(\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\Phi] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Böylece elde edilecek denklemlerle enerji momentum tensörü artık bulunabilir. Enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$(Total)T_V^\mu = T_V^\mu + \bar{T}_V^\mu \quad (3.22)$$

İlk terim ard alan enerji momentum tensörünü içerir, ikinci terim ise tedirgenmiş kısmı. Böylece genel Einstein alan denklemlerinden enerji-momentum tensörleri elde edilmiş olur.

4. FOTON JEODEZİĞİ VE INTEGRATED SACHS-WOLFE ETKİSİ

4.1 4-Hız Vektörü ve Enerji

Daha önceki bölümlerde pertürbe edilmemiş FRW uzayında Einstein-Hilber eylemi için, R eylemi, bulmuş ve tedirgenmiş uzay için enerji-momentum tensörünün içeriğini genel halini bulmuştuk. Bu bölüm için ilk başlangıç noktası ise 4-hız vektörü ile onunla ilişkili enerji olacaktır. Daha sonraki adım ise bu uzayda foton gibi bir parçacığın kinematikini incelemek olacak. İncelenen bu kinematik daha sonra Sachs-Wolfe etkisine tekabül edeceğini göstereceğiz. Burada incelenecek metrik denklem (3.4) ile ifade edilen metriktir. Tek değişiklik ise $A = \Phi$, $D = \Psi$ şeklinde Newtonyen ayarda kolaylık olması için yapılacaktır.

Uzay-zaman bileşeni tedirgenmemiş ve izotropik olduğunda $u_\mu = \frac{1}{a}(1, 0, 0, 0)$ şeklinde ifade edilir. $u_\mu u^\mu = -1$ şartı geçerli olduğuna göre $u^\mu = a(-1, 0, 0, 0)$ şeklinde yazılır. Bu kısım tedirgenmemiş kısımdır. Tedirgenmiş kısım ise $\bar{u}$ şeklinde tanımlanırsa ve az önce kullandığımız kovaryant ve kontravaryant elemanların çarpımının -1 olma şartını yinelersek denklem şu hale gelir:

$$\begin{aligned}\bar{u}^0 \bar{u}^0 g_{00} + \bar{u}^0 \bar{u}^i g_{i0} &= -1 \\ \bar{u}^0 &= \frac{1}{a}(1 - \Phi)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$\bar{u}_0$ ise aşağıdaki gibidir:

$$\bar{u}_0 = \frac{1 + \Phi}{a}\tag{4.2}$$

Gene aynı şekilde $\bar{u}_i$ ise aşağıdaki gibi olur:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{a}(\partial_i B + v_i)\tag{4.3}$$

Bu denklemde v_i açısal hızı ifade etmektedir. Elbette burada bulunan ve genel metriktan gelen B ifadesinin bulunması tartışılabilir. Eğer Newtonyen ayar altında bakacaksak bu ifadenin sifıra eşit olması beklenmelidir. Genel bir tedirgenmiş metrikte, FRW metriğini ele alıyoruz elbette, B'de ayrıca bulunacağı için 4-hız vektörü içinde sayılabilir.

Newtonyen ayar altındaki limitler altında bulunacak 4-hız vektörü ile denklem (4.3)'te bulunan ifade uyumludur.

Bu noktadan itibaren ise genel enerji ile ilgilenmemiz Sachs-Wolfe etkisini anlamak için doğru olacaktır. Genel enerji ifadesi, tedirgenmemiş kısmıyla ilgineceğiz ilk olarak, bir foton için şöyle yazılabilir:

$$E = -g_{\mu\nu}u^\mu k^\nu \quad (4.4)$$

Burada neden dört hız vektörünün diğer bileşeninin k ile belirtildiği merak edilebilir. Bu sorunun cevabı ise oldukça açıktır; burada ele aldığımız parçacık bir fotondur ve dalga vektörünü yazmamız gerekir. Dolayısıyla foton için enerji ifadesi dalga ve hız vektörleri ile yazılabilecek bir set halinde bulunur. Bu durumda 00 bileşenleri ile elde edilecek enerji ifadesini bulmak gerekiyor. Bunu E_0 olarak nitelendirecektir. E_0 için ise k 'nın sıfıncı bileşenini bulmak gerekiyor. O halde k için jeodezik denkleminde bakacağız.

