

**KREDİBİLİTE TEORİSİNDE PARAMETRE TAHMİNİ VE
İSTATİSTİKSEL BİR YAKLAŞIM**

Meral EBEGİL

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2007
ANKARA**

Meral EBEGİL tarafından hazırlanan KREDİBİLİTE TEORİSİNDE PARAMETRE TAHMİNİ VE İSTATİSTİKSEL BİR YAKLAŞIM adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Müslim EKNİ
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Fevzi KUTAY _____

Üye : Prof.Dr.Müslim EKNİ _____

Üye : Prof.Dr.Ömer ESENSOY _____

Üye : Prof.Dr.Reşat KASAP _____

Üye : Prof.Dr.Hamza GAMGAM _____

Tarih : 12/07/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meral EBEGİL

KREDİBİLİTE TEORİSİNDE PARAMETRE TAHMİNİ VE İSTATİSTİKSEL BİR YAKLAŞIM

(Doktora Tezi)

Meral EBEGİL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Temmuz 2007

ÖZET

Kredibilite teorisi, geçmişe ait veriler ile son döneme ilişkin veriler arasında dengeli bir paylaşırma yaparak hayat dışı sigorta branşlarında prim değerini belirlemek için kullanılan ağırlıklı tahmini hesaplama yöntemidir. Son yıllarda iyi bilinen bazı istatistiksel modeller, kredibilite teorisine uygulanmaktadır. İstatistiksel modeller içinde yer alan ve geniş bir kullanım alanına sahip olan “karma etki modeli” bunlardan bir tanesidir. Çalışmanın amacı doğrultusunda kredibilitenin temelinde yer alan mantığa göre klasik kredibilite modellerinden Bühlmann modeli kredibilite teorisinin Bayesci modellemesi olarak bilinir. Bühlmann-Straub modeli ise Bühlmann modelinin genelleştirilmiş halidir. Bu çalışmada, Bühlmann-Straub modeli ile Karma etki modelinin özel bir hali olan tek faktör rassal etki modeli arasındaki ilişkiler teorik olarak incelenmiştir. Çalışmada ayrıca üç sigortalı grubu ve onbeş dönemlik gerçek bir veri seti için Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve tek faktör rassal etki modeli ile hasar tutarı modellemeleri yapılarak, her iki model için de prim tahmin değerleri hesaplanmıştır. Tek faktör rassal etki modeli için en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemleri kullanılarak parametre tahmin değerleri elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmalı olarak yorumlanmıştır.

Bunu takiben Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve tek faktör rassal etki modellerine ait prim değerleri, farklı grup ve dönem sayıları ile farklı dağılım ve dağılım parametreleri için simülasyon tekniği kullanılarak tahmin edilmiştir.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Bayesci istatistik, kredibilite modelleri, karma etki modeli
Sayfa Adedi : 143
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Müslim EKNİ

**PARAMETER ESTIMATION IN CREDIBILITY THEORY AND
A STATISTICAL APPROACH**

(Ph.D.Thesis)

Meral EBEGİL

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

Temmuz 2007

ABSTRACT

Credibility theory which is used to determine the premium in the non-life branches of insurance is a calculation method which used for making weighted estimation balanced allocation between past period data and recent period data. In recent years, some well known statistical models are being applied to credibility theory. One of such statistical models is “mixed effects model” which presents itself in a wide range of applications. In line with the logical basis of credibility, the Bühlmann model being one of the classical credibility models exhibits a Bayesian approach to credibility theory. The Bühlmann-Straub model on the other hand is indeed a generalized form of the Bühlmann model. In this study, it was aimed to examine and reveal theoretically the relations between the Bühlmann-Straub model and the random effects model for the one-way classification which is a special form of the mixed effects model. Furthermore, using the real data set belonging to three groups of insureds and fifteen time periods, a loss modelling was carried out for both Bühlmann-Straub credibility model and the random effect model for the one-way classification, whereby estimations of premiums for both models were calculated. For the case of the random effect model for the one-way classification, by employing maximum likelihood and restricted maximum likelihood methods, parameter estimations were obtained and the results were comparatively interpreted. In addition, Premium values estimations were estimated by simulation method for

both Bühlmann-Straub model and random effect model for the one-way classification by using different insured groups and different time periods and also by assuming different distributions and different distribution parameters.

Science Code	: 205.1.066
Key Words	: Bayesian statistics, credibility models, mixed effects model
Page Number	: 143
Adviser	: Prof.Dr.Müslim EKNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Müslim EKNİ'ye ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Tez İzleme Komitemde yer alan Sayın Hocalarım Prof. Dr. Hamza GAMGAM ve Prof. Dr. Fevzi KUTAY'a ve ayrıca desteklerinden dolayı diğer hocalarım ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim. Yaşamım ve çalışmalarım boyunca ilgi ve sevgileriyle beni sürekli destekleyen annem ve babama, sevgili eşim Necip ve biricik oğlum Aytuna'ma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KREDİBİLİTE KAVRAMI.....	8
2.1. Sigortacılıkta ve Kredibilite Teorisinde Kullanılan Bazı Önemli Kavramlarla İlgili Tanımlar	9
2.2. Hedefe Atış Örneği	11
2.3. Zar-Rulet Örneği	15
2.4. Kredibilite Problemi.....	21
2.5. Kredibilite Teorisi Nedir?	23
2.5.1. Portföydeki heterojenliğe bir çözüm olarak kredibilite teorisi	25
3.BAYESÇİ YAKLAŞIM	28
3.1. Kredibilite Teorisi İçin Bayesci Yöntem	28
3.2. Bayesci Kredibilitede Akraba (Conjugate) Önsel Dağılımlar	35
3.2.1. Normal-normal akraba önsel dağılım	35
3.2.2. Poisson-gamma akraba önsel dağılım.....	39
4. KREDİBİLİTE MODELLERİ.....	43

Sayfa

4.1. Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite Modeli	43
4.1.1. Tam kredibilite (full credibility).....	44
4.1.2. Kısmi kredibilite (partial credibility)	47
4.2. Klasik Kredibilite Modelleri	48
4.2.1. Bühlmann kredibilite modeli.....	49
4.2.2. Bühlmann-Straub kredibilite modeli.....	60
4.2.3. Doğrusal modeller	69
5. VERİ YAPISI VE ANALİZİ	79
5.1. Tıbbi Mesleki Sorumluluk (Medical Malpractice) Sigortası Hakkında Genel Bilgi.....	79
5.2. Tıbbi Mesleki Sorumluluk Sigortası Veri Yapısı.....	79
5.3. Toplam Hasar Tutarlarının Modellenmesi ve Analizleri	83
5.3.1. Her poliçe sahibi (exposure) için ortalama hasar tutarlarının kullanılarak toplam hasar tutarlarının modellenmesi.....	83
5.3.2. Oransal hasar sıklıklarını ve hasar başına hasar tutarlarını kullanarak toplam hasar tutarlarının modellenmesi	92
5.4. Sigortalı Başına Hasar Sayılarının Modellenmesi	104
5.5. Prim Tahminlerini Elde Etmek Üzere Monte Carlo Simülasyon Çalışması	107
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	111
KAYNAKLAR	114
EKLER.....	117
EK-1 Eş. 4.79 ve Eş. 4.80 eşitlikleri ile verilen ENDOST ve ENDOSK'ların Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST ve ENDOSK'ları ile aynı olduklarının gösterilmesi	118
EK-2 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar	120

Sayfa

EK-3 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde EÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar.....	121
EK-4 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde yılın küpü KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar	122
EK-5 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar	123
EK-6 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde EÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar.....	124
EK-7 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde yılın küpü KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar	125
EK-8 Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler	126
ÖZGEÇMİŞ	142

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Mümkün durumlar ve olasılıkları	16
Çizelge 2.2. Kestirici dağılım olasılık değerleri.....	18
Çizelge 2.3. Bayesci ve kredibilite tahmin değerleri	21
Çizelge 2.4. Kredibilite probleminde genel veri görünüşü	23
Çizelge 2.5. Norberg örneğinde bir sigorta şirketine ait 20 sigortalının oluşturduğu 10 yıllık hasar deneyimi.....	26
Çizelge 4.1. Tek yönlü varyans analizi tablosu.....	67
Çizelge 5.1. Toplam sigortalı sayısı ve sigortalı başına ortalama hasar tutarları.....	81
Çizelge 5.2. Hasar başına ortalama hasar tutarları ve toplam hasar sayısı	82
Çizelge 5.3. Her sigortalı sınıfına ait yıllık toplam hasar tutarları.....	82
Çizelge 5.4. Sigortalı başına ortalama hasar tutarlarına ait Bühlmann-Straub sonuçları.....	86
Çizelge 5.5. Kredibilite ve DKE modeline ait ENDOSK'ların karşılaştırılması	92
Çizelge 5.6. Her sigortalı sınıfı için yıllık toplam sigortalı sayısı ve hasar sıklık oranları	94
Çizelge 5.7. Hasar sıklık oranlarına ait Bühlmann-Straub sonuçları	95
Çizelge 5.8. Kredibilite ve DKE modeline ait ENDOSK'ların Karşılaştırılması	100
Çizelge 5.9. Toplam hasar tutarı ile ilgili kredibilite ve DKE modeline ait prim tahmin değerleri	102
Çizelge 5.10. Değişen sigortalı sayılarını kullanarak yapılan, hasar sayısı modellemesinde karma etki modelinin matris şablonu.....	105

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. A, B, C atıcılarının atışlarının sonuçları	12
Şekil 2.2. Kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış	13
Şekil 2.3. A, B, C atıcılarının atışlarının hedef merkezleri etrafında yoğunlaştığında kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış	14
Şekil 2.4. Süreç varyansları Şekil 2.2'deki gibi kalırken hedef merkezleri birbirlerinden uzaklaştırıldığında kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış	14
Şekil 5.1. Sigortalı başına ortalama yıllık hasar tutarları	84
Şekil 5.2. DKE Modellemesinde KEÇOB'a ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu.....	87
Şekil 5.3. DKE Modellemesinde EÇOB'a ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu.....	88
Şekil 5.4. DKE modellemesinde KEÇOB-yılın küpü'ne ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu	91
Şekil 5.5. Sigortalı başına yıllık ortalama hasar sayısı	93
Şekil 5.6. DKE modellemesinde KEÇOB'a ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu.....	98
Şekil 5.7. DKE modellemesinde EÇOB'a ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu.....	98
Şekil 5.8. DKE modellemesinde KEÇOB-yılın küpü'ne ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu.....	99

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
Z	Kredibilite faktörü
μ	Hipotetik ortalamaların beklenen değeri
ν	Süreç varyansının beklenen değeri
a	Hipotetik ortalamaların varyansı
m_i	i -inci sigorta döneminde riske maruz kalma değeri
m	Toplam riske maruz kalma değeri
C	Kredibilite prim değeri
α	Rassal etki vektörü
β	Sabit etki vektörü
Dr	Doktorlar
H	Hastaneler
D	Diğerleri

Kısaltmalar**Açıklama****GDM**

Genelleştirilmiş Doğrusal Model

HGDM

Hiyerarşik Genelleştirilmiş Doğrusal Model

GDKM

Genelleştirilmiş Doğrusal Karma Model

GTEE

Genelleştirilmiş Tahmin Edici Eşitlikleri

SVBD

Süreç Varyansının Beklenen Değeri

HOV

Hipotetik Ortalamaların Varyansı

ENDOST

En İyi Doğrusal Sapmasız Tahmin Edici

ENDOSK

En İyi Doğrusal Sapmasız Kestirici

KEÇOB

Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik

EÇOB

En Çok Olabilirlik

GEKK

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler

KME

Karma Model Eşitlikleri

DKE

Doğrusal Karma Etki

b.ve a.d.

Bağımsız ve aynı dağılımlı

AIC

Akaike'nin Bilgi Kriteri

BIC

Schwarz'ın Bayesci Bilgi Kriteri

1.GİRİŞ

Kredibilite teorisi, 1890’ların sonlarına doğru işverenlerin mesuliyet sigortalarının fiyatlandırma çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Aktüerya uzmanlarının bu konuya ilgi duymaları ise Wisconsin eyaletinde 1911’de devlet işçilerinin tazminatlarına ilişkin ilk yasanın çıkmasıyla olmuştur. 7 Kasım 1914 tarihinde, daha sonra adı *Casualty Actuarial Society (CAS)* olarak değiştirilen *the Casualty Actuarial and Statistical Society of America (CASSA)* kurulmuştur. Bu dernek aynı yıl, sınırlı deneyimle sigortalı tarafından ödenecek sigorta primlerini tesbit etmek amacıyla işçilerin tazminat sorunlarıyla ilgilenmeye başlamıştır.

Hasar Aktüerya Bilimine (Casualty Actuarial Science), en önemli katkıyı kredibilite kavramı yapmıştır. Tam kredibilite (Full Credibility) için ilk makale Mowbray (1914) tarafından yazılmıştır. Kredibilite kuramının başlangıcı olan bu makale, verilere tam kredibilite verilebilmesi için gerekli kriteri ortaya koymuştur [Mowbray, 1914]. Bu “*Geleneksel Kredibilite*” veya “*Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite (Limited Fluctuation Credibility)*” olarak adlandırılmaktadır. Bu model, gözlemlerdeki rassal dalgalanmaların tahminler üzerindeki etkisini sınırlamaktadır

Klasik Kredibilite (the Greatest Accuracy Credibility) için “Normal-Binomial modeli” öneren Whitney (1918) tarafından geliştirilmiştir. Bu bir sonraki sigorta dönemine ilişkin tahmin sonuçlarının, işverenin hasar talepleri ile o gruba ait geçmiş deneyimler ışığında beklenen hasar sayısı arasında ağırlıklı bir kredibilite olarak ifade edilebilir [Whitney, 1918].

Arthur Bailey (1945 ve 1950) yıllarında yayınladığı makaleleriyle klasik kredibilite ile en küçük kareler yaklaşımının temelini oluşturmuştur. Modern kredibilite teorisinin kurucusu sayılan Arthur Bailey’in çalışmaları kredibilite teorisine Bayesci (Bayesian) metodoloji ile yol gösterir [Bailey, 1945; Bailey, 1950].

Seçilen bir model için Bayesci istatistiksel analiz, ilk önce eldeki mevcut bilginin niceliksel hale getirilmesi ve varsayımlarla başlar. Bu önsel (prior) girdiler daha

sonra gözlemlenen verilerden olabilirlik (likelihood) fonksiyonu ile olasılıksal olarak niceliksel hale getirilen bilgilerle birleştirilir. Bir başka deyişle, bu önsel girdiler daha sonra gözlemlerden olabilirlik fonksiyonu ile elde edilen bilgilerle bir araya getirilir. Önsel verilerle olabilirlik kombinasyonunun mekanizması, Bayes yaklaşımını oluşturur. Daha teknik bir ifade ile, geleceğe ait bilgiler, geçmişe ait bilgilerle ve olabilirlik ile orantılıdır.

$$\text{sonsal} \propto \text{önsel} \times \text{olabilirlik}$$

Geçmişten geleceğe olan bu süreç Bayesci öğrenme olarak isimlendirilir. Mayerson (1964) kredibiliteye Bayesci yaklaşımı sunar ve kredibilite teorisinde sağlam bir teorik temel kurulmasına ilişkin yönetime dikkat çeker [Mayerson, 1964]. Bühlmann 1967’de, dağılımdan bağımsız, Bayes yönteminin en iyi doğrusal yaklaşımı şeklinde ifade edilebilecek, bir kredibilite formülü elde ederek Bühlmann kredibilite modelini oluşturmuştur [Bühlmann, 1967]. Bühlmann ve Straub 1970’deki çalışmalarında Bühlmann modelinin genelleştirilmiş hali olan Bühlmann-Straub kredibilite modelini sunmuşlardır [Bühlmann ve Straub, 1970].

Kredibilite teorisi 1970’lerden sonra hızlı bir gelişim sürecine girmiştir. Jewell 1975’de hiyerarşik modeli, Hachemeister ise 1975’de doğrusal regresyon modelini geliştirmiştir [Witting, 1987; Kremer, 1994]. Bir sonraki yıl De Vylder (1976) Hilbert Uzayı terimleriyle yarı doğrusal ve optimal yarı doğrusal kredibilite modelini oluşturmuştur. Kuram üzerine çalışmalar 1970-1980 yılları arasında genelleştirmeler üzerine, 1980’den sonraki yıllarda ise parametrelerin tahmin edicileri üzerine yoğunlaşmıştır. Dönemin önemli çalışmaları De Vylder (1978,1981), Norberg (1980), Gisler (1980) ve Dubey ve Gisler (1981) tarafından yapılmıştır [De Vylder, 1978; De Vylder, 1981; Kremer, 1994; Schnieper, 1995]. 1980’ li yılların ortasından 1990’ lı yıllara kadar yavaşlayan süreç 1990’ larda yeniden hızlanmış ve bu dönemde çalışmalar optimal parametre tahmin edicileri üzerine yoğunlaşmıştır. 1980’li yılların sonunda ve 1990’lı yılların başında, modern ve yüksek hızlı bilgisayarların gelişmesiyle Bayesci metodoloji yavaş yavaş kredibilite teorisinin temeline

oturmuştur. Kredibilite teorisi Bayes üzerine kurulmuş bir teoridir. Kredibilite daha tanımlayıcı bir analiz olan Bayesci analizin kısaltılmış bir şekli olarak düşünülebilir.

Kredibilite kavramı için Bayes dışı çalışmalar da yapılmaktadır. Gerber (1982) ve Norberg (1985) kredibilite için Bayes dışı tahmin ediciler üzerine yapılan çalışmalardandır. Norberg (1985), Gerber (1982)'in çalışması için “*amacına ulaşmamış bir çalışma (fruitless)*” tanımlamasını yapmakta ve Bayes dışı tahmin edicilerin modelin yapısını oluşturmaktan ziyade, tahmin ediciler için sınırlamalar getirdiğini belirtmektedir [Norberg, 1985]. Bayes dışı çalışmalar uygulamalarda henüz çok fazla yer almamaktadır.

Klugman 1992’de, her risk için koşullu kayıp dağılımı ve parametrik bir önsel bilgi seçerek, kredibilite teorisine Bayesci bir analiz getirmiştir [Klugman, 1992]. Son on yılda yüksek hızlı bilgisayarların ve istatistiksel paket programların mevcudiyeti ve yoğun biçimde kullanılmaları, daha karmaşık yöntemlerin başlatılmasına imkan vermiştir. Makov ve arkadaşları (1996) aktüeryal modellemeye Bayesci yaklaşımların getirilmesine ön ayak olmuşlardır [Makov ve ark., 1996]. Bu tekniklerden bazıları, yoğun hesaplamalar gerektiren Bayesci metotla sonuca varma yöntemini, Markov zinciri Monte-Carlo yaklaşımını esas almaktadır.

Kredibilite teorisine ilişkin son dönemlerdeki gelişmelerde, aktüerya uzmanları iyi bilinen bazı istatistiksel metotları uygulamaktadırlar. Young 1997’de karar kuramını kullanarak hasar fonsiyonunu en küçükleyen bir kredibilite formülü geliştirmiştir [Young, 1997]. Kredibilite teorisinde son dönem yeniliklerinden biri de varyans bileşenleri modelleridir [Dannenburg, 1995]. Varyans bileşenleri modeli de doğrusal modellerden oluşturulmuştur [Goulet, 1998]. Son yıllardaki çalışmalara bakıldığında, kredibilite teorisinin risk sınıflandırmasında ağırlıklı olarak yer aldığı görülmektedir. Bu çalışmalara örnek olarak Turner (2004)’ın risk sınıflandırma çalışması gösterilebilir [Turner, 2004].

Ağırlıklı olarak hayat dışı sigorta branşlarında (kasko sigortası, yangın sigortası, hırsızlık sigortası, sağlık sigortası,...vb) kullanılan kredibilite teorisi ile ilgili

alışmalara hayat sigortasında da rastlanmaktadır. Buna rnek olarak, Hardy ve Panjer 1998’de yaptıkları çalışma gösterilebilir [Hardy ve Panjer, 1998].

Geçtiğimiz on yılda aktüeryal (sigortacılıkta kullanılan) verilerin modellenmesinde, Genelleştirilmiş Doğrusal Model (GDM) ler yaygın şekilde kullanılan istatistiksel bir araç olmuştur. Bu konuda başlangıç, McCullagh ve Nelder (1989)’in çalışmalarında sundukları aktüeryal örneklerle yapılmıştır [McCullagh ve Nelder, 1989]. Frees ve arkadaşları (1999, 2001) aktüeryal anlamda doğrusal karma modellere giriş konusunda bir çalışma yayınlamışlardır. Bu modellerin, ödenecek prim miktarının belirlenmesinde (ratemaking) nasıl kullanılabileceğini göstermişlerdir [Frees ve ark., 1999; Frees ve ark., 2001]. Nelder ve Verrall (1997), hiyerarşık genelleştirilmiş doğrusal model (HGDM) leri kullanarak, klasik kredibilite teorisinin GDM’ler erevesi içinde yorumlanmasına imkan veren bir yöntem tanımlamışlardır. Bu yöntemde, kredibilite teorisinin içinde yer alan Bühlmann modeli için kredibilite formülünü, HGDM’lerden yararlanarak üstel aileler için nasıl türetildiği gösterilmiştir. Diğer bir ifadeyle, Bühlmann kredibilite modelinin genelleştirilmiş doğrusal karma model (GDKM) ler içinde yer alan HGDM’lerle bağlantısı kurulmuştur [Nelder ve Verrall, 1997]. Ebegil (2006), Nelder ve Verrall (1997)’in çalışmalarını, Bühlmann-Straub kredibilite modelinin HGDM’lerle bağlantısı kurarak genişletmiştir [Ebegil, 2006].

Standart GDM’lerde, kullanılan rassal değişkenler bağımsız olmalıdır. Ancak birçok aktüeryal problemde ve birçok genel istatistik probleminde değişkenlerin bağımsız olduğu varsayımı çoğu kez sağlanmaz. Yani, aktüerlerin elinde, çoğu zaman tekrarlanan ölçümler (veriler) ya da uzunkesit veriler (longitudinal data) (yani, zaman içinde tekrarlanan ölçümlere dayanan veriler) mevcut olduğu için GDM’ler erevesi içinde bu tür verileri modelleyecek istatistik teknikler gerekmektedir.

Birbirleriyle ilişkili veriler için, GDM’lerin iki geliştirilmiş versiyonu mevcuttur. Bunlardan biri marjinal modeller diye adlandırılan ve genelleştirilmiş tahmin edici eşitlikleri (GTEE) ni (generalized estimating equations) esas alan modellerdir. Diğer

ise, GDKM'lerdir. GDKM'ler ortalamanın dönüşümünü hem sabit, hem de rassal etkilerin doğrusal bir fonksiyonu olarak modellemektedirler.

Laird ve Ware (1982)'nin çalışmalarından bu yana doğrusal karma modeller uzunkesit verileri modellemekte yaygın olarak kullanılmaktadırlar (örneğin, bioistatistikte ve çevresel istatistikte) [Laird ve Ware, 1982]. Karma modeller, klasik doğrusal regresyon modellerinin kapsamını genişleterek, geleneksel sabit etkilerin yanısıra rassal ya da öğeye özgü etkilerin de ortalamanın yapısında (oluşumunda), kapsama alınmasına, imkan verirler. Bir diğer deyişle, doğrusal regresyon modelinde, ortalamanın (mean) oluşumunda sadece sabit etkiler dikkate alınırken, karma modellerle, rassal etkileri de modele katmak mümkün olmaktadır.

Bu çalışmada, kredibilite modellerinden, Bühlmann kredibilite modelinin genelleştirilmiş hali olan Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile kredibilite prim fiyatlarını “tahmin etmek” için en iyi doğrusal sapmasız kestiricileri kullanarak karma etki modelinin özel bir hali şeklinde ifade etmek öncelikli amaçtır. Klasik kredibilite modellerini, istatistiksel modeller çatısı içine yerleştirmenin avantajları, aktüerlerin kredibilite modeli seçeneklerini zenginleştirmek ve aktüerlere model seçimi için kuralları olan disiplinli bir süreç sunmaktır. Bu amaçla Bühlmann-Straub modeli ile doğrusal modeller içinde yer alan karma etki modelinin özel bir hali olan tek faktör rassal etki modeli arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunun için, tek faktör rassal etki modeline ait en iyi doğrusal sapmasız tahmin edici (ENDOST) ve en iyi doğrusal sapmasız kestirici (ENDOSK) lerin Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST ve ENDOSK'ları ile aynı oldukları teorik olarak gösterilmiştir. Ayrıca rassal etki modeline ait ENDOST ve ENDOSK'ların en çok olabilirlik (EÇOB) ve kısıtlanmış en çok olabilirlik (KEÇOB) tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu çalışma, doğrusal modeller ailesinin bir üyesi olan karma etki modelinin, kredibilite modellerinden Bühlmann-Straub modeline ait prim tahmin edicisinin elde edilmesinde kullanıldığından dolayı önem taşımaktadır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, temel sigortacılık kavramlarının yanı sıra kredibilite teorisinin doğal yapısını en iyi şekilde anlatan iki örnek verilmektedir.

Kredibilite teorisi, son döneme ilişkin veriler ile önsel hipotez arasında (geçmişe ait veriler arasında) dengeli bir paylaşırma sonucu ortaya çıkan gerçek beklentinin doğrusal tahminini içermektedir. Yani kredibilite, ağırlıklı tahmini hesaplamak için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma işlevi kredibilite faktörü Z ile yapılmaktadır. Z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler kredibilite modelleri olarak isimlendirilir. Buradan hareketle bu çalışmanın üçüncü bölümünde klasik kredibilite modellerinin ana fikrini oluşturan Bayes yaklaşımı anlatıldıktan sonra, dördüncü bölümde temel kredibilite modelleri açıklanmıştır. Temel kredibilite modelleri, sınırlı dalgalanmalı kredibilite (*the limited fluctuation credibility*) ve klasik kredibilite (*the greatest accuracy credibility*) olarak iki ana başlık halinde verilebilir. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite modeli, tam kredibilite (*full credibility*) ve kısmi kredibilite (*partial credibility*) olarak incelenebilir. Daha sonra sigorta uygulamalarında kredibilite'nin Bayesci modellemesi olan, klasik kredibilite modelleri, Bühlmann ve Bühlmann-Straub modelleri tanıtılmıştır. Bu modellerin oluşturulması sırasında ana hatlar Klugman ve arkadaşları (1998)'den alınmıştır [Klugman ve ark., 1998]. Yeri geldiğinde detaylar, yorumlar ve bazı açıklayıcı notlar eklenmiştir. Ayrıca çalışmanın amacı çerçevesinde kredibilite modellerinden Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile Karma etki modeli içinde yer alan tek faktör rassal etki modeli arasındaki ilişki, teorik olarak verilmeye çalışılmıştır.

Uygulama bölümünde, kredibilite modellerinden Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve karma etki modeli kullanılarak üç sigortalı grubu ve onbeş dönemlik gerçek bir veri seti üzerinde hasar tutarı ve hasar sayısı modellemesi yapılmıştır. Bu amaçla her iki modellemede de öncelikle Bühlmann-Straub modeline ait prim tahmin değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra S-Plus paket programı yardımıyla karma etki modeline ait ENDOST ve ENDOSK parametre tahmin değerlerini hesaplamak amacıyla EÇOB ve KEÇOB tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Bulunan bu değerler Bühlmann-Straub modelinin tahmin değerleriyle karşılaştırılmış ve Bühlmann-Straub modeli için en iyi model seçilmiştir. Ayrıca MATLAB paket programından yararlanılarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve tek faktör rassal etki modellerine ait prim tahminleri için, farklı grup ve dönem sayıları ile farklı dağılım ve dağılım parametrelerinin 1000 kere

tekrarlanmasına dayalı bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunun sonucunda her iki modele ait prim tahmin değerlerinin farklı durumlarda nasıl hareket ettikleri incelenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

2. KREDİBİLİTE KAVRAMI

İstatistiksel olarak, kredibilite teorisi sonuca sezgisel olmayan bir biçimde ulaşmayı hedefleyen bir yöntemdir. Önsel bilginin varlığında, örnek ortalaması veya başka sapmasız tahmin ediciler kullanılabilir. Ancak kredibilite teorisi, bu deneyime sadece kısmi ağırlık verir ve geri kalan ağırlığı diğer (güncel) bilgilerden oluşan tahmin ediciye verir. Kredibilite konusunda ilk tanım Mowbray (1914) tarafından yapılmıştır. Mowbray çalışmasında, poliçelerin fiyatlandırılması amacıyla bir riske ilişkin geçmişe ait bilgi ve deneyimlerin miktarını “*kredibilite*” olarak tanımlamıştır. Bu nedenle, kredibilite, hasar aktüerya biliminde (casualty actuarial science) en önemli yöntemlerden birisidir [Mowbray, 1914]. Öncelikle kredibilite’nin yapısını anlatırken, sigortacılıkla ilgili bazı kavramlar kısaca tanımlanacak ve daha sonra kredibilite teorisinin temelini oluşturan tanımlar literatürde yer alan iki örnek ile açıklanmaya çalışılacaktır. İlk örnekte, süreç varyansı, hipotetik ortalamalar,...vb gibi kredibilite’nin temel kavramları şekil üzerinde anlatılmaktadır. Diğer örnekte ise, kredibilite teorisinin temelini oluşturan,

$$\text{Toplam Varyans} = \left(\begin{array}{c} \text{Süreç Varyansının} \\ \text{Beklenen Değeri} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Hipotetik Ortalamaların} \\ \text{Varyansı} \end{array} \right)$$

yapısına nasıl ulaşıldığı gösterilmektedir. Bu yapı X ve Y rassal değişkenler olmak üzere,

$$\text{Var}(Y) = E_X \left[\text{Var}_Y(Y / X) \right] + \text{Var}_X \left(E_Y[Y / X] \right)$$

biçiminde de ifade edilebilir [Herzog, 1994].

2.1. Sigortacılıkta ve Kredibilite Teorisinde Kullanılan Bazı Önemli Kavramlarla İlgili Tanımlar

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında yardımcı olması açısından bazı sigorta ile ilgili kavramları tanımlamakta fayda vardır. Kredibilite problemini ortaya koymakta faydalı olacak Klugman ve arkadaşları (1998) tarafından yapılan tanımlar üzerinde durulacaktır [Klugman ve ark., 1998; Başak Sigorta, 1990].

Risk (risk): Kayıpla sonuçlanabilecek bir belirsizlik veya sigortalanan tehlike olarak tanımlanmaktadır.

Bireysel Riskler (personal risks): Direkt olarak bireyi etkiler. Gelir kazanma yeteneğinin kaybedilmesi üzerine gelir kaybının gerçekleşmesi riskidir.

Özel Riskler (particular risks): Bireysel olaylardan kaynaklanan kayıpları gerektirir ve tüm grup yerine bireyleri etkiler. Bazen bireyin kendi hatasından kaynaklanır.

Temel Riskler (fundamental risks): Ekonomi içindeki bir grubu ya da büyük sayıdaki bir insan topluluğunu ya da tüm ekonomiyi etkileyen risklerdir.

Yalın Riskler (pure risks): Hasar oluşma riskinin mevcut olması veya durumun aynı şekilde devam etmesidir.

Belirsizlik (uncertainty): Gelecekte ne olup olamayacağına dair bir bilgi olmayışından doğan şüphe durumudur.

Riziko (hazard): Kayıp olasılığı veya kaybı yaratan veya şiddetini artıran bir koşuldur.

Sigorta (insurance): Aynı risk ile karşı karşıya bulunan çok sayıda kişinin bireysel olarak belirsiz olan hasar olasılığını belirgin duruma getirmek ve olasılığın gerçekleşmesiyle ortaya çıkan zararları birlikte karşılamak amacıyla risk yönetim ve

sorumluluğu taşıyan bir kişi veya kurum tarafından bir araya getirilmesidir. Sigorta öyle bir gruplaşmadır ki, aynı cins tehlikeye maruz kişiler, belirli bir bedel karşılığı toplanan miktar, sadece o tehlikeye bizzat maruz kalanların zararının telafisi için kullanılır.

Sigorta Poliçesi (insurance policy): Prim denilen belli bir miktardaki belli bir bedel alan sigortacının, belli bir hasar sonucu kayıp meydana geldiğinde sigorta bedeli olarak adlandırılan, belirli bir miktarı sigortalıya ya da sigortanın sorumlu olduğu hallerde zarar gören üçüncü kişiye ödemeyi kabul ettiğini gösteren bir sözleşmedir.

Prim (premium): Poliçe sahibinin sigorta teminatı karşılığında sigortacıya ödediği bedel.

Sigortacı (insurer): Sigortacı, sigorta sözleşmesinin taraflarından biri olup, oluşan hasarları kendi bünyesinde değil, aynı risklerle karşı karşıya olan kişileri bir araya getirerek ve bunlardan aldığı primleri bir havuzda toplayarak bireysel risklerin oluşması halinde meydana gelen zararları, bu havuzdan karşılayarak risk yönetimini üstlenen bir kurumdur.

Sigortalı (insured): Sigorta sözleşmesinin taraflarından biridir. Prim ödemek suretiyle rizikoyu, sigorta şirketine devreden ve bunun karşılığında sözleşmeden doğan borç ve yükümlülükleri üzerine alan kişidir.

Kayıp Olayı (loss event) veya Hasar (claim): Sigortalının veya bir grup sigortalıların sigorta sözleşmeleri tarafından potansiyel olarak teminat altına alınan zararlara maruz kalmaları durumudur.

Kayıp (loss): Bir sigortalının veya bir grup sigortalıların bir hasar oluşumu neticesinde maruz kaldıkları zararın maddi bedelidir. Hasar sonucunda oluşacak kayıp sıfır da olabilir.

Kredibilite (credibility): Bir grup veya bir bireyin beklenen kayıp miktarını daha iyi tahmin etmek (veya bunlarla ilgili herhangi bir istatistiksel büyüklüğü tahmin etmek) amacıyla bu grup veya bireye ait geçmiş deneyimlerin birleştirilmesi işlemine *kredibilite* denir.

Kredibilite Faktörü (credibility factor): Verilen bir problem için $C = ZR + (1 - Z) H$ formülü kullanıldığında, Z 'nin değeri *kredibilite* veya *kredibilite faktörü* olarak adlandırılır. Kredibilite faktörü Z ,

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

şeklinde ifade edilir. Burada n , deneme(dönem)lerin sayısı veya riske maruz kalan birim sayısı ve k ,

$$k = \frac{\text{Süreç Varyansının Beklenen Değeri}}{\text{Hipotetik Ortalamaların Varyansı}} = \frac{SVBD}{HOV}$$

dır.

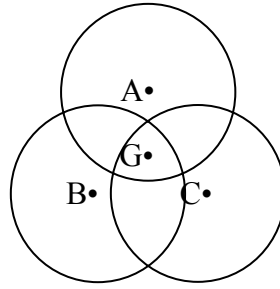
Riske Maruz Kalma Birimi (exposure unit): Primlerin tespitinde esas alınan temel ölçü birimidir.

2.2. Hedefe Atış Örneği

Philbrick (1981)'de kredibilite'ye ait bazı temel kavramları grafiksel olarak açıklamak için amacına uygun bir hedefe atış örneği kullanmıştır [Philbrick, 1981]. Bu örneği aşağıda anlatılacağı gibi basitleştirebiliriz. Her bir atıcının seçilme olasılıkları eşit olmak üzere A, B ve C gibi üç atıcının bulunduğunu ve bunlardan birinin rassal olarak seçildiğini varsayalım. Kimliği bizce bilinmeyen seçilen atıcı, belli bir uzaklıktan belli bir hedefe nişan alıp bir atış yapıyor. Amaç, seçilen atıcı'nın

ilk atışında hedefte vurduğu yer gözlemlendikten sonra, bir sonraki atışında nereyi vurabileceğinin tahmin edilmesidir.

Elimizde bazı ek ön bilgiler de bulunmaktadır. Aynı hedefe çok sayıda atış yapan her üç atıcının da atış sonuçları incelendiğinde her birinin Şekil 2.1’de görüldüğü gibi birbiri üstüne gelen üç ayrı daire içinde tekdüze olarak dağıldıkları gözlemlenmiştir. Şekil 2.1’de A, B ve C ile gösterilen noktalar her bir dairesel hedefin ortalamasını, yani daire merkezlerini göstermektedir. G noktası ise, tüm atışların yani her üç dairesel hedefin merkezlerinin ortalaması veya ağırlık merkezidir.

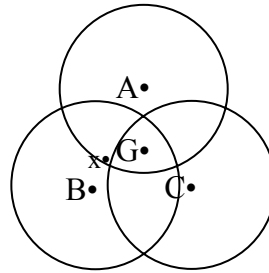


Şekil 2.1. A, B, C atıcılarının atışlarının sonuçları

Her üç dairesel hedefin her birinin merkezi, bu hedefe karşılık gelen atıcının atışlarının hipotetik ortalamasıdır. Ağırlık merkezi olan G noktası ise, bu hipotetik ortalamaların ortalamasıdır. Genel olarak, hipotetik ortalama, risk karakteristiklerinin kombinasyonu verilmişken koşullu bir ortalama değildir. Bu örnekte hipotetik ortalamaların varyansı, üç hedefin ortalamaları ile G noktası arasındaki uzaklıkların bir fonksiyonudur, ya da G ile A, B ve C noktaları arasındaki uzaklıkların karelerinin ortalamasına eşittir. Diğer yandan, süreç varyansı, her bir atıcı için gerçek atış noktalarıyla, dairesel hedef merkezleri (her bir atıcı’nın hipotetik ortalaması) arasındaki uzaklıkların ortalama karesidir. Genel olarak her süreç, hasar sayısını veya hasar miktarını yaratan sürece işaret etmektedir. Bu nedenle süreç varyansı, risk karakteristiklerinin kombinasyonu verilmişken koşullu bir varyanstır [Herzog, 1994]. A’nın süreç varyansı, basit olarak A hedefi etrafındaki değişimdir.

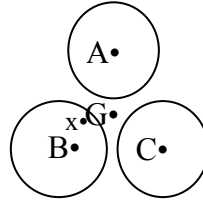
Atışlara ilişkin gözlemler gerçekleşmeden önce, bir sonraki atışın nereye olacağı konusunda en iyi tahmin, ağırlık merkezi olan G noktasıdır. Şimdi tek bir atış gözlemledikten sonra, ön bilgiler ile mevcut atış temel alınarak, en iyi tahmin yapılmak istensin.

Şekil 2.2'yi ele alalım. Kimliği bilinmeyen bir atıcının atışının, B ile G arasında yer alan x noktasına isabet ettiği varsayalım. Bühlmann kredibilite modeline göre, bir sonraki atış için en iyi tahmin, G ile x noktasını birleştiren doğru üzerinde yer alacak, ancak G noktasından da çok uzakta olmayacaktır [Herzog, 1994]. B bölgesinde olabilecek atışların B atıcısı tarafından yapılması ihtimali daha fazla olmakla birlikte, A atıcısı tarafından yapılan atışların da göz ardı edilmemesi gerekmektedir. Bu deneyime bakarak x noktasına yapılan atışın B atıcısı tarafından yapılması ihtimalinin daha yüksek görülmesinden dolayı elde edilecek olan tahmin, B'ye daha yakın olacaktır.



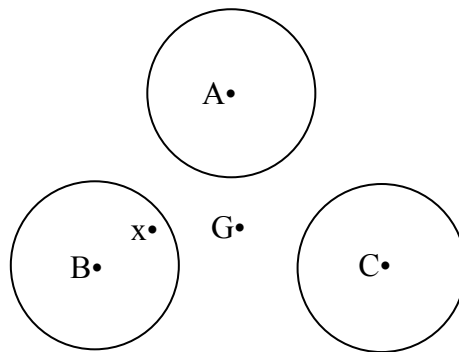
Şekil 2.2. Kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış

Şimdi bu atış deneyimi yeniden başlasın, A, B, C atıcılarının, atışlarının hedef merkezleri etrafında yoğunlaştığından dolayı Şekil 2.3'deki gibi süreç varyansının azaldığı durumu ele alalım. Süreç varyansı azaldığında, süreç varyansının beklenen değeri de azalacaktır. Eğer atış, Şekil 2.2'de olduğu gibi aynı noktaya, yani B ile G arasında bir noktaya yapılmış ise, atışın, B atıcısı tarafından yapılmış olması ihtimali daha fazladır. Bir sonraki atış B noktasına daha yakın, G noktasından daha uzak olacaktır. Dolayısıyla süreç varyansı azaldığında kredibilite ağırlığı artacaktır. Hipotetik ortalamaların varyansı Şekil 2.2 ile Şekil 2.3'de aynıdır.



Şekil 2.3. A, B, C atıcılarının atışlarının hedef merkezleri etrafında yoğunlaştığında kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış

Tekrar yeni bir atış örneği ele alınsın. Burada A, B ve C atıcılarının yaptığı atışlarının hedef merkezleri etrafındaki yoğunlukları Şekil 2.2'deki gibi olduğundan bu örnek için süreç varyansı ilk örnek ile aynıdır. Ancak hipotetik ortalamaların varyansı Şekil 2.2'dekinden çok daha büyük olacaktır. Şekil 2.4 ile açıklanan örnekte görüldüğü gibi, atışların ortalamalar (A, B ve C ortalamaları) etrafındaki dağılımları Şekil 2.2'deki ile aynıdır. Ancak bu kez A, B ve C ortalamaları birbirlerinden daha uzaktır. Dolayısıyla, hedef merkezleri yığın ortalaması olan G noktasından da daha uzak mesafededirler. Eğer ilk atış deneyimi örneğimizde (Şekil 2.2) olduğu gibi gözlemlenen bir atış yine B ile G noktaları arasında ise, atışın B atıcısı tarafından yapılma ihtimali daha yüksektir. Bir sonraki atışın nereye yapılacağına ilişkin tahmin, B'ye Şekil 2.2'dekinden daha yakın bir noktaya olacaktır. Bundan dolayı bu tek gözlemin kredibilitesi artacaktır.



Şekil 2.4. Süreç varyansları Şekil 2.2'deki gibi kalırken hedef merkezleri birbirlerinden uzaklaştırıldığında kimliği bilinmeyen bir atıcı tarafından x noktasına yapılan atış

Bu örnekte, tek bir atışın sonucu tahmin edilmiştir. İstatistiksel olarak ön bilgimiz ne kadar fazla ise, tahmin o kadar güvenilirlerdir. Eğer belli bir sayıda atış yapılmış olursa, gözlemlenen atışların ortalamasına verilecek kredibilite, tek atışa göre daha fazla olacaktır. Hedefe atış örneğinin özetlenmesi gerekirse, elde bulunan son bilgiler ile geçmişe ait bilgiler temel alınarak bir sonraki atışın nereye yapılabileceğine ilişkin tahminde, süreç varyansı azalırken, kredibilite ağırlığının arttığı görülür. Diğer taraftan hipotetik ortalamaların varyansı veya gözlem sayısı arttıkça, kredibilite ağırlığı da artacaktır.

2.3. Zar – Rulet Örneği

Hewitt (1970)'e ait olan bu örnekte, birbirinden bağımsız iki aşamalı bir süreç söz konusudur. Birinci aşamada zar, ikinci aşamada ise rulet deneyi esas alınmaktadır [Hewitt, 1970]. İlk aşamada bir yüzü işaretli, beş yüzü işaretsiz A_1 , diğeri üç yüzü işaretli, üç yüzü işaretsiz A_2 , zarları ile ikinci aşamada her bir bölümün gelme şansı eşit ve 1/6 olan bir çift rulet bulunsun. B_1 ruletinin, altı bölümden beş tanesi 2, biri 14 ile, B_2 ruletinin üç bölümü 2, üç bölümü ise 14 ile işaretlenmiş olsun.

Bu tanımlamaların ardından tek bir sigortalının olduğunu ve bunun da hasar deneyiminin aşağıdaki şekilde modellendiğini varsayalım. Zar ile ruletler birbirinden bağımsız ve rassal olarak seçilsin. Diğer bir deyişle, bütün i ve j değerleri için A_i ve B_j 'ler birbirinden bağımsız olsun. Her bir zarın veya her bir ruletin seçilme olasılıkları eşittir (her biri 1/2 olasılıkla seçilir). Bir sigortalı için hasar deneyimi,

$$P[A_i \text{ I } B_j] = P[A_i]P[B_j] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad ; i = 1, 2 \text{ ve } j = 1, 2,$$

şeklinde modellenir [Herzog, 1994]. Bütün mümkün durumları ve bunlara karşılık gelen olasılıkları aşağıdaki Çizelge 2.1'de olduğu gibi daha açık bir şekilde özetlenebilir.

Çizelge 2.1. Mümkün durumlar ve olasılıkları

$A_i \cap B_j$	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$	$A_2 \cap B_1$	$A_2 \cap B_2$
<i>Olasılık</i>	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Rassal *hasar süreci*, bir zar atıldığı zaman başlar. Şayet zar atma olayında işaretli bir yüz gelirse *hasar (bildirim)* olmuştur, aksi durumda hasar yoktur denilir. Eğer hasar varsa (yani zarın işaretli yüzlerinden biri gelmişse), bu durumda rassal bir rulet seçilir ve daha sonra seçilen rulet *hasar tutarını* (amount of claims) tesbit etmek için çevrilir. Zarın her atılışı ve gerektiğinde ruletin her döndürülmesi, tek bir gözlem dönemini ifade etmektedir.

$U_i, i=1,2,3,\dots$ zarın i 'inci atılışında işaretli bir yüzün gelme olayı, $M_i, i=1,2,3,\dots$ zarın i 'inci atılışında işaretli bir yüzün gelme olayı olsun. $U_1, U_2, \dots, U_n$ 'ler ve $M_1, M_2, \dots, M_n$ 'ler kendi aralarında birbirinden bağımsız olsunlar. Bu durumda,

$$P(U_i / A_1) = \frac{5}{6}, \quad P(M_i / A_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(U_i / A_2) = \frac{3}{6}, \quad P(M_i / A_2) = \frac{3}{6}$$

olasılıkları elde edilebilir. $S_i, i=1,2,3,\dots$ seçilen ruletin, i 'inci defa döndürme işleminin sonucunu gösteren bağımsız rassal değişken olsunlar.

$X_i, i=1,2,3,\dots$ i 'inci gözlem dönemindeki *hasar tutarını* gösteren rassal değişken olsun. Amaç, her i ve j için, başlangıç olasılıkları $P(A_i \cap B_j)$ 'leri kullanarak, başlangıçtaki *net prim* (pure premium) $E(X_1)$ 'i hesap etmektir. Ayrıca elde edilen bilgi ışığında, bir gözleme ait ilk dönemin sonuçları verilmişken, her i ve j için sonsal

olasılık $P(A_i \cap B_j / X_1)$ 'lere dayanarak sonsal *net prim* tahmini olan $E(X_2 / X_1)$ bulunabilir. Öncelikle başlangıçtaki *net prim* $E(X_1)$,

$$E[X_1] = 0 \times P[X_1 = 0] + 2 \times P[X_1 = 2] + 14 \times P[X_1 = 14]$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

$$\begin{aligned} P[X_1 = 0] &= P[U_1] = P[U_1 | A_1] \times P[A_1] + P[U_1 | A_2] \times P[A_2] \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[X_1 = 2] &= P[M_1 \text{ ve } (S_1 = 2)] \\ &= P[M_1] \times P[S_1 = 2] \\ &= (P[M_1 | A_1] \times P[A_1] + P[M_1 | A_2] \times P[A_2]) \\ &\quad \times (P[S_1 = 2 | B_1] \times P[B_1] + P[S_1 = 2 | B_2] \times P[B_2]) \\ &= \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] \times \left[\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P[X_1 = 14] &= 1 - P[X_1 = 0] - P[X_1 = 2] \\ &= 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak başlangıçtaki *net prim* $E(X_1)$,

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= 0 \times P[X_1 = 0] + 2 \times P[X_1 = 2] + 14 \times P[X_1 = 14] \\
&= 0 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 14 \times \frac{1}{9} \\
&= 2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Koşullu beklenen değer $E(X_2 / X_1)$ için hesaplanan kestirici dağılım olasılık değerleri $P(X_2 = m / X_1 = h)$ 'lar aşağıda Çizelge 2.2 de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Kestirici dağılım olasılık değerleri

$P(X_2 = m / X_1 = h)$			
$m \backslash h$	0	2	14
0	$\frac{51}{72}$	$\frac{168}{288}$	$\frac{84}{144}$
2	$\frac{14}{72}$	$\frac{85}{288}$	$\frac{35}{144}$
14	$\frac{7}{72}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{25}{144}$

Buradan, beklenen hasar miktarı,

$$E(X_2 / X_1 = h) = \sum_{m=0,2,14} m \times P(X_2 = m / X_1 = h)$$

den hesaplanır. Koşullu olasılıkların beklenen değeri bulunur. Aslında bu tahminler Bayesci tahminlerdir.

$$E(X_2 / X_1 = 0) = 0 \times \frac{P(X_2 = 0 / X_1 = 0)}{\frac{51}{72}} + 2 \times \frac{P(X_2 = 2 / X_1 = 0)}{\frac{14}{72}} + 14 \times \frac{P(X_2 = 14 / X_1 = 0)}{\frac{7}{72}}$$

$$E(X_2 / X_1 = 0) = 0 + \frac{28}{72} + \frac{98}{72} = \frac{126}{72} = \frac{42}{24}$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$E(X_2 / X_1 = 2) = 0 \times \frac{168}{288} + 2 \times \frac{85}{288} + 14 \times \frac{35}{288} = \frac{55}{24}$$

ve

$$E(X_2 / X_1 = 14) = 0 \times \frac{84}{144} + 2 \times \frac{35}{144} + 14 \times \frac{25}{144} = \frac{70}{24}$$

elde edilir [Herzog, 1994].

Bulunan değerler Bühlmann yaklaşımı ile de açıklanabilir. Bunun için,

$$\hat{C} = \hat{Z} \times R + (1 - \hat{Z}) \times H \quad (2.1)$$

formunda gösterilen kredibilite tahmini ile $\hat{C}$ nokta tahmin değerleri bulunabilir. Burada R, mevcut gözlemlerin ortalaması, H, önsel ortalama ve $\hat{Z}$ ise, $0 \leq \hat{Z} \leq 1$ arasında değer alan kredibilite faktörünün tahminidir. Bühlmann kredibilite faktörünün tahmini,

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{k}} \quad (2.2)$$

dır. Burada,

$$\hat{k} = \frac{\text{Süreç Varyansının Beklenen Değeri}}{\text{Hipotetik Ortalamaların Varyansı}} = \frac{SVBD}{HOV} \quad (2.3)$$

ve n ise gözlem dönemlerinin sayısı (the number of periods of observation) dır. Bu örnekte $n=1$, $H = E(X_1)$ ve $R = X_2 = 0,2,14$ şeklindedir.

X , zarın i 'inci atılışında işaretli yüzü gelmiş ise $I_i = 1$

X , zarın i 'inci atılışında işaretsiz yüzü gelmiş ise $I_i = 0$

olsun. Bu durumda,

$$E(X) = E(I_i)E(S)$$

$$Var(X) = E(I_i)Var(S) + Var(I_i)[E(S)]^2$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E(X)$ hipotetik ortalama, $Var(X)$ süreç varyansdır.

Hipotetik ortalamaların varyansının $14/9$ ve süreç varyansının beklenen değerinin

$154/9$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\hat{k}$ değeri Eş. 2.3'den,

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \frac{154/9}{14/9} & \text{ve} & & \hat{Z} &= \frac{n}{n+k} \\ &= 11 & & & &= \frac{1}{1+11} \\ & & & & &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Eş. 2.1 kullanılarak kredibilite tahminleri de elde edilir. Bu iki yaklaşımın sonuçları Çizelge 2.3’de özetlendiği gibidir.

Çizelge 2.3. Bayesci ve kredibilite tahmin değerleri

$X_2 = m$	Bayesci Tahminler $E(X_2 / X_1 = h)$	Kredibilite Tahminleri $\hat{C} = \hat{Z} \times X_2 + (1 - \hat{Z}) \times E(X_1)$
0	$\frac{42}{24} = 1.75$	$\frac{1}{12} \times 0 + \frac{11}{12} \times 2 = \frac{11}{6} = 1.83$
2	$\frac{55}{24} = 2.3$	$\frac{1}{12} \times 2 + \frac{11}{12} \times 2 = 2$
14	$\frac{70}{24} = 2.9$	$\frac{1}{12} \times 14 + \frac{11}{12} \times 2 = 3$

Buradan da görüldüğü gibi Bayesci tahmin değerleri ile kredibilite tahmin değerleri birbirine çok yakındır. Kredibilite teorisinin, Bayesci analiz mantığı üzerine kurulmuş bir yöntem olduğu söylenebilir. Zira kredibilite teorisi, son dönem verileri ile geçmiş veriler arasında dengeli bir paylaşırma yapmak amacıyla kullanılmaktadır. İstatistiksel olarak, geçmiş verileri son dönem verileriyle güncelleyerek bu paylaşırma işlevini amaca uygun şekilde gerçekleştirebilecek en iyi yöntem Bayesci yaklaşımdır. Bu nedenle, bir çok kredibilite modeli Bayesci yöntem kullanılarak türetilmektedir. Böylece kredibilite teorisinin amacına uygun modeller oluşturmak mümkün olmaktadır. Buradan hareketle dördüncü bölümde Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modellerinin, kredibilite formüllerinin Bayesci yaklaşımla bağlantılı olarak nasıl oluşturuldukları gösterilecektir.

2.4. Kredibilite Problemi

Zar-rulet örneğinde, sadece bir dönemde gözlenen değer temel alınarak bir sonraki sigorta dönemindeki primin nasıl tahmin edileceği ele alınmış idi. Burada kredibilite problemi genelleştirilmektedir [Goovaerts ve ark., 1990].

Kredibilite teorisinde amaç poliçe sahiplerinin mevcut deneyimleri ile geçmişe ait deneyimlerinden sonuçlar çıkarmaktır. Varsayalım ki n adet farklı poliçe sahibi olsun ve bunların t dönemlik hasar kayıtları mevcut bulunsun.

$$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1t}$$

$$Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2t}$$

$$N_1, N_2, \dots, N_n$$

$$Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nt}$$

Veriler, sigorta portföyünden *kayıp tutarları* (the amount of losses), *hasar sayıları* (the number of claims) veya *kayıp oranı* (loss ratio) şeklinde olabilir. Amaç, önümüzdeki bir sigorta döneminde, belirli bir sigorta poliçesi (insurance policy) kapsamında hasar sayısını veya miktarını tahmin etmektir. Buradaki asıl problem, Y_{t+1} ile zaman ve geçmişte gözlenen $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ değerleri arasındaki ilişkinin modellenmesiyle aşağıdaki ilişkinin kurulabilmesidir.

$$y_{ij} = f(j, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i(j-1)}) + \varepsilon_{ij} \quad i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, t_i \quad (2.4)$$

burada f bilinmeyen bir fonksiyondur ve ε_{ij} 'de hata terimidir.

Daha genel bir yapıda veri görünüşü için, $\{ T_{ij}: j=1, 2, \dots, t_i \}$, uzunluğu t_i olan bir zaman serisi olsun ve aynı dönemde i ' inci riskin (veya riskler grubunun) ölçümleri yapılmış olsun. Y_{ij} gözlenen hasarları, X_{ij} , T_{ij} zamanında i 'inci risk için gözlenen ortak değişkenleri gösterebilir. Her bir risk için veri aşağıdaki formda olacaktır.

$$(y_{ij}, X_{ij}, T_{ij}), j=1, 2, \dots, t_i; i=1, 2, \dots, n$$

Burada $X_{ij} = (X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijd})$, T_{ij} zamanında gözlenen d adet ortak değişkendir. Bizi ilgilendiren şu anki y_{ij} yanıt değeri ile geçmiş yanıt değerleri

$y_{i,j-1}^* = (y_{i,j-1}, y_{i,j-2}, \dots, y_{i1})$ 'ler arasındaki ilişki ile birlikte ortak değişkenler arasındaki ilişkiyi ve bu ilişkinin zamana göre nasıl değiştiğini incelemektir. Aşağıdaki veri

görünüşü ile $j=1,2,...,t$ olduğu varsayılarak açık bir şekilde veri kullanılmaya sunulmaktadır.

Çizelge 2.4. Kredibilite probleminde genel veri görünüşü

Hasar Kayıtları				
Sigortalı	1	...		t
1	$y_{11}, x_{11,1}, x_{11,2}, L, x_{11,d}, T_{11}$	L	$y_{1t}, x_{1t,1}, x_{1t,2}, L, x_{1t,d}, T_{1t}$	
M	M	L	M	
i	$y_{i1}, x_{i1,1}, x_{i1,2}, L, x_{i1,d}, T_{i1}$	L	$y_{it}, x_{it,1}, x_{it,2}, L, x_{it,d}, T_{it}$	
M	M	L	M	
n	$y_{n1}, x_{n1,1}, x_{n1,2}, L, x_{n1,d}, T_{n1}$	L	$y_{nt}, x_{nt,1}, x_{nt,2}, L, x_{nt,d}, T_{nt}$	

Dolayısıyla Eş. 2.4’de verilen modelden daha genel bir model olan aşağıdaki düzeltilmiş model önerilmektedir.

$$y_{ij} = f(t_{ij}, X_{ij}, y_{i,j-1}^*) + \varepsilon_{ij} \quad i=1,2,...,n; j=1,2,...,t_i$$

2.5. Kredibilite Teorisi Nedir?

Bir sigorta şirketinin en temel konularında birisi risk priminin hesaplanmasıdır. Hatalı fiyatlama, beklenmeyen yüksek hasarların oluşmasında yüksek maliyetler doğurabileceği gibi, beklenenden az hasarların ortaya çıkması durumunda da sigortalıya ek maliyet yüklenmesi, sigorta şirketinin pazardaki rekabet gücünü zayıflatacaktır. Sigortacılık uygulamalarında fiyatlandırma sistemleri için genelde yukarıdan aşağıya doğru bir yaklaşım kabul görür. Bir portföy için en üst seviyede, yapılan toplam ödemeler ve portföye ait bütün prim gelirleri söz konusudur [Goovaerts ve ark., 1990]. Ayrıca bu ödemeler ile prim gelirleri arasında genel bir denge olmalıdır. Asıl problem, her bir sigorta sözleşmesinin ayrı ayrı ele alındığı bir seviyeye inildiğinde, en üst seviyedeki denge gözetilerek tesbit edilmiş olan, portföydeki bütün primlerden elde edilen toplam gelirin, her bir sigorta sözleşmesi özelinde dağıtılması problemidir. Kredibilite teorisi dağıtma işlemi, hem sigortalı

hem de sigorta şirketi için daha adil, gerçekçi ve sağlıklı bir şekilde yapmak amacıyla geliştirilen sistemlerden en yaygın kullanılanıdır.

Bir sigorta şirketi gelecekte teminat altına alacağı risklerin maliyetini tahmin etmek için, ilgili sigortalının veya sigortalılar grubunun geçmişteki kayıp bilgilerini dikkate alır. Sigorta kayıpları rassal olarak oluşur. Bir sonraki sigorta döneminde oluşabilecek sigorta kayıplarının miktarını, son birkaç yılda oluşan yıllık ortalama kayıp miktarını esas alarak tahmin etmek çok sağlıklı olmayan bir yöntemdir. Sadece yakın geçmişteki gözlemleri esas almak yerine bu verileri ve diğer bilgileri birleştirerek daha iyi tahminlerin yapılması mümkündür.

Kredibilite, son döneme ilişkin veriler ile önsel veriler arasında dengeli bir paylaşırma sonucu ortaya çıkan gerçek beklentinin doğrusal tahminini içerir. Yani kredibilite, ağırlıklı tahmini hesaplamak için temel formül,

$$Tahmin = [Z \times (Gözlem)] + [(1 - Z) \times (Diğer Gözlemler)] \quad 0 \leq Z \leq 1$$

şeklindedir. Burada Z 'ye gözlemin kredibilitesi denir. $(1 - Z)$ ise, genel olarak kredibilite'nin tamamlayıcısı olarak isimlendirilir. Eğer gözleme dayanan veri kümesi büyükse ve dönemden döneme çok büyük farklılıklar göstermiyorsa, Z değeri 1'e yakın olur. $Z=1$ olması halinde, sözleşme tamamen kendi hasar tecrübesine dayanarak değerlendirilmiş olur. Genelde bireysel (her bir poliçeye ait) bilgi az ve sınırlıdır. Böyle bir tahmin edici pratikte pek kullanılmaz. Bu tahmin edici bazen tamamıyla yetersizdir, özellikle de gözlenen bir sigorta dönemi içinde hiç hasar göstermeyen bir sözleşmeye ilişkin hasar tahmini yapılamaz. Öte yandan veri kümesi sınırlı sayıda gözlemden oluşuyorsa, bu durumda Z değeri 0'a daha yakın olur ve diğer verilerin ağırlığı daha fazladır. $Z=0$ olduğu durumda ise her bir poliçeye ait prim portföydeki tüm prime eşit olur. Bu durum homojen bir portföyde kabul edilebilir bir durumdur, ancak genel olarak heterojen bir portföyde kabul edilemez. Yani kredibilite teorisi elimizdeki mevcut gözlemlerle birlikte değerlendirilebilecek önsel veriye sahip olma esasına dayanır.

2.5.1. Portföydeki heterojenliğe bir çözüm olarak kredibilite teorisi

Yukarıda da belirtildiği gibi, sigortacılık uygulamalarında asıl sorun portföydeki bütün primlerden elde edilen toplam gelirin, her bir sigorta sözleşmesine dağıtılmasıdır. Homojen portföylerde hasarları gösteren rassal değişkenlerin bağımsız oldukları ve bu değişkenlerin bilinen bir dağılım fonksiyonunun olduğu varsayımı altında, toplam prim hasılatını eldeki farklı sigorta sözleşmelerine dağıtmak için bir prim prensibi uygulamak mümkündür.

Fakat genel olarak portföyler heterojendir. Birbirine benzer gözlenebilir özellikleri olan sözleşmeler için hasarların dağılımı ve beklenen değerleri farklılık gösterir. Bu benzerlik temel risk karakteristiklerinin sadece sınırlı bir bölümünü ilgilendirir. Geriye kalan risk parametreleri arasında gözlenmesi mümkün olmayanlar (mesela araba sürüş yeteneği), değerlendirilmesi hemen hemen imkansız olanlar ya da kullanılmasına toplum tarafından müsaade edilmeyenler de vardır. Bu risk karakteristikleri heterojenliğe yol açar. Bu ise hasarların ayrı ayrı her birinin gözlenen değerlerinde kendisini gösterir.

Heterojen bir portföyde aynı özellikleri taşıyan riskler “homojen” risk sınıflarında gruplandırılabilir. Ancak bu durumda bireysel risk primlerinin hesaplanması için klasik bir prim prensibinin kullanılması uygun olmaz. Zira ilk olarak, bir prim prensibi risk dağılımının bilindiğini varsayar. Fakat küçük alt sınıflarda dağılım fonksiyonunun karakteristiklerini tahmin etmeye yetecek düzeyde hasar deneyimi mevcut değildir. İkincisi, gözlenmesi mümkün olmayan risk özellikleri nedeniyle aynı risklerin hiç de aynı dağılımlı olmadıkları ortaya çıkar ve gerçek anlamda bir homojen alt sınıfın oluşturulması bile mümkün olmaz.

Kredibilite teorisi, heterojen portföylerde, portföyün tamamıyla ilgili geniş bir deneyimin mevcut olduğu, ancak portföydeki her sözleşme için yeterli hasar bilgisinin bulunmadığı veya bunların düzensiz olduğu durumlarda sözleşmelerin sigorta primlerinin tespiti için kullanılan bir deneyim sınıflama tekniğidir.

Eğer bir poliçe sahibinin geçmiş verileri, tutarlı bir biçimde net primden daha iyiye, sigortalı bir indirim oranı talep edebilir veya sigortalının geçmiş deneyimleri kötü ise ve sigorta şirketi için maliyeti yüksek ise, prim oranında bir artış olması beklenir. Bu konu ile ilgili Norberg(1979)'a ait çok ilgi çekici bir örnekten bahsetmek uygun olacaktır [Goovaerts ve ark., 1990]. Bir sigorta şirketinin 20 kişiden (poliçeden) oluşan bir sigorta kümesini ele alalım. 10 yıl sonunda oluşan hasarlar Çizelge 2.5'deki gibi özetlensin.

Çizelge 2.5. Norberg örneğinde bir sigorta şirketine ait 20 sigortalının oluşturduğu 10 yıllık hasar deneyimi

Police No→																				Toplam	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
Yıl↓																					
1	11111111111111111111																			4	
2	11111111111111111111																			4	
3	11111111111111111111																			4	
4	11111111111111111111																			1	
5	11111111111111111111																			2	
6	11111111111111111111																			3	
7	11111111111111111111																			3	
8	11111111111111111111																			1	
9	11111111111111111111																			3	
10	11111111111111111111																			4	
$\bar{X}_i$	.0	.0	.2	.0	.0	.2	.2	.0	.6	.1	.4	.3	.1	.1	.0	.0	.5	.1	.1	.0	29
$\bar{X}$	0.145																				

Çizelge 2.5'deki 10 yıllık hasar bilgisine göre ilk yılda 4 tane hasar meydana gelmiştir. Ortalama hasar maliyeti $4/20=0.20$ olmuştur. Onuncu yıl sonunda ortalama hasar maliyeti $29/200=0.145$ dir. Ancak 9,11 ve 17 nolu poliçeleri dikkate alınmaz ise elde edilen ortalama hasar maliyeti tahmini $14/170=0.083$ değerine düşer.

Kısaca, 10 yıllık hasar verilerinden de görüleceği gibi 9,11 ve 17 numaralı sigortalılar ile 1,2,4,5,8,15,16 ve 20 numaralı sigortalılar arasında çok açık farklılıklar olduğu aşikardır ve bu sigortalılara aynı primin uygulanması adaletsiz bir durum yaratır. Olası çözümlerden bir tanesi 1,2,4,5,8,15,16 ve 20 numaralı

sigortalıların primlerine portföy ortalaması uygulanırken, 9, 11 ve 17 numaralı sigortalıların primlerini yükseltmektir. Fakat bu durumda sekiz sigortalı ve diğer poliçe sahipleri arasında adaletsiz primlendirme oluşacağı açıktır. Olası çözümlerden bir diğeri ise, her sigortalının sadece kendi deneyimleri ile fiyatlandırılmasıdır. Burada ise aynı risk karakteristiğine sahip binlerce sigortalıların deneyimleri yerine 10 yıllık verileri ölçüt almak gerçekçi bir çözüm olmayacaktır. İşte bunun gibi heterojen bir sigorta portföyünde kredibilite teorisi kullanılarak prim oranlarının tesbit edilmesi, her sigortalı için adil ve gerçekçi bir primin belirlenmesini sağlayacaktır. Böylece, her bir sigortalı hasar sayısındaki artışa göre cezalandırılıp azalışa göre de ödüllendirilmiş olacaktır.

3. BAYESCI YAKLAŞIM

Aktüerya literatüründe, Bayesci yaklaşım ile kredibilite teorisi arasında bir bağlantı kurulmuştur [Klugman ve ark., 1998]. Schnieper (1995) kredibilite faktörünün tahmini için Bayesci bir yaklaşım sunmuştur [Schnieper, 1995]. Ayrıca, aktüerya biliminde önerilen çeşitli yaklaşık çözüm metodlarına tam bir Bayesci analiz getirilmiş ve Bayesci hesaplama teknikleri konusunda son gelişmeler ele alınmıştır [Makov ve ark., 1996].

Seçilen bir model için Bayesci istatistiksel analiz önce elde mevcut bilgilerin ve varsayımların durumunu tesbit etmekle başlar. Bu önsel bilgiler daha sonra gözleme dayanan verilerden elde edilen ve olabilirlik fonksiyonu yoluyla olasılıksal (*probabilistic*) olarak niceliksel hale getirilen bilgilerle birleştirilir. Önsel bilgilerle olabilirliğin birleştirilmesi Bayes yaklaşımını oluşturur. İstatistiksel bir ifadeyle, sonsal (posterior) olasılık fonksiyonu, önsel (prior) ile olabilirliğin çarpımları ile orantılıdır. Yani,

$$\text{Sonsal} \propto \text{Önsel} \times \text{Olabilirlik} \quad (3.1)$$

dir. Diğer bir deyişle, Bayesci olasılık teorisinde sonsal olasılık, bir olayın veya önermenin deneysel (ampirik) veriler de dikkate alınarak bulunan koşullu olasılığıdır. Önsel olasılık ile karşılaştırıldığında, önsel olasılık deneysel bilgi olmaksızın hesaplanan ya da önceden bilinen (var olan) bilgi ve verileri kullanarak bulunan olasılıktır. Sonsal olasılık Bayes yaklaşımı kullanılarak önsel olasılıktan ve olabilirlikten hesap edilebilir. Geçmişten geleceğe olan bu süreç, güncelle ilişkin bilgi, önsel ile mevcut verilerin birleşimi prensibini vurgular.