Jeodezik denklemi Euler-Lagrange hareket denklemini gösteren bir denklemdir [7]. Jeodezik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu k^\nu k^\gamma = 0 \quad (4.5)$$

Sıfıncı bileşenini aldığımız zaman denklemin Christoffel sembolleri için denklem (3.16)'da bulunan denklemlerin tedirgenmemiş, ard alan, kısımlarını kullanacağız. Böylece elde edilecek denklem şöyle olur:

$$\frac{dk^0}{d\lambda} + 2\frac{a'}{a}(k^0)^2 = 0 \quad (4.6)$$

Denklem (4.6)'da $' = \frac{d}{d\eta}$ olarak tanımlanmıştır. Bu denklemde yazılmış olan dk η cinsinden olduğu için, η ile λ arasındaki diferansiyel bağıntı kullanılması gerekir. Uygun bağıntılar kullanılırsa ve zincir kuralı uygulanırsa denklem şu ifadeye dönüşür:

$$\frac{dk^0}{k^0} = -2\frac{a'}{a} \quad (4.7)$$

O halde k^0 bulunmuş olur. k^0 şu şekilde yazılır:

$$k^0 = \frac{C^0}{a^2} \quad (4.8)$$

k^i içinde benzer yol izlenirse bulunacak ifade şöyledir:

$$k^i = -\left(\frac{C^0}{a^2}\right)e^i \quad (4.9)$$

Burada ifade edilen e^i üç vektör olup, $\frac{de^i}{d\lambda} = 0$ şeklinde tanımlanmıştır. x^i ise benzer şekilde hesaplanırsa aşağıdaki gibi olur:

$$x^i = e^i(\eta - \eta_s) + x_s^i \quad (4.10)$$

Bu denklemdeki ikinci ifade ilk andaki noktayı ifade etmektedir. O halde denklem (4.4) kullanılırsa şu ifade elde edilir:

$$E(\eta) = \frac{C^0}{a(\eta)} \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu elde edilen enerji denklemi tedirgenmenin olmadığı evrende foton baskın durumda sıcaklığın zamana bağlı değişimini anlatan ifadedir [9].

4.2 Integrated Sachs-Wolfe Etkisi

4.Bölümde elde ettiğimiz denklemler özü itibariyle tedirgemenin bulunmadığı bir evrende enerjinin zaman içindeki değişimine odaklanmıştır. Bununla birlikte Newtonyen bir ayar dönüşümü altında foton jeodeziği ile ilgilenmiştik. Bu durumun tedirgenmiş bir uzay-zaman içerisinde tekrar edecek olursa ortaya yeni bir fenomen çıkacaktır. Uzay-zaman içerisinde doğacak küçük homojen olmayan durumlar evrenin ilksel anları için ortaya çıkmış gözlemsel bir olgudur [9]. Bununla birlikte bu gözlemsel olgunun fiziksel karşılığı, uzay-zamanda açısız anlamda yaşanan anizotropik durumlarla ilişkilidir. Dolayısıyla 1967 yılında Sachs ve Wolfe'un ortaya attığı iddia bu durumla ilişkilidir. Sachs-Wolfe 1967 yılında yazdıkları makalede, erken dönemde evren içerisinde yaşanacak küçük dalgalanmaların açısız varyasyonları enerji, dolayısıyla sıcaklıkta, belirli değişikliklere karşılık gelecektir [4]. Bu durumun kendisi daha sonra Sachs-Wolfe etkisi olarak adlandırılacaktır.

Burada dikkatli olunması gereken bir nokta bulunmaktadır. Bizim günümüzde elde ettiğimiz veriler "ilk an" verileri değildir. Yaklaşık 380.000 yıl süren opak sürecin ardından, fotonlar gözlemlenebilir hale geldi. Bu fotonların CMBR (Kozmik mikrodalga ardalın ışıması) ile ölçülen kısmı LSS (last surface of scattering) ile bize taşınanlardır. Bir başka deyişle LSS'den ölçülen verilerin karşılığı sıcaklıktaki dalgalanmalardır ve bu dalgalanmaların kökeni gravitasyonel potansiyel kaynaklıdır.