3.1. Kredibilite Teorisi İçin Bayesci Yöntem

Bu genel bilgidен sonra, kredibilite teorisi için Bayesci yaklaşım incelenecektir. Θ rassal değişkeni yardımıyla tanımlanan yığının risk karakteristikleri hakkında bazı önsel fikirlerin var olduğu varsayılacaktır. Yığın içinde risk karakteristiklerinin önsel

dağılımı $\pi_{\Theta}(\theta)$ ile temsil edilsin. Ayrıca, Y , kayıp miktarlarının (loss amounts) ya da hasar sıklıklarının (claim frequencies) bir vektörünü göstermek üzere risk parametresi θ olan herhangi bir sigortalının deneyimi, $\Theta = \theta$ değeri verilmişken, hasarların veya kayıpların koşullu dağılımı $f_{Y/\Theta}(y/\theta)$ olsun.

Herhangi bir sigortalı için $Y = y$ gözlemi yapılmışken, Y_{n+1} dönemi için bir fiyatlandırma yapılacak olsun. Sigortalı için risk parametresi θ olmak üzere, sigortalının farklı riske maruz kalma dönemlerine karşılık gelen deneyimleri de birbirinden bağımsız olsun. İstatistiksel ifadeyle, θ koşulu altında hasarlar veya kayıplar, yani $Y_1, Y_2, L, Y_n, Y_{n+1}$ 'ler birbirlerinden bağımsız olsunlar.

Y_i 'nin koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta); \quad i = 1, 2, L, n, n+1 \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki amaç, aynı sigortalının θ değerinden değişiklik göstermediği varsayımı altında $n+1$ 'nci dönemde, geçmiş hasar bilgisinden yararlanarak Y_{n+1} 'in kestirilebilmesi için Y_{n+1} 'in, $\Theta = \theta$ verilmişken koşullu dağılımının elde edilmesidir. Bu koşullu dağılımı elde ederken, Sonsal dağılım (y_1, y_2, L, y_n) gözlenen değerlerine dayanan ve Θ hakkında oluşturulan önsel olasılıkların güncelleştirilmesinin sağlanması gerekir. Şayet θ biliniyor olsaydı $f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta)$ kullanılabilirdi. Söz konusu sigortalı için θ bilinmiyor olmasına karşın $Y = y$ değeri bilinmektedir. Bu durumda koşulun θ 'ya değil, y 'ye bağlı olarak ele alınması uygun olacaktır. Sonuç olarak, $Y = y$ verilmişken Y_{n+1} 'in koşullu dağılımının bulunması uygun olur. Bu dağılıma kestirici dağılım (*predictive distribution*) adı verilir. Kestirici dağılım, sonsal dağılım üzerinden y_1, y_2, L, y_n koşulu altında y_{n+1} 'e ilişkin yoğunluk fonksiyonunun beklenen değeri olarak tanımlanabilir. Koşullu bağımsızlık verilmişken Y_1, Y_2, L, Y_n, Θ 'nin ortak dağılımı,

$$\begin{aligned}
f_{Y,\Theta}(y,\theta) &= f_{Y/\Theta}(y/\theta)\pi(\theta) \\
&= f(y_1, y_2, L, y_n/\theta)\pi(\theta) = \left[\prod_{i=1}^n f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \pi(\theta)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak elde edilir. Y 'nin marjinal dağılımı,

$$f_Y(y) = \int f_{Y,\Theta}(y,\theta) d\theta = \int \left[\prod_{i=1}^n f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \pi(\theta) d\theta \tag{3.4}$$

dır. Bu durumda $Y_1, Y_2, L, Y_n, Y_{n+1}$ ' in ortak dağılımı,

$$f_{Y_1, Y_2, L, Y_n, Y_{n+1}}(y_1, y_2, L, y_n, y_{n+1}) = \int \left[\prod_{i=1}^{n+1} f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \pi(\theta) d\theta \tag{3.5}$$

olur. Dolayısıyla $Y = y$ (yani $y = (y_1, y_2, L, y_n)'$) verilmişken Y_{n+1} ' in koşullu yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y) &= \frac{f(y_1, y_2, L, y_n, y_{n+1})}{f(y_1, y_2, L, y_n)}, \text{den} \\
&= \frac{f(y_1, y_2, L, y_n, y_{n+1})}{f_Y(y)} = \frac{\int \left[\prod_{i=1}^{n+1} f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \pi(\theta) d\theta}{f_Y(y)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

yazılabilir. Y verilmişken Θ 'nin sonsal yoğunluğu (Eş. 3.3 ve Eş. 3.4'den),

$$\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) = \frac{f_{Y,\Theta}(y,\theta)}{f_Y(y)} = \frac{\left[\prod_{i=1}^n f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \pi(\theta)}{f_Y(y)} \tag{3.7}$$

olur. Buradan,

$$\left[\prod_{i=1}^n \left[f_{Y_i/\Theta}(y_i/\theta) \right] \right] \pi(\theta) = \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) f_Y(y) \quad (3.8)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.6,

$$\begin{aligned} f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y) &= \frac{\int f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) f_Y(y) d\theta}{f_Y(y)} \\ &= \int f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

şekline dönüşür. Bu bilgilerin ışığı altında, herhangi bir sigortalı için, gözlemlenen $Y = y$ verisi temel alınarak Y_{n+1} değeri kestirilmek istensin. Şayet θ değeri biliniyor olsaydı bir seçenek, hipotetik ortalama,

$$\mu_{n+1}(\theta) = E[Y_{n+1}/\Theta = \theta] = \int y_{n+1} f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta) dy_{n+1} \quad (3.10)$$

olabilirdi. Ayrıca hipotetik ortalamanın beklenen değeri,

$$\mu = E(Y_{n+1}) = E[E(Y_{n+1}/\Theta = \theta)] = E[\mu_{n+1}(\theta)] \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla ortak prim (*collective premium*), hipotetik ortalamanın Θ üzerindeki ortalaması olur. Eğer sigortalı hakkında hiçbir bilgi yok ise bu prim kullanılabilir. Ancak θ değeri bilinmediği için en iyi seçenek gözlenen verileri kullanmaktır. Dolayısıyla Bayesci prim (kestirici dağılımın ortalaması) aşağıdaki formülle verilir.

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}/Y = y) &= \int y_{n+1} f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y) dy_{n+1} \\ &= \int y_{n+1} \left[\int f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta \right] dy_{n+1} \\ &= \int \left[\int y_{n+1} f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta) dy_{n+1} \right] \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta \end{aligned}$$

$$E(Y_{n+1} / Y = y) = \int \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta / y) d\theta$$

Bayesci prim,

$$E(Y_{n+1} / Y = y) = \int y_{n+1} f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1} / y) dy_{n+1} \quad (3.12)$$

olur. Veya

$$E(Y_{n+1} / Y = y) = \int \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta / y) d\theta \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilebilir. (Kesikli durumlarda Bayesci prim, $E(Y_{n+1} / Y = y) = \sum_{\Theta} \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta / y)$ şeklinde hesaplanır.)

Bu nedenle, Bayesci prim, hipotetik ortalamanın beklenen değerine eşittir. Bu beklenen değer, sonsal dağılım $\pi_{\Theta/Y}(\theta / y)$ üzerinden alınmıştır. Diğer bir ifadeyle, Bayesci prim, kestirici dağılımın beklenen değeri veya sonsal dağılım $\pi_{\Theta/Y}(\theta / y)$ üzerinden hipotetik ortalamanın beklenen değeri olarak tanımlanabilir [Klugman ve ark., 1998].

Yukarıda ana hatları verilen Bayesci yöntemle ilgili basit bir örnek aşağıda verilmektedir.

Örnek 3.1.

Sürücüler belirli kriterlere göre kötü, orta ve iyi sürücü olmak üzere 3 grupta toplansın. Kolaylık olması açısından kötü sınıfındaki sürücüler A, orta sınıfındaki sürücüler B ve iyi sınıfındaki sürücüler C ile gösterilsin. Her sınıf içinde, yıllık hasar frekansının A sınıfı için beklenen değeri 0.6, B sınıfı için 0.3 ve C sınıfı için 0.1 olan

bir Poisson rassal değişkeni şeklinde dağıldığı varsayalım. Ayrıca, Θ aşağıdaki gibi belirlenen basit bir önsel dağılıma sahip olsun.

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \Theta = \theta_A \text{ için } 0,20 \\ \Theta = \theta_B \text{ için } 0,45 \\ \Theta = \theta_C \text{ için } 0,35 \end{cases}$$

Bir sürücü rassal olarak seçiliyor ve 2004 yılında 2, 2005 yılında 1 hasar, 2006 yılında ise hiç hasar yapmadığı görülüyor. Bu durumda bu sürücüden 2007 yılı için beklenen hasar sayısı ne olabilir?

Çözüm

Hiçbir geçmiş veri bilgisinin olmaması halinde, 2007 yılındaki hasar sayısına ilişkin en iyi tahmin basit şekliyle hipotetik ortalamanın beklenen değeri ya da önsel ortalama olacaktır. Yani,

$$\begin{aligned} E[E(Y_i / \theta)] &= E[\mu(\theta)] = (0,6)(0,20) + (0,3)(0,45) + (0,1)(0,35) \\ &= 0,12 + 0,135 + 0,035 = 0,29 \end{aligned}$$

olur. Ancak, 2004 yılında hasar sayısının 2, 2005’de 1, 2006’da da 0 olduğuna dair ilave bilgi, tahmini değiştirmelidir (gerçekte, yılda ortalama 1 hasar sayısı önsel tahminden çok daha yüksektir). Varsayalım ki Y_i / Θ ’ in dağılımı Poisson olsun $(Y_i / \Theta : Poisson(\Theta))$, $i = 0,1,2,K$

$$f(y_1, y_2, y_3, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^{y_1}}{y_1!} \times \frac{e^{-\theta} \theta^{y_2}}{y_2!} \times \frac{e^{-\theta} \theta^{y_3}}{y_3!} \times \pi_{\Theta}(\theta)$$

olur. Burada, 2004’deki hasarların sayısı y_1 ile, 2005’de y_2 ile ve 2006’da y_3 ile gösterilirse ortak olasılıklar,

$$A \text{ sınıfı için } \rightarrow f(2;1;0;0,6) = \frac{e^{-0,6} 0,6^2}{2!} \times \frac{e^{-0,6} 0,6^1}{1!} \times \frac{e^{-0,6} 0,6^0}{0!} \times (0,20) = 0,0035705$$

$$B \text{ sınıfı için } \rightarrow f(2;1;0;0,3) = \frac{e^{-0,3} 0,3^2}{2!} \times \frac{e^{-0,3} 0,3^1}{1!} \times \frac{e^{-0,3} 0,3^0}{0!} \times (0,45) = 0,0024699$$

$$C \text{ sınıfı için } \rightarrow f(2;1;0;0,1) = \frac{e^{-0,1} 0,1^2}{2!} \times \frac{e^{-0,1} 0,1^1}{1!} \times \frac{e^{-0,1} 0,1^0}{0!} \times (0,35) = 0,0001296$$

olur. Y 'in marjinal dağılımı, $f_Y(y) = \sum_{\theta} f(y, \theta)$ $Y = (2,1,0)$ durumu için,

$$\begin{aligned} f_Y(1,0,2) &= f(2,1,0, \theta_A) + f(2,1,0, \theta_B) + f(2,1,0, \theta_C) \\ &= 0,0035705 + 0,0024699 + 0,0001296 \\ &= 0,00617 \end{aligned}$$

bulunur. Sonsal olasılık fonksiyonu, $\pi_{\theta/Y} = \frac{f(Y, \theta)}{f(Y)}$ aşağıdaki gibidir.

$$\Pr(\theta = 0,6 / Y) = \frac{0,0035705}{0,00617} = 0,57869$$

$$\Pr(\theta = 0,3 / Y) = \frac{0,0024699}{0,00617} = 0,40031$$

$$\Pr(\theta = 0,1 / Y) = \frac{0,0001296}{0,00617} = 0,02100$$

Sonuç olarak, kestirici dağılımın beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[Y_{2007} / y = (2,1,0)] &= \sum_{\theta} E(Y / \theta) \pi[\theta / y = (2,1,0)] \\ &= (0,6)(0,57869) + (0,3)(0,40031) + (0,1)(0,02100) \\ &= 0,4694 \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece, 2004'de 2 hasar, 2005'de 1 hasar ve 2006'da 0 hasar bilgisine dayandırılan 2007'deki hasarların sayısı için tahmin değeri 0,4694 dır. Bu değer

(0,4694) haliyle 2004-2005-2006 bilgisinin mevcut olmaması halinde yapılacak olan 0,29 tahmininden daha yüksektir.

Yukarıda verilen örnek, Bayesci primi elde etmek için gerekli işlem aşamalarını daha kolayca göstermek amacıyla mümkün olduğunca basit şekilde seçilmiştir. Bayesci yöntem başlığı altında sunulan teori tamamen geneldir. Ancak, yukarıda verilen örnek, tamamen dağılımın türüne bağlıdır. Temel olarak, sürekli veya kesikli dağılımların mümkün olan her bir kombinasyonu, ya kayıpların (Θ verilmişken) ya da önsel'in dağılımı için kullanılabilir.

3.2. Bayesci Kredibilitede Akraba (Conjugate) Önsel Dağılımlar

Bayesci istatistikte, dağılımların bazı kombinasyonlarının, geçmiş deneyim bilgisiyle oluşturulan sonsal ile önseli aynı dağılımlı olabilir. Bu özelliği gösteren önsellere “*akraba önseller (conjugate priors)*” adı verilir. Akraba önsel dağılım kavramı dağılım ailelerini işaret etmektedir. Bayesci yaklaşımda akraba önsel dağılımlarla çalışmak matematiksel işlem ve yorum kolaylığı sağlar. Aşağıda iki önemli akraba önsel dağılımı incelenecektir.

3.2.1. Normal-normal akraba önsel dağılım

Ele alacağımız ilk önemli akraba önsel Normal-Normal durumudur. Varsayalım ki, $Y_i / \Theta : N(\theta, \nu)$ ve $\Theta : N(\mu, a)$ olsun. Dolayısıyla, sonsal dağılım,

$$\begin{aligned} \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) &= \frac{f_{Y,\Theta}(y,\theta)}{f_Y(y)} \propto \underbrace{\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}}_{ihmal\ edildi} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2\right] \underbrace{\left(\frac{2\pi a}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{ihmal\ edildi} \exp\left[-\frac{1}{2a}(\theta - \mu)^2\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 - \frac{1}{2a}(\theta - \mu)^2\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2\theta y_i + n\theta^2) - \frac{1}{2a}(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) &= \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\left(\sum_i y_i^2 - 2\theta\sum_i y_i + n\theta^2\right) - \frac{1}{2a}(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2)\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2\nu}(-2\theta n\bar{y} + n\theta^2) - \frac{1}{2a}(\theta^2 - 2\theta\mu)\right]\end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa,

$$\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\nu} + \frac{1}{a}\right)\theta^2 + \left(\frac{n\bar{y}}{\nu} + \frac{\mu}{a}\right)\theta\right]$$

olur. Elde edilen dağılım θ 'nın bir fonksiyonu olacak şekilde elde edilmeye çalışılacaktır. Çünkü θ , ilgilenilen değişkendir. Bu nedenle, θ 'yi ihtiva eden terimlerle ilgilenilmiş, diğer terimler ise normalleştirme sabitleri olarak işlev göreceklerinden işlem dışı tutulmuştur [Klugman ve ark., 1998].

Yukarıda elde edilen son eşitliği tam kareye tamamlamak için $a_* = \left[\frac{n}{\nu} + \frac{1}{a}\right]^{-1}$ ve

$\mu_* = \left[\frac{n\bar{y}}{\nu} + \frac{\mu}{a}\right]a_*$ olarak tanımlayalım. Önceki ifade de μ_* ve a_* yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\nu} + \frac{1}{a}\right)\theta^2 + \left(\frac{\mu_*}{a_*}\right)\theta\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2a_*}\theta^2 + \frac{\mu_*}{a_*}\theta\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2a_*}\theta^2 + \frac{\mu_*}{a_*}\theta - \frac{\mu_*^2}{2a_*}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2a_*}(\theta^2 - 2\mu_*\theta + \mu_*^2)\right] \\ \pi_{\Theta/Y}(\theta|y) &= \exp\left[-\frac{1}{2a_*}(\theta - \mu_*)^2\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Sonsal dağılım $\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) : N(\mu_*, a_*)$ şeklindedir.

Şimdi, kestirici dağılımının ortalaması,

$$E[Y_{n+1}/Y=y] = \int \mu_{n+1}(\Theta) \cdot \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta = \int \theta \cdot \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta$$

biçimindedir, $Y_i/\Theta : N(\theta, \nu)$ ve böylece $E(Y_i/\Theta) = \theta$ olur. Fakat bu ifade basit olarak sonsal dağılımın ilk momenti, yani beklenen değerdir. Bu ise daha önceden μ_* 'a eşit olarak gösterildi. Böylece, normal birleşik önsel durumunda Bayesci prim μ_* olur. Bununla birlikte, μ_* için olan ifade bir diğer şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \mu_* &= \left[\frac{n\bar{y}}{\nu} + \frac{\mu}{a} \right] \left[\frac{n}{\nu} + \frac{1}{a} \right]^{-1} = \left[\frac{n\bar{y}}{\nu} + \frac{\mu}{a} \right] \left[\frac{a\nu}{na + \nu} \right] = \left(\frac{n}{\nu} \right) \left(\frac{a\nu}{na + \nu} \right) \bar{y} + \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{a\nu}{na + \nu} \right) \mu \\ &= \left(\frac{na}{na + \nu} \right) \bar{y} + \left(\frac{\nu}{na + \nu} \right) \mu = \left(\frac{n}{n + \frac{\nu}{a}} \right) \bar{y} + \left(\frac{\frac{\nu}{a}}{n + \frac{\nu}{a}} \right) \mu \end{aligned}$$

Eğer $k = \frac{\nu}{a}$ şeklinde gösterirse, Normal-Normal durumu için Bayesci prim

$$\mu_* = E[Y_{n+1}] = \left(\frac{n}{n+k} \right) \bar{y} + \left(\frac{k}{n+k} \right) \mu \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada n örnek büyüklüğü ve k ise grup içi varyansın, gruplar arası varyansa oranıdır.

Eş. 3.14, Bayesci prim değerinin, geçmiş deneyimin ağırlıklı ortalaması $\bar{y}$ ve hipotetik ortalamaların beklenen değerinin (yani önsel ortalama) μ ile ifade edilebileceğini göstermektedir.

Örnek 3.2.

Ortalama risk (average risk) Θ 'nın verilmiş olduğu varsayalım. Bu durumda hasar sıklıkları $Y_i / \Theta : N(\theta; 0, 29)$ olan Normal bir değişken gibi modellenebilir. Ayrıca, Θ 'nın önsel dağılımı $\pi_{\Theta}(\theta) : N(0, 29; 0, 029)$ olsun.

Önceki problem tekrar ele alınsın. Bir sürücü rassal olarak seçiliyor ve 2004 yılında 2, 2005 yılında ise 1 hasar, 2006 yılında ise hiç hasar yapmadığı gözlemleniyor. Buna göre bu sürücüden 2007 yılında beklenen hasar sayısı ne olabilir?

Çözüm

Yukarıda sözü edilmiş normal rassal değişkenler için parametre değerleri, Poisson örneğinde bulunmuş dağılımların momentleri ile eşleştirmek ve karşılaştırmak için seçilmiştir. Böyle düşünmek, iki örnek arasında yapılacak olan karşılaştırmayı daha anlamlı hale getirecektir ya da bu iki örnek arasındaki karşılaştırmayla daha anlamlı olmasına izin verecektir. Hiçbir geçmiş deneyim verisinin olmaması halinde 2007 yılındaki hasarların sayısı için yine en iyi tahmin $E[E(Y_i / \Theta)] = E[\theta] = 0, 29$ olur. Bununla birlikte, Eş. 3.14'den yararlanarak $\bar{y} = 1$ ve $\mu = 0, 29$ yerine konulursa, Bayesci prim elde edilebilir,

$$E[Y_{2007} / y = (2, 1, 0)] = \mu_* = \left(\frac{3}{3 + \frac{0, 29}{0, 029}} \right) (1) + \left(\frac{\frac{0, 29}{0, 029}}{3 + \frac{0, 29}{0, 029}} \right) (0, 29) = \frac{3}{3 + 10} (1) + \frac{10}{3 + 10} (0, 29) \\ = 0, 4538$$

bulunur. Böylece, 2004'de 2, 2005'de 1 ve 2006'de 0 hasar olduğu geçmiş hasar bilgisine dayandırılan, 2007'deki Normal akraba önsel varsayımı altında beklenen

hasarların sayısı için yeni tahmin 0.4538 dir. Bu değer, 2004-2005-2006 tecrübesinin mevcut olmaması halinde yapılacak olan 0.29 tahmin değerinden yüksektir. Aynı zamanda, Poisson durumu için türetilen Bayesci prim 0.4694'den daha küçük bir değerdir. Sonuç olarak daha az risk içeren sınıflar sonsal olasılıklar üzerine daha fazla etki yaparlar. Bu sonuç, Bayesci prim değerinin geçmiş deneyimlerden daha fazla etkilendiğini göstermektedir.

3.2.2. Poisson-gamma akraba önsel dağılım

Dikkate alınacak diğer önemli akraba önsel Poisson-Gamma kombinasyonudur. $Y_i / \Theta : \text{Poisson}(\theta)$ ve $\Theta : \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dağılsın. Buradan sırasıyla önsel ve olabilirlik olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{Y_i / \Theta}(y_i / \theta) = \frac{\theta^{y_i} e^{-\theta}}{y_i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$= 0 \quad d.h.$$

ve

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \frac{(\theta)^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad ; \theta > 0, \alpha, \beta > 0$$

$$= 0 \quad d.h.$$

dır. Bu bilgilerin yardımıyla sonsal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\pi_{\Theta/Y}(\theta / y) \propto f(y, \theta) = [\Pi y_i! \Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^{\infty} e^{-n\theta} \theta^{\sum y_i} \frac{(\theta)^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha}} d\theta$$

$$\propto \int_0^{\infty} e^{-n\theta} \theta^{n\bar{y}} \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}} d\theta$$

$$\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) = \int_0^{\infty} \theta^{n\bar{y}+\alpha-1} e^{-\theta\left(n+\frac{1}{\beta}\right)} d\theta$$

$$\int_0^{\infty} \theta^{n\bar{y}+\alpha-1} e^{-\theta\left(n+\frac{1}{\beta}\right)} d\theta \rightarrow \text{Gamma}\left(n\bar{y}+\alpha, \frac{1}{n+\frac{1}{\beta}}\right), \quad \text{nın yoğunluğu ile orantılıdır.}$$

Böylece, Θ/Y ' in sonsal dağılımı $\Theta/Y : \text{Gamma}\left(\alpha+n\bar{y}, \frac{\beta}{n\beta+1}\right)$ olur.

Bayesci prim, $\int \theta \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta$ den hesaplanır. Kestirici dağılım $f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y)$ 'nin beklenen değeri,

$$E[Y_{n+1}/Y=y] = \int \mu_{n+1}(\Theta) \cdot \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta = \int \theta \cdot \pi_{\Theta/Y}(\theta/y) d\theta = (\alpha+n\bar{y}) \cdot \left(\frac{\beta}{n\beta+1}\right)$$

şeklinde elde edilir ve normal akraba önsele paralel olarak,

$$\alpha_*\beta_* = (\alpha+n\bar{y}) \left(\frac{\beta}{n\beta+1}\right) = \frac{\alpha\beta}{n\beta+1} + \frac{n\beta}{n\beta+1} \bar{y} = \frac{1}{n\beta+1} \mu + \frac{n\beta}{n\beta+1} \bar{y} \quad (3.28)$$

bulunur. Böylece, sonuçta ortaya çıkan Poisson-Gamma durumu için Bayesci prim yine μ ve $\bar{y}$ 'in doğrusal bir kombinasyonu olur.

Örnek 3.3.

Θ verilmişken yıllık hasar sıklığının $Y_i / \Theta : Poisson(\theta)$ dağıldığını varsayalım. Ayrıca varsayalım ki önsel dağılım Θ , aşağıda verildiği gibi bir Gamma dağılımına sahip olsun.

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \frac{(\theta)^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad ; \theta > 0, \alpha, \beta > 0$$

$$= 0 \quad d.h.$$

Bir sürücü rassal olarak seçiliyor ve 2004 yılında 2, 2005 yılında 1 hasar, 2006 yılında ise hiç hasar yapmadığı gözlemleniyor. Bu sürücüden 2007’de beklenen hasar sayısı ne olabilir?

Çözüm

Karşılaştırma yapabilmek amacıyla, Gamma dağılımının parametreleri α ve β , hem Örnek 3.1’deki, hem de Örnek 3.2’deki örneğe uygun olacak şekilde seçilecektir. Bunun için, dağılımın ortalaması 0,29 ve varyansı 0,029 olsun. Ele alınan gamma dağılımının ortalaması $\alpha\beta$ ve varyansı ise $\frac{\alpha\beta^2}{\alpha\beta}$ ’dır. Böylece, $\frac{\alpha\beta^2}{\alpha\beta} = \beta$ ’dan

$$\frac{0,029}{0,29} = 0,1 = \beta \text{ bulunur. } \alpha = \frac{\alpha\beta}{\beta} \text{’dan } \alpha = \frac{0,29}{0,1} = 2,9 \text{ elde edilir. Sonuç olarak,}$$

$\beta = 0,1$ ve $\alpha = 2,9$ ’dır. Dolayısıyla, önsel dağılım $Gamma(\alpha = 2,9; \beta = 0,1)$ olduğu

varsayılır. Sonsal dağılım $\pi_{\Theta/Y}(\theta/y) : Gamma\left(\alpha_* = \alpha + n\bar{y}, \beta_* = \frac{\beta}{n\beta + 1}\right)$

olduğundan kestirici dağılımının beklenen değeri,

$$E[Y_{2007} / y = (2,1,0)] = \alpha_* \beta_* = (2,9 + 3(1)) \left(\frac{0,1}{(3)0,1+1} \right) = 0,4538$$

bulunur.

Böylece, 2004’de 2, 2005’de 1 ve 2006’da 0 hasar bilgisine dayandırılan 2007’deki beklenen hasar sayısı için yeni tahmin değeri 0,4538’dir. Bir Poisson-Gamma temeli esas alındığı varsayılarak bu sonuç, akraba Normal prime eşit olmalıdır. Elde edilen sonuçlar da bunu destekler niteliktedir. Zira her iki senaryoda da tahmin değerleri belirlenirken, varyans bileşenlerinin sayısal değerleri eşit olacak şekilde düşünülmüş ve daha sonra μ ve $\bar{y}$ ’in ağırlıklı ortalaması alınarak hesaplanmıştır.

Bayesci prim, çözümü sağlamasına rağmen, pratikte ne kayıpların ne de önselin parametrik formları bilinmeyebilir veya belirli bir dağılıma yeterli derecede uyum göstermeyebilir. Aynı zamanda sonsal dağılımın basitçe tanımlanması ve değerlendirilmesinin mümkün olmadığı bir durum ortaya çıkabilir. Hatta uygun bir tahmin elde edilmesi için sayısal yaklaşım tekniklerine başvurmak gerekli olabilir. Pratikte karşılaşılan bu tür sorunlara karşılık genellikle Bayesci prim için en iyi doğrusal yaklaşımı hesaplamak tercih edilebilir.

4. KREDİBİLİTE MODELLERİ

Kredibilite teorisi, son döneme ilişkin veriler ile önsel hipotez arasında (geçmişe ait veriler arasında) dengeli bir paylaşırma sonucu ortaya çıkan gerçek beklentinin doğrusal tahminini içerir. Kredibilite, ağırlıklı tahmin değerin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma Z kredibilite faktörü ile yapılmaktadır. Z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler, kredibilite modelleri olarak isimlendirilir.

Temel kredibilite modelleri, sınırlı dalgalanmalı kredibilite (*the limited fluctuation credibility*) ve klasik kredibilite (*the greatest accuracy credibility*) olarak iki ana başlık halinde verilebilir.

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite modeli, tam kredibilite (*full credibility*) ve kısmi kredibilite (*partial credibility*) olarak incelenebilir. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite teorisinde, kredibilite faktörü Z 'yi belirlemek ve tam kredibilite için gerekli beklenen hasar (claim) sayısını bulmak için frekans dağılımlı modeller (*frequentist models*) kullanılır.

Bühlmann ve Bühlmann-Straub modelleri sigorta uygulamalarında kredibilite'nin Bayes yaklaşımı modellemesi olarak bilinir. Bühlmann-Straub modeli, Bühlmann modelinin geliştirilmiş halidir.

4.1. Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite Modeli

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite, kredibilite kavramını niceliksel hale getirmeye yönelik ilk girişimi temsil eder. Konu hakkında çeşitli makaleler, Mowbray (1914) ve daha sonra da Whitney (1918) tarafından yapılmıştır [Mowbray, 1914; Whitney, 1918]. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite teorisinde, kredibilite faktörü Z 'yi belirlemek ve tam kredibilite için gerekli beklenen hasar (claim) sayısını bulmak için frekans dağılımlı modeller (*frequentist models*) kullanılır. Konu hakkında bir diğer klasikleşmiş makale Bailey (1950)'e aittir. Bu makalede istatistiksel yöntemlerin

kredibilite teorisinde nasıl kullanılacağına ilişkin bir çok yöntem tanıtılmıştır [Bailey, 1950]. Bunlar arasında Bayes analizi, en küçük kareler yaklaşımı ve regresyon analizi sayılabilir. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite teorisinde yaklaşımlar hakkında yeni bir çalışma Goulet (1997) tarafından yapılmıştır [Goulet, 1997].

Bu kısımda, kredibilite kuramının başlangıç noktası olan ve yarım yüzyıl boyunca aktüerler tarafından kullanılan sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı kısaca ele alınacaktır. Öncelikle veri yapısı teorik olarak aşağıda belirtildiği gibi olsun. $i \in \{1, 2, L, n\}$ iken, bir sigortalının, i 'inci deneyim döneminde Y_i adet hasara sahip olduğunu varsayalım. Bir başka bakış açısı ise, Y_i 'nin fiyatlandırma için belirli bir gruptaki i 'inci poliçeye ait veya i 'inci sigortalıya ait geçmiş deneyim verisi olduğu şeklindedir. $E(Y_i) = \mu$ olsun. Yani, ortalama, zamana göre veya bir grubun ya da sınıfın üyelerine göre aynıdır. Yine varsayalım ki tüm i 'ler için $Var(Y_i) = \sigma^2$ olsun. Geçmiş deneyim verilerinin ortalaması $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + L + Y_n)/n$ şeklinde özetlenebilir. Biliyoruz ki $E(\bar{Y}) = \mu$ ve Y_i 'ler bağımsız ise $Var(\bar{Y}) = \sigma^2/n$ olur. Yani burada Y_1, Y_2, L, Y_n 'ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır.

Veri yapısı bu şekilde tanımlandıktan sonra sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımının içinde yer alan tam ve kısmi kredibilite modelleri kısaca özetlenecektir.

4.1.1. Tam kredibilite

Sigortalıların çok sayıda hasar deneyimlerine karşılık gelen hasar sonuçları genellikle sadece onların kendilerine ait geçmiş deneyimlerinden elde edilen bilgilere dayanan, gelecekteki sigorta primlerini ortaya çıkartır. Bu ise tam kredibilite'nin ne anlama geldiğini göstermektedir. Konu edilen durum, doğal olarak sigortalının deneyiminin tam kredibilitiyi ($Z=1$) belirleyecek kadar çok olup olmadığını ortaya çıkartır. Tam kredibilite yaklaşımında, “deneyim”, özel olarak gözlemlerin gelecek dönem süresince hasarların beklenen sayısı yardımıyla ölçülür.

Kısaca, yeterli sayıda hasar sonuçlarına (yani, ister hasar yapılsın, ister yapılmamasın sigortalıya ya da ilgilenilen öğeye ilişkin bu tür bilgilerin çokluğu ileriye yönelik tahminlerin güvenilirliğini güçlü kılar) sahip sigortalılar genellikle gelecekteki primlerinin kendilerine ait bilgilere dayalı olarak belirlenmesini isterler. Buradaki soru, sigortalının deneyiminin ne zaman (kaç dönem, kaç yıl sonra) tam kredibilite'yi sağlayacak kadar büyük (yeterli) olduğudur. Bunun için uygulanan yöntemde $\bar{Y}$ 'nin "durağan" lığını ölçmek için $\bar{Y}$ ile μ arasındaki farklılığın μ 'ye göre yüksek bir olasılıkla küçük olması temel alınmıştır. Bunun anlamı, açıklık parametresi (range parameter) $r > 0$ ve $0 < p < 1$ olmak üzere tam kredibilite ataması,

$$P(-r\mu \leq \bar{Y} - \mu \leq r\mu) \geq p \quad (4.1)$$

eşitsizliği ile belirlenir. Standartlaştırma yapıldığında yukarıda verilen eşitsizlik,

$$P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \leq \frac{r\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq p \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, Eş. 4.2'de $\frac{r\mu\sqrt{n}}{\sigma}$ yerine $y = \frac{r\mu\sqrt{n}}{\sigma}$ alındığında ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$y_p = \underset{y}{enk} \left\{ P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \leq y\right) \geq p \right\} \quad (4.3)$$

yazılabilir. Burada, y_p Eş. 4.3 ile verilen eşitsizliği sağlayan en küçük y değeridir.

Bu durumda, yukarıdaki eşitsizlik,

$$P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \leq y_p\right) = p \quad (4.4)$$

biçiminde de yazılabilir. Buradan hareketle, tam kredibilite için koşul $r\mu\sqrt{n}/\sigma \geq y_p$ olur. Veya

$$r\mu\sqrt{n} \geq y_p\sigma \text{ 'den}$$

$$\frac{\sigma}{\mu} \leq \frac{r}{y_p} \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} \quad (4.5)$$

yazılabilir. Burada $\lambda_0 = (y_p/r)^2$ 'dır. Sonuç olarak, tam kredibilite'nin aşağıdaki durumda oluştuğu gösterilebilir.

$$Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} \leq \frac{\mu^2}{\lambda_0} \quad (4.6)$$

Buradan

$$n \geq \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \quad (4.7)$$

bulunur. Tam kredibilite için gerekli olan riske maruz kalan birim sayısı (the number of exposure units) n bulunabilir.