Bu durumda inceleyeceğimiz şey denklem (4.4)'de ifade ettiğimiz enerjinin genel durumunun tedirgenmiş kısmı ile ilgileneceğiz. O halde tedirgenmiş enerji ifadesini

yazarsak şöyle olur:

$$\delta E = -(g_{\mu\nu}u_\mu \delta k^\nu + \bar{g}_{\mu\nu}u_\mu k^\nu + g_{\mu\nu}\delta u_\mu k^\nu) \quad (4.12)$$

Gerekli ifadeler yazılırsa elde edilecek ifade şu olur:

$$\delta E = \frac{C^0\Phi}{a} - \frac{C^0ei(\partial_i B + v_i)}{a} + a\delta k^0 \quad (4.13)$$

Burada eğer Newtonyen ayar altında bakılacak olursa denklem (4.13)'te ortada bulunan $\partial_i B$ terimi düşecektir. Diğer yandan, denklem (4.13)'te yalnızca δk^0 terimi bilinmiyor. Bu terimi bulmak için denklem (4.5) ile ilgilenmemiz gerekiyor. Bu denklem tedirgenmiş bütün terimleri içerecek şekilde yazılırsa şöyle olur:

$$\frac{d\delta k^0}{d\lambda} + 2\Gamma_{\nu\gamma}^0 k^\nu \delta k^\gamma + \delta\Gamma_{\nu\gamma}^0 k^\nu k^\gamma = 0 \quad (4.14)$$

δk^0 terimi normalde t'nin fonksiyonu olarak yazılırsa zincir kuralı kullanılarak denklem (4.14)'te yerine konulur. Denklem (3.16)'ta bulduğumuz Christoffel sembollerinin tedirgenmiş ve tedirgenmemiş kısımları uygun yerlere yazılır ve $\mathcal{H}$ 1'den çok küçük olacak biçimde seçilirse, δk^0 terimi bulunur. Bu terim şöyledir:

$$\delta k^0 = A \left(\int_{\eta_e}^{\eta} (\Phi' + \Psi') dt + 2(\Phi(\eta) - \Phi(\eta_e)) \right) \quad (4.15)$$

Burada $A = \frac{C^0}{a^2}$ olarak ifade edilir. Böylece δE artık elde edilebilir. Denklem (4.15), denklem (4.13) içinde kullanılır ve her taraf E ile bölünürse aşağıdaki gibi bir denklem elde edilir:

$$\frac{\delta E}{E} = \int_{\eta_e}^{\eta} (\Phi' + \Psi') dt - \Phi(\eta) + 2\Phi(\eta_e) - (\vec{e} \cdot \vec{v})|_e^d \quad (4.16)$$

Buradaki ilk terim integrale Sachs-Wolfe etkisini verecektir. ISW, denklemde de görüleceği üzere sıcaklıktaki anizotropinin gravitasyonel potansiyelin bütün bir doğrultu boyunca zamansal varyasyona göre integrale edilmesi ile elde edilmektedir. Bir başka deyişle ISW, gravitasyonel potansiyelin zamana göre yaşadığı değişimin bir türü olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durumda ISW etkisinin kaynağı gravitasyonel etkilenmeler sonucu oluşan sıcaklık dalgalanmalar olduğuna göre bunun nereden kaynaklandığı önemlidir.

ISW etkisinde sıcaklık dalgalanmaları madde hali baskın olduğu zaman ortaya çıkmazlar. Maddenin baskın olduğu zamanlarda, $z_{eq} = 3300$ 'den önceki zamanlar [10], gravitasyonel potansiyel statik bir hal izler ve bu durumda ISW etkisi lineer tedirgeme, 1.mertebe durumlarda, yok olur. Elbette daha küçük etkiler gene gözlemlenebilir, ancak burada

lineer etkiler ile ilgilenilmektedir. O halde, ISW etkisini ortaya çıkaran durumlar radyasyon baskın dönem ya da kara enerji baskın dönemde ortaya çıkar. Genişleyen bir evrende, kara enerjinin varlığı ISW etkisi net olarak, pozitif ya da negatif bir biçimde, gözlemlenmekle birlikte ISW etkisi, kara enerji, alternatif gravite modelleri ya da bütün bu olasılıkların bir toplamı olarak, bu durumu güçlendirici bir etkisi vardır. Yapılan gözlemlere göre kızıla kaymanın 2'ye yakın olduğu anlarda ISW etkisi kara enerjinin bağımsız bir kanıtı olabilir [11].

5. $f(R)$ TEORİSİ ve INTEGRATED SACHS-WOLFE ETKİSİ

5.1 $f(R)$ Etkisi Altında Aksiyon ve Alan Denklemi

4.bölümde genel olarak tedirgenmiş bir uzay-zamanın kinematik etkileri ile ilgilenmiş ve bu kinematik etkilerin sonucunda oluşan fiziksel olguların nelere karşılık geldiği, hangi anlamlara sahip olduğu üzerinde durmuştuk. ISW etkisinin kara enerjinin bağımsız bir kanıtı olarak sunulabileceğini belirtmiştik. Bununla birlikte $f(R)$ teorisi bu duruma ilişkin açıklayıcılık getirmekte ve iyi bir mekanizma sunmaktadır. Teorinin başlangıç aşamasında Hans Adolph Bundchal'ın tezi geçerliiyken, teoriyi ete kemiğe dönüştüren ise Starobinskiy'nin makalesi olmuştur [12].

$F(R)$ teorisi için ortaya atılan mekanizmaların bir takım karşıt tezlerde sunulmuş durumdadır [13]. Ancak $f(R)$ teorisi içinde *a priori* olarak barındırdığı bir takım özelliklerden ötürü öne çıkmaktadır. Bu "önsel" istemler sayesinde öne çıkar $f(R)$ teorisi, ISW etkisi sayesinde sınanabilir ve sınırlandırılabilir. ISW etkisinin sonuçları itibariyle gireceği bu etkileşim $f(R)$ teorisi ya da diğer tüm skaler-tensör teoriler için eleyicidir.

İlk olarak başlanacak nokta, R ile bağlantılı eylemde Friedmann denklemlerinin bulunması gibi, aksiyonun herhangi $f(R)$ için yazılması olmalıdır. O halde aksiyon denklemi şöyle olmalıdır:

$$S(g) = \int \frac{1}{2\kappa} f(R) \sqrt{-g} d^4x \quad (5.1)$$

Burada S 'in varyasyonu alınıp sıfıra eşitlenir ve madde ile ilgili kısım karşıya atılırsa elde edilecek denklem şöyle olur:

$$\int \left(\frac{1}{2\kappa} (\delta f(R) \sqrt{-g} + f(R) \delta \sqrt{-g}) \right) d^4x = 0 \quad (5.2)$$

Burada yazdığımız $\delta f(R)$ zincir kuralı ile yazılırsa şöyle olur:

$$\delta f(R) = f' \delta R \quad (5.3)$$

δR daha önceki bölümlerde belirtilmiş olunan $\bar{R}$ ile aynıdır. Böylece δR şöyle yazılır:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (5.4)$$

Böylece denklemimiz gerekli işlemler yapılırsa, $R_{\mu\nu}$ yerine genel ifade yazılırsa, denklem (5.4) şu halde yazılır:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma] \quad (5.5)$$

Bu noktada denklem (5.5)'te ikinci terimin parantez içindeki kısmı ile ilgilenmek gerekiyor. Bu denklemi şöyle ifade edersek:

$$I = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma \quad (5.6)$$

Bu denklem açılacak olursa şu ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{2} [\delta_\gamma^\nu \nabla_\nu \delta g^{\sigma\gamma} + \delta_\gamma^\mu \nabla_\mu \delta g^{\sigma\gamma} \\ & - \delta_\alpha^\mu g_{\mu\beta} \nabla_\sigma \delta g^{\alpha\beta} - g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g^{\alpha\gamma}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Denklem toparlanırsa elde edilecek ifade şöyledir:

$$I = g_{\alpha\beta} [\nabla^\sigma \delta g^{\alpha\beta} - \nabla^\gamma \delta g^{\sigma\gamma}] \quad (5.8)$$