Şayet n büyük ise, merkezi limit teoreminden,

$$\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_n : N(0,1) \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu nedenle Eş. 4.4,

$$P(|Z_n| \leq y_p) = p \quad (4.9)$$

olur. Burada Z_n standart normal dağılıma sahiptir, y_p değeri standart normal dağılım tablosu yardımıyla bulunabilir.

Örnek olarak, $p = 0,95$, $y_{0,95} = 1,960$ değerini verir ve $r = 0.05$ ise

$$\lambda_0 = (y_p / r)^2 = (39,2)^2 = 1536,64$$

ve

$$n \geq 1536,64 \sigma^2 / \mu^2$$

olur.

4.1.2. Kısmi kredibilite

Eğer tam kredibilitenin uygun olmadığına karar verirse bu durumda net primde, hem geçmiş deneyim $\bar{Y}$ 'nin hem de aynı zamanda önsel ortalama (prior mean) H 'nin etkisini yansıtmak amacıyla $Z < 1$ olacak şekilde kredibilite faktörünün uygun bir değerinin belirlenmesi gerekir. Bunun için, ağırlıklı ortalama yoluna başvurulabilir. Yani kredibilite,

$$C = Z\bar{Y} + (1 - Z)H \quad (4.10)$$

yoluyla hesaplanabilir. Burada kredibilite faktörü, Z 'nin 0-1 kapalı ($Z \in [0,1]$) aralığında seçilmesi gerekir.

Burada amaç, kredibilite prim değeri olan C 'nin varyansını Eş. 4.6'daki $\frac{\mu^2}{\lambda_0}$, a eşit olacak şekilde kontrol etmektir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Var(C) &= Var[Z\bar{Y} + (1-Z)H] = \frac{\mu^2}{\lambda_0} \\ &= Z^2 Var(\bar{Y}) \\ &= Z^2 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\mu^2}{\lambda_0} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} < 1$ olduğunda,

$$Z = \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} \quad (4.11)$$

elde edilir. Eş. 4.5'den, eğer $\frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} > 1$ ise, tam kredibilite verileceği görülür. Bu nedenle aşağıdaki formülle durum özetlenebilir.

$$Z = \min \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}}, 1 \right\} \quad (4.12)$$

burada $\lambda_0 = (y_p/r)^2$, dir.

4.2. Klasik Kredibilite Modelleri

Bu kısımda, giriş bölümünde bahsedilen problemin çözümüne model altında bir yaklaşım uygulanmaktadır. Bühlmann (1967), $E(Y_{i+1}/\Theta = \theta)$ 'in tahmini için alternatif bir yol önermiştir. Burada θ , bir derecelendirme sınıfında her poliçe

sahibinin risk seviyesini karakterize eden bir risk parametresidir. θ 'in olasılık dağılım fonksiyonu $\pi(\theta)$ ile gösterilebilir. Bühlmann $\pi(\theta)$ 'yi yapısal fonksiyon (*structure function*) olarak tanımlar. Bayesci görüş ise $\pi(\theta)$ 'yi, herhangi bir sigortalı için hasar bilgilerini gözlemlemeden önce θ 'deki belirsizliği gösteren, θ 'nin önsel dağılımı olarak ifade eder.

$\mu_{n+1}(\theta) = E(Y_{i+1} / \Theta = \theta)$ olmak üzere, $E[\mu_{n+1}(\theta) / Y_1, Y_2, L, Y_n]$ 'e en küçük beklenen karelerden sapma yaklaşımı adı (the least expected square deviation approximation) verilmiştir [Bühlmann, 1967]. $E[\mu_{n+1}(\theta) / Y_1, Y_2, L, Y_n]$ 'e en iyi doğrusal yaklaşım,

$$E \left\{ \left[\mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \right]^2 \right\} \quad (4.13)$$

dır. Eş. 4.13'deki ifadenin en küçüklenmesi ile bulunur. Buradan Bühlmann ve Bühlmann-Straub modelleri θ parametresine bağlı olarak elde edilir.

4.2.1. Bühlmann kredibilite modeli

Bühlmann kredibilite modeli, kayıp hata kare fonksiyonu (the squared error loss) nun en küçüklenmesi anlamında Bayesci primin (veya en küçük kareler kredibilite primi) en iyi doğrusal yaklaşımıdır. Her poliçe sahibi için Θ koşulu altında, $Y = (Y_1, Y_2, L, Y_n)'$ geçmiş kayıplar aynı ortalamaya ve aynı varyansa sahiptirler. Ayrıca Θ koşulu altında bağımsız ve aynı dağılımlı (b. ve a.d) rassal değişkenlerdir. Böylece, $\mu(\theta)$ *hipotetik ortalama* ve $\nu(\theta)$ *da süreç varyansı* olmak üzere,

$$\mu(\theta) = E(Y_i / \Theta = \theta) \quad (4.14)$$

ve

$$\nu(\theta) = \text{Var}(Y_i / \Theta = \theta) \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mu = E[\mu(\theta)] \quad (4.16)$$

$$\nu = E[\nu(\theta)] \quad (4.17)$$

ve

$$a = \text{Var}[\mu(\theta)] \quad (4.18)$$

olsun. Burada, μ ifadesi, *hipotetik ortalamaların beklenen değeri*, ν , *süreç varyansının beklenen değeri* ve a , *hipotetik ortalamaların varyansıdır*. Bu genel tanımlamalardan sonra aşağıda koşullu kovaryanslar için gerekli iki teorem verilmektedir.

Teorem 4.1.

X , Y ve Θ ortak bir dağılıma sahip rassal değişkenler olsun. Bu durumda,

$$E[Y] = E[E[Y / \Theta]] \quad (4.19)$$

ve

$$\text{Kov}[X, Y] = E[\text{Kov}[X, Y / \Theta]] + \text{Kov}[E[X / \Theta], E[Y / \Theta]] \quad (4.20)$$

eşitlikleri yazılabilir [Goovaerts ve ark., 1990].

Teorem 4.2.

$\Theta = \theta$ koşulu altında Y_1, Y_2, L, Y_n rassal değişkenleri bağımsız ve her biri aynı koşullu beklenen değer $\mu(\theta)$ ve varyans $\sigma^2(\theta)$ 'ya sahip oldukları varsayımı altında,

$$Kov[Y_s, Y_i] = a + \delta_{si}s^2, \quad s \neq i \quad s, i = 1, 2, L, n \quad (4.21)$$

$$Kov[\mu(\Theta), Y_s] = a \quad (4.22)$$

dir (Burada δ Kroneker sembol: $s = i$ ise $\delta_{si} = 1$, diğer durumda $\delta_{si} = 0$ değerini gösterir) [Goovaerts ve ark., 1990].

Bu bilgilerin ışığı altında, Y_i 'nin ortalaması, varyansı ve kovaryansı elde edilebilir.

$$E(Y_i) = E[E(Y_i / \Theta = \theta)] = E[\mu(\theta)] = \mu \quad i=1, 2, L, n \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} Var(Y_i) &= E[Var(Y_i / \Theta = \theta)] + Var[E(Y_i / \Theta = \theta)] \\ &= E[v(\theta)] + Var[\mu(\theta)] \\ &= v + a \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} Kov(Y_s, Y_i) &= E(Y_s Y_i) - E(Y_s)E(Y_i) \quad s \neq i \quad s, i = 1, 2, L, n \quad (4.25) \\ &= E[E(Y_s Y_i / \Theta = \theta)] - \mu^2 \\ &= E[E(Y_s / \Theta = \theta)E(Y_i / \Theta = \theta)] - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= E\{[\mu(\theta)]^2\} - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= Var[\mu(\theta)] \\ &= a \end{aligned}$$

olur. Buradan Bühlmann yaklaşımına bakılabilir. Temel problemi hatırlayalım: $\mu_{n+1}(\theta)$ hipotetik ortalama, bir sonraki dönemde, ortalama hasarların tahmin edilmesi amacıyla kullanılmak isteniyorsa, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ gözlemleri yapılmış olduğundan önerilecek bir yöntem, geçmiş verilerin doğrusal fonksiyonu ile $\mu_{n+1}(\theta)$ değerinin elde edilmesidir. Dolayısıyla, bu işlemin yapılabilmesi için $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i$ formundaki doğrusal tahmin ediciler kullanılmalıdır. α_s 'ler kayıp hata kareleri (squared error loss) minimize edecek şekilde seçilir. Verilen bilgilerden yararlanarak,

$$W = E \left\{ \left[\mu_{n+1}(\theta) - \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \right) \right]^2 \right\} \quad (4.26)$$

ifadesi W oluşturulur. Amaç Bayesci prim ile $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i$ şeklinde belirlenen doğrusal prim değeri arasındaki farkı en küçükleyecek prim değerini verecek modeli elde edebilmektir. Bu amaç doğrultusunda Eş. 4.26'nın en küçüklenmesi ile $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ bulunur. Burada $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 'ler Eş. 4.26'yı en küçükleyen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ değerlerini göstermektedir. Bu durumda,

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \quad (4.27)$$

eşitliği kredibilite prim değeri olarak ifade edilebilir. Eş. 4.26'dan, W ifadesini en küçükleyecek $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ değerlerinin bulunması için $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 'lere göre türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_0} = E \left\{ 2 \left[\mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \right] (-1) \right\} = 0 \quad (4.28)$$

$$E[\mu_{n+1}(\theta)] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(Y_i) \quad (4.29)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $E(Y_{n+1}) = E[E(Y_{n+1} / \Theta = \theta)] = E[\mu_{n+1}(\theta)]$ ve $\partial W / \partial \alpha_0 = 0$ bilgilerinin ışığı altında, son ifade,

$$E(Y_{n+1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(Y_i) \quad (4.30)$$

şeklini alır. Aynı şekilde $s = 1, 2, L, n$ için α_s ' ye göre kısmi türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$E[\mu_{n+1}(\theta) Y_s] = \alpha_0 E(Y_s) + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(Y_s Y_i) \quad (4.31)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı,

$$\begin{aligned} E[\mu_{n+1}(\theta) Y_s] &= E\{E[Y_s \mu_{n+1}(\theta) / \Theta = \theta]\} \\ &= E\{\mu_{n+1}(\theta) E[Y_s / \Theta = \theta]\} \\ &= E[E(Y_{n+1} / \Theta = \theta) E[Y_s / \Theta = \theta]] \\ &= E[E(Y_{n+1} Y_s / \Theta = \theta)] \\ &= E(Y_{n+1} Y_s) \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Diğer bir deyişle, $\mu_{n+1}(\theta) = E[Y_{n+1} / \Theta = \theta]$ olduğundan,

$$\begin{aligned} E[\mu_{n+1}(\theta) Y_s] &= E[E(Y_{n+1} / \Theta = \theta) Y_s / \Theta = \theta] \\ &= E[E(Y_{n+1} Y_s / \Theta = \theta)] \\ &= E(Y_{n+1} Y_s) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\partial W / \partial \alpha_s = 0$ ' dan hareketle,

$$E(Y_{n+1}Y_s) = \alpha_0 E(Y_s) + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(Y_s Y_i) \quad (4.33)$$

elde edilir. Eş. 4.30, $E(Y_s)$ ile çarpılıp, Eş. 4.33' den çıkarılırsa,

$$Kov(Y_s, Y_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Kov(Y_s, Y_i), \quad s, i = 1, 2, L, n \quad (4.34)$$

sonucu elde edilir. Son ifade,

$$\begin{aligned} Kov(Y_s, Y_{n+1}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \alpha_i Kov(Y_s, Y_i) + \alpha_s Kov(Y_s, Y_s), \quad s, i = 1, 2, L, n \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \alpha_i Kov(Y_s, Y_i) + \alpha_s Var(Y_s) \end{aligned} \quad (4.35)$$

biçimindedir. Eş. 4.30'dan,

$$\mu = \alpha_0 + \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (4.36)$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - \alpha_0 / \mu \quad (4.37)$$

olur. Eş. 4.35'de bulunan değerler yerine konulursa,

$$a = \sum_{\substack{i=1 \\ s \neq i}}^n \alpha_i a + \alpha_s a + \alpha_s v$$

elde edilir. Yukarıdaki son ifade,

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a + \alpha_s v, \quad s \neq i \quad s, i = 1, 2, L, n \quad (4.38)$$

şeklini alır. Eş. 4.38'den,

$$\alpha_s = \frac{a(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)}{v} = \frac{a(\alpha_s/\mu)}{v} = \frac{a\alpha_s}{\mu v} \quad (4.39)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{na\alpha_s}{\mu v} \quad (4.40)$$

olur. Bu nedenle Eş. 4.37,

$$1 - \alpha_s/\mu = \frac{na\alpha_s}{\mu v} \quad (4.41)$$

şekline dönüşür. Elde edilen son ifadenin, α_s için çözümü,

$$\alpha_s = \frac{\mu v}{na + v} \quad (4.42)$$

biçimindedir. Böylece,

$$\alpha_i = \frac{a\alpha_0}{\mu\nu} = \frac{a\left(\frac{\mu\nu}{na+\nu}\right)}{\mu\nu} = \frac{a\mu\nu}{(na+\nu)\mu\nu} = \frac{a}{na+\nu} \quad (4.43)$$

olur. Bu durumda elde edilen α_0 ve α_i 'ler Eş. 4.27'de yerine konulur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i &= \frac{\mu\nu}{na+\nu} + \sum_{i=1}^n \frac{a}{na+\nu} Y_i \\ &= \frac{\nu}{na+\nu} \mu + \frac{na}{na+\nu} \bar{Y} \\ &= (1-Z) \mu + Z \bar{Y} \end{aligned} \quad (4.44)$$

sonucuna ulaşılır. Burada,

$$Z = \frac{na}{na+\nu} \quad (4.45)$$

ve $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i / n$ dir. Böylece,

$$1-Z = 1 - \frac{na}{na+\nu} = \frac{na+\nu-na}{na+\nu} = \frac{\nu}{na+\nu}$$

olur. Bu ise Eş. 4.44'deki son ifade de bulunan değerle aynıdır. Sonuç olarak Bühlmann kredibilite primi,

$$(1-Z) \mu + Z \bar{Y} \quad (4.46)$$

biçiminde hesaplanır. Buradan,

$$Z = \frac{n}{n + \frac{v}{a}} \quad (4.47)$$

şeklinde de yazılabilir. Son ifadedeki $\frac{v}{a}$ yerine k yazıldığında, Eş. 4.24'den,

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[v(\theta)]}{Var[\mu(\theta)]} = \frac{E[Var(Y_i / \Theta = \theta)]}{Var[E(Y_i / \Theta = \theta)]} = \frac{SVBD}{HOV} \quad (4.48)$$

olur. Burada SVBD: süreç varyansının beklenen değeri ve HOV: hipotetik ortalamaların varyansı şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{n}{n + k} \quad (4.49)$$

olmak üzere Bühlmann kredibilite modeli,

$$E(Y_{n+1}) = Z\bar{Y} + (1 - Z)\mu, \quad Z = \frac{n}{n + k}, \quad 0 \leq Z \leq 1$$

biçiminde özetlenebilir. Buradan da görüldüğü gibi, Bühlmann modelinde, Bayesci yöntemle, bulunan prim değerine en yakın değeri verecek doğrusal prim değeri bulunmaktadır. Bu nedenle, prim değerini belirlerken kullanılan Bühlmann kredibilite modeli, kredibilitenin Bayesci modellemesi olarak adlandırılabilir. Ancak Bühlmann yönteminde, Bayes yöntemine göre hesaplama kolaylığı vardır. Diğer bir ifadeyle, Bayesci prim belirlenirken her dağılımın türüne göre bir kestirici dağılım bulmak gerekirken, Bühlmann prim değerini belirlerken böyle bir işlem karmaşasına gerek kalmadan kolaylıkla Z kredibilite faktörü belirlenebilmektedir. Sonuçta Bayesci prim değeri ile Bühlmann prim değeri birbirine çok yakın değerlerdir. Böyle olması da çok doğaldır. Daha önce de söylenildiği gibi, Bühlmann kredibilite primi, Bayesci primin en iyi doğrusal yaklaşımıdır. Bu nedenle Bayesci yöntem yerine

Bühlmann kredibilite modelini kullanarak bulunacak prim değerini kullanmak daha uygun olacaktır.

Bölüm 3'deki örnek 3.1'i yukarıda teorisi verilen Bühlmann kredibilite modeli için de uygulayarak bu iki yöntem ile bulunan prim değerlerinin yakınlığını görmek mümkündür.

Örnek 4.1.

Örnek 1'deki gibi sürücüler 3 grupta toplansın. Bunlar, kötü, orta ve iyi sürücüler olsun. Kolaylık olması açısından bunları sırasıyla A, B ve C ile ifade edelim. Her grup içinde, yıllık hasar frekansının $\theta_A = 0,6$; $\theta_B = 0,3$ ve $\theta_C = 0,1$ parametreleriyle bir Poisson rassal değişkeni şeklinde dağıldığını varsayalım. Ayrıca, Θ aşağıdaki gibi belirlenen bir önsel dağılıma sahip olsun.

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \Theta = \theta_A & \text{ için } 0,20 \\ \Theta = \theta_B & \text{ için } 0,45 \\ \Theta = \theta_C & \text{ için } 0,35 \end{cases}$$

Rassal olarak seçilen bir sürücünün 2004'de 2, 2005'de 1 hasar, 2006'da ise hiç hasar yapmadığı görülüyor. Buna göre bu sürücünün 2007'deki hasarlarının beklenen Bühlmann sayısı nedir?

Çözüm

Bühlmann kredibilite sayısı, $E(Y_{2007}) = (1 - Z)\mu + Z\bar{Y}$ şeklinde oluşturulmuştur. 2004'de 2, 2005'de 1 ve 2006'da ise 0 hasar olduğu bilinmektedir. Bu bilgiler ışığında, $\bar{Y} = 1$ olarak hesaplanır. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}\mu &= E[E(Y_i / \Theta)] = E \begin{cases} \Theta = \theta_A \text{ için } 0,20 \\ \Theta = \theta_B \text{ için } 0,45 \\ \Theta = \theta_C \text{ için } 0,35 \end{cases} \\ &= (0,6)(0,20) + (0,3)(0,45) + (0,1)(0,35) \\ &= 0,29\end{aligned}$$

bilgisi de vardır. Böylece, geriye sadece Z 'yi hesaplamak kalır. Buradan hareketle, üç hasara maruz kalma yılı (2004, 2005 ve 2006) olduğundan $n=3$ olur. Bu değer

Z 'de yerine yazılırsa $Z = \frac{3}{3 + \frac{\nu}{a}}$ elde edilir. Diğer gerekli işlemler, ν ve a 'nın

hesaplanmasıdır.

$$\nu = E[Var(Y_i / \Theta)] = E \begin{cases} \Theta = \theta_A \text{ için } 0,20 \\ \Theta = \theta_B \text{ için } 0,45 \\ \Theta = \theta_C \text{ için } 0,35 \end{cases}$$

Poisson dağılımında, dağılımın parametreleri, ortalama ve varyans eşittir. Bu nedenle $\nu=0,29$ olacaktır. Aynı zamanda,

$$a = Var[E(Y_i / \Theta)] = Var \begin{cases} \Theta = \theta_A \text{ için } 0,20 \\ \Theta = \theta_B \text{ için } 0,45 \\ \Theta = \theta_C \text{ için } 0,35 \end{cases}, \quad \text{veya}$$

$$\begin{aligned}a &= [(0,6)^2 (0,20) + (0,3)^2 (0,45) + (0,1)^2 (0,35)] - [0,29]^2 \\ &= 0,116 - 0,0841 \\ &= 0,0319\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{3}{3 + \frac{0,29}{0,0319}} = 0,2481203$$

biçiminde oluşur. Sonuç olarak Bühlmann kredibilite primi,

$$\begin{aligned} E(Y_{2007} / y = (2,1,0)) &= (0,2481203)(1) + (1 - 0,2481203)(0,29) \\ &= 0,2481203 + 0,2180451 \\ &= 0,466165412 \cong 0,4662 \end{aligned}$$

değeri elde edilir ve bu değer Poisson örneğinde hesaplanan Bayesci prim 0,4694'den çok az küçüktür. Görüldüğü gibi, Bayesci yaklaşım ve Bühlmann modeliyle bulunan değerler birbirine yakın değerlerdir.

4.2.2. Bühlmann-Straub kredibilite modeli

Bir önceki kısımda verilen Bühlmann modeli bir sigortalının geçmişe ait hasar sonuçlarının, her geçmiş dönem için birbirleriyle bağımsız ve aynı dağılımlı bileşenlerden oluşmuş olmasını gerektirmektedir. Bu varsayımın ortaya çıkardığı zorluklardan biri riske maruz kalma değerindeki veya büyüklükteki değişimlere izin vermemesidir. Bir başka deyişle, Bühlmann modeli, geçmiş poliçe dönemlerinde farklı riske maruz kalan birimlerin sayısına (number of exposure units) veya farklı hasar büyüklüğü dağılımlarına (distribution of claim size) müsaade etmez. Yani, Bühlmann modeli bu tür farklılıkları ele alacak yapıda değildir. Bühlmann modeli için en önemli kısıtlamalardan biri $Y_i | \Theta$ ' in koşullu varyanslarının benzer olduğu şeklindeki kısıtlamadır. Bu sorunları gidermek için *Bühlmann ve Straub (1970)* ' de Bühlmann modelinin genelleştirilmiş şeklini sunmuşlardır [Klugman ve ark., 1998]. Bühlmann ve Straub' un sunduğu model varsayımlarının Bühlmann modelinde olduğu gibi Y_1, Y_2, L, Y_n ' lerin bağımsız ve Θ üzerinden koşullu olmak üzere aynı

ortalamalı fakat koşullu varyanslarının farklı olduğudur. Kısaca, ortalamanın Bühlmann modelinde olduğu gibi

$$E(Y_i / \Theta = \theta) = \mu(\theta) \quad (4.50)$$

ve koşullu varyansının,

$$Var(Y_i / \Theta = \theta) = \nu(\theta) / m_i \quad (4.51)$$

biçiminde ifade edilmesi gerektiği söylenebilir. Burada m_i , bireylerin i 'inci poliçe döneminde bilinen bir riske maruz kalma değeridir.

Bühlmann modelinde her sigorta döneminde tek bir bireyi ele aldığımız için $\mu(\theta)$ ve $\nu(\theta)$, her sigorta döneminde θ verilmişken bu bireyin ortalama ve varyansdır. Model, örnek ortalamasını yani $\bar{Y}_{m_i}$ 'yi esas alır hale dönüşür. $\mu(\theta)$ ve $\nu(\theta) / m_i$, i 'nci sigorta döneminde θ verilmişken örnek ortalamasının (*sample average*) ortalama ve varyansını gösterir.

Bühlmann modelinde olduğu gibi Bühlmann-Straub modelinde de aynı tanımlar kullanılabilir. Buradan $\mu(\theta)$ *hipotetik ortalama* ve $\nu(\theta)$ 'da *süreç varyansı* olmak üzere,

$$\mu = E[\mu(\theta)] \quad (4.52)$$

$$\nu = E[\nu(\theta)] \quad (4.53)$$

ve

$$a = Var[\mu(\theta)] \quad (4.54)$$

şeklindedir. Burada, μ ifadesi; *hipotetik ortalamaların beklenen değeri*, v ; *süreç varyansının beklenen değeri* ve a ; *hipotetik ortalamaların varyansıdır*. Y_i ' in ortalaması, varyansı ve kovaryansı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(Y_i) = E[E(Y_i / \Theta = \theta)] = E[\mu(\theta)] = \mu \quad i = 1, 2, L, n \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} Var(Y_i) &= E[Var(Y_i / \Theta = \theta)] + Var[E(Y_i / \Theta = \theta)] \\ &= E[v(\theta)/m_i] + Var[\mu(\theta)] \\ &= \frac{v}{m_i} + a \end{aligned} \quad (4.56)$$

ve

$$\begin{aligned} Kov(Y_s, Y_i) &= E(Y_s Y_i) - E(Y_s)E(Y_i) \quad s \neq i \quad s, i = 1, 2, L, n \\ &= E[E(Y_s Y_i / \Theta = \theta)] - \mu^2 \\ &= E[E(Y_s / \Theta = \theta)E(Y_i / \Theta = \theta)] - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= \{E[\mu(\theta)]^2\} - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\ &= Var[\mu(\theta)] \\ &= a \end{aligned} \quad (4.57)$$

dır. Ayrıca şu tanım yapılabilir,

$$m = m_1 + m_2 + L + m_n \quad (4.58)$$

Burada m bütün poliçe dönemleri için toplam riske maruz kalma (total exposure) değeridir. Bu durumda Eş. 4.23'ü kullanarak, Eş. 4.30,

$$\mu = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu$$

şeklini alır.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - \alpha_0 / \mu \quad (4.59)$$

dır. $i=1, 2, \dots, n$ için Eş. 4.35 aşağıdaki hale dönüşür,

$$a = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \alpha_i a + \alpha_s (a + v/m_s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a + v \alpha_s / m_s$$

Elde edilen bu son eşitlik α_s ' ya göre çözüldüğünde,

$$\alpha_s = \frac{a}{v} m_s \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = \frac{a}{v} \frac{\alpha_0}{\mu} m_s \quad s, i=1, 2, \dots, n \quad (4.60)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, Eş. 4.59 ve Eş. 4.60'den,

$$\alpha_0 = \frac{\mu}{1 + \frac{ma}{v}} = \frac{v/a}{m + v/a} \mu$$

elde edilir. Bu bilgilerden yararlanarak,

$$\alpha_i = \frac{a \alpha_0}{\mu v} m_i = \frac{m_i}{m + v/a}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda Eş. 4.27'deki kredibilite primi,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i &= \frac{\nu/a}{m + \nu/a} \mu + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m + \nu/a} Y_i \\
&= \frac{\nu/a}{m + \nu/a} \mu + \frac{m}{m + \nu/a} \bar{Y} \\
&= (1-Z) \mu + Z \bar{Y}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

şeklini alır. Burada Eş. 4.47'den $k = \nu/a$ dır.

$$Z = \frac{m}{m+k} \text{ ve } \bar{Y} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} Y_i \tag{4.62}$$

olur. Açıkça görülüyor ki Bühlmann-Straub kredibilite faktörü Z , m 'ye bağlıdır. Ayrıca $\bar{Y}$, Y_i 'lerin ağırlıklı ortalamasıdır. Bu ağırlıklar m_i 'ler ile orantılıdır. Poliçe sahiplerinin oluşturduğu grupla ilgili, Y_i 'nin i döneminde poliçe sahiplerinin oluşturduğu grupta m_i adet riske maruz kalmış grup üyesinin ortalama kaybını temsil ettiği, $m_i Y_i$ 'in ise grubun i dönemindeki toplam kaybını ifade ettiği yorumu yapılabilir. $\bar{Y}$, n dönemlik bir sürede her bir grup üyesinin genel ortalama (*overall average*) kaybını göstermektedir.

Sonuç olarak Bühlmann-Straub kredibilite modeli,

$$E(Y_{n+1}) = Z\bar{Y} + (1-Z)\mu, \quad Z = \frac{m}{m+k}, \quad 0 \leq Z \leq 1$$

biçiminde özetlenebilir. Bühlmann-Straub modelinin özelliğinden dolayı kredibilite faktörü Z her sınıf için ayrı hesaplanmalıdır. Bühlmann-Straub kredibilite prim

tahmin edicisi, $\hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + k}$ ve $\hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}$ olmak üzere,

$$\hat{C}_i = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} \tag{4.63}$$

şeklinde ifade edilebilir. Kısacası Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modelleri ile belirli bir sigorta şirketine ait eski bilgiler ve yeni bilgiler kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılarak bir sonraki sigorta dönemi için prim tahmini elde edilebileceği gibi, sınıflar arası prim saptamasında da kullanılabilir. Aslında, kredibilite teorisi bir prim saptama yöntemidir. Bu amaç doğrultusunda, prim değeri Eş. 4.63’de verilen kredibilite prim tahmin edicisi $\hat{C}_i$ ile hesap edilmektedir.

Bühlmann-Straub modeli için parametrik olmayan tahmin ediciler

k ve μ ’nün parametrik tahmin edicileri Bühlmann ve Bayesci modellerinde olduğu gibi, Eş. 4.63’de de kullanılabilirler. Ancak parametrik olmayan tahmin ediciler de (bunları sırasıyla $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ ve $\hat{a}$ ile gösterelim) kullanılabilir. μ ’nün sapmasız bir tahmin edicisi $\bar{Y}$ ’dir,

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} Y_{ij},$$

ki bu ortalama riske maruz kalma (exposure) sayısı m_{ij} ’ler ile ağırlıklıdır. Fakat μ için başka sapmasız tahmin ediciler de mevcuttur. Kredibilite modellemesinde en sık kullanılan μ ’nün tahmin edicisi, kredibilite ağırlıklı tahmin edicisidir. Bu tahmin edici,

$$\hat{\mu} = \left[\sum \hat{Z}_i \bar{Y}_i \right] / \sum \hat{Z}_i$$

şekilde ifade edilebilir. Burada μ kredibilite faktörleri $\hat{Z}_i$ ’lerle ağırlıklıdır. Kredibilite ağırlıklı tahmin edici, $\bar{Y}$ ’ya göre daha üstündür [Klugman ve ark., 1998]. Bu tahmin edici optimal’dir. Çünkü $\hat{\mu}$ için tüm sapmasız tahmin ediciler içinde en küçük koşulsuz varyansa sahip olan tahmin edicidir. Ayrıca, kredibilite modeli kapsamında, kredibilite tahmin edicisinin kullanımı, toplam hasar (claim) sayısını korumaktadır.

ν için sapmasız bir tahmin edici, grup içi hatalar için ağırlıkların (m_{ij} 'lerin) dahil edilmesiyle aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - 1)} \quad (4.64)$$

Son olarak, a için çok kullanılan bir tahmin edici,

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i^2} \quad (4.65)$$

dır. a 'nin tahmin edicisinin elde edilmesi için iki ön bilgiye ihtiyaç vardır.

$$Var(\bar{Y}_i) = a + \frac{\nu}{m_i} \text{ ve } Var(\bar{Y}) = \frac{\nu}{m} + \frac{a}{m^2} \sum_{i=1}^n m_i^2$$

yazılabilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} Var(\bar{Y}_i) &= E[Var(\bar{Y}_i|\theta)] + Var[E(\bar{Y}_i|\theta)] \text{ 'den} \\ &= E\left[\frac{\nu(\theta_i)}{m_i}\right] + Var[\mu(\theta_i)] \\ &= \frac{\nu}{m_i} + a \end{aligned} \quad (4.66)$$

bulunur. Bu ilk eşitliği oluşturur. Ayrıca,

$$Var(\bar{Y}) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{Y}_i}{m}\right] \text{ 'den}$$

$$= \frac{1}{m^2} \left[\sum_i m_i^2 Var(\bar{Y}_i) \right]$$

elde edilir. Eş. 4.66'daki $Var(\bar{Y}_i)$ değeri yerine konulup gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$Var(\bar{Y}) = \frac{1}{m^2} \left[\sum_i m_i^2 \left(a + \frac{\nu}{m_i} \right) \right]$$

$$Var(\bar{Y}) = \frac{\nu}{m} + a \frac{\sum_i m_i^2}{m^2} \quad (4.67)$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 4.67 ise diğer ilişkiyi oluşturur. Kullanılacak olan tek yönlü varyans analizi tablosu, Çizelge 4.1'deki gibidir.

Çizelge 4.1. Tek yönlü varyans analizi tablosu

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	Beklenen Kareler Ortalaması
Gruplar arası α_i	n-1	$RKT = \sum_{i=1}^n t(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$RKO = \frac{RKT}{(n-1)}$	$E(RKO) = \sigma_\epsilon^2 + t\sigma_\alpha^2$
Hata ϵ_{ij}	N-n	$HKT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$HKO = \frac{HKT}{(N-n)}$	$E(HKO) = \sigma_\epsilon^2$

Burada $N = n \times t$ dir [Searle, 1971]. Tek-yönlü ANOVA için rassal etkilere ilişkin ortalama kare (RKO) lerin beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[RKO] &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_i m_i \left[(\bar{Y}_i - \mu)^2 - (\bar{Y} - \mu)^2 \right] \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_i m_i \text{Var}(\bar{Y}_i) - m \text{Var}(\bar{Y}) \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_i m_i \left(a + \frac{\nu}{m_i} \right) - m \left(\frac{\nu}{m} + \frac{a}{m^2} \sum m_i^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_i m_i a + n\nu - \nu - \frac{a \sum m_i^2}{m} \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[a \left(m - \frac{1}{m} \sum m_i^2 \right) + \nu(n-1) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. $E(RKO)$ için yukarıdaki eşitliği ve ν için tahmin ediciyi kullanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa, a için tahmin edici,

$$\begin{aligned}
E[RKO] &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_i m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[a \left(m - \frac{1}{m} \sum m_i^2 \right) + \nu(n-1) \right]
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 &= \hat{a} \left(m - \frac{1}{m} \sum m_i^2 \right) + \hat{\nu}(n-1) \\
\hat{a} &= \left(m - \frac{1}{m} \sum m_i^2 \right)^{-1} \left[\sum_i m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1) \right]
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir [Klugman ve ark., 1998], [Russell ve Greig, 1999]. Bu da Eş. 4.65 ile uyumludur.

4.2.3. Doğrusal modeller

n veri noktasının y_1, y_2, K, y_n olarak gözlemlendiği varsayalım. Bu gözlemler $x_{11}, x_{12}, K, x_{1t}, x_{21}, x_{22}, K, x_{2t}, K, x_{n1}, x_{n2}, K, x_{nt}$ şeklindeki t adet açıklayıcı değişkenin her biri için n adet değer kullanılarak açıklansın. Bu yapı için doğrusal model,

$$y_i = \sum_{j=1}^t x_{ij} \beta_j + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i : N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, K, n \quad (4.68)$$

şeklinde [Toutenburg, 1982]. Burada $\beta_1, \beta_2, K, \beta_t$ tahmin edilmek istenen bilinmeyen sabit-etki parametreleri ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, K, \varepsilon_n$ ortalaması 0, varyansı σ^2 olan bağımsız ve aynı dağılımlı (b. ve a.d.) normal rassal değişkenlerdir.