Böylece elde edilen denklem, denklem (5.5) ile ilişkilendirilirse elde edilecek denklem şöyle olur:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) \quad (5.9)$$

Burada tariflenen $\nabla_\sigma \nabla^\sigma = \square$ olarak değiştirilebilir. Denklem (5.2), (5.3) ve (5.9) 'da elde edilen sonuçlar iç içe geçirilirse eylemin genel hali bulunabilir:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu})) \\ & - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Elde edilen mevcut denklemde sınır koşulları alınır ve uygun dönüşümler yapılırsa alan denklemlerini oluşturan ana denklem elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibidir:

$$f(R)' R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f(R)' + \nabla_\mu \nabla_\nu f(R)' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

Bu elde ettiğimiz denklem (5.11) alan denklemi, tedirgenmemiş Friedmann denklemlerini $f(R)$ teorisi için verecektir.

5.2 $f(R)$ Teorisi ve Friedmann Denklemleri

Denklem (5.11) ile $f(R)$ teorisi için alan denklemi yazılmıştı. Bu denklem $f(R)$ teorisi için mevcut metriğe bağlı olarak modifiye edilmiş Friedmann denklemlerini verecektir. Ancak bunun için ufak bir değişiklik önermek gerekiyor. Denklem (5.11)'de mevcut $f(R)$, hem eğriliğe bağlı bir fonksiyonu, hem de sabit bir eğriliği, elbette metriktan bir sabitlik değil, içermektedir. Bu değişiklik için $f(R)$ şöyle ifade edilir:

$$f(R) = f \quad (5.12)$$

Böylece denklemimiz şu hali alır:

$$f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

Burada tanımlanan $f_R = \frac{df}{dR}$ şeklindedir. Bu durumda Friedmann metriğini yazacak olursak şöyle ifade edilir:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^i dx^j \quad (5.14)$$

Bu metriğe göre 00 bileşenli Ricci skaleri ile tensörü yazılırsa:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3(\dot{H} + H^2) \\ R &= 6(\dot{H} + 2H^2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Denklem (5.13) ifadesi 00 bileşeni için yazılır ve uygun ifadeler denkleme yerleştirilirse denklem (5.13) içerisine yazılırsa;

$$-3f_R(\dot{H} + H^2) + \frac{f}{2} - (\square + \nabla_0 \nabla_0) f_R = \kappa \rho_m \quad (5.16)$$

Bu denklemde $\square$ operatörü yerine tanımı koyulursa ve metriğe karşılık gelen Ricci skaleri yazılırsa denklem (5.14) şu biçimi alır:

$$-3f_R\left(\frac{R}{6} - H^2\right) + \frac{f}{2} - \frac{1}{a^2}(\nabla_i(\nabla_j f_R)\delta^{ij}) = \kappa \rho_m \quad (5.17)$$

Böylece denklem toparlanırsa Friedmann denkleminin 00 bileşeni için, 1.tip, bulunur:

$$3f_R H^2 + \frac{1}{2}(f - f_R R) + 3H\dot{f}_R = \kappa \rho_m \quad (5.18)$$

Bu birinci tip Friedmann denkleminde ufak bir kaç değişiklik yapıldığında, Enerji-Momentum tensörüyle Hubble sabiti cinsinden yazacak bir formatta yazabiliriz. Bunun için şöyle bir değişiklik önerilirse:

$$\begin{aligned} f &= R + F \\ f_R &= 1 + F_R \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mevcut değişiklik (5.18) denklemine koyulur ve $\dot{H}$ tanımıyla birlikte denkleme dahil edilirse, denklem řu hali alır:

$$H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}F_R + \frac{F}{6} + H\dot{F}_R = \kappa\rho_m \quad (5.20)$$