Aynı zamanda Eş. 4.68 matris ve vektörler kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ M \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & K & x_{1t} \\ x_{21} & x_{22} & K & x_{2t} \\ M & M & O & M \\ x_{n1} & x_{n2} & K & x_{nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ M \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ M \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir. Eş. 4.68'in daha basit matris formu,

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \begin{aligned} \varepsilon &: N(0, \sigma^2 I_n) \\ \text{rank}(X_{n \times t}) &= t \leq n \end{aligned} \quad (4.69)$$

biçimindedir [Toutenburg, 1982]. Burada Y , gözlemlenmiş y_i 'lerin $(n \times 1)$ boyutlu vektörünü, X , x_{ij} 'lerin $(n \times t)$ boyutlu matrisini, β , $(t \times 1)$ boyutlu bilinmeyen sabit-etkiler parametre vektörü ve ε , $(n \times 1)$ boyutlu b. ve a.d. hata vektörünü gösterir.

Karma etki modelleri, doğrusal modeller içinde yer alır. Verilerdeki değişkenliği incelemek için doğrusal modeller kullanılırken, bu değişkenliği verileri çeşitli sınıflara ayırarak, bu sınıflar, ilişkilendirilmek istenebilir. Gözlemlerin kaynağını belirleyen sınıflar “*faktör*” ler olarak adlandırılır. Genellikle her faktörün birden fazla düzeyi vardır. Verileri faktörlere ve bu faktörlerin düzeylerine göre sınıflara ayırırken, her faktörün farklı düzeylerinin, ilgi duyduğumuz değişkeni ne ölçüde etkilediği araştırmacı için önemlidir.

Bir faktörün, değişken üzerine etkileri sabit ve rassal etkiler olmak üzere iki şekilde düşünülebilir. Sabit etkiler, verilerdeki bir faktörün düzeylerinin sonlu bir kümesinden kaynaklanan etkilerdir. Rassal etkiler ise sonsuz düzey kümesine sahip bir faktör tarafından oluşturulan etkilerdir. Örneğin, bir ilde 12 tane sigorta şirketi olduğunu varsayalım. Özel ve ticari arabalardaki hasar tutarları karşılaştırılmak istensin. Bu sigorta şirketlerinin her birinden 10’ar sigortalı rassal olarak seçilsin. Burada arabanın türünden kaynaklanan etkiler sabit etkilerdir. İlgi duyduğumuz olay herhangi bir araba türündeki hasar tutarı olduğu için, istatistiksel olarak araştırmacıyı ilgilendiren araba türlerinden kaynaklanan etkiler, yani sabit etkilerdir.

Sadece sabit etkilere sahip olan modeller sabit etki modeli, rassal etkilere sahip modeller rassal etki modeli ve hem sabit hem de rassal etkilere sahip olan modeller ise karma (mixed) etki modeli olarak isimlendirilir. Karma etki modeli, hem sabit etkileri hem de rassal etkileri içine alan bir modeldir.

Karma etki modeli’nin anlaşılması için verilen örneğe tekrar dönüldüğünde, her bir sigorta şirketinden alınan hasar tutarları için iki uç nokta vardır. Bunlar, 12 sigorta şirketinin de hasar tutarlarının aynı olması veya hasar tutarlarının çok farklı olmasıdır. Gerçek bu iki uç noktanın arasındadır. Bir sigorta şirketinin hasar tutarı diğer sigorta şirketlerinin hasar tutarları ile ilgilidir. Ancak bu hasar tutarlarının kendine özgü nitelikleri de vardır. Bunu ifade etmenin diğer bir yolu, hasar tutarlarının ortak bir değerden rassal olarak farklılaşacak olmalarıdır. Yani, her bir sigorta şirketi için hasar tutarı, $\beta_i = \beta_0 + d_i$ şeklinde ifade edilebilir. Burada β_0

bütün sigorta şirketleri için ortak (sabit) etkilerdir. Bu ortak değer etrafındaki farklılaşmalar d_i 'ler ile ifade edilebilir. Kısacası, d_i 'ler bir sigorta şirketinden diğerine değişen rassal etkilerdir. Burada rassal etkiler park yeri, arabanın rengi, arabayı kullanan sürücünün deneyimi, arabanın kullanıldığı semtlerdeki trafik yoğunluğu...vb. faktörlerden dolayı her bir araba türünün içindeki farklılaşmalardan oluşan değişimlerdir.

Genel olarak, bu noktada n adet bağımsız model mevcuttur. Model,

$$y_i = X_i \beta_i + \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu modele rassal etkiler eklendiğinde her model,

$$\begin{aligned} y_i &= X_i \beta_i + \varepsilon_i \\ &= X_i (\beta_0 + d_i) + \varepsilon_i \\ &= X_i \beta_0 + X_i d_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

biçimini alır [Halliwell, 1998].

Burada n , risk grubu sayısı, t , her risk grubundaki gözlem sayısı ve $N = n \times t$ olmak üzere, Y , riskler için gözlemlenen N tane bireyin özelliklerinden ölçülen değerleri içeren $(N \times 1)$ boyutlu deneyim vektörü olsun. X , riske maruz kalan birimlerin sayısını içeren $(N \times t)$ boyutlu t adet sabit etki için, H , riske maruz kalan birimlerin $(N \times n)$ boyutlu n adet rassal etki için ilişki matrisleri, β , $(t \times 1)$ boyutlu sabit etki vektörü, α , $(n \times 1)$ boyutlu rassal etki vektörü olmak üzere karma etki modeli,

$$Y = X\beta + H\alpha + \varepsilon \quad (4.70)$$

ile ifade edilebilir. Burada $\alpha : (0, \sigma_\alpha^2 I_n)$, $\varepsilon : (0, \sigma_\varepsilon^2 I_N)$, $Kov(\alpha, \varepsilon) = 0$ 'dır.

Eş. 4.70, aynı zamanda aşağıdaki gibi matris ve vektörler kullanılarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & K & x_{1t} \\ x_{21} & x_{22} & K & x_{2t} \\ M & M & O & M \\ x_{N1} & x_{N2} & K & x_{Nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ M \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & K & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & K & h_{2n} \\ M & M & O & M \\ h_{N1} & h_{N2} & K & h_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ M \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ M \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

Y 'nin varyansı,

$$Var(Y) = V = \sigma_\varepsilon^2 (k\delta g.(I_N)) + H\sigma_\alpha^2 H' \quad (4.71)$$

biçimindedir. Eş. 4.71'de verilen $Var(Y)$, kredibilite teorisinde k değerini belirlemede kullanılan,

$$\text{Toplam Varyans} = \left(\begin{array}{c} \text{Süreç Varyansının} \\ \text{Beklenen Değeri} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Hipotetik Ortalamaların} \\ \text{Varyansı} \end{array} \right)$$

yapısına karşılık gelmektedir. Bu yapı, X ve Y rassal değişkenler olmak üzere,

$$Var(Y) = E_X [Var_Y(Y/X)] + Var_X(E_Y[Y/X])$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir. $\sigma_\varepsilon^2 (k\delta g.(I_N))$ terimi, süreç varyansının beklenen değerine (SVBD) ve $H\sigma_\alpha^2 H'$ terimi, hipotetik ortalamaların varyansına (HOV) karşılık gelmektedir [Klugman ve ark., 1998], [Herzog, 1994]. $E(\alpha) = E(\varepsilon) = 0$ olduğundan $E(Y) = X\beta$ 'dir. Hata vektörü ε için, $(N \times N)$ boyutlu kovaryans matrisi R ve rassal etkilerin α vektörüne ilişkin $(n \times n)$ boyutlu kovaryans matrisi $G = \sigma_\alpha^2 I_n$ ile ifade edilsin. α ve ε 'nin bağımsız olması varsayımından Y gözlem vektörüne ait varyans-kovaryans matrisi Eş. 4.71'e eşdeğer olarak,

$$V = HGH' + R \quad (4.72)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\alpha : (0, G)$ ve $\varepsilon : (0, R)$, $Y : (X\beta, V) = (X\beta, HGH' + R)$ şeklini alır. Genellikle hataların sabit varyansa sahip olduğu ve bağımsız olduğu varsayılır. Böylece R , $R = \sigma_\varepsilon^2 I_N$ olmak üzere köşegen bir matristir. Buradan, karma etki modelinde Y gözlem vektörüne ait varyans-kovaryans matrisi V , Eş. 4.72'de verildiği gibidir. Sabit etki modelinde ise,

$$V = R$$

şeklinde ifade edilir [Frees ve ark., 1999].

Karma etki modelin de, Y , X ve H gözlemlenir, ancak genellikle β , α bilinmeyen parametreler vektörü ve R , G bilinmeyen parametreler matrisidir. Böylece karma model analizi iki tamamlayıcı tahmin olayını içerir

- (1) Sabit ve rassal etkiler vektörü β ve α 'nın tahmini
- (2) G ve R kovaryans matrislerinin tahmini.

Sabit etkilerin tahmini ve rassal etkilerin kestirimi

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi karma model analizin temel amacı genellikle, varyans bileşenlerinin tahminidir. Ancak aynı zamanda pek çok durumda sabit etkiler (özel bir çevre veya yılın etkisi gibi) hakkında ve/veya rassal etkiler (öğelere özgü değerler) hakkında sonuç çıkarımı asıl amacı oluşturur. Sabit etkiler hakkında sonuç çıkarımı tahminler olarak isimlendirilirken, rassal etkiler kestirimler olarak ele alınır. Bu tür tahmin ediciler ve kestiricilerin elde edilmesinde yaygın olarak kullanılanlar *en iyi doğrusal sapmasız tahmin edici* (ENDOST) ve *en iyi doğrusal sapmasız kestirici* (ENDOSK)'dir.

Eş. 4.70’de verilen karma etki modeli için β ’nın ENDOST’u,

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y \quad (4.73)$$

biçimindedir. Burada V , Eş. 4.71’de verildiği gibidir. Bu tahmin edici, genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) tahmin edicisidir. α ’nın ENDOSK’u,

$$\hat{\alpha} = GH'V^{-1}(Y - X\hat{\beta}) \quad (4.74)$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu ise çok değişkenli normallik varsayımı altında verilen, $Y = y$ verilmişken α ’nın koşullu beklenen değerine eşittir.

Doğrusal karma modelde G ve R parametre matrislerinin tahmin edilmesi

Tahmin işlemi, karma modelde, genel doğrusal modele göre daha zordur. Genel doğrusal modeldeki gibi sadece β parametre vektörü değil, α parametre vektörü ile G ve R parametre matrisleri de bilinmemektedir. Bu durumda,

$$(Y - X\beta)' V^{-1} (Y - X\beta)$$

değerini en küçükleme için GEKK kullanılır. Ancak V bilgisine ve bundan dolayı G ve R bilgisine ihtiyaç duyulur. Bu tür bilginin eksikliği durumunda, bir yaklaşım, tahmin edilen GEKK’in kullanımıdır. Burada en küçükleme probleminin içinde, V için bazı uygun tahminler kullanılır. Böylece, amaç G ve R’nin uygun birer tahminini bulmak olur. Pek çok durumda en iyi yaklaşım olabilirliğe dayalı yöntemlerin kullanımıdır. Bu yöntemler α ve ε ’nın normal dağıldığı varsayımını gerektirir. Olabilirliğe dayalı iki yöntem en çok olabilirlik (EÇOB) ve kısıtlanmış en çok olabilirlik (KEÇOB)’dur. Burada amaç, EÇOB ve KEÇOB ile ilişkili bir amaç fonksiyonu oluşturarak, bu amaç fonksiyonunu tüm bilinmeyen parametreler üzerinden en büyükleme problemine sadece G ve R

parametrelerine bağılı olacak şekilde indirgemek mümkündür. İlgili log-olabilirlik fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$E\dot{C}OB: \quad l(G, R) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{1}{2} r' V^{-1} r - \frac{N}{2} \log(2\pi)$$

$$KE\dot{C}OB: \quad l_r(G, R) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{1}{2} \log |X' V^{-1} X| - \frac{1}{2} r' V^{-1} r - \frac{N-t}{2} \log(2\pi)$$

Burada $r = Y - X(X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y$ ve $t = \text{rank}(X)$ 'dir [Demidengo, 2004].

Eş. 4.73 ve Eş. 4.74'in çözümü için V kovaryans matrisinin tersine ihtiyaç duyulur. V^{-1} 'i elde etmek zor değildir. Ancak y binlerce gözlem içerdiğinde V^{-1} 'in hesaplanması oldukça zordur. Bu problem çerçevesinde, Karma model eşitlikleri (KME) formunda $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ değerlerini ortak olarak elde etmek için daha kısa bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem,

$$\begin{pmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}H \\ H'R^{-1}X & H'R^{-1}H + G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'R^{-1}Y \\ H'R^{-1}Y \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eş. 4.75, Eş. 4.73 ve Eş. 4.74'den daha karışık görünürken, R ve G köşegenise R^{-1} ve G^{-1} 'nin elde edilmesi, buna bağılı olarak da Eş. 4.75'deki alt matrisleri hesaplamak V^{-1} 'i hesaplamaktan daha kolay olacaktır. Eş. 4.75'in diğer avantajı, sol taraftaki matrisin boyutu ele alındığında görülebilir. X ve H sırasıyla $(N \times t)$ ve $(N \times n)$ boyutludur, buradan $X'R^{-1}X$; $(t \times t)$, $X'R^{-1}H$; $(t \times n)$ ve $H'R^{-1}H + G^{-1}$; $(n \times n)$ boyutludur. Böylece $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ için çözüm bulmada kullanılacak tersine ihtiyaç duyulan matris $((t+n) \times (t+n))$ boyutludur ve bu genellikle V matrisinin boyutundan daha küçüktür.

Özet olarak karma etki modeli, hem sabit hem de rassal etkileri içine alan bir modeldir.

Eş. 4.70’de verilen karma etki modelinde, $\alpha : N(0, \sigma_\alpha^2 I_n)$, $\varepsilon : N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_N)$, $Kov(\alpha, \varepsilon) = 0$ ve $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ ’in varyans-kovaryans matrisi $\hat{V}_K$ olmak üzere, $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}$ ’in doğrusal kombinasyonları için kullanılabilir. $\hat{V}_K$ matrisi aşağıda verilmektedir.

$R = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 I_N$ ve $G = \hat{\sigma}_\alpha^2 I_n$ olmak üzere,

$$Kov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) = \hat{V}_K = \begin{pmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}H \\ H'R^{-1}X & H'R^{-1}H + G^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

dır. Parametrelerin doğrusal kombinasyonlarının hipotez testleri ve güven aralıkları hesaplanabilir. Örneğin,

$$H_0 : L' \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad H_1 : L' \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \neq 0$$

H_1 hipotezine karşı H_0 hipotezini test etmek için kullanılacak t istatistiği,

$$t = \frac{L' \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}}{\sqrt{L' \hat{V}_K L}} \quad (4.77)$$

şeklindedir. Bu t istatistiği $N - rank(X)$ serbestlik derecesine sahiptir. Bu durumda güven aralığı,

$$L' \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{L' \hat{V}_K L} \quad (4.78)$$

şeklinde oluşturulur [Russell ve Greig, 1999].

Karma model eşitliklerini yukarıda özetlendiği gibi α ve ε 'nin çok değişkenli normal dağılıma sahip rassal değişkenler olduğu varsayımı altında geliştirmiştir. Ancak daha sonra ENDOST ve ENDOSK'ların elde edilmesi için normallik varsayımına ihtiyaç duyulmadığı ispatlanmıştır. Bu sonuç elde edilen istatistiklerin sağlam (robust) olduğunu gösterir. Bühlmann modelinde, varyansların bilindiği varsayımı altında ENDOST ve ENDOSK'ların elde edilmesi için normallik varsayımına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Karma model denklemleri genel ve özel durumların geniş bir sınıfı için uygulanabilir. Burada kredibilite modelleri tek-yönlü ANOVA ile ortaya çıkarılacaktır. Eş. 4.70 ile verilen karma etki modeli, tek faktör rassal etki modeli olarak $\alpha_i : N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\varepsilon_{ij} : N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ve $Kov(\alpha_i, \varepsilon_{ij}) = 0$ varsayımı altında,

$$y_{ij} = \beta + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, L, n, \quad j = 1, L, t_i \quad (4.79)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda Eş. 4.71 ile verilen varyans eşitliği açık olarak, iki varyans bileşeni şeklinde,

$$Var(y_{ij}) = Var(\alpha_i) + Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 = HOV + SVBD$$

parçalanabilir. Tek-yönlü model için ENDOST'un bilinen ifadesi

$$h_i = [Var(\bar{y}_i)]^{-1} = \left[\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i} \right]^{-1} \text{ ve } Y \text{ geçmiş deneyimi ifade etmek üzere,}$$

$$\hat{\mu} = E[\mu + \alpha_i / Y] = \frac{\sum h_i \bar{Y}_i}{\sum h_i} \quad (4.80)$$

şeklinde yazılacaktır. $\forall i$ için $t_i = t$ iken $h_i = 1$ ve $\hat{\mu} = \bar{Y}$ olacaktır. Bilindiği gibi, α_i parametresinin ENDOSK'u,

$$\hat{\alpha}_i = E[\alpha_i / \bar{Y}_i] = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i}} (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) \quad (4.81)$$

gibi ifade edilebilir [Searle ve ark., 1992]. Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST ve ENDOSK tahmin edicileri ile yukarıda verilen tahmin ediciler aynıdır. Bunlar Ek 1’de gösterilmiştir.

Sonuç olarak, Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modelleri ile karma etki modeli arasındaki ilişkiyi gösteren en önemli özellik, kredibilite modelleri θ gibi belli bir parametreye bağlı iken, karma etki modelinde θ parametresinin yerini rassal etkiler almaktadır.

5. VERİ YAPISI VE ANALİZİ

Bu bölümde, çalışmanın amacına uygun olarak kullanılacak sigorta branşı ve değişkenler tanımlanarak veri yapısı ile veri kaynağı hakkında bilgi verilecektir.

5.1. Tıbbi Mesleki Sorumluluk (Medical Malpractice) Sigortası Hakkında Genel Bilgi

Mesleki Sorumluluk (Malpractice) Sigortası: Herhangi bir iş dalında çalışan ve uzmanlığı belgelenmiş (diplomalı veya sertifikalı) kişi ya da kuruluşların mesleklerini icra ederken çeşitli nedenlerden dolayı (mesleki yetersizlik, bilgisizlik, dikkatsizlik vb.) yaptıkları yanlış uygulama veya uygulamalara karşı bu hizmet sektörü çalışanlarını koruma altına alan bir sigorta türüdür. Türkiye’de mesleki sorumluluk sigortası, Avrupa Birliği uyum sürecinde yeni yeni önem kazanmaya başlamıştır.

Tıpta da aynı şekilde sağlık sektöründe çalışan kişi ya da kuruluşlar kendilerini korumak amaçlı tıbbi mesleki sorumluluk sigortası yaptırırlar. Bu konuyu daha açmak gerekirse, tıbbi mesleki sorumluluk sigortası, yasa dışı, etik olmayan (ahlak dışı) ve profesyonelce olmayan (yeterli mesleki bilgisizlik, yetersizlik, dikkatsizlik,...vb.) tedavi uygulamalarından (tanı, teşhis, tedavi,...vb.) kaynaklanan hasarlara karşı diplomalı sağlık sektöründe hizmet veren kişi veya kuruluşları koruma altına alır. Bu gibi durumlarda davacı (iddia sahibi) ya hastanın kendisi veya hasta ölmüş ise hastanın bir yakınıdır.

5.2. Tıbbi Mesleki Sorumluluk Sigortası Veri Yapısı

Bu bölümde, uygulamada kullanılacak veri hakkında bilgi verilecektir. Yurdumuzda sigortacılık alanında uzun dönemde veri bulmakta zorluk olduğundan, Missouri Sigorta Bölümünden temin edilen “Tıbbi Mesleki Sorumluluk” sigortası kapsamındaki hasar deneyimi esas alınmıştır. Missouri Tıbbi Mesleki Sorumluluk Sigorta Raporu bu tür hasarları üç farklı gruba ayırmaktadır. Kanunen sağlık

sektöründe faaliyet gösteren firmaların bir sonraki sigorta döneminde ortaya çıkabilecek hasarları karşılamaya yetecek kadar mali güce sahip olmaları zorunludur. Bunun için, sağlık sektöründe faaliyet gösteren firmaların bir sonraki sigorta döneminde Aktüeryal rezervlerinin (nakit para) hesaplanması gerekir. Oluşabilecek hasar talepleri karşısında ödenecek hasar tutarlarını (losses) karşılayabilmek amaçlı bir sonraki sigorta döneminde firmanın, rezervin de bulunması gereken miktarı tahmin etmek için, öngörülen hasar tutarları ile prim hasılatı (prim geliri) en önemli iki bileşendir. Missouri Tıbbi Mesleki Sorumluluk Sigortası Raporu bu tür hasarları üç farklı gruba ayırmaktadır.

—Doktorlar (Dr)

—Hastaneler (H)

—Diğer sağlık hizmeti sunanlar (Diş Hekimleri, Hemşireler,...vb.) (D)

Hasar meydana geldiğinde hasar tutarının ödenmesinde sorun çıkmaması için sigorta idaresi, sağlık alanında hizmet sunmak için yeni açılacak sağlık şirketlerine (hastaneler, poliklinikler,...vb) ilişkin “en az sermaye” şartı getirebilir. Bu gibi durumlarda, her grup için beklenen hasar tutarlarının veya prim miktarlarının hesap edilmesi gerekli olabilir. Buradan yola çıkarak bu çalışmada, hasar tutarı modellemesi yapılacak ve elde edilen parametre tahminleri birbirleriyle karşılaştırılacaktır. 1991’den 2005 yılına (2005 dahil) kadar olan hasar tecrübesi (geçmişi) Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de verilmiştir [<http://insurance.mo.gov/reports/medmal/index.htm>].

Çizelge 5.2, kayıtlara girmiş her bir hasar talebi için ortalama hasar tutarını (parasal) ve gerçekleşen hasar talebi sayısını vermektedir. Çizelge 5.2’de verilen bilgilerden her sınıf ve her dönem için yıllık toplam hasar tutarı elde edilebilir. Çizelge 5.2’den toplam hasar tutarı verisi Çizelge 5.3’de özetlenmiştir. Ayrıca yıllık toplam hasarların sigortalı sayısına (poliçe sahibi sayısına) (number of exposure) bölünmesiyle her sigortalı birim için ortalama yıllık hasar tutarı bulunur. Bu değerler, Çizelge 5.1’de verilmiştir. Missouri Sigorta İdaresinde, yıllar itibariyle sigortalı sayısına ilişkin kesin bilgiler bulunmamaktadır. Bu nedenle, Çizelge 5.1’de ele alınan

her dönem için sigortalılara ait hipotetik (varsayımsal) değerler kullanılmıştır. Bu değerler, hipotetik olmakla birlikte sigortalıların sınıflar (doktorlar, hastaneler ve diğer) arası oranları, bu sınıfların her biri için sigorta poliçesi düzenleyen sigorta şirketlerinin her üç sınıftan kazandıkları toplam hasar tutarı oranları ile kıyaslandığında tutarlıdır. Bu oranlar, yaklaşık sırasıyla %47, %29 ve %24 civarında kullanılmıştır.

Çizelge 5.1. Toplam sigortalı sayısı ve sigortalı başına ortalama hasar tutarları

Yıl	Toplam Sigortalı Sayısı			Sigortalı Başına Ortalama Hasar Tutarı		
	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri
1991	178854	111882	91175	259,59\$	211,46\$	121,07\$
1992	190342	163792	97633	201,22\$	202,52\$	106,51\$
1993	199950	167839	91740	213,09\$	172,46\$	114,19\$
1994	197830	170329	102375	201,56\$	133,43\$	122,79\$
1995	210108	156212	110560	221,26\$	171,02\$	91,89\$
1996	202731	162452	139356	287,04\$	215,59\$	80,02\$
1997	193651	125708	155121	201,10\$	271,28\$	99,79\$
1998	197293	132765	115452	163,94\$	175,25\$	230,07\$
1999	185538	153097	96575	186,06\$	111,88\$	218,74\$
2000	190231	134288	81050	225,02\$	180,85\$	353,30\$
2001	187720	148349	105041	222,45\$	131,31\$	222,84\$
2002	261682	136465	129962	200,83\$	117,81\$	391,31\$
2003	285470	132294	130398	170,54\$	196,60\$	301,21\$
2004	334734	216832	108136	191,98\$	107,39\$	409,41\$
2005	321117	140162	106651	183,68\$	213,40\$	301,78\$
<i>Ortalama</i>	222483,4	150164,4	110748,3	189,39\$	264,58\$	166,91\$
<i>Toplam</i>	3337251	2252466	1661225	2840,86\$	3968,73\$	2503,63\$

Çizelge 5.2. Hasar başına ortalama hasar tutarları ve toplam hasar sayısı

Yıl	Hasar Başına Ortalama Hasar Tutarı			Toplam Hasar Sayısı		
	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri
1991	45120\$	49702\$	30159\$	1029	476	366
1992	40106\$	65555\$	24240\$	955	506	429
1993	43610\$	61457\$	21779\$	977	471	481
1994	40278\$	59185\$	28832\$	990	384	436
1995	44274\$	55198\$	23037\$	1050	484	441
1996	58134\$	76806\$	22851\$	1001	456	488
1997	49296\$	86116\$	33007\$	790	396	469
1998	40993\$	64810\$	50402\$	789	359	527
1999	44259\$	45433\$	41259\$	780	377	512
2000	55092\$	85516\$	51502\$	777	284	556
2001	57438\$	62435\$	50123\$	727	312	467
2002	62937\$	56611\$	86488\$	835	284	588
2003	64997\$	79056\$	60520\$	749	329	649
2004	71561\$	70346\$	71987\$	898	331	615
2005	71755\$	82400\$	62618\$	822	363	514
<i>Ortalama</i>	52657\$	66708\$	43920\$	878	387	503
<i>Toplam</i>	789850\$	1000626\$	658804\$	13169	5812	7538

Çizelge 5.3. Her sigortalı sınıfına ait yıllık toplam hasar tutarları

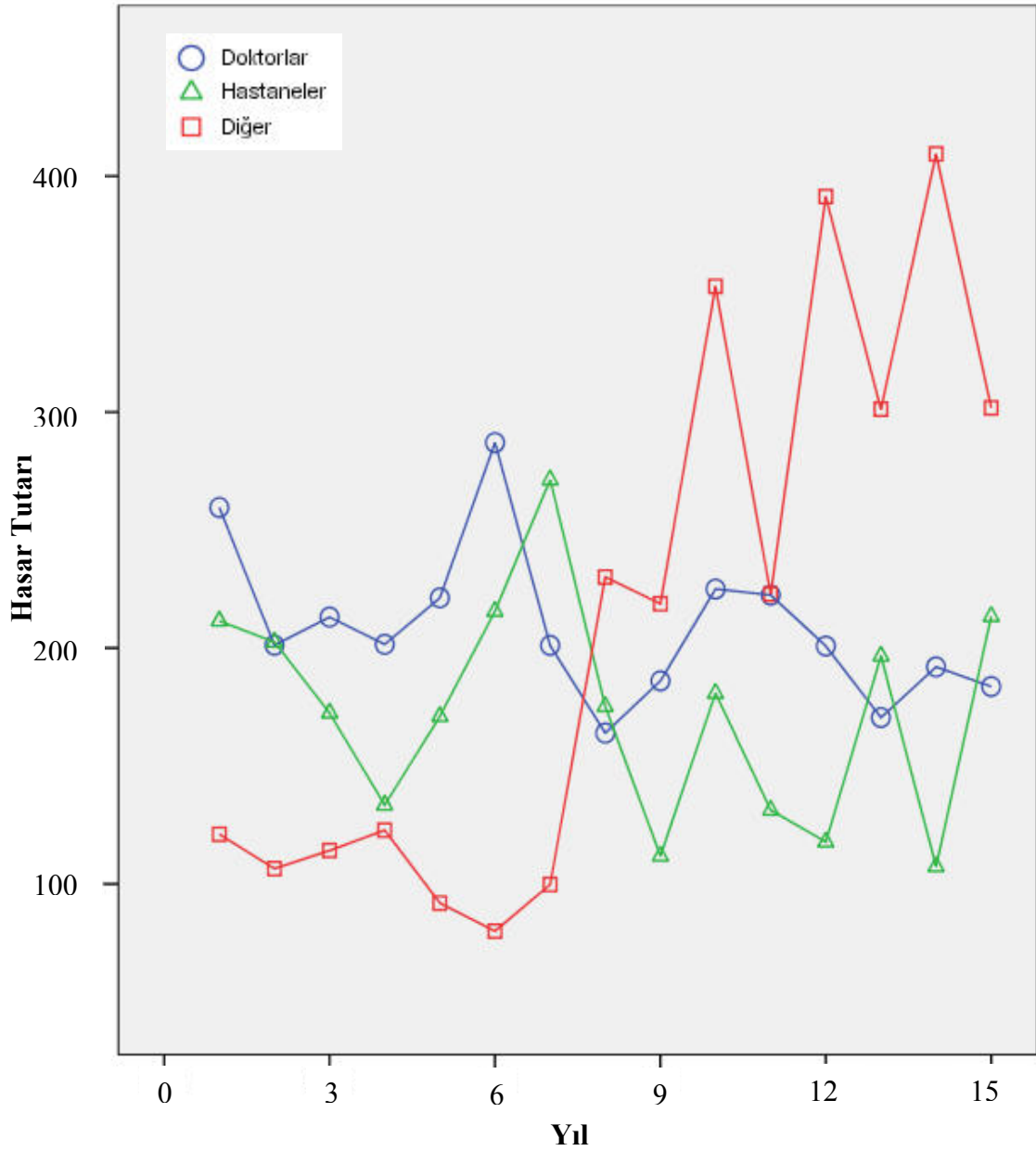
Yıl	Toplam Hasar Tutarı		
	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri
1991	46428480\$	23658152\$	11038194\$
1992	38301230\$	33170830\$	10398960\$
1993	42606970\$	60043489\$	10475699\$
1994	39875220\$	22727040\$	12570752\$
1995	46487700\$	26715832\$	10159317\$
1996	58192134\$	35023536\$	11151288\$
1997	38943840\$	34101936\$	15480283\$
1998	32343477\$	23266790\$	26561854\$
1999	34522020\$	17128241\$	21124608\$
2000	42806484\$	24286544\$	28635112\$
2001	41757426\$	19479720\$	23407441\$
2002	52552395\$	16077524\$	50854944\$
2003	48682753\$	26009424\$	39277480\$
2004	64261778\$	23284526\$	44272005\$
2005	58982610\$	29911200\$	32185652\$
<i>Ortalama</i>	45782967,8\$	27658985,6\$	23172905,9\$
<i>Toplam</i>	686744517\$	414884784\$	347593589\$

5.3. Toplam Hasar Tutarlarının Modellenmesi ve Analizleri

Analizin amacı, bir sonraki sigorta dönemi için sigortalı başına hasar tutarını tahmin etmektir. Böylece her üç sınıfta bulunan sigortalı sayısı için toplam hasar tutarları tahmin edilebilmektedir. Bu amaca yönelik olarak iki farklı yaklaşım uygulanacaktır. Birinci yöntem sadece ortalama hasar tutarı verilerinin kullanılması olacaktır. Bölüm 5.3.2’de ise bir sonraki döneme ait toplam hasar tutarının bulunması için, oransal hasar sıklığı ve hasar tutarı verilerinin iki aşamada modellenmesi anlatılacaktır.

5.3.1. Her poliçe sahibi (exposure) için ortalama hasar tutarlarının kullanılarak toplam hasar tutarlarının modellenmesi

İlk yaklaşımda Çizelge 5.1’deki veri grubunu kullanarak doğrudan hasar tutarları modellenmektedir. Şekil 5.1’de çalışılan 15 yıllık dönem için sigortalı başına ortalama hasar tutarlarının grafiksel gösterimi verilmektedir.



Şekil 5.1. Sigortalı başına ortalama yıllık hasar tutarları

Uygulanacak olan yöntem, Bühlmann-Straub kredibilite modelidir. Parametrik olmayan Bühlmann-Straub modelinin parametreleri aşağıdaki gibi tahmin edilebilir.

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_i \sum_j m_{ij} Y_{ij} = \frac{1418126009}{7250942} = 195,578$$

$$\hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - 1)} = \frac{29132544061}{3(14)} = 693632001$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{v}(n-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i^2} = \frac{1938998736 - 693632001(2)}{7250942 - \frac{1}{7250942}(18970515818782)} = 119,045$$

Buradan,

$$\hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{693632001}{119,045} = 5826618,57$$

olarak elde edilir. $\hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + \hat{k}}$ formülü ile her üç sınıfın Z_i kredibilite faktörleri,

$$\hat{Z}_1 = 0,3642, \hat{Z}_2 = 0,2788 \text{ ve } \hat{Z}_3 = 0,2219$$

bulunur. Kredibilite faktörleri ile ağırlıklandırılmış $\hat{\mu}$ değeri,

$$\hat{\mu}_{Kred} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i} = 198,119$$

şeklinde hesaplanır. Her üç sınıfa ait ortalama hasar tutarı $\bar{Y}_1 = 189,39$, $\bar{Y}_2 = 264,58$ ve $\bar{Y}_3 = 166,91$ 'dir. Son olarak Bühlmann-Straub kredibilite primi,

$$\hat{C}_i = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}$$

ile elde edilir. Bir sonraki sigorta dönemi, sigortalı başına oluşabilecek ortalama hasar tutarı ile ilgili kredibilite primi, her bir sigortalı sınıfı için $\hat{C}_i$ 'den bulunabilir. Her bir modele ait sonuçlar Çizelge 5.4'de özetlenmektedir. Her model için kredibilite prim tahminleri, yukarıda verilen $\hat{C}_i$ formülünde modellerin kendilerine ait $\hat{\mu}$ değeri kullanılarak elde edilmektedir.

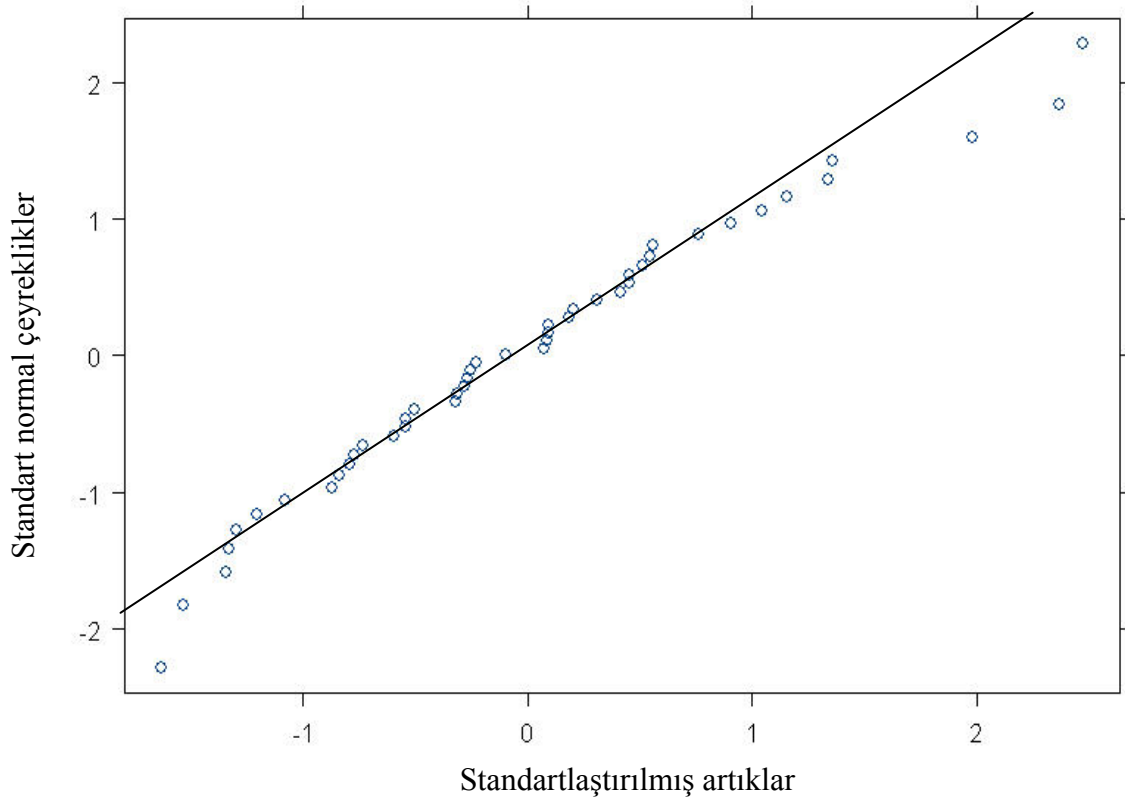
Çizelge 5.4. Sigortalı başına ortalama hasar tutarlarına ait Bühlmann-Straub sonuçları

<i>SINIF i</i>	<i>Doktorlar</i>	<i>Hastaneler</i>	<i>Diğer</i>
$\hat{Z}_i$	0,3642	0,2788	0,2219
$\hat{C}_i(\hat{\mu} = \bar{Y})$	200,329	189,604	198,998
$\hat{C}_i(\hat{\mu}_{Kred})$	201,944	191,436	200,975
$ENDOSK(\hat{\mu} = \bar{Y})$	4,751	-5,974	3,420
$ENDOSK(\hat{\mu}_{Kred})$	6,366	-4,142	5,397

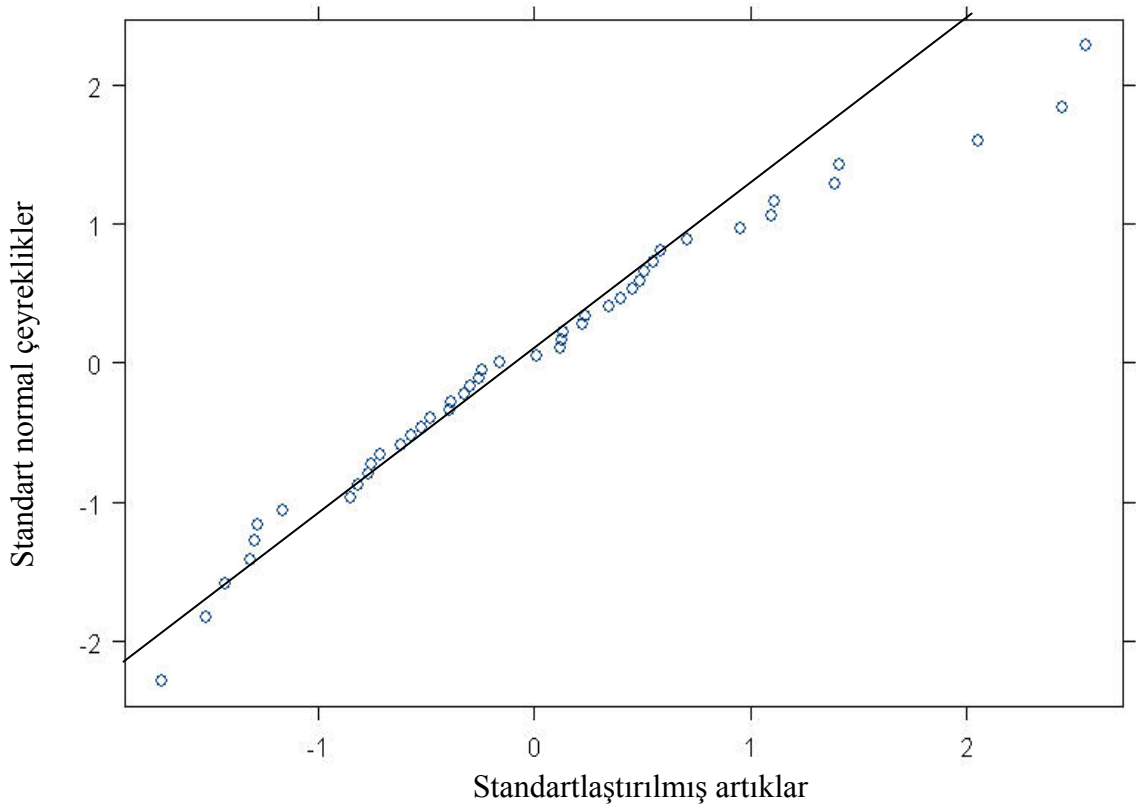
Kredibilite faktörü $\hat{Z}_i$, doktorlar sınıfı için en yüksektir. Bu durum bu sınıfın en fazla sigortalı sayısına sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Sonuçlara toplu olarak bakıldığında kredibilite faktörlerinin oldukça düşük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni gruplar arası hata a 'nın, gruplar içi hata v 'nün aksine oldukça küçük bir değere sahip olmasındandır. ENDOSK tahmini için Çizelge 5.4'de verilen değerler $\hat{C}_i - \hat{\mu}$ olarak hesaplanmıştır. Karşılaştırmak amacıyla iki model tahmininin hepsi için $\hat{\mu} = \bar{Y}$ kullanılmıştır. Burada her üç sınıfın rassal etkileri de büyüktür.

Yukarıda çıkarılan kredibilite tahminleri, hem KEÇOB hem de bilinen EÇOB tahmin yöntemi kullanılarak S-Plus programı ile elde edilen Doğrusal Karma Etki (DKE) modelleriyle karşılaştırılabilir. Bu model daha önce bahsedilen tek yönlü ANOVA'ya benzer formdadır, ancak parametreleştirme açısından ufak bir farklılık söz konusudur. Kullanılacak olan model Eş. 4.79'da verildiği gibidir. Burada $\hat{\beta}$ gruplar (sınıflar) arasındaki ortalamayı ve $\hat{\alpha}$ ise grup ortalamasının yığın

ortalamasından sapma miktarını gösteren bir rassal değişkeni ifade eder. Sabit ve rassal etkiler S-Plus yazılımında, Statistics başlığı altından Mixed Effects Linear alt başlığı kullanarak modellenmiştir. Burada hasar tutarları bağımlı değişken olarak düşünülmüştür. İlk modelleme çalışmasında kullanılan verilere ait KEÇOB, EÇOB ve $KEÇOB_{Yıl\kappa\upsilon p}$ modelleme sonuçları sırasıyla EK-2, EK-3 ve EK-4’de verilmiştir. Buradaki amaç açısından özellikle ilgi çeken bir husus DKE modeli tarafından kestirilen ENDOSK değerleri $\hat{\alpha}_i$ ’lerdir. Bu değerler, S-Plus paket program dilinde yazılan bir program ile elde edilebilmektedir.



Şekil 5.2. DKE modellemesinde KEÇOB’a ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu



Şekil 5.3. DKE modellemesinde EÇOB’a ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu

Hem KEÇOB hem de EÇOB için yapılan modelleme sonuçları birbirine çok benzerdir. S-Plus programına ait ANOVA çıktısında yer alan arakesit (intercept) sonuçları için p değerleri sıfıra yakın iken, ortak değişken (covariate) yıl için p değeri sırasıyla KEÇOB için 0,0421, EÇOB için 0,0432 olarak elde edilmiştir. Bu değerler 0,05 değerine yakın olmakla birlikte, 0,05’den küçük bir değer olarak oluşmuştur. Artıklar (residual) Şekil 5.2 ve Şekil 5.3’de görüldüğü gibi normal dağılıma yaklaşmaktadır. Ancak, KEÇOB yöntemi için elde edilen log-olabilirlik değeri EÇOB için bulunan log-olabilirlik değerinden daha büyüktür ya da alternatif olarak KEÇOB yöntemi ile elde edilen Akaike’nin Bilgi Kriteri (Akaike’s Information Criterion (AIC)) ve Schwarz’ın Bayesci Kriteri (Schwarz’s Bayesian Criterion (BIC)) istatistikleri, EÇOB için bulunan AIC ve BIC istatistiklerinden daha küçüktür. Bu da KEÇOB tahmin yönteminin EÇOB tahmin yöntemine göre daha iyi olduğuna işaret etmektedir.

EK-2 ve EK-3'den, sigortalı başına grup içi varyans KEÇOB için,

$$71,768^2=5150,65$$

EÇOB için,

$$70,543^2=4976,32$$

şeklindedir. Bu değerler, toplam sigortalı sayısı (7250942) ile çarpılır ve serbestlik derecesine (41) bölünürse üç gruba ait varyans kestirimi elde edilebilir.

KEÇOB için,

$$\frac{5150,65 \times 7250942}{41} = 910904010$$

EÇOB için,

$$\frac{4976,32 \times 7250942}{41} = 880073358$$

bulunur. Bu sonuçlar, ν için parametrik olmayan Bühlmann-Straub varyans tahmini olan 693632001 değerine yakın bir sonuç olarak elde edilmemiştir. Elde edilen bu değerler, Çizelge 5.1'de bulunan veri grubu için elde edilen $\hat{\nu}$ değerinden oldukça büyük değerlerdir. Benzer şekilde KEÇOB için gruplar arası varyans $9,0504^2=81,9097$, EÇOB için ise gruplar arası varyans sadece $0,0011^2=0,0000012$ 'dir. Bu değerlerden KEÇOB için $\hat{\alpha}$ değeri, parametrik olmayan Bühlmann-Straub tahmin değeri olan 119,045 değeri ile daha uyumludur. Buradan,

KEÇOB için $\hat{k}$ değeri,

$$\hat{k}_{KEÇOB} = \frac{910904010}{81,9097} = 11120831,96$$

EÇOB için,

$$\hat{k}_{EÇOB} = \frac{880073358}{0,0000012} = 7,333945.10^{14}$$

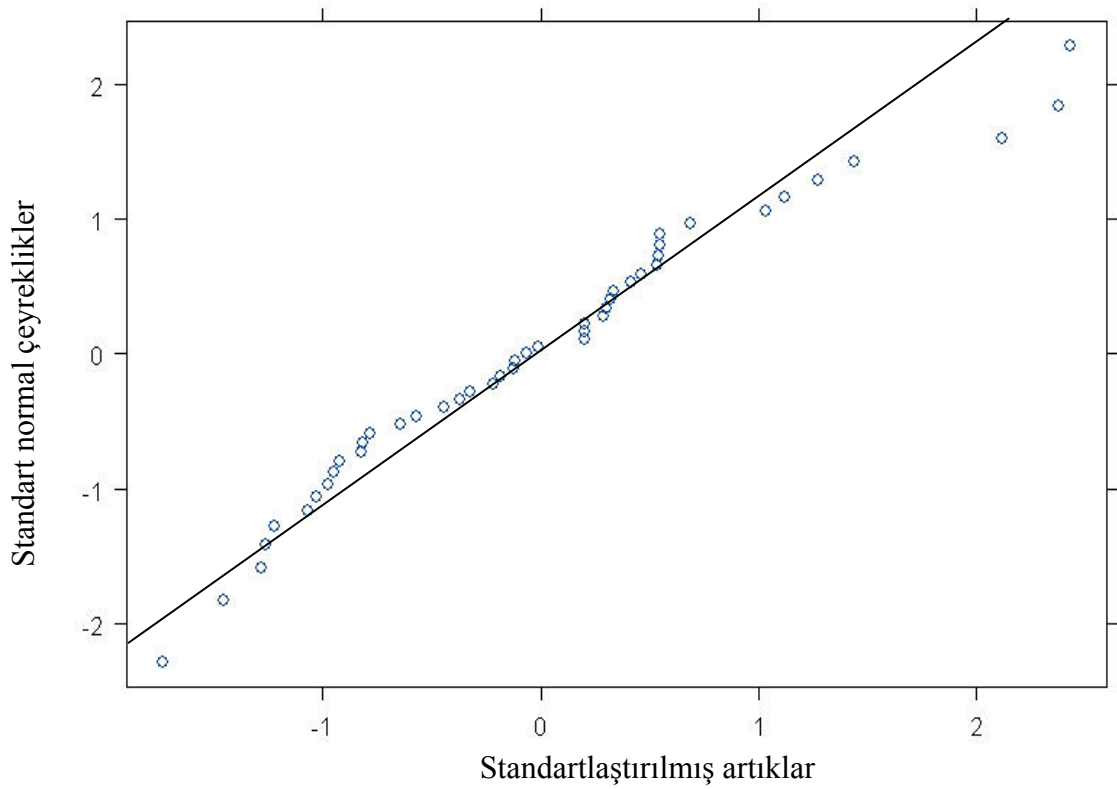
k değerlerini işaret etmektedir. Her iki tahmin yöntemi için bulunan $\hat{k}$ değerleri, Bühlmann-Straub tahmin değeri olan,

$$\hat{k} = 5826618,57$$

değeri ile karşılaştırılabilir. Bühlmann-Straub değerlerine KEÇOB tahmin değerleri, EÇOB tahmin değerlerinden daha yakındır. EÇOB'da $\hat{k}$ değerinin oldukça yüksek olması, bu tahmin yönteminin $\bar{Y}_i$ 'ye daha az ağırlık, $\hat{\mu}$ 'e ise daha çok ağırlık verdiğini işaret eder. Dolayısıyla EÇOB'un ENDOSK'ları, KEÇOB'un ENDOSK kestirimleri ile kıyaslandığında sifıra daha yakındır. Bu durum Çizelge 5.5'de özetlenen tahmin sonuçları ile doğrulanmaktadır.

Doğrusal model, farklı ortak değişkenleri kapsayacak şekilde genişletilebilir. Burada kullanılan ortak değişken yılın kübü alınarak açıklayıcı değişken gibi kullanılabilir. Bu şekilde oluşturulan deneme, güncel deneyime daha fazla ağırlık veren ve tıbbi mesleki sorumluluk verilerindeki bazı doğrusal olmayışlıkları (non-linearity) da iyi yansıtan bir model elde edilmesini sağlayabilir. Böylece tıbbi mesleki sorumluluk verisine uygun bir başka model elde edilebilir. EK-4'de görüleceği gibi grup içi ve gruplar arası standart hataları daha önce EK-2'de verilen KEÇOB tahmin yöntemine ait sonuçlarla yakın olarak elde edilmiştir. Sabit etki parametre tahminlerinin standart hataları, bu model de 15,38 ve 0,01 iken KEÇOB tahmin yönteminde, bu değerler

sırasıyla 23,11 ve 2,48 olarak elde edilmiştir. Kısaca yılın kübünü alarak oluşturulan model de sabit etki parametre tahminlerine ait varyanslar KEÇOB ile elde edilen varyanslardan çok daha küçüktür. Şekil 5.4’de görüleceği gibi artıkların normal dağılıma yaklaştıkları görülmektedir. Şekil 5.2 ve Şekil 5.3’de uç kısımlarda grafiklerin ortasına göre daha iyi sonuç (daha iyi uyum) alındığı görülmektedir.



Şekil 5.4. DKE modellemesinde KEÇOB-yılın küpü’ne ait ortalama hasar tutarlarının Q-Q plotu

Sonuç olarak, şimdiye kadar ele alınan tüm modellerin kestirimlerinin bir özeti Çizelge 5.5’de verilmektedir.

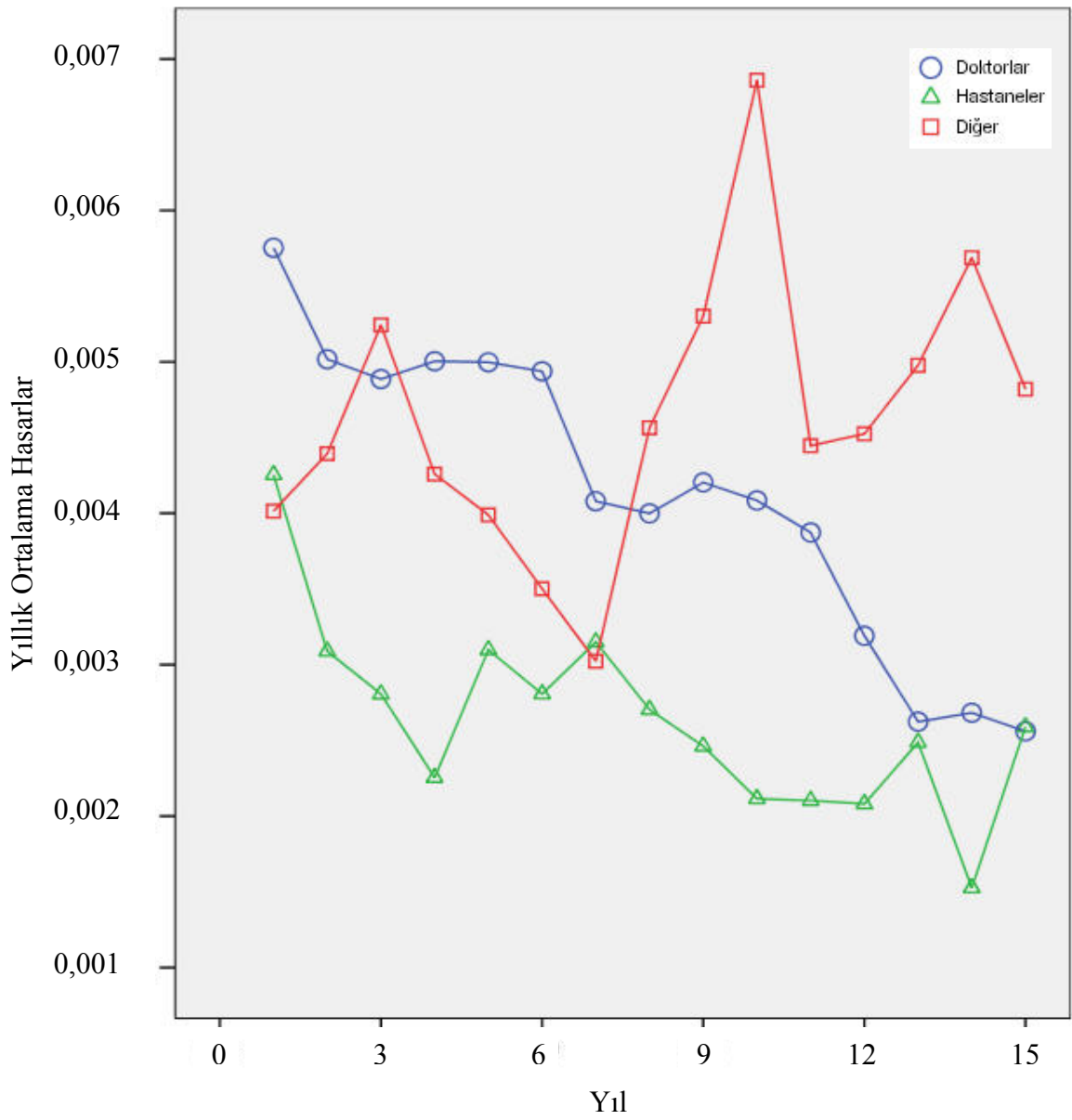
Çizelge 5.5. Kredibilite ve DKE modeline ait ENDOSK'ların karşılaştırılması

<i>SINIF i</i>	<i>Doktorlar</i>	<i>Hastaneler</i>	<i>Diğer</i>
DKE (KEÇOB) $\hat{\alpha}_i$	2,061	-4,579	2,518
DKE (EÇOB) $\hat{\alpha}_i$	$3,663.10^{-8}$	$-8,138.10^{-8}$	$4,475.10^{-8}$
DKE ($KEÇOB_{Yıllık}$) $\hat{\alpha}_i$	2,076	-4,611	2,536
ENDOSK ($\hat{\mu} = \bar{Y}$)	4,751	-5,974	3,420
ENDOSK ($\hat{\mu}_{Kred}$)	6,366	-4,142	5,397

5.3.2. Oransal hasar sıklıklarını ve hasar başına hasar tutarlarını kullanarak toplam hasar tutarlarının modellenmesi

Tıbbi mesleki sorumluluk sigortasında, hasar tutarlarının modellenmesinde bir diğer yaklaşım hem oransal hasar sıklıklarının (frekanslarının) hem de hasar tutarlarının aynı zamanda dikkate alınmasıdır. Hasar tutarları, hasarların bir sonucudur, dolayısıyla hasarlara ilişkin ilave bilgilerin kullanılması, hasar tutarlarının ne olacağına ilişkin daha güvenilir tahminde bulunulmasına imkan sağlayabilir. Şekil 5.5 de çalışılan 15 yıllık dönemde sigortalı başına ortalama oransal hasar sıklıklarının değişimini göstermektedir.

Öncelikle hasar tutarları dikkate alınmaksızın, bağımsız olarak oransal hasar sıklıklarının modellenmesi gerekir.



Şekil 5.5. Sigortalı başına yıllık ortalama hasar sayısı

Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile ilgili işlemler önceki modellemedeki gibi yapılır. Ancak burada Y değişkeni olarak oransal hasar sıklıkları kullanılmaktadır. Oransal hasar sıklıkları her sigortalı sınıfı için Çizelge 5.6’de özetlenmiştir.

Çizelge 5.6. Her sigortalı sınıfı için yıllık toplam sigortalı sayısı ve hasar sıklık oranları

Yıl	Toplam Sigortalı Sayısı			Oransal Hasar Sıklıkları		
	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri	Doktorlar	Hastaneler	Diğerleri
1991	178854	111882	91175	0,005753	0,004254	0,004014
1992	190342	163792	97633	0,005017	0,003089	0,004394
1993	199950	167839	91740	0,004886	0,002806	0,005243
1994	197830	170329	102375	0,005004	0,002254	0,004259
1995	210108	156212	110560	0,004997	0,003098	0,003989
1996	202731	162452	139356	0,004938	0,002807	0,003502
1997	193651	125708	155121	0,00408	0,00315	0,003023
1998	197293	132765	115452	0,003999	0,002704	0,004565
1999	185538	153097	96575	0,004204	0,002462	0,005302
2000	190231	134288	81050	0,004085	0,002115	0,00686
2001	187720	148349	105041	0,003873	0,002103	0,004446
2002	261682	136465	129962	0,003191	0,002081	0,004524
2003	285470	132294	130398	0,002624	0,002487	0,004977
2004	334734	216832	108136	0,002683	0,001527	0,005687
2005	321117	140162	106651	0,00256	0,00259	0,004819
Ortalama	222483,4	150164,4	110748,3	0,004126	0,002635	0,004640
Toplam	3337251	2252466	1661225	0,061893	0,039529	0,069605

Parametrik olmayan Bühlmann-Straub parametreleri, bu uygulamadaki modelleme için Çizelge 5.6'daki veri grubu kullanılarak,

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} Y_{ij} = \frac{26519}{7250942} = 0,003657$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - 1)} = \frac{5,69262078}{14(3)} = 0,13553859$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\sigma}(n-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i^2} = \frac{4,58404889 - (0,13553859)(2)}{7250942 - \frac{1}{7250942} (1,89705 \cdot 10^{13})} = 9,30591 \cdot 10^{-7}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $\hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} = 145647,8727$ olarak bulunur. Her sınıf için $\hat{Z}_i$ kullanılarak, primler tahmin edilebilir. Buradan ağırlıklandırılmış $\hat{\mu}_{Kred}$ değeri,

$$\hat{\mu}_{Kred} = \frac{\sum \hat{Z}_i \bar{Y}_i}{\sum \hat{Z}_i} = 0,003797$$

olarak hesaplanır. Sonuçlar Çizelge 5.7 de özetlendiği gibidir.

Çizelge 5.7. Hasar sıklık oranlarına ait Bühlmann-Straub sonuçları

<i>SINIF i</i>	<i>Doktorlar</i>	<i>Hastaneler</i>	<i>Diğer</i>
$\hat{Z}_i$	0,9582	0,9393	0,9194
$\hat{C}_i(\hat{\mu} = \bar{Y})$	0,004107	0,002697	0,004561
$\hat{C}_i(\hat{\mu}_{Kred})$	0,004112	0,002706	0,004572
$ENDOSK(\hat{\mu} = \bar{Y})$	0,000450	-0,000960	0,000904
$ENDOSK(\hat{\mu}_{Kred})$	0,000455	-0,000951	0,000915

KEÇOB ve EÇOB tahmin yöntemlerinin her ikisinin kullanımı ile DKE modelinin kredibilite modellerine uygunluğu tekrar desteklenmiştir. Şekil 5.6 ve Şekil 5.7 artıkların normal dağılıma uygunluğunu göstermektedir. Burada da p değerleri ilk uygulamadaki gibi 0,05'ten küçüktür, ancak bu defa EÇOB yöntemi, KEÇOB yöntemine göre daha büyük log-olabilirlik değerine ve daha küçük AIC ve BIC istatistik değerlerine sahiptir.

EK-5 ve EK-6'dan, sigortalı başına grup içi varyans KEÇOB için,

$$0,00081062^2 = 6,571048 \cdot 10^{-7}$$

EÇOB için ise,

$$0,00080091^2 = 6,414568 \cdot 10^{-7}$$

dır. Bu değerler toplam sigortalı sayısı ile çarpılır ve serbestlik derecesine bölünürse üç gruba ait toplam grup içi varyans kestirimi KEÇOB için,

$$\frac{6,571048 \cdot 10^{-7} \times 7250942}{41} = 0,11621046$$

EÇOB için,

$$\frac{6,414568 \cdot 10^{-7} \times 7250942}{41} = 0,11344308$$

biçiminde elde edilir. Bu sonuçlar ν için, parametrik olmayan Bühlmann-Straub varyans tahmini olan 0,13553859 değerine yakın sonuçlar olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu değerler, Çizelge 5.6'da bulunan veri grubu için elde edilen $\hat{\nu}$ değeri ile uyumlu değerlerdir. Benzer şekilde gruplar arası varyans KEÇOB için,

$$0,001015^2 = 1,030225 \cdot 10^{-6}$$

EÇOB için,

$$0,000820^2 = 6,724 \cdot 10^{-7}$$

dır. Bu değerlerden KEÇOB tahmin yöntemi ile bulunan $\hat{a}$ değeri, parametrik olmayan Bühlmann-Straub tahmini olan $9,30591 \cdot 10^{-7}$ değeri ile daha uyumludur. Buradan

KEÇOB için,

$$\hat{k}_{KEÇOB} = \frac{0,11621046}{1,030225 \cdot 10^{-6}} = 112801,0483$$

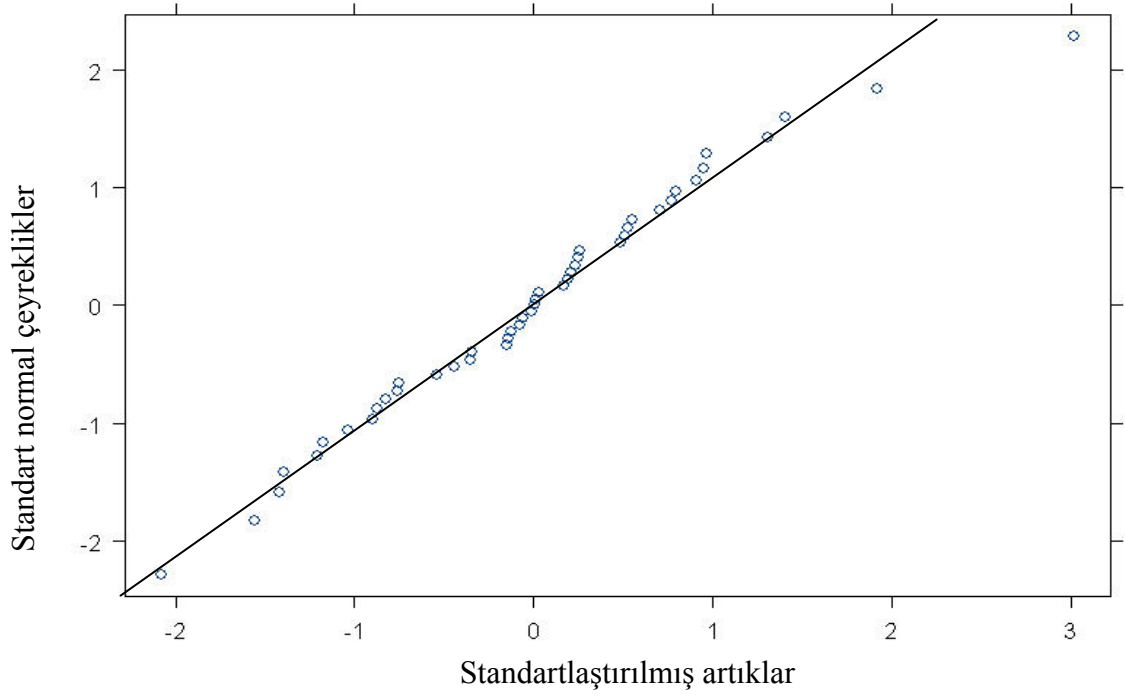
EÇOB için,

$$\hat{k}_{EÇOB} = \frac{0,11344308}{6,724 \cdot 10^{-7}} = 168713,6823$$

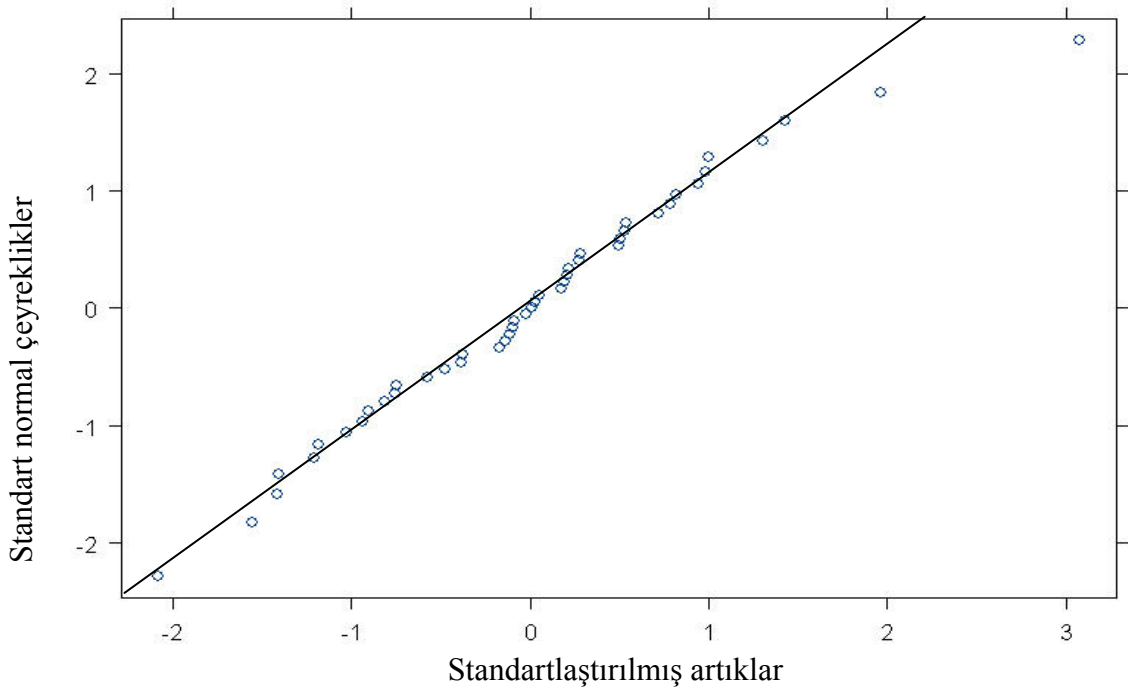
olan k değerini işaret etmektedir. Elde edilen değerler, Bühlmann-Straub tahmini olan,

$$\hat{k} = 145647,8727$$

değeri ile karşılaştırılabilir. EÇOB'da $\hat{k}$ değerinin daha yüksek olması bu tahmin yönteminin $\bar{Y}_i$ 'ye daha az ağırlık, $\hat{\mu}$ 'e ise daha çok ağırlık verdiğine işaret eder.