Denklemlerde $\kappa = \frac{8}{3}\pi G$ olarak tanımlanmıştır. Eğer denklem (5.20), denklem (2.24)'da bulunduğumuz sonuçlarla birleştirilirse, denklemin sağ tarafı şöyle olur:

$$K\rho_m = H_0^2\Omega_0 a^{-3} \quad (5.21)$$

Bu durum 00 bileşeni için bir anlam ifade etmektedir. Öte yandan denklem (5.13)'ün ij bileşeni yazılırsa, bu durumda Friedmann denklemlerinin 2.tipi $f(R)$ teorisi için bulunacaktır. $\mu = i$ ve $\nu = j$ yazılır ve $dt = ad\eta$ dönüşümü yapılırsa denklem (5.13) řu hale gelir:

$$f_R(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ij} - \frac{1}{2}f\delta_{ij} + \delta_{ij}(\nabla_0^0 + \nabla_k^k)f_R - \frac{1}{a^2}\nabla_i^j = \kappa p_m \quad (5.22)$$

Bu noktada ∇_k^k için GR'de bulunan uygun açılım yapılır ve denklem toparlanırsa, denklem řu hale gelir:

$$f_R(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ij} - \frac{1}{2}f\delta_{ij} + \delta_{ij}\ddot{F} - 2\delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}\dot{F} = \delta_{ij}Kp_m \quad (5.23)$$

$i = j$ eşitliği kullanılırsa 2.tip Friedmann denklemi de bulunmuş olunur:

$$f_R(\dot{H} + 3H^2) - \frac{1}{2}f + \ddot{F} - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{F} = Kp_m \quad (5.24)$$

Denklem (5.24)'te bir kaç değişiklik yapılarak son hali verilebilir. Denklem (5.18)'te geçen ifadeler (5.24) içinde yazılırsa, denklemin son hali şöyle olur:

$$-2F\dot{H} = \rho_m + p_m + \ddot{F} - H\dot{F} \quad (5.25)$$

5.3 $f(R)$ Teorisi ve Tedirgenmiş Metrikte Alan Denklemleri

5.bölümde $f(R)$ teorisine ilişkin gravite çalışmalarında tedirgenmemiş bir FRW metriği üzerine yoğunlaşarak, bu teorideki alan denklemlerinin normal GR'den farkını ortaya koyduk. Temel olarak GR'de R 'ye bağlı sonuçlar bulunurken, $f(R)$ gravite de alan denklemleri aynı zamanda f 'nin R 'ye bağlı fonksiyonunun da alacağı değere bağlıdır.

Tedirgenmiş durum için de benzer bir noktaya odaklanmak gerekiyor. Tedirgenmiş FRW metriği üzerinde çalışırken, çalışmanın odak noktasını büyük ölçekte yapının

oluşturulduğunu bilmek gerekiyor. Bu skalada incelediğimiz $f(R)$ teorisi, GR'den önemli farklılıklar barındırıyor. Eğer Newtonyen ayar altında metriği ifade edecek olursak şöyle yazarız:

$$ds^2 = -(1 + 2\psi)dt^2 + a^2(1 + 2\phi)(dx^i)^2 \quad (5.26)$$

GR'de durumu için anizotropik gerilim bulunmamaktadır; ancak modifiye gravite modellerinde anizotropik gerilim bulunur ve ψ ile ϕ arasındaki ilişki denklem (5.13) ile verilir. Denklem (5.13)'ün i 'nin j 'ye eşit olmadığı durumlar için kullanıldığında ψ ile ϕ arasındaki ilişki bulunur. Bununla birlikte $k \geq aH \leq 10^{-3}h/Mpc$ için uzama göre türevi olanların zamana göre türevi göz ardı edilebilir [2]. Denklem (5.13) şu hale gelir:

$$R_{ij}(1 + f_R) - \nabla_i \nabla_j f_R = 0 \quad (5.27)$$

Denklem (3.18)'deki ifadeler (5.27) içinde kullanılırsa denklem şu hale gelir:

$$\nabla_i \nabla_j f_R = (\psi + \phi)_{,ij}(1 + f_R) \quad (5.28)$$

Denklem (5.28)'de ifade edilen sağ tarafı açacak olursak:

$$\nabla_i \nabla_j f_R = f_{RRR} \frac{dR}{dx^k} \frac{dR}{dx^j} + \frac{df_R}{dR} \frac{d^2 R}{dx^i dx^j} - \Gamma_{ij}^k \partial_k f_R \quad (5.29)$$