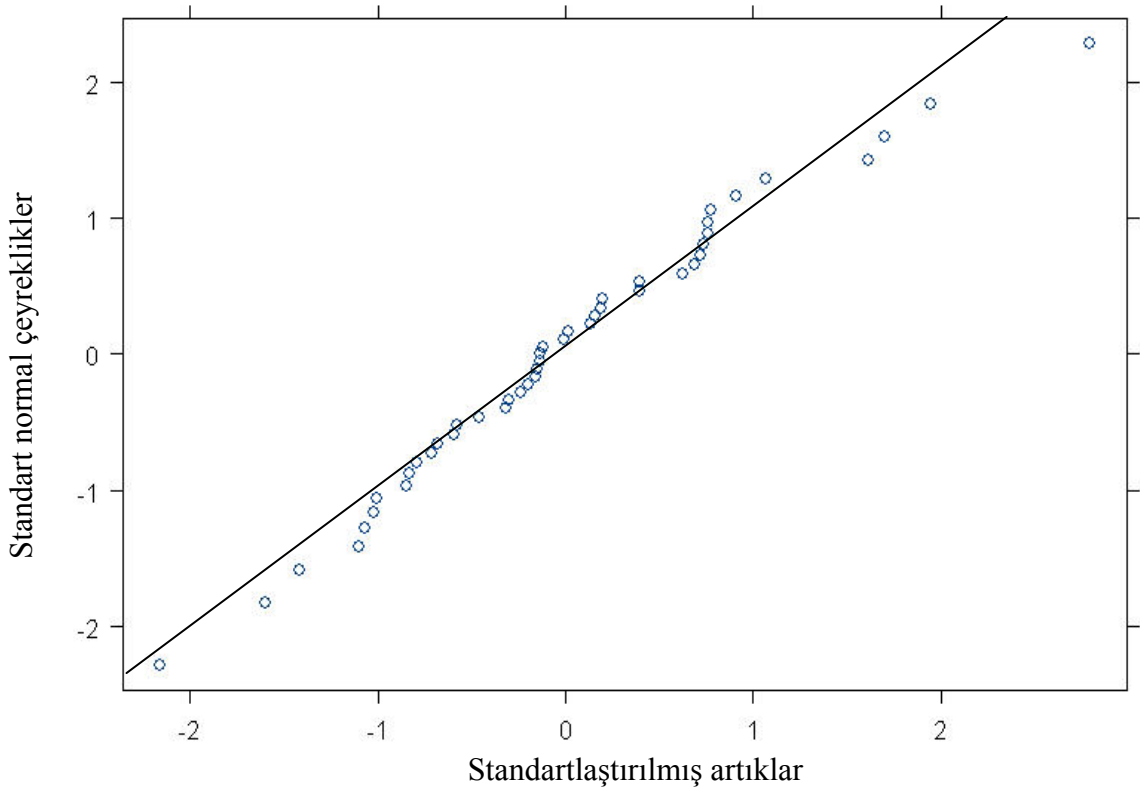


Şekil 5.6. DKE modellemesinde KEÇOB'a ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu



Şekil 5.7. DKE modellemesinde EÇOB'a ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu

Burada da ortak değişken yılın kübü şeklinde alınarak açıklayıcı değişken gibi kullanılabilir. EK-7’den görüleceği gibi grup içi ve gruplar arası varyanslar daha önce EK-5’de verilen KEÇOB tahmin yöntemine ait sonuçlara yakın olarak elde edilmiştir. Sabit etki parametre tahminlerinin standart hataları, bu model de $6,086.10^{-4}$ ve $1,167.10^{-7}$ iken KEÇOB de bu değerler sırasıyla $6,386.10^{-4}$ ve $2,797.10^{-5}$ olarak elde edilmiştir, Kısaca EK-5 ve EK-7’de görüldüğü gibi, yılın kübü alınarak oluşturulan model de sabit etki parametre tahminlerine ait standart hatalar, KEÇOB ile elde edilen standart hatalardan daha küçüktür, Şekil 5.8’de görüleceği gibi artıklar normal dağılıma yaklaşmaktadır. Yapılan modellemelere ait ENDOSK ($\hat{\alpha}_i$) kestirimleri Çizelge 5.8’de özetlenmiştir.



Şekil 5.8. DKE modellemesinde KEÇOB-yılın kübü’ne ait ortalama hasar sıklık oranlarının Q-Q plotu

Çizelge 5.8. Kredibilite ve DKE modeline ait ENDOSK'ların karşılaştırılması

<i>SINIF i</i>	<i>Doktorlar</i>	<i>Hastaneler</i>	<i>Diğer</i>
DKE (KEÇOB) $\hat{\alpha}_i$	0,000313	-0,001113	0,000799
DKE (EÇOB) $\hat{\alpha}_i$	0,000307	-0,001091	0,000784
DKE ($KEÇOB_{Yılkişp}$) $\hat{\alpha}_i$	0,000313	-0,001111	0,000798
ENDOSK ($\hat{\mu} = \bar{Y}$)	0,000450	-0,000960	0,000904
ENDOSK ($\hat{\mu}_{Kred}$)	0,000455	-0,000951	0,000915

Bu modellemede doğrudan hasar sayılarının tahmini ile ilgilenilmemektedir, Hedef, bu hasar sonuçlarından hasar tutarlarının modellenmesidir. Sigortalı başına toplam hasar tutarlarını modellemek için,

Y_i , verilen bir hasar için hasar tutarını,

N , Y_i 'den bağımsız rassal bir değişken olmak üzere sigortalı başına hasar sayısını

ve

S , sigortalı başına toplam hasar tutarını

ifade etmek üzere, toplam hasar tutarının dağılım fonksiyonu S ,

$$S = Y_1 + Y_2 + L + Y_N$$

şeklinde ifade edilebilir, Bu eşitlik aktüeryal uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Teorem 5.1.

N , negatif olmayan tamsayı değerler almak üzere, N, Y_1, Y_2, K bağımsız rassal değişkenler olsun. Eğer,

$$E(Y_1) = E(Y_2) = L, \quad Var(Y_1) = Var(Y_2) = L, \quad S_N = Y_1 + Y_2 + L + Y_N \text{ ise}$$

$$E(S_N) = E(N)E(Y_1), \quad Var(S_N) = E(N)Var(Y_1) + (E(Y_1))^2 Var(N)$$

olarak tanımlanır [Dudewicz ve Mishra, 1988]. Buradan,

$$E(S) = E(E(S|N)) = E(N \times E(Y)) = E(N)E(Y)$$

ve

$$Var(S) = E(N)Var(Y) + (E(Y))^2 Var(N)$$

dır. Bu ilişkiler her üç sınıf içinde ayrı ayrı geçerlidir. Yani,

$$E(S|\theta) = E(N|\theta)E(Y|\theta)$$

ve

$$Var(S|\theta) = E(N|\theta)Var(Y|\theta) + (E(Y|\theta))^2 Var(N|\theta)$$

şeklinde ifade edilebilir [Klugman ve ark., 1998], [Herzog, 1994]. Tıbbi mesleki sorumluluk verisinden,

$$E(S_{ij}|\theta_{Dr}) = 0,004107 \times 54717,95 = 224,73$$

$$E(S_{ij}|\theta_H) = 0,002697 \times 66554,64 = 179,50$$

$$E(S_{ij}|\theta_D) = 0,004561 \times 44397,86 = 202,50$$

bulunur. Burada beklenen hasar sayıları ve beklenen hasar tutarları sigortalı sayıları ile ağırlıklandırılarak hesaplanabilir. $E(N|\theta)$ değeri yerine şimdiye kadar bulunan tahmin değerlerinden herhangi biri de kullanılabilir. $E(Y|\theta)$ değerinin her bir sınıfın sigortalılarla ağırlıklandırılmış ortalama değeri olduğu varsayılarak yukarıdaki modellerin her birisi için sonuçlar Çizelge 5.9’da verilmiştir.

Çizelge 5.9. Toplam hasar tutarı ile ilgili kredibilite ve DKE modeline ait prim tahmin değerleri

<i>SINIF i</i>	<i>Doktorlar</i>	<i>Hastaneler</i>	<i>Diğer</i>
DKE (KEÇOB) Prim	217,25	169,34	197,85
DKE (EÇOB) Prim	216,91	170,80	197,15
DKE ($KEÇOB_{Yılkiip}$) Prim	217,22	169,45	197,80
($\hat{\mu} = \bar{Y}$) Prim	224,73	179,50	202,50
($\hat{\mu}_{Kred}$) Prim	225,00	180,10	202,99

Bu aşamadan sonra, grup içi ve gruplar arası varyansların tahmin değerlerinin elde edilmesi için aşağıdaki hesaplamalar yapılmalıdır. $\hat{\mu} = \bar{X}$ durumu için önceki varyans formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 Var(S_{ij}|\theta_{Dr}) &= (0,004107 \times 138758625,59) + (54717,95)^2 (1,0671.10^{-6}) \\
 &= 652304,30 + 3194,94 \\
 &= 655499,24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(S_{ij}|\theta_H) &= (0,002697 \times 143356391,28) + (66554,64)^2 (3,65595 \cdot 10^{-7}) \\
 &= 386632,19 + 1619,41 \\
 &= 388251,60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(S_{ij}|\theta_D) &= (0,004561 \times 397322759,19) + (44397,86)^2 (3,65595 \cdot 10^{-7}) \\
 &= 1812189,10 + 1551,49 \\
 &= 1813740,60
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 \hat{\nu} = E(Var(S_{ij}|\theta)) &= 0,46(655499,24) + 0,31(386632,19) + 0,23(1813740,60) \\
 &= 838545,97
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \hat{a} = Var(E(S_{ij}|\theta)) &= 45347,43 - (209,88)^2 \\
 &= 1297,82
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerlerden $\hat{k}$ değeri,

$$\hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} = 646,12$$

değeri elde edilir. Buradan her bir sınıf için kredibilite faktörleri,

$$Z_{Dr} = \frac{3337251}{3337251 + 646,12} = 0,999806$$

$$Z_H = \frac{2252466}{2252466 + 646,12} = 0,999713$$

ve

$$Z_D = \frac{1661225}{1661225 + 646,12} = 0,999611$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu sonuçlar 1'e çok yakındır. Sonuçlara bakıldığında, modellemenin bu aşamasında rassal etki ihmal edilebilir ve böylece her bir sınıf için en iyi kestirici her bir sınıfın kendi ortalaması olacaktır.

5.4. Sigortalı Başına Hasar Sayılarının Modellenmesi

Değişen sigortalı sayılarını kullanan bir başka örnek olay çalışması üzerinde durulmaktadır. Buradaki amaç, karma etki modelini matris şablonunda görerek hasar sayılarını modellemektir. Bu kısımda, Çizelge 5.1'deki sigortalı sayıları ile Çizelge 5.2'deki hasar sayıları kullanılmıştır. Burada her sınıfa ilişkin bir sonraki sigorta dönemine ait sigortalı başına beklenen hasar yapma oranının kredibilite kestirimleri hesaplanmaktadır. Bu veriler için MATLAB paket programında yazılan programla gerekli işlemler yapılmıştır. İşlemler yapılırken sınıflar,

Dr→Doktorlar

H→Hastaneler

D→Diğerleri

şeklinde kodlanmıştır. Veri Eş. 4.70'de verilen karma etki modeli kullanılarak modellenmiştir. Hesaplamalar Bölüm 4'de verilen eşitlikler kullanılarak yapılmıştır. Model ve hesaplama sonuçları aşağıda verilmektedir.

Çizelge 5.10. Değişen sigortalı sayılarını kullanarak yapılan, hasar sayısı modellemesinde karma etki modelinin matris şablonu

<u>Grup</u>	<u>Yıl</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>H</u>		
Dr	1991	1029	178854	178854	0	0
Dr	1992	955	190342	190342	0	0
Dr	1993	977	199950	199950	0	0
Dr	1994	990	197830	197830	0	0
Dr	1995	1050	210108	210108	0	0
Dr	1996	1001	202731	202731	0	0
Dr	1997	790	193651	193651	0	0
Dr	1998	789	197293	197293	0	0
Dr	1999	780	185538	185538	0	0
Dr	2000	777	190231	190231	0	0
Dr	2001	727	187720	187720	0	0
Dr	2002	835	261682	261682	0	0
Dr	2003	749	285470	285470	0	0
Dr	2004	898	334734	334734	0	0
Dr	2005	822	321117	321117	0	0
H	1991	476	111882	0	111882	0
H	1992	506	163792	0	163792	0
H	1993	471	167839	0	167839	0
H	1994	384	170329	0	170329	0
H	1995	484	156212	0	156212	0
H	1996	456	162452	0	162452	0
H	1997	396	125708	0	125708	0
H	1998	359	132765	0	132765	0
H	1999	377	153097	0	153097	0
H	2000	284	134288	0	134288	0
H	2001	312	148349	0	148349	0
H	2002	284	136465	0	136465	0
H	2003	329	132294	0	132294	0
H	2004	331	216832	0	216832	0
H	2005	363	140162	0	140162	0
D	1991	366	91175	0	0	91175
D	1992	429	97633	0	0	97633
D	1993	481	91740	0	0	91740
D	1994	436	102375	0	0	102375
D	1995	441	110560	0	0	110560
D	1996	488	139356	0	0	139356
D	1997	469	155121	0	0	155121
D	1998	527	115452	0	0	115452
D	1999	512	96575	0	0	96575
D	2000	556	81050	0	0	81050
D	2001	467	105041	0	0	105041
D	2002	588	129962	0	0	129962
D	2003	649	130398	0	0	130398
D	2004	615	108136	0	0	108136
D	2005	514	106651	0	0	106651
Toplam		26519	7250942	3337251	2252466	1661225

$\underline{\sigma_\varepsilon^2}$	$\underline{\sigma_\alpha^2}$	$\underline{\hat{k}}$	$\underline{\hat{Z}_i}$	<u>Grup</u>	$\underline{\bar{Y}_i}$	$\underline{\hat{C}_i(\hat{\mu})}$	$\underline{\hat{C}_i(\hat{\mu}_{kred})}$
0,132381	8,444349.14 ⁻⁷	156768,28	0,955132	Dr	0,003946	0,003933	0,003934
			0,934930	H	0,002580	0,002650	0,002664
			0,913769	D	0,004538	0,004462	0,004464
				$\hat{\mu} = 0,003657$		$\hat{\mu}_{kred} = 0,003683$	

$\underline{\hat{\beta}}$	<u>Grup</u>	$\underline{\hat{\alpha}}$	<u>L1</u>	<u>L2</u>	<u>L3</u>
0,003683			1	1	1
	Dr	0,000251	1	0	0
	H	-0,001031	0	1	0
	D	0,000781	0	0	1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Kov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) = \hat{V}_K = \begin{bmatrix} 0,00000030 & -0,00000029 & -0,00000028 & -0,00000027 \\ -0,00000029 & 0,00000031 & 0,00000027 & 0,00000026 \\ -0,00000028 & 0,00000027 & 0,00000032 & 0,00000026 \\ -0,00000027 & 0,00000026 & 0,00000025 & 0,00000032 \end{bmatrix}$$

$$L' \hat{V}_K L = \begin{bmatrix} 0,00000004 & 0,00000000 & 0,00000000 \\ 0,00000000 & 0,00000006 & 0,00000000 \\ 0,00000000 & 0,00000000 & 0,00000008 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{Dr(DKE)} &= \hat{\beta} + \hat{\alpha}_{Dr} \\ &= 0,003683 + 0,000251 \\ &= 0,003934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{H(DKE)} &= \hat{\beta} + \hat{\alpha}_H \\ &= 0,003683 - 0,001031 \\ &= 0,002652 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{D(DKE)} &= \hat{\beta} + \hat{\alpha}_D \\ &= 0,003683 + 0,000781 \\ &= 0,004464 \end{aligned}$$

<u>Grup</u>	$\underline{\hat{C}_i(\hat{\mu})}$	Hasar Sayısı <u>Varyansı</u>	Değişim <u>Katsayısı</u>	<u>t İstatistiği</u>	t ₄₄ Tablo <u>(α=0,05)</u>	Güven Aralığı <u>Alt Sınır</u>	<u>Üst Sınır</u>
Dr	0,003933	3,8490e-008	0,0499	20,0525	2,0154	0,0035	0,0044
H	0,002650	5,6222e-008	0,0894	11,1848		0,0021	0,0032
D	0,004462	7,5056e-008	0,0614	16,2939		0,0039	0,0051

Yukarıda görüldüğü gibi her üç sınıf yüksek kredibiliteye sahiptir. Bu durumda, her sınıf için bir sonraki sigorta dönemine ilişkin sigortalı başına ortalama hasar yapma sıklıklarına ait oran tahmin değeri elde edilirken her sınıf kendi deneyimine daha fazla kredibilite verecektir.

5.5. Prim Tahminlerini Elde Etmek Üzere Monte Carlo Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, Bühlmann-Straub kredibilite modeli ve karma etki modeli için hasar tutarı modellemeleri yapılarak, her iki modele ait prim tahminlerini karşılaştırmalı olarak incelemek amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır. İlk olarak, bir sigorta şirketine ait olduğu varsayılan portföydeki risk grubu sayıları $n = 2, 3, 4$ ve 5 ve bunlara karşılık dönem sayıları $t = 5, 10, 15$ ve 25 olacak şekilde 16 durum tasarlanmıştır. Sigortalı sayıları Poisson ve Negatif Binom dağılımından, hasar tutarları ise Üstel dağılımdan, farklı dağılım parametreleri kullanılarak seçilmiştir. Her duruma ait dağılım parametreleri, $i = 1, 2, L, n$ olmak üzere, Poisson dağılımı için $\lambda_i = 150000 + 10i$, $\lambda_i = 150000 + 10000i$, $\lambda_i = 150000 + 25000i$ ve $\lambda_i = 150000 + 50000i$, Negatif Binom dağılımı için $p = 0,5$ ile $k_i = 70000 + 10i$, $k_i = 70000 + 10000i$, $k_i = 70000 + 25000i$ ve $k_i = 70000 + 50000i$ ve son olarak Üstel dağılım için $\mu_i = 140 + 1i$, $\mu_i = 140 + 10i$, $\mu_i = 140 + 25i$ ve $\mu_i = 140 + 50i$ şeklinde her dağılım için 4 farklı parametre değeri alınarak, 128 farklı durum için homojen ve heterojen portföyler oluşturulmuştur. 128 durumun her biri için örneğe ait hasar primleri hesaplanarak 1000 tekrar sonunda sonuçların ortalamaları alınmıştır. Elde edilen sonuçlar EK-8’de verilen çizelgelerle (Bkz. Çizelge 8.1-Çizelge 8.8) özetlenmiştir. Çizelge 8.1- Çizelge 8.4’de hasar tutarı verisi Poisson dağılımından, sigortalı sayısı ise Üstel dağılımdan seçilerek oluşturulan ve homojen portföyden başlayarak giderek heterojen hale gelen portföylere ait simülasyon sonuçlarını yer almaktadır. Çizelge 8.5- Çizelge 8.8’de, homojen portföyden başlayarak heterojon portföye doğru giden ve hasar tutarı verisi Negatif Binom dağılımından, sigortalı sayısı ise Üstel dağılımdan seçilen verilere ait simülasyon sonuçları bulunmaktadır.

Simülasyon çalışmasının her tekrarında, Bühlmann-Straub kredibilite modeline ait tahmin değerleri için aşağıdaki tahmin ediciler kullanılmıştır.

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_i \sum_j m_{ij} Y_{ij}, \quad \hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - 1)},$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \hat{\nu}(n-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i^2}, \quad \hat{k} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}, \quad \hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + \hat{k}}$$

ve

$$\hat{\mu}_{Kred} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i}$$

Buradan sırasıyla Bühlmann-Straub kredibilite primi ve kredibilite ağırlıklı Bühlmann-Straub kredibilite primi,

$$\hat{C}_{i(BS)M} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}$$

ve

$$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}_{Kred}$$

formülleri ile elde edilmiştir. Karma etki modeline ait tahmin ediciler,

$$RKO = \frac{\sum_{i=1}^n t_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{(n-1)}, \quad HKO = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{(N-n)},$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{(RKO - HKO)}{t}, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = HKO,$$

ve

$$\hat{\alpha}_i = \frac{t}{t + \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\alpha}^2}} (\bar{Y}_i - \hat{\mu})$$

biçiminde olup, prim değerleri,

$$\hat{C}_{i(KEM)} = \hat{\alpha}_i + \hat{\mu}$$

ve

$$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}} = \hat{\alpha}_i + \hat{\mu}_{Kred}$$

formülleri kullanılarak elde edilmiştir.

Hasar tutarının Poisson dağılımından, sigortalı sayısının ise Üstel dağılımdan seçildiği duruma ilişkin (Bkz. Çizelge 8.1- Çizelge 8.4), Çizelge 8.1'e bakıldığında, tasarlanan homojen portföy durumu için risk grubu sayısı 3, dönem sayısı 15 iken ve daha büyük grup ile dönem sayılarında her iki modele ait prim tahminlerinin birbirlerine oldukça yakın değerler aldıkları görülmektedir. Bu durumda, bu tür homojen portföylerle yapılan çalışmalar için risk grubu sayısını 3 ve dönem sayısını da 15 almak yeterli olacaktır. Çizelge 8.2'de Çizelge 8.1'e göre nispeten daha heterojen bir portföy tasarlanmıştır. Çizelge 8.2'den görüldüğü gibi, grup ve dönem sayıları küçükken her iki modele ait prim değerleri arasında farklılıklar oluşmaktadır. Heterojen bir portföy durumunda grup sayısı küçük iken dönem sayısını büyük, grup sayısı büyük iken dönem sayısını küçük almak uygun olacaktır. Çizelge 8.3 ve Çizelge 8.4'de görüldüğü gibi diğer durumlara göre daha heterojen olan portföy

durumunda Çizelge 8.2 için bahsedilen durum daha net olarak görülmektedir. Buna göre heterojen portföylerde risk grubu sayısı arttıkça risk grubu sayısının az olduğu portföylere göre dönem sayısı daha küçük alınarak prim tahminlerinde bulunmak yeterli olacaktır.

Hasar tutar verisinin Negatif Binom dağılımdan, sigortalı sayısının Üstel dağılımdan seçildiği durum için de ilk duruma benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu duruma ait sonuçlar homojen portföyden gittikçe heterojenleşen portföye doğru Çizelge 8.5-Çizelge 8.8’de verilmiştir.

Sonuç olarak, bu tür istatistiksel modelleri aktüerya bilimine uygulama çalışmalarında çalışılan sigorta portföyünün homojen veya heterojen olması önemlidir. Bu çalışmada olduğu gibi sigorta verilerini modellerken karma etki modeli kullanılıyorsa ve çalışılan sigorta verileri homojen ise prim tahminleri yapılırken hem grup sayıları hem de dönem sayıları küçük alınabilir. Böyle bir portföy için en optimal değerler ise grup sayısını 3 dönem sayısını ise 15 almaktır. Ama genellikle sigorta verileri heterojendir. Eğer böyle bir portföyle çalışılıyorsa, grup sayısı az iken dönem sayısını büyük tutmak, dönem sayısı küçük iken grup sayısını artırmak kredibilite prim tahminlerine yakın sonuçlar elde etmek açısından önemlidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Uygulama çalışmasında hasar tutarlarının modellenmesi esas alınmıştır. Bu amaçla iki yaklaşım kullanılmıştır. İlk yaklaşım da hasar tutarları doğrudan modellenerek, ilgilenilen modellere ait tahmin değerleri hesaplanmıştır. Diğer yaklaşımda hedef hasar tutarlarını modellemektir. Bu işlem iki aşamada yapılmıştır. Hasar tutarları, sigorta şirketine bildirilen hasarların bir sonucu olarak oluşur. Dolayısıyla modelleme sırasında hasarlara ait ilave bilginin kullanılması, bir sonraki döneme ilişkin hasar tutarlarının belirlenmesi sırasında hesaplanan tahmin değerlerine önemli bir katkı sağlayabilir. Bu amaçla, ilk aşama da hasar tutarlarını dikkate almadan hasar sayısı modellenmiş, daha sonra hasar tutarları dikkate alınmıştır. Son uygulama çalışmasında sadece sigortalı başına düşen hasar tutarları modellenmeye çalışılmıştır.

Hasar tutarlarının modellenmesi için kullanılan iki metot farklı sonuçlar vermiştir. İlk modellemede $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\alpha}$ 'nin toplamı olan 693632120,55 tahmin değeri, 7250942 sigortalının tümü için toplam varyanstan elde edilmiştir. İkinci modellemede ise, toplam hasar tutarları için $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\alpha}$ 'nin toplamı ile elde edilen 839843,79 varyans değeri sigortalı başına kaydedilmiştir. Bu yapı 7250942 sigortalı için genellendiğinde, toplam varyans çok büyük bulunmuştur. Bunun nedeni, sigortalı başına yerine, hasar başına düşen ortalama hasar tutarlarının kullanılmasıdır. Kısaca, Çizelge 5.1'deki verileri kullanarak ortalama hasar tutarlarının modellenmesi çalışması, ikinci modellemede elde edilen tahmin edicilerin varyanslarından daha küçük olmasından dolayı, ikinci modelleme çalışmasına göre daha üstün olduğu söylenebilir. Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5'de bulunan tahmin değerlerinden, ortalama hasar tutarları için uygulanan modeller arasında hangi modelin en uygun olduğunu belirlemek önemlidir. Şekil 5.1'de her bir sigortalıya ait hasar tutarının, çalışmadaki son 15 yıllık dönem üzerinden Diğerleri sınıfı için sürekli artış gösterdiği açık bir şekilde görülmektedir. S-Plus yardımıyla bulunan her üç DKE modelinden, yılın küpü KEÇOB modelinin en uygun model olduğu görülmektedir. Nedeni sabit etki parametre tahmininin düşük varyansa sahip olmasıdır. Yılın küpü karma etki primleri doktor, hastane ve diğer sınıfları için 197,654\$, 190,967\$, 198,114\$ alınabilir.

Her bir sigorta sözleşmesi için benzer risk karakteristiklerinin yanı sıra, bazı risk karakteristiklerinin gözlenememesinden dolayı genellikle sigorta portföyündeki veriler heterojen olarak oluşur. Aynı zamanda, her sigorta döneminde sigorta hasarları rassal olarak oluşur. Yani bir sonraki sigorta döneminde oluşacak risklerin ne zaman ve ne kadar olacağı hakkında bilgi yoktur. Bu ise sigorta portföyündeki verilerin rassallığını gösterir. Bu gibi durumlarda bir prim saptama yöntemi olarak kullanılan kredibilite modelleri, verilerin rassal olarak oluşma ve heterojenlik sorunlarına bir çözüm getirerek, güvenilir tahmin yapmayı sağlar.

Doğrusal modeller birçok veri tipini modellemekte sıkça kullanılan istatistiksel araçlardır. Doğrusal modeller içinde yer alan DKE modeli yapısına, sadece ögelere (mesela sigortalı) ait ortak özellikleri (sabit etkileri) almakla kalmayıp, aynı zamanda her bir ögeye özgü farklı özelliklerinde (rassal etkileri) modele dahil edilmesini sağlayan doğrusal modellerdir. Bir sigorta portföyündeki veriler, hem sabit etkileri, hem de rassal etkileri içerir. Bu nedenle, aktüeryal verileri, DKE modeli ile modellenmesi uygun olabilir.

Bir sigorta portföyünde aynı özellikleri taşıyan riskler “homojen” risk sınıflarında gruplandırılabilir. Diğer taraftan, bir sigorta portföyünde araba sürüş yeteneği gibi gözlemlenmesi mümkün olmayan ya da değerlendirilmesi hemen hemen imkansız olan riskler de vardır. Bu tür riskler sigorta portföyünde heterojenliğe neden olur. Kısacası sigorta portföyündeki homojen riskler DKE modelinde sabit etkilere, heterojen riskler ise rassal etkilere karşılık gelmektedir. Bir başka açıdan, kredibilite modellerinden Bühlmann ve Bühlmann-Straub modelleri bir parametreye bağlı olarak oluşurlar. DKE modelinde ise bu parametrenin yerini rassal etkiler alır.

Bu çalışmada amaç, istatistik yöntemler altında, kredibilite modellemesinde temel kavramların ortaya çıkarılması ve uygulanmasıdır. Bu amaçla, kredibilite kavramının, kredibilite modellemesinden daha geniş kullanım alanı olan karma etki modellemesinin özel bir yorumu ve uygulaması olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Bu tür çalışmaların yapılması, kredibilite kavramının sadece sigorta risklerini tespit etmekle sınırlı olmadığını göstererek, aynı zamanda aktüerya biliminin pedagojik

alanında da gelişmesine katkıda bulunacaktır. Böylece kredibilite modellerinden elde edilen tahmin değerlerinin yorumu, daha sağlam, anlaşılır ve güvenilir olacaktır.

Kredibilite modellerini, bu tür istatistiksel modeller çatısı içine yerleştirmenin, aktüerlerin kredibilite modeli seçeneklerini zenginleştirmek, aktüerlere model seçimi için kuralları olan disiplinli bir süreç sunmak ve aktüerya biliminde mevcut bilgilerin harmanlanması ile daha güvenilir ve sağlıklı kredibilite prim tahminleri elde edilmesini sağlamak gibi avantajları bulunmaktadır. Böylece, aktüeryal veriler için daha geniş bir alanda modelleme yapılabilir. Diğer bir ifadeyle, DKE modeli yapısı gereği kredibilite teorisindeki modellere göre daha geniş bir aralıkta kullanılmaktadır. Bühlmann-Straub kredibilite modelinin DKE modeli ile ilgisini kurmakla, kredibilite modellerinden olan Bühlmann-Straub modeli, bir çok farklı veri türünü modellemekte kullanılabilir hale getirilerek kullanım alanları genişletilmiş olmaktadır. Böylece, kredibilite modelleri, doğrusal modeller gibi istatistiksel modellerin aktüerya bilimine uygulanmasında bir alt küme oluşturmaktadır.

Sonuç olarak, kredibilite modellerinin istatistiksel modellerle ilişkisini kurmakla, sigortacılıkta prim miktarını belirlemede kullanılan kredibilite teorisine istatistiksel bir bakış açısı kazandırılarak, kredibilite teorisindeki modeller için de istatistiksel işlemler uygulanabilir hale gelmektedir.

KAYNAKLAR

Bailey, A.L., “A Generalized Theory of Credibility”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 32: 13–20 (1945).

Bailey, A.L., “Credibility Procedures, Laplace’ s Generalization of Bayes Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 37: 7–23 (1950).

“İngilizce-Türkçe Açıklamalı Sigorta Sözlüğü ve Kısaltmalar”, *Başak Sigorta* (1990).

Bühlmann, H., “Experience Rating and Credibility”, *ASTIN Bulletin*, 4: 199–207 (1967).

Bühlmann, H. and Straub, E., “Glaubwürdigkeit für Schadensätze”, *Mitt. Ver. Schweiz. Ver.*, 70(1): 111-133 (1970).

Dannenburg, D., “Crossed classification credibility models”, *In. Trans. 25th Int. Congress of Actuaries*, 4: 1–36 (1995).

De Vylder, F., “Parameter Estimation in Credibility Theory”, *ASTIN Bulletin*, 10: 99-112 (1978).

De Vylder, F., “Practical Credibility Theory with Emphasis on Optimal Parameter Estimation”, *ASTIN Bulletin*, 12: 115-132 (1981).

Demidengo, E., “Mixed Models: Theory and Applications”, Wiley Series in Probability and Statistics, *John Wiley & Sons*, Hoboken, New Jersey, 45–61 (2004).

Dudewicz, E. J. and Mishra, S. N., “Modern Mathematical Statistics”, *John Wiley & Sons*, New York, 251-254 (1988).

Ebegil M., “A Study to Examine Bühlmann-Straub Credibility Model in Generalized Linear Models”, *Ankara University. Communications Series A1: Mathematics and Statistics*, 55(2):9-16, (2006).

Frees, E.W., Young, V.R. and Luo, Y., “A Longitudinal Data Analysis Interpretation of Credibility Models”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3): 229–247 (1999).

Frees, E.W., Young, V.R. and Luo, Y., “Case Studies using Panel Data Models”, *North American Actuarial Journal*, 5(4): 24–42 (2001).

Goovaerts, M.J., Kass, R., Van Heerwaarden, A. E. and Bauwelinx, T., “Effective Actuarial Methods”, *North Holland*, Amsterdam, Holland, 112-129 (1990).

Goulet, V., “On Approximations in Limited Fluctuation Credibility Theory”, *Proceeding of the Casualty Actuarial Society*, 84: 533–552 (1997).

Goulet, V., “Principles and Application of Credibility Theory”, *Journal of Actuarial Practice*, 6: 5–62 (1998).

Hardy, M.R. and Panjer, H.H., “A credibillity approach to mortality risk”, *ASTIN Bulletin*, 28: 269–283 (1998).

Halliwell, L.J., “Statistical Models and Credibility”, Casualty Actuarial Society Forum; Including the Ratemaking Call Papers, *Casualty Actuarial Society*, Winter: 61–152 (1998).

Herzog, T.N., “Introduction to Credibility Theory 3rd ed”, *ACTEX Publications*, Winsted, 11–145 (1994).

Hewitt, C.C. Jr., “Credibility for Severity”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 57: 148–171 (1970).

Klugman, S.A., “Bayesian Statistics in Actuarial Science with Emphasis on Credibility”, *Kluwer*, Boston 65–76 (1992).

Klugman, S.A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E., “Loss Models From Data to Decisions 2nd ed.”, *John Wiley & Sons*, New York, 515–600 (1998).

Kremer, E., “Robust Credibility Via Robust Kalman Filtering”, *ASTIN Bulletin*, 24(2): 221–233 (1994).

Laird, N.M. and Ware, J.H., “Random-Effects Models for Longitudinal Data”, *Biometrics*, 38(4): 963–974 (1982).

Makov, U.E., Smith, A.F.M. and Liu, Y.H., “Bayesian Methods in Actuarial Science”, *The Statistician*, 45(4): 503–515 (1996).

Mayerson, A.L., “A Bayesian View of Credibility”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 51: 85–104 (1964).

McCulloch, P. and Nelder, J.A., “Generalized Linear Models, Monographs on Statistics and Applied Probability 2nd ed”, *Chapman and Hall*, New York, 423–431 (1989).

Missouri Department of Insurance Financial Institutions and Professional Registration, “2005 Missouri Medical Malpractice Insurance Report”, <http://insurance.mo.gov/reports/medmal/index.htm> (2005).

Mowbray, A.H., “How Extensive a Payroll is Necessary to Give a Dependable Pure Premium?”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24–30 (1914).

Nelder, J.A. and Verrall, R.J., "Credibility Theory and Generalized Linear Models", *ASTIN Bulletin*, 27(1): 71–82 (1997).

Norberg, R., "Unbayesed Credibility Revisited", *ASTIN Bulletin*, 15(1): 37–43 (1985).

Philbrick, S., "An Examination of Credibility Concept", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 48: 195–219 (1981).

Russell H. and Greig Jr., "Random Effects Linear Statistical Models and Bühlmann – Straub Credibility", *Casualty Actuarial Society*, Arlington, Virginia, Winter: 387–404 (1999).

Schnieper, R., "On the Estimation of the Credibility Factor: A Bayesian Approach", *ASTIN Bulletin*, 25(2): 137–151 (1995).

Searle, S. R., "Linear Models", *John Wiley & Sons, Inc.*, New York, 404–405 (1971).

Searle, S.R., Casella G. and McCulloch C.E., "Variance Components", *John Wiley & Sons*, New York, 9–21 (1992).

Toutenburg, H., "Prior Information in Linear Models", *John Wiley & Sons*, New York, 4–8 (1982).

Turner, B.J., "Credible Risk Classification-How to Create Risk Classification Systems with the Maximum Price Differentiation While Addressing Concerns of Credibility", *Casualty Actuarial Society*, Arlington, Virginia, Winter: 171–210 (2004).

Whitney, A., "The Theory of Experience Rating", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 4: 274–292 (1918).

Witting, T., "The Linear Markov Property in Credibility Theory", *ASTIN Bulletin*, 17(1): 71–84 (1987).

Young, V. R., "Credibility Using Semiparametric Models", *ASTIN Bulletin*, 27(2): 273–285 (1997).

EKLER

EK-1 Eş. 4.80 ve Eş. 4.81 eşitlikleri ile verilen ENDOST ve ENDOSK'ların Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST ve ENDOSK'ları ile aynı olduklarının gösterilmesi

ENDOST formülü için Eş. 4.80'i kullanarak,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} &= \left(\sum_{i=1}^n h_i \bar{Y}_i \right) / \sum_{i=1}^n h_i \\
 &= \left(\sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^n h_i \bar{Y}_i \right) / \sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^n h_i \\
 &= \left(\sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^n \left(\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i} \right)^{-1} \bar{Y}_i \right) / \sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^n \left(\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i} \right)^{-1} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2 t_i} \right)^{-1} \bar{Y}_i \right) / \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2 t_i} \right)^{-1} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2}} \bar{Y}_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2}} \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \bar{Y}_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i \right)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise μ 'nün kredibilite ağırlıklı tahminidir. Modelin ENDOSK'ları (tek yönlü ANOVA için) da kredibilite tahminine uymaktadır. Eş. 4.81'den,

$$\hat{\alpha}_i = E[\alpha_i | \bar{Y}_i] = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_i}} (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) = \frac{t_i \sigma_\alpha^2}{t_i \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2} (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) = \frac{t_i}{t_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2}} (\bar{Y}_i - \hat{\mu})$$

elde edilir. σ_α^2 terimi a 'ya, σ_ε^2 terimi de v 'ye eşit olduğu için $\frac{t_i}{t_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2}}$ terimi de

$\hat{Z}_i$ 'dir. Böylece,

EK-1 (Devam) Eş. 4.80 ve Eş. 4.81 eşitlikleri ile verilen ENDOST ve ENDOSK'ların Bühlmann-Straub kredibilite modelinin ENDOST ve ENDOSK'ları ile aynı olduklarının gösterilmesi

$$\hat{\alpha}_i = \hat{Z}_i (\bar{Y}_i - \hat{\mu}) = \hat{Z}_i \bar{Y}_i - \hat{Z}_i \hat{\mu} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i - \hat{Z}_i \hat{\mu} + \hat{\mu} - \hat{\mu} = \hat{Z}_i \bar{Y}_i + \underbrace{\left(1 - \hat{Z}_i\right)}_{\hat{C}_i} \hat{\mu} - \hat{\mu}$$

sonucu elde edilir. Eş. 4.63'den, $\hat{\alpha}_i = \hat{C}_i - \hat{\mu}$ 'dir, bu ise Bühlmann-Straub modeli için ENDOSK olarak kabul edilebilir. Yani, yeni primin $\hat{\mu}$ 'den fazla olan bölümü i 'nci sınıf için prime eklenmiş olan rassal etkiyi temsil etmektedir.

EK-2 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by REML

Data: HASARTUTARIVERISI

AIC	BIC	logLik
508,512	515,5569	-250,256

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF

(Intercept) Residual

StdDev: 9,050373 71,76773

Fixed effects: HASAR.TUTARI ~ YIL

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	156,3521	23,11251	41	6,764826	<,0001
YIL	5,1963	2,47622	41	2,098497	0,0421

Correlation:

(Intr)

YIL -0,857

Standardized Within-Group Residuals:

Min	Q1	Med	Q3	Max
-1,632103	-0,7340114	-0,09384733	0,5136727	2,477317

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	276,3346	<,0001
YIL	1	41	4,4037	0,0421

Random.effects(fit)

(Intercept)

1 2,061027

2 -4,578644

3 2,517616

EK-3 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde EÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by maximum likelihood

Data: HASARTUTARIVERISI

	AIC	BIC	logLik
	518,7643	525,991	-255,3822

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF
(Intercept) Residual

StdDev: 0,001065643 70,54286

Fixed effects: HASAR.TUTARI ~ YIL

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	156,3521	22,63866	41	6,906422	<,0001
YIL	5,1963	2,48992	41	2,086952	0,0432

Correlation:

(Intr)

YIL -0,88

Standardized Within-Group Residuals:

Min	Q1	Med	Q3	Max
-1,725348	-0,7175397	-0,1603827	0,5071411	2,556021

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	338,4967	<,0001
YIL	1	41	4,3554	0,0432

Random.effects(fit)

(Intercept)

1 3,663005e-008

2 -8,137493e-008

3 4,474488e-008

EK-4 Çizelge 5.1'deki hasar tutarları verisi için, DKE modelinde yılın küpü KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by REML

Data: HASARTUTARIVERISI

AIC	BIC	logLik
519,4343	526,4791	-255,7172

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF

(Intercept) Residual

StdDev: 9,082506 71,70534

Fixed effects: HASAR.TUTARI ~ YIL^3

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	177,3065	15,38088	41	11,52772	<,0001
I(YIL^3)	0,0215	0,01014	41	2,11726	0,0403

Correlation:

(Intr)

I(YIL^3) -0,633

Standardized Within-Group Residuals:

Min	Q1	Med	Q3	Max
-1,732559	-0,8148138	-0,06079782	0,5335196	2,431595

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	276,3437	<,0001
I(YIL^3)	1	41	4,4828	0,0403

Random.effects(fit)

(Intercept)

1 2,075757

2 -4,611367

3 2,535609

EK-5 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by REML

Data: HASARSIKLIGIVERISI

AIC	BIC	logLik
-465,1567	-458,1119	236,5783

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF

(Intercept)	Residual
--------------------	-----------------

StdDev: 0,001014678 0,0008106218

Fixed effects: HASAR.SIKLIGI ~ YIL

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	0,004426667	0,0006386376	41	6,931422	<,0001
YIL	-0,000077500	0,0000279691	41	-2,770914	0,0084

Correlation:

(Intr)

YIL -0,35

Standardized Within-Group Residuals:

Min	Q1	Med	Q3	Max
-2,076788	-0,7525103	0,007390482	0,5285953	3,02115

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	40,50031	<,0001
YIL	1	41	7,67796	0,0084

Random.effects(fit)

(Intercept)

1 0,0003133346

2 -0,0011126576

3 0,0007993230

EK-6 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde EÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by maximum likelihood

Data: HASARSIKLIGIVERISI

	AIC	BIC	logLik
	-497,5215	-490,2949	252,7608

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF

	(Intercept)	Residual
--	--------------------	-----------------

StdDev: 0,0008202567 0,0008009134

Fixed effects: HASAR.SIKLIGI ~ YIL

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	0,004426667	0,0005484243	41	8,071609	<,0001
YIL	-0,000077500	0,0000282695	41	-2,741472	0,009

Correlation:

(Intr)

YIL -0,412

Standardized Within-Group Residuals:

	Min	Q1	Med	Q3	Max
	-2,082246	-0,7493932	0,01223717	0,5258853	3,077487

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	58,05045	<,0001
YIL	1	41	7,51567	0,009

Random.effects(fit)

(Intercept)

1 0,0003071447

2 -0,0010906771

3 0,0007835324

EK-7 Çizelge 5.6'daki oransal hasar sıklığı verisi için, DKE modelinde yılın küpü KEÇOB tahmin yöntemi ile yapılan modellemeye ait sonuçlar

***** Linear Mixed Effects Model *****

Linear mixed-effects model fit by REML

Data: HASARSIKLIGIVERISI

AIC	BIC	logLik
-452,7058	-445,661	230,3529

Random effects:

Formula: ~ 1 | SINIF

(Intercept)	Residual
--------------------	-----------------

StdDev: 0,001013896 0,0008251558

Fixed effects: HASAR.SIKLIGI ~ YIL^3

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	0,004080642	0,0006085626	41	6,705377	<,0001
I(YIL^3)	-0,000000285	0,0000001167	41	-2,445050	0,0189

Correlation:

(Intr)

I(YIL^3) -0,184

Standardized Within-Group Residuals:

Min	Q1	Med	Q3	Max
-2,158193	-0,6792282	-0,1309481	0,6885372	2,795419

Number of Observations: 45

Number of Groups: 3

Analysis of Variance Table

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	41	40,50031	<,0001
I(YIL^3)	1	41	5,97827	0,0189

Random.effects(fit)

(Intercept)

1	0,0003128522
2	-0,0011109447
3	0,0007980924

EK-8. Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.1. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + li$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 10i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	139,8512	169,6268	158,7214	158,6967
		139,5597	110,8990	100,0401	100,0153
	10	115,6460	132,3305	130,5424	130,5345
		156,8020	151,1788	149,3954	149,3876
	15	178,0061	165,6603	168,3113	168,3003
		120,4785	116,9221	119,6005	119,5894
	25	133,9092	142,1419	142,0558	142,0553
		152,1363	142,8229	142,7166	142,7161
	3	149,6857	145,8505	145,6539	145,6556
		145,5148	144,3330	144,3362	144,3379
		138,6511	137,2994	136,9997	137,0014
3	5	144,2271	141,9584	144,6222	144,6171
		139,4085	141,6468	133,9360	133,9309
		148,8964	143,1805	148,1492	148,1441
	10	143,2395	143,4502	143,2896	143,2937
		140,3449	140,6959	140,8623	140,8664
		142,0635	142,2868	142,3320	142,3361
	15	144,6692	144,6771	144,6511	144,6501
		140,6247	140,7410	140,6617	140,6607
		140,8238	141,0065	141,0016	141,0005
	25	141,5514	141,5615	141,6129	141,6106
		143,7215	143,7306	143,7455	143,7431
		144,7842	144,7935	144,7922	144,7898
		145,3512	145,3602	145,3483	145,3460
	10	141,8282	141,7990	141,8218	141,8219
		144,6558	144,6291	144,5559	144,5560
		144,2214	144,1976	144,2277	144,2278
		141,8607	141,8295	141,8313	141,8314
4	15	143,6229	143,6310	143,6238	143,6241
		141,1262	141,1306	141,1352	141,1355
		142,7969	142,8071	142,8477	142,8480
	25	140,6683	140,6711	140,6156	140,6159
		143,8317	143,8602	143,8548	143,8560
		141,4512	141,4793	141,4620	141,4635
	10	140,5161	140,5450	140,5276	140,5288
		143,1588	143,1889	143,1818	143,1830

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.1. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 1i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 10i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	142,1698	142,0818	142,1622	142,1595
		143,3509	143,2695	143,1842	143,1815
		143,2736	143,1839	143,2491	143,2464
		144,2312	144,1173	144,2652	144,2624
		145,9848	145,8398	145,5716	145,5689
	10	141,6581	141,6623	141,6708	141,6708
		146,3056	146,3089	146,3221	146,3220
		142,6151	142,6189	142,6275	142,6274
		142,3789	142,3833	142,4046	142,4045
		143,0961	143,0999	143,1018	143,1018
	15	143,1845	143,1825	143,1962	143,1953
		144,1181	144,1162	144,1171	144,1162
		142,2934	142,2916	142,3128	142,3118
		142,8348	142,8328	142,8288	142,8279
		144,3862	144,3842	144,3838	144,3828
	25	142,3863	142,3793	142,3769	142,3758
		141,1359	141,1288	141,1312	141,1301
		143,8940	143,8869	143,8944	143,8933
		143,9533	143,9462	143,9525	143,9515
		144,6509	144,6438	144,6468	144,6457

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.2. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 10i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 10000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	154,6914	171,5573	192,4345	192,9029
		118,6496	139,5054	164,2499	164,7182
	10	155,6084	144,0135	131,2504	130,9527
		129,2091	164,2103	151,0159	150,7181
	15	155,7074	134,6530	129,2340	128,6138
		180,5524	175,4076	170,2051	169,5849
	25	155,7099	152,8537	154,1772	154,0831
		143,3027	158,8237	160,4659	160,3718
	3	160,1120	156,8098	153,8966	153,5858
		158,9146	150,7825	161,0165	160,7056
		138,0765	172,5583	166,0391	165,7283
	10	158,8847	160,6699	160,4813	160,5627
		156,3882	161,9801	160,6324	160,7137
		171,3660	156,5869	157,4993	157,5806
	15	159,6013	164,1249	161,0956	161,4150
		155,4058	170,1418	156,4325	156,7518
		155,7891	147,6568	163,2234	163,5427
	25	159,6297	151,6659	158,5750	157,8389
		163,7264	139,0737	163,6070	162,8709
		150,4194	189,4377	160,2610	159,5249
4	5	166,0482	168,9645	167,2423	167,6624
		161,8438	165,6654	158,6328	159,0528
		173,6305	181,5054	167,3179	167,7379
		206,0587	144,1448	165,3514	165,7715
	10	166,9280	164,8943	166,1152	165,8003
		165,0457	161,4373	166,3459	166,0310
		168,0001	155,5988	168,1704	167,8556
		158,3266	181,5454	163,9598	163,6449
	15	166,3441	171,0149	166,9742	167,5674
		165,2176	172,2478	163,9815	164,5748
		156,3580	185,5847	165,6228	166,2160
		156,6391	138,6620	168,3299	168,9232
	25	164,3007	165,0437	164,3101	164,2866
		165,1879	166,2462	164,6346	164,6111
		157,5780	165,5994	164,1587	164,1352
		169,9921	166,3215	170,2043	170,1808

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.2. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 10i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 10000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	170,4846	160,2763	169,9444	168,0955
		170,0724	155,5801	169,8567	168,0078
		168,5955	142,6422	168,5599	166,7111
		162,7342	120,9404	170,3782	168,5292
		159,2360	259,1054	169,1434	167,2945
	10	168,7630	167,5439	168,6423	168,2850
		169,6392	167,8167	169,9748	169,6175
		170,6596	167,3659	170,9484	170,5910
		164,9740	159,7479	170,8282	170,4708
		177,0770	187,3027	170,8853	170,5280
	15	168,9230	172,9191	168,3309	168,9264
		168,9811	174,4851	169,0010	169,5964
		170,6540	179,0463	170,8311	171,4266
		194,0057	191,1027	170,8608	171,4562
		175,6016	137,6688	172,6190	173,2145
	25	168,6280	168,9224	168,6762	168,5514
		169,9377	170,2846	170,3729	170,2480
		169,3234	169,7367	169,5740	169,4492
		182,5457	172,4785	172,5792	172,4543
		173,2009	173,4518	173,6077	173,4828

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.3. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 25i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 25000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

		Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
n grup sayısı	t dönem sayısı	$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	176,3082	149,2195	145,4742	143,6780
		146,0297	203,3252	203,7326	201,9364
	10	175,5577	225,2319	229,8272	232,7244
		195,8691	138,4137	151,5373	154,4346
	15	176,4594	204,8764	194,8560	196,4557
		181,5913	156,8261	147,6462	149,2459
	25	175,2353	179,0418	179,6890	179,6997
		237,2717	178,5385	181,2696	181,2803
3	5	189,5744	197,0337	190,2017	191,2146
		194,3418	204,9400	189,4715	190,4845
		174,2551	172,9420	192,2482	193,2611
	10	189,6338	185,8502	198,5166	197,4737
		193,3021	175,6579	182,4223	181,3795
		179,4485	211,0270	194,9502	193,9074
	15	187,0506	187,5278	189,7752	189,4154
		191,9924	187,8672	191,3942	191,0341
		185,4314	196,0671	191,2733	190,9132
	25	186,7124	191,9030	185,1604	185,5427
		194,1307	203,1993	190,4892	190,8716
		190,0436	182,7022	199,4859	199,8682
4	5	204,5276	200,2090	214,8289	213,2774
		206,5471	198,1377	197,6510	196,0994
		185,2822	186,6178	212,4164	210,8649
		180,5773	239,4174	205,5682	204,0166
	10	203,2250	204,9947	204,5764	204,3500
		201,6331	204,0059	199,6739	199,4475
		196,9705	212,5934	209,6765	209,4501
		230,2625	207,3631	213,3155	213,0891
	15	197,0707	198,2710	193,8411	193,3728
		202,7134	204,5591	204,4771	204,0089
		206,2742	205,0351	204,6060	204,1377
		217,2984	208,6914	212,3177	211,8494
	25	195,2947	195,7039	194,2155	193,2777
		199,9361	200,5378	199,7376	198,7998
		205,6822	208,5922	208,8164	207,8786
		208,6377	214,2565	215,7243	214,7866

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.3. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 25i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 25000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	214,3461	219,0277	215,7517	216,4924
		214,5623	220,6743	213,0123	213,7530
		216,1634	223,4174	216,1224	216,8630
		191,6006	236,2640	218,2845	219,0252
		138,8096	194,6346	224,5819	225,3226
	10	212,2032	214,2820	210,5065	210,1593
		212,2332	215,0821	211,7967	211,4495
		217,2640	221,1540	217,7274	217,3802
		214,6894	227,8627	222,5583	222,2111
		220,3138	215,6601	228,0824	227,7352
	15	212,1646	212,2427	209,2214	207,7474
		215,2054	215,5958	214,0510	212,5769
		219,8378	221,2599	220,5181	219,0440
		222,1791	224,2174	229,2213	227,7473
		231,6251	241,1152	240,2171	238,7430
	25	203,6977	201,9926	199,8487	197,4709
		209,3259	207,2884	208,0835	205,7056
		217,2059	214,2527	217,6722	215,2943
		226,4643	216,8360	226,8938	224,5159
		240,3214	250,7322	239,5798	237,2019

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.4. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 50i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 50000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

		Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli		
n grup sayısı	t dönem sayısı	$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$	
2	5	211,0868	262,0068	296,2263	300,7485	
		170,5980	182,2366	223,8643	228,3864	
	10	211,0577	203,7165	196,7919	195,4326	
		246,4222	228,2600	221,9538	220,5945	
	15	209,8193	193,1150	197,4675	195,0194	
		282,0402	237,0177	246,4498	244,0017	
	25	208,8050	211,3070	212,2819	211,7884	
		229,7592	220,2188	225,3855	224,8920	
	3	5	241,3149	255,2237	239,4458	241,9637
			248,0145	281,9057	248,4356	250,9535
126,2292			217,7086	256,1199	258,6378	
10		235,9931	220,0367	241,0142	235,0183	
		272,3589	187,9835	238,1264	232,1305	
		225,4635	310,5616	254,4495	248,4536	
15		232,9328	229,6393	233,2234	230,2787	
		254,7931	232,5940	235,2926	232,3479	
		247,3891	273,8702	271,2581	268,3135	
25		226,6259	225,7221	227,5160	224,7147	
		256,4045	236,5382	240,3948	237,5936	
		259,9196	267,7763	263,6198	260,8185	
		4	5	273,3833	270,9396	270,6235
269,3776				264,9746	267,9647	265,1253
299,2357	249,0248			276,3486	273,5092	
231,9826	318,2236			292,7806	289,9412	
10	260,7507		262,5737	256,0956	253,9674	
	264,5630		267,9110	262,5114	260,3833	
	255,8854		281,0763	280,8143	278,6862	
	302,5197		289,4589	297,2278	295,0996	
15	252,5099		252,0982	247,4897	243,7164	
	262,7734		263,1038	260,9133	257,1400	
	279,3876	271,6624	278,1533	274,3800		
	295,3681	304,5610	303,2787	299,5054		
25	240,5873	237,9400	230,6709	225,0795		
	257,4988	254,7527	256,2626	250,6711		
	278,0679	271,8150	281,1272	275,5358		
	307,0650	314,2593	309,3644	303,7729		

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.4. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 50i$, poisson dağılım parametresi $\lambda_i = 150000 + 50000i$, $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	292,5653	305,3419	286,0332	288,4892
		295,7294	315,4033	290,7756	293,2316
		296,6579	342,9276	297,7505	3002066
		295,8378	315,2821	312,5975	315,0535
		267,4648	268,6217	329,8754	332,3314
	10	283,6877	282,3069	271,4210	266,8935
		287,7944	286,6218	281,4899	276,9624
		296,4499	293,4014	297,4877	292,9602
		326,2589	312,4802	317,3850	312,8575
		323,2621	337,3167	338,5952	334,0677
	15	273,4364	270,2881	258,1169	251,5057
		280,9258	278,0522	274,4256	267,8144
		291,9123	290,8344	292,8096	286,1984
		322,9836	302,9178	320,5954	313,9842
		336,3510	357,0542	348,4622	341,8510
	25	254,6348	251,3678	237,1470	228,4490
		270,7995	268,1464	264,6969	255,9989
		291,4537	289,4954	291,5902	282,8921
		321,4254	321,4343	325,2145	316,5165
		355,7185	355,1915	359,5821	350,8840

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.5. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 1i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 10i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	169,1911	167,5339	165,3566	165,3794
		125,0132	116,0757	113,8673	113,8901
	10	134,8165	143,6740	143,0077	143,0441
		164,3692	138,5727	137,7905	137,8269
	15	143,4117	133,1025	136,9894	136,9925
		135,2084	150,0181	153,9600	153,9631
	25	134,5814	146,2883	145,3717	145,3687
		118,8640	137,4108	136,4849	136,4819
	3	144,5799	147,1597	150,7712	150,7895
		143,8288	126,7719	145,9234	145,9417
		149,7391	154,9309	132,7412	132,7595
3	5	139,1165	139,8229	138,8251	138,8210
		141,1370	141,3980	139,3759	139,3718
		143,5225	143,3459	144,3772	144,3731
	10	144,9126	144,1483	144,2824	144,2861
		139,5775	138,9348	138,7136	138,7173
		141,7962	141,3842	141,7781	141,7819
	15	141,3345	140,8741	141,1085	141,1050
		141,3859	141,2142	141,2064	141,2029
		144,3562	144,1141	144,3711	144,3676
	25	144,3770	144,2844	144,2573	144,2572
		140,5763	140,5865	140,5965	140,5964
		143,0685	143,0630	142,9788	142,9787
	10	141,8705	141,8539	141,9186	141,9185
		140,9127	140,8853	141,0013	140,9962
		142,3790	141,8301	141,5531	141,5480
	15	142,9904	142,7669	142,6586	142,6535
		147,7927	147,3487	147,3273	147,3222
		141,4007	141,2563	141,2299	141,2310
4	25	142,6997	142,0423	141,0165	141,0176
		144,5328	144,2774	144,5635	144,5646
		143,5314	143,1792	143,9017	143,9028
	10	142,4845	142,5125	142,4751	142,4770
		141,1972	141,2278	141,1563	141,1582
		144,6554	144,6831	144,6662	144,6681
	15	142,1540	142,1845	142,2366	142,2385

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.5. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 1i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 10i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	143,8038	143,7940	143,6297	143,6258
		143,3392	143,3293	143,4877	143,4838
		145,6260	145,6160	145,6312	145,6273
		144,3933	144,3841	144,2351	144,2312
		142,3568	142,3472	142,3967	142,3928
	10	140,5507	140,5361	140,5104	140,5055
		142,0781	142,0634	142,0842	142,0792
		143,1433	143,1280	143,1236	143,1186
		143,6824	143,6677	143,6953	143,6903
		145,6838	145,6689	145,6378	145,6328
	15	144,3124	144,3163	144,3172	144,3168
		142,5771	142,5807	142,5802	142,5798
		142,3697	142,3738	142,3890	142,3886
		141,5515	141,5550	141,5492	141,5488
		143,7522	143,7559	143,7420	143,7416
	25	144,0686	144,0727	144,0747	144,0757
		144,4112	144,4157	144,4369	144,4380
		142,8702	142,8743	142,8866	142,8876
		144,1105	144,1147	144,1171	144,1182
		143,5720	143,5761	143,5801	143,5812

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.6. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 10i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 10000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	153,9455	72,7688	107,2035	102,6553
		179,6335	228,6646	262,9473	258,3991
	10	155,4396	154,2843	132,9475	132,8849
		172,6575	155,8446	134,0570	133,9943
	15	156,4690	158,8329	171,9223	172,0829
		198,7410	153,5272	169,6115	169,7722
	25	156,1836	155,3246	152,9626	152,9222
		154,8174	156,8121	154,9132	154,8727
	3	159,6320	170,4918	159,0860	160,7006
		164,6967	188,9525	160,2846	161,8992
		122,3255	127,8117	162,5154	164,1299
3	10	161,5437	163,2682	157,6184	157,8056
		159,5568	164,4778	165,4771	165,6642
		184,1189	158,2859	162,5574	162,7446
	15	159,4867	160,9340	160,2274	160,3656
		174,1028	162,7284	158,5176	158,6558
		195,7524	157,3950	160,4071	160,5453
	25	159,4998	160,5614	158,1372	158,2031
		160,9335	163,2890	162,8365	162,9025
		151,8721	158,5410	164,4299	163,2629
	5	169,3173	172,5480	169,2900	169,9524
		166,0878	170,9539	165,9379	166,6002
		163,9584	175,9373	167,5763	168,2386
		163,5358	154,1584	168,2488	168,9111
4	10	165,9892	165,2335	165,9406	165,5273
		166,9568	166,2397	168,4488	168,0354
		152,3499	157,0805	164,6376	164,2242
		155,8439	178,5151	169,4965	169,0831
	15	165,0467	166,5304	164,2993	164,4649
		168,0473	170,4205	169,3868	169,5524
		157,9079	169,4334	167,4632	167,6288
		184,3425	162,6078	167,0140	167,1796
	25	166,0955	166,2060	167,2999	167,1241
		166,0183	165,8946	165,6615	165,4856
		162,7999	164,4668	166,6781	166,5023
		159,9869	171,2278	168,5512	168,3754

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.6. (Devamı) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 10i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 10000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	171,4533	169,9408	171,2467	170,5531
		169,0967	167,0278	168,3065	167,6129
		169,1410	166,3395	169,4750	168,7814
		182,4750	153,6434	171,6139	170,9203
		237,6419	193,7795	172,8883	172,1946
	10	170,5856	174,5799	171,5973	172,4713
		170,9091	176,5991	170,3564	171,2305
		168,6543	179,2941	169,1648	170,0389
		184,3915	187,1273	173,4580	174,3321
		193,6368	147,7948	175,3713	176,2454
	15	168,9260	169,3652	169,0808	168,9596
		170,3133	170,7120	168,7795	168,6583
		170,1303	169,3640	170,2152	170,0941
		201,7987	179,6413	172,2608	172,1397
		189,2462	167,8830	175,6612	175,5400
	25	169,4025	169,9537	169,5404	169,3978
		169,2618	169,9573	168,8771	168,7345
		171,6263	172,2027	171,8958	171,7532
		169,3212	173,5500	171,7349	171,5924
		162,1657	171,7949	174,8292	174,6867

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.7. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 25i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 25000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

		Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
n grup sayısı	t dönem sayısı	$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	179,3913	117,6129	154,1817	147,9160
		212,9090	226,7716	278,3642	272,0985
	10	173,7728	174,1940	155,4996	155,3569
		194,7897	176,9779	159,8813	159,7386
	15	176,3410	184,7902	179,5927	180,2630
		160,2191	173,1751	170,7803	171,4506
	25	175,8899	173,3072	174,7446	174,0945
		157,6972	184,3856	187,6494	186,9993
3	5	195,2341	202,6094	192,9991	194,8402
		214,3461	208,0475	190,5861	192,4272
		268,5906	176,1923	196,2531	198,0942
	10	188,9826	192,2608	189,4667	189,8168
		187,1574	199,4386	198,1999	198,5500
		279,1994	187,0503	190,0073	190,3574
	15	189,2922	188,2888	187,7582	186,6820
		191,2046	187,3545	195,1420	194,0658
		175,0770	203,9215	198,2250	197,1488
	25	187,8775	187,7455	188,1302	187,0684
		201,0588	190,0187	191,6427	190,5809
		273,5753	203,1154	201,6412	200,5794
4	5	209,6952	193,4938	205,2975	198,0550
		208,2277	180,7459	206,2325	198,9900
		212,2274	127,2990	210,9798	203,7373
		183,7725	313,4177	217,5551	210,3126
	10	202,9854	203,6525	202,2811	201,4811
		204,4954	206,1665	204,6435	203,8435
		197,5693	200,2820	204,8910	204,0910
		205,7282	217,1218	214,9974	214,1974
	15	203,6308	205,6709	201,7575	201,2637
		204,7431	208,1083	204,5391	204,0453
		208,3970	212,5016	210,4556	209,9619
		215,4380	211,1680	217,6260	217,1322
	25	199,2456	200,6345	196,4725	195,5305
		201,0797	203,7837	200,9824	200,0404
		203,5033	211,0169	207,9937	207,0516
		230,1471	211,5823	218,4662	217,5242

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.7. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 25i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 25000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	218,2649	221,3589	216,1256	216,1450
		220,3423	224,9811	216,1924	216,2117
		218,2713	227,1603	216,2954	216,3148
		177,9517	212,9060	222,8474	222,8668
		215,9541	227,1929	234,5696	234,5890
	10	218,9632	221,3378	214,9446	214,5485
		219,1338	222,7316	216,3432	215,9471
		220,3057	228,0559	221,7612	221,3651
		226,2354	232,7118	229,9947	229,5986
		249,1092	222,1747	236,2127	235,8166
	15	212,8942	216,4264	206,9067	206,7785
		214,5203	219,9192	211,9752	211,8470
		218,6331	227,8312	219,1946	219,0664
		230,8813	241,9553	226,9014	226,7732
		231,1570	207,2663	236,3446	236,2164
	25	208,7350	207,9450	201,5139	198,8004
		211,5958	211,1375	208,9169	206,2034
		220,3507	219,5326	220,4189	217,7054
		220,1627	225,2277	229,3313	226,6177
		207,7668	240,2461	240,5242	237,8106

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.8. Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 50i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 50000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
2	5	214,4640	163,1949	178,5246	170,2557
		214,0254	257,4557	288,2224	279,9534
	10	210,6979	209,2994	198,5470	197,2202
		180,4919	224,7032	223,9441	221,8676
	15	214,5132	246,1627	210,5240	214,1975
		210,8209	203,6196	176,1139	179,7873
	25	210,6458	218,7449	216,5557	216,3273
		210,3947	221,3997	224,7295	224,5011
	3	245,2754	237,4166	244,2147	239,7542
		267,7072	211,6520	249,2649	244,8044
		257,2502	282,3794	249,6849	245,2244
3	5	239,1935	242,5004	238,4567	237,1261
		223,2337	246,5335	240,4865	239,1559
		255,2477	256,0235	262,8980	261,5674
	10	234,9539	222,1529	231,5047	223,7452
		244,3362	201,6273	248,6158	240,8563
		265,4948	301,4753	259,0966	251,3371
	15	232,2368	223,5726	233,4548	227,1331
		238,3142	214,9382	240,4312	234,1095
		253,0921	287,9912	262,8015	256,4798
	25	277,1738	288,2077	267,6250	270,6908
		273,7909	292,8858	268,6756	271,7414
		248,5366	317,0085	277,5983	280,6641
		271,3215	247,9224	304,5129	307,5787
	10	264,6854	262,3322	253,7111	248,8914
		265,0454	262,7408	262,4884	257,6687
		279,1301	261,8563	281,0785	276,2588
		356,2210	312,8788	301,2887	296,4690
	15	259,8681	258,8576	249,1303	244,4932
		264,0085	263,7050	259,4694	254,8323
		278,7888	274,9377	282,0528	277,4157
		250,8082	303,3439	304,5073	299,8702
	25	251,6314	251,1305	237,5771	231,9783
		262,7829	264,4218	259,8908	254,2919
		266,3501	283,9768	282,8246	277,2258
		314,2298	302,8615	312,6588	307,0599

EK-8 (Devam) Simülasyon sonuçlarına ait çizelgeler

Çizelge 8.8. (Devam) Üstel dağılım parametresi $\mu_i = 140 + 50i$, negatif binom dağılım parametresi $k_i = 70000 + 50000i$ ve $p = 0,5$; $i = 1, 2, L, n$, alınarak üretilen veriler için, KEM ve BSM lerine ilişkin hesaplanan tahmin değerleri

n grup sayısı	t dönem sayısı	Bühlmann-Straub Modeli		Karma Etki Modeli	
		$\hat{C}_{i(BS)M}$	$\hat{C}_{i(BS)M_{Kred}}$	$\hat{C}_{i(KEM)}$	$\hat{C}_{i(KEM)_{Kred}}$
5	5	299,4279	303,9348	284,1058	283,4893
		301,5663	307,8937	295,5841	294,9677
		293,0779	294,4699	293,9996	293,3832
		323,9195	352,7591	314,4759	313,8594
		331,3174	288,3625	334,9745	334,3581
	10	293,9981	288,0621	273,9535	266,3648
		294,4365	286,5021	283,4994	275,9107
		295,4331	272,8162	297,2721	289,6834
		313,2670	327,5452	320,9728	313,3841
		368,5506	351,1173	346,6815	339,0928
	15	284,8256	283,1640	260,4219	253,7640
		289,6209	289,4615	277,8534	271,1956
		299,5782	301,2865	299,5562	292,8983
		321,5202	323,1487	324,5651	317,9072
		351,2366	339,4948	354,2078	347,5499
	25	267,3170	256,1807	238,7984	224,0738
		276,8616	264,3951	265,8401	251,1155
		297,7441	280,9509	296,9301	282,2055
		329,8233	280,9763	328,6008	313,8762
		371,1998	409,9306	364,4968	349,7722

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EBEGİL, Meral
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 04.03.1971 Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 282 03 98
 e-mail : mdemirel@gazi.edu.tr

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Doktora	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2007
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	1999
Lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	1994

İş Deneyimi

Yıl

Yer

Görev

1994-2007	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
-----------	-------------------	---------------------

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Ebegil M., “A Study to Examine Bühlmann-Straub Credibility Model in Generalized Linear Models”, *A.U. Communications Series A1: Mathematics and Statistics*, 55(2):9-16, 2006.

Ebegil M., Gökpınar F. and Ekni M., “A Simulation Study on Some Shrinkage Estimators”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 35(2):213-226, 2006.

Ebegil M., “Shrinkage Tahmin Ediciler Sınıfı Üzerine Bir Çalışma”, *Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Dergisi*, 8(2):53-58, 2006.

Coşkun Ş., Yılmazoğlu K., Aktaş M., Balabanlı B. Ebeğil M., Babür C. ve Kılıç S., “Kistik Ekinokokoz Şüpheli Hastaların Serumlarında İmmünoglobülin Düzeylerinin ve Oksidatif Stresin Araştırılması”, *XIV. Ulusal Parazitoloji kongresi*, 18-25 Eylül, İzmir, 196-197, 2005.

Ebeğil M. ve Ekni M., “Kredibilite Teorisinde Bayesci Yaklaşım”, *4. İstatistik Kongresi, Bildiriler Kitabı*, 613-618, 8-12 Mayıs, Antalya, 2005.

Ebeğil M., “Kredibilite Teorisinde Rassal Etki Modeli”, *4. İstatistik Kongresi, Bildiriler Kitabı*, 619-624, 8-12 Mayıs, Antalya, 2005.

Demirel M. ve Ekni M., “Bir Shrinkage Tahmin Edicisi veya En Küçük Kareler Tahmin Edicisinden Birini Seçmek İçin Bir Test İstatistiği”, *Gazi Üniversitesi İstatistik Konferansı*, 225-236, 26-27 Ekim, Ankara, 1998.