Burada denklemin sağ tarafındaki ilk terim 2.mertebeden bir ifade getireceği için yok sayılır. Denklem (3.21)'deki R kullanılırsa R 'nin birinci türevi şöyle olur:

$$\frac{dR}{dx^k} = 2 \frac{1}{a^2} [-\partial_k \nabla^2 (2\phi + \psi)] \quad (5.30)$$

R 'nin ikinci türevi ise şöyledir:

$$\frac{d^2 R}{dx^i dx^j} = 2f_{RR} \frac{1}{a^2} (\partial_i \partial_j \nabla^2 (2\phi + \psi)) \quad (5.31)$$

Denklem (5.30) ve (5.31), denklem (5.28) içinde yazılırsa ψ ve ϕ arasındaki ilişki bulunur:

$$\psi + \phi = \frac{2f_{RR} \frac{1}{a^2} (\partial_i \partial_j \nabla^2 (2\phi + \psi))}{1 + f_R} \quad (5.32)$$

Bu denklemle birlikte, $f(R)$ teorisine ait olan Poisson denklemi bulunabilir. Poisson denklemi, bize mevcut alanların nasıl türediğine ilişkin bilgiyi verecektir. Poisson denklemini bulmak için denklem (5.13) 00 bileşenini kullanmamız gerekiyor. Ancak bunu kullanmadan önce denklem (5.13)'e Einstein tensörü cinsinden ifade edilecek olursa:

$$(1 + f_R)G_\mu^\nu + f_R \delta_\mu^\nu \frac{R}{2} - \delta_\mu^\nu \frac{f}{2} - (\delta_\mu^\nu \square - g_{\gamma\nu} \nabla_\nu \nabla_\gamma) f_R = \kappa T_\mu^\nu \quad (5.33)$$

Burada ifade edilen G_μ^ν , R, g, f tanımları gereği tedirgenmiş ve tedirgenmemiş kısımlara sahiptir. Denklemi de tedirgenmiş ve tedirgenmemiş kısımlara ayırırsak, denklemin yalnızca tedirgenmiş kısmı kalır ve denklem şu hali alır:

$$\delta f_R G_\mu^\nu + (1 + f_R) \delta G_\mu^\nu + \delta_\mu^\nu (\delta f_R \frac{R}{2} + f_R \delta \frac{R}{2} - \delta \frac{f}{2}) + \delta [(\delta_\mu^\nu \square - g_{\gamma\nu} \nabla_\nu \nabla_\gamma) f_R] = I \quad (5.34)$$

Denklem (5.34)'te yer alan $I = \kappa T_\mu^\nu$ 'dir. Denklem (5.34) için 00 bileşeni ile ilgilenilirse denklem şu hali alır:

$$(1 + f_R) \delta G_0^0 + f_{RR} \delta R R_0^0 + g^{ii} (\partial_i^2 \delta f_R - \delta \Gamma_{ii}^\sigma \partial_\sigma f_R) - g^{ii} \delta \Gamma_{ii}^\sigma \partial_\sigma \delta f_R - \delta g^{ii} (\partial_i^2 f_R - \Gamma_{ii}^\sigma \partial_\sigma f_R) = I \quad (5.35)$$

Burada uygun ifadeler denklem (3.18) ve (3.20)'den alınır, denklem şu hale gelir:

$$2 \frac{1 + f_R}{a^2} \nabla^2 \phi + \frac{3}{a^4} (1 - 2\phi) f_{RR} (-2 \nabla^2 (\phi + \psi))_{ii} - \frac{9}{a^4} (1 - 2\phi) \psi' f_R' = I \quad (5.36)$$

$f_R' = 0$ olduğuna göre ve denklem (5.32)'nin sonucu bu denklem içinde kullanılırsa:

$$\nabla^2 (\phi - \psi) = -3\kappa \frac{a^2}{1 + f_R} \delta T_0^0 \quad (5.37)$$

Burada bulunan $\delta T_0^0 = \delta \rho_m$ ise ve denklem (5.21)'deki ifade denkleme eklenirse, denklem şu hali alır:

$$\nabla^2 (\phi - \psi) = \frac{-3H_0^2 \Omega_0}{1 + f_R} a^{-1} \delta \rho_m \quad (5.38)$$

olarak yazılabilir.

Enerji-momentum tensörünün korunumundan 00 ve ij bileşenleri için ise iki farklı denklem elde edilir. 00 bileşeni için denklem:

$$\dot{\delta \rho_m} + \theta = 0 \quad (5.39)$$

bulunur. ij bileşeninden elde edilecek denklem ise şöyle ifade edilir:

$$\dot{\theta} + 2H\theta + \frac{\nabla^2 \psi}{a^2} = 0 \quad (5.40)$$

Denklem (5.39) ve (5.40)'da ifade edilen θ açısal hız ile tariflenen fiziksel bir büyüklüktür. Denklem (5.32), (5.38), (5.39) ve (5.40) bir araya getirilir ve a 'ya göre türev alınır, elde edilecek ana denklem şöyle olur:

$$\delta \rho_m'' + \delta \rho_m' \left(\frac{3}{a} + \frac{H'}{H} \right) - D \delta \rho_m = 0 \quad (5.41)$$

denklemini elde edilir. Böylece tıpkı denklem (4.16)'da olduğu gibi $f(R)$ için ISW etkisi şöyle ifade edilebilir:

$$\frac{\delta T}{T_{CMB}} = \int_{\eta_e}^{\eta} (\Psi' - \Phi') dt \quad (5.42)$$

Denklem (5.42)'nin denklem (4.16) tek farkı ise seçilen gravitasyonel büyüklüklerle alakalıdır. İki denklem bunun haricinde, aynı dönüşümler altında, eşittir.

Böylece çalışmamızın önemli bir sonucunda varmış oluyoruz. ISW etkisi alternatif gravite modelleri içinde benzer mekanizmaya sahiptir. Çalışmamızda foton jeodeziğinin, metrik tedirgemenin ve bunların fiziksel gözlemlerinin literatür taramasını gerçekleştirdik. Alternatif gravite modellerinden olan $f(R)$, fotonların izi üzerinden ISW ve Sachs-Wolfe etkileri üzerindeki etkilerine önemli bir kanı oluşturmakta ve modelin testini sağlamaktadır. İleriki çalışmalarda bu yoldan devam ederek sayısal hesaplamalar üzerinden modelin testleri üzerinde yakın bir gelecekte duracağız.

KAYNAKLAR

- [1] **Mukhanov, V.F.** 2005. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press.
- [2] **Zhang, P.** 2006. Testing gravity against the early time integrated Sachs-Wolfe effect, *Physics Review D*, **73**, 123504.
- [3] **Guth, A.H.** 1981. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Physical Review D*, **23**, 347-356
- [4] **Sachs, R.K ve Wolfe, A.M.** 1967. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background, *Astrophysical J.*, **147**, 73-218.
- [5] **Penzias, A. A. ve Wilson R.W.** 1965. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *Astrophysical J.*, **142**, 419-421.
- [6] **Carroll, S.** 2004. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley Longman, Incorporated.
- [7] **D’Inverno,** 1998. *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 5 sürüm.
- [8] **Christopherson, A.J.** 2011. Applications of cosmological perturbation theory, *Doktora Tezi*, University of London.
- [9] **Martin, J.** 2005. Inflationary Cosmological Perturbations of Quantum Mechanics Origin, *Phys.*, **669**, 199-244.
- [10] **Atsushi, J., N.** 2014. Integrated Sachs Wolfe Effect and Rees Sciama Effect, <http://arxiv.org/pdf/1404.5102v1.pdf>.
- [11] **Planck Collaboration,** 2013. planck 2013 results XIX, the integrated sachs wolfe effect, <http://arxiv.org/pdf/1303.5079v2.pdf>.
- [12] **Starobinsky, A.A.** 1980. A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Physics Letters B*, **91**, 99-102.
- [13] **Shin’ichi, N. ve Odintsov, S.D.** 2008. Dark energy, inflation and dark matter from modified gravity, <http://arxiv.org/pdf/0807.0685v1.pdf>.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Irmak ILDIR

Doğum Yeri ve Tarihi : Kadıkoy, 06/09/1989

Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi,

Y. Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi,