

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SONLU FARK METODU İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Halil İbrahim DÖNMEZ

TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ
JÜRİ ÜYELERİ
Dr. Öğr. Üyesi Tuncay KÖROĞLU
Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR

RİZE-2020
Her Hakkı Saklıdır

ÖNSÖZ

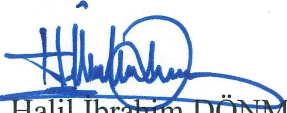
Bu tez çalışmasında, kısmi türevli denklemlerin sonlu fark metodu ile nümerik çözümleri incelenmiştir. Kısmi türevli denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri, bir kısmi türevli denklemin analitik çözümlerinin zor olduğu veya mümkün olmadığı yerde nümerik çözümleri yardımıyla çözüm üreten matematiksel bir yöntemdir.

Bu çalışmanın bu noktaya gelinceye kadar emeği geçen tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ'ye, lisansüstü ders aşamasında yardımlarından ötürü Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki sayın hocalarıma, sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aileme teşekkür ederim.

Halil İbrahim DÖNMEZ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark Metodu İle Nümerik Çözümleri” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 09/06/2020


Halil İbrahim DÖNMEZ

***Uyarı:** Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SONLU FARK METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Halil İbrahim DÖNMEZ

**Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ**

Bu tezin amacı kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümlerini sonlu fark metoduyla elde etmektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kısmi türevli denklem türleri ele alınmakta ve genel bilgiler verilmektedir. Ayrıca sonlu fark formülasyonu elde edilmektedir. İkinci bölümde eliptik denklemlere, üçüncü bölümde parabolik denklemlere ve dördüncü bölümde hiperbolik denklemlere sonlu fark metodu uygulanmaktadır.

2020, 124 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kısmi Türevli Denklemler, Sonlu Fark Yöntemi, Eliptik Denklemler, Parabolik Denklemler, Hiperbolik Denklemler.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIFFERENCE METHOD

Halil İbrahim DÖNMEZ

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet ÜNLÜ**

The aim of this thesis is solve partial differential equations by numerically with the finite difference method.

This thesis consists of four sections. In the first section, the partial differential equation is discussed and given some general information about it. The finite difference method is applied to elliptical equations in the second part, parabolic equations in the third part and hyperbolic equations in the fourth part.

2020, 124 pages

Keywords: Partial Differential Equations, Finite Difference Method, Elliptic Equations, Parabolic Equations, Hyperbolic Equations.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Temel Tanımlar.....	2
1.3. Eliptik Denklem Tipleri	5
1.4. Parabolik Denklem Tipleri.....	8
1.5. Hiperbolik Denklem Tipleri.....	12
1.5.1. Dalga Denklemi	12
1.5.2. Titreşen Yay Problemi	12
2. SONLU FARK YAKLAŞIMLARI	13
2.1. Sonlu Fark Formülasyonları	14
2.1.1. Sonlu Fark Formülasyonunda Birinci Türev Yaklaşımları ve Taylor Seri Açılımının Gösterimi	14
2.1.2. Sonlu Fark Formülasyonunda İkinci Türev Yaklaşımları ve Taylor Seri Açılımının Gösterimi	18
2.2. Eliptik Denklemler İçin	21
2.2.1. Levha Boyunca Sıcaklık Dağılımı	21
2.2.2. Sonlu Fark Denklemler	21
2.3. İteratif (Yinelemeli) Yöntemler	23
2.3.1. Gauss-Siedel Yöntemi	23
2.3.2. Gauss-Siedel Yöntemin Hızlandırılması-Art Arda Aşırı Gevşetme (SOR) Yöntemi.....	24
2.4. Parabolik Denklemler İçin	25
2.4.1. Bir Boyutlu Isı Denklemlerinin Çözümü.....	25
2.4.2. Açık Formülasyon (Explicit Method).....	26

2.4.3. Kapalı (Implicit) Yöntem.....	27
2.4.4. Crank-Nicolson Yöntemi.....	29
2.5. Hiperbolik Denklemler İçin	31
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	120
4. ÖNERİLER.....	121
KAYNAKLAR	122
ÖZGEÇMİŞ	124



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Dörtgensel levhanın kartezyen koordinatlarda gösterimi.....	6
Şekil 2. Eliptik denklem tipleri için etki bölgesi	8
Şekil 3. L uzunluğunda x genişlikli çubuk.....	9
Şekil 4. Parabolik denklem tipleri için etki bölgesi.....	11
Şekil 5. Hiperbolik denklem tipleri için etki bölgesi.....	13
Şekil 6. Ağ sisteminin gösterimi	13
Şekil 7. Birinci mertebeden türev için ileri fark ağ noktaları	16
Şekil 8. Birinci mertebeden türev için geri fark ağ noktaları	17
Şekil 9. Birinci mertebeden türev için merkezi fark ağ noktaları.....	18
Şekil 10. Plaka alanının detaylı gösterimi	20
Şekil 11. Düğüm temsilini gösteren şematik diyagram.....	26
Şekil 12. Bir boyutta titreşen yayın anlık görünümü.....	31
Şekil 13. Odaklanarak gösterilen bir boyutta titreşen yay.....	32
Şekil 14. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka.....	35
Şekil 15. Plakadaki düğüm noktaları.....	36
Şekil 16. İç noktalar ve sınır noktaları.....	37
Şekil 17. Plakanın iç düğümlerindeki sıcaklıkların yaklaşık gösterimi.....	43
Şekil 18. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka.....	43
Şekil 19. Plakadaki düğüm noktaları.....	44
Şekil 20. İç noktalar ve sınır noktaları.....	45
Şekil 21. İki yinelemeden sonra sıcaklık dağılımı.....	53
Şekil 22. $f_{1,1}$ düğüm noktasının $ \varepsilon _{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısının ve sıcaklık değerlerinin grafiği.....	57
Şekil 23. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka.....	58
Şekil 24. Plakadaki düğüm noktaları.....	59
Şekil 25. İç noktalar ve sınır noktaları.....	60
Şekil 26. İkinci iterasyon sonundaki sıcaklık dağılımı.....	73
Şekil 27. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $ \varepsilon _{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerlerinin grafiği	78
Şekil 28. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram.....	79

Şekil 29. Açık (explicit) yöntemle zamana göre sıcaklık konum dağılımı	87
Şekil 30. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram.....	88
Şekil 31. Kapalı (implicit) yöntemle zamana göre sıcaklık konum dağılımı	98
Şekil 32. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram.....	99
Şekil 33. Crank-Nicolson yöntemiyle zamana göre sıcaklık konum dağılımı	110
Şekil 34. Membrandaki düğüm noktaları	112



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bir kısmi diferansiyel denklemin tipinin sınıflandırılması	4
Tablo 2. Gauss-Seidel yöntemine göre düğüm noktalarının belirli iterasyon (adım) sonucundaki değişimi ve değerleri	55
Tablo 3. Gauss-Seidel yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $ \varepsilon _{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri	56
Tablo 4. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 1. ve 8. iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri	75
Tablo 5. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 9. ve 16.iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri	76
Tablo 6. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $ \varepsilon _{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri	77
Tablo 7. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{3,4}$ düğüm noktasının $ \varepsilon _{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri	77
Tablo 8. Farklı yöntemler kullanılarak iç düğümlerde elde edilen sıcaklığın karşılaştırılması	111
Tablo 9. Konum ve zamana göre $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,1}$ ve $f_{2,2}$ düğüm noktalarındaki değerler	118
Tablo 10. Konum ve zamana göre $f_{2,3}, f_{3,1}, f_{3,2}$ ve $f_{3,3}$ düğüm noktalarındaki değerler	119

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Tarihi süreç düşünüldüğünde insanoğlu çevresiyle hep ilgili ve yaşananlara karşı hep meraklı olmuştur. Doğrudan ya da dolaylı yoldan kendini ilgilendiren her durum farklı arayışlara itmiştir. Bu arayış ilkel toplumların zihin dünyalarında kavramsal boyutta kalmışken, modern toplumlara ilerlendikçe ampirik sınıflama ve matematiksel modellemelerle yeni bir zemine taşınmıştır.

Dolayısıyla geçmişte insanların hayatını etkileyen de sonuçlarından dersler çıkardıkları, günümüzde her anımıza farklı şekillerde de olsa yön vermeye gebe birçok olay denklemlerle ifade edilmiş ve bundan sonrada edilmeye devam edecektir. Öyle ki doğadaki birçok fiziksel veya fiziksel olmayan olaylar zinciri adı ve kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilirler.

Dolayısıyla bu denklemlerin uygulamalı matematikte, geometrideki yüzey çalışmalarında, mekanik çeşitli problemlerin çözümünde, doğa bilimlerinde, fizikte, kimyada, mühendislikte, yer bilimlerinde, biyolojik birçok olguyu izahta, bilgisayar teknolojilerinin gelişimlerinde, ısı akışında, fiziko-kimyada, kuantum mekaniğinde, plazma fiziğinde, ekonomide, ekolojideki popülasyon modellerinde ve daha sayılamayacak birçok alanda var olan veya olması muhtemel problemlerin daha iyi anlaşılması ve matematiksel modellemesi ile çözümleri aranmaktadır.

Bahsi geçen olayların hepsinin çözümünde kullanılmak üzere birçok metot ile teknik uygulanmıştır. 17. yüzyılda Newton ve Leibnitz'le başlayan Johann Berboulli'yle devam eden, 18. yüzyılda değişken bir prensiple Euler-Lagrange denklemleriyle yaklaşık olarak çözme yöntemi olan Euler yöntemi ile sayısal çözüme temel olan metodolojisi sağlanmıştır. Bu metodolojiyle ortaya atılan modellemelerden olan Diriclet enerjisi için Euler-Lagrange denklemi olan Laplace denklemi 19. yüzyılda tartışmalı yapıcı bir süreci beraberinde getirdi. Cauchy, Reiman, Fourier, Weierstraß, Schwarz, Ritz ve diğerleri tarafından yapılan önemli gözlemler ve itirazlar değişkenlik hesaplarının doğuşuna ve sonlu elemanlar yöntemine neden olmuştur (Bartels, 2015).

Kısmi diferansiyel denklemler ve değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü değişken katsayılarının varlığı yüzünden çözüm elde edilmesine imkân verse bile fonksiyonun karmaşıklığından dolayı istenilenin sonuca ulaşmak zor

olmaktadır. Bu tür zorlukları nedeniyle kısmi diferansiyel denklemler çözümlerinde sayısal çözümleri gerek duyulmuştur. Son 70 yılda hızla artan bilgisayar gücüyle birlikte karışık ve uyarlamalı sonlu elemanlar metodlarının sayısal çözümlerinin, çok çekirdekli ve alan ayrıştırma algoritmalarının yanı sıra dalgacık ve diğer sıkıştırma tekniklerinin geliştirilmesi, bilgisayar üzerinde nümerik çözümlerinin etkili kuvvetlerin analiz edilerek hesaplanmasını mümkün kılmıştır. Tek başına bilgisayar teknolojisi bunu sağladı demek 17. yüzyıldan beri süre gelen birikimli teorik-pür matematiğin son dönemdeki John Von Neumann, Crank-Nicolson ve diğerlerinin bilgisayara tanıttıkları formülasyonlarının katkısı ile mümkün olmuştur.

Her ne kadar son döneme gelene kadar diğer yöntemlerin teorik olarak anlaşılmasında çıkmaza girilmesi kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine ittiyse de, aydınlatılmayı bekleyen yeni durumlar için elde edilmiş sayısal çözümlerde hata payı kavramını ortaya çıkarmıştır. Bu yeni durum için çözümü zor ya da kesin çözüm bulunmadığı zaman sayısal çözüm ile ortaya çıkan hata ve hatanın hassasiyetinin bilinmesi bilimsel açıdan önem arz etmiştir (Ames, 1977).

Öyle görünüyor ki bu zamandan sonra farklı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri, hata ve hata payı hassasiyetiyle ilgili çalışmalar fazlasıyla kendine yer bulacaktır. Bizde bu çalışmamızda analitik çözümlerle sonuca ulaşılan veya ulaşılamayan hallerde varılan sonuçları irdelenecek sayısal çözüm yöntemlerini tetkik edip karşılaştırmalarını ortaya koyacağız.

1.2. Temel Tanımlar

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifade ile bir veya daha fazla bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağlantıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{veya genel olarak} \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad \text{şeklinde}$$

yazılır. Burada y bağımlı değişken x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklem, adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır (Yaşar, 2009).

İçinde en az iki bağımsız değişken ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişken bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmın türevlerini kapsayan denklemi kısmi türevli denklem adı verilir (Koca, 2001). z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak $F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$ şeklindedir.

Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan (non-linear) olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki veya daha büyük ise bu tür diferansiyel denklemler lineer olmayan diferansiyel denklem denir (Duran, 2012).

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir ϕ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$ ise ϕ fonksiyonuna $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin çözümüdür denir (Duran, 2012).

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonlarındaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir. Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir (Duran, 2012).

Özel olarak, ikinci mertebeden diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki keyfi sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlara başlangıç şartları, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise sınır şartları denir. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine başlangıç değer problemi, sınır şartları ile incelenmesine sınır değer problemi denir (Duran, 2012).

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ve $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ eşitliği başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir.

Diğer taraftan $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ve $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y(x_3) = y_3, \dots, y(x_n) = y_n$ eşitliğine ise sınır değer problemi denir.

İkinci dereceden eğriler x ve y değişkenlerine bağlı olarak, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ şeklinde tanımlanan ikinci dereceden polinom eğrisi kuadratik bir eğridir. Bu eğri;

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik,

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik,

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik olduğu ifade edilir (Alkan,2011).

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olabilmesi bakımından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir. x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olan bir u değişkeni için ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

şeklinde verilir. Burada A, B ve C ; xy – düzleminin bir Ω bölgesinde x ve y nin iki defa sürekli türetilebilir fonksiyonlarıdır ve aynı zamanda üçünün birden sıfır olmadığını kabul ediyoruz. Diğer taraftan $\Delta(x, y) = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y)$ diskriminant fonksiyonunu tanımlayalım.

Tablo 1. Bir kısmi diferansiyel denklemin tipinin sınıflandırılması

Denklem Tipi	Hiperbolik	Parabolik	Eliptik
Diskriminant	$\Delta(x, y) > 0$	$\Delta(x, y) = 0$	$\Delta(x, y) < 0$
Örnek	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	$u_t - k u_{xx} = 0$	$u_{xx} + u_{yy} = 0$
İsimlendirme	Dalga Denklemi	Isı Denklemi	Laplace Denklemi

Diskriminant fonksiyonunu eşliğinde çevremizde gördüğümüz fiziksel sistemlerin modellenmesinde kısmi diferansiyel denklemlerin genellikle sayamayacağımız kadar çözümü mevcuttur. Dolayısıyla problemin çözümü için çözümü ihtiva eden tek fonksiyonu bulup seçebilmek için sistemi açıklayan bazı yardımcı koşullara ihtiyaç duyulur. Bu iki yardımcıdan ilki sınır koşulları, ikincisi ise başlangıç şartlarıdır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin sınır koşulları çeşitli tipte sınır şartlarıyla verilir. Sınır şartı u cinsinden verilmişse “Dirichlet tipi sınır şartı” olarak, u nun gradyanı cinsinden verilmişse “Neumann tipi sınır şartı” olarak adlandırılır. u ve gradyanı birlikte verildiğinde ise “karışık sınır şartı” söz konusu olur (URL-2, 2019).

Başlangıç şartlarında sistem tahlil edilmeye başlandığı anda çalışılan bölgede gereken koşullar sağlanmalıdır. Tipik bir başlangıç şartı u ve zaman bağlı türevin birlikteliğini içerir. Kısmi diferansiyel denklemler ile modellenen problemin verilerini oluştururken başlangıç ve sınır şartları fonksiyonları, kaynak terimler ve katsayı fonksiyonları kullanılır. Veriler oluşturulup akabinde bu verilerde küçük ya da büyük değişimler ışığında çözümde de küçük ya da büyük değişimler gözleniyorsa süreklilik arzeden bağımlı çözümler vardır denir. Ayrıca problemin bir çözümü varsa, tekse, verilere sürekli bağımlı ise problem “iyi tanımlanmış”, bunlardan biri yoksa “kötü tanımlanmış” denir.

1.3. Eliptik Denklem Tipleri

Eliptik denklemler "potansiyel" adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil eder. Potansiyel, bir büyüklüğün sıklığını ölçer. Örneğin sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. Bağımlı u değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sıradaki değerlere bağlı olarak aldığı denge (equilibrium) veya daimi-durum (steady state) değerlerini belirtir.

Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemler olarak adlandırılır. Eliptik denklemin iki boyutlu denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

(1) biçimindedir. Eliptik denklemlerin en çok bilinen denklemleri Poisson ve Laplace denklemleridir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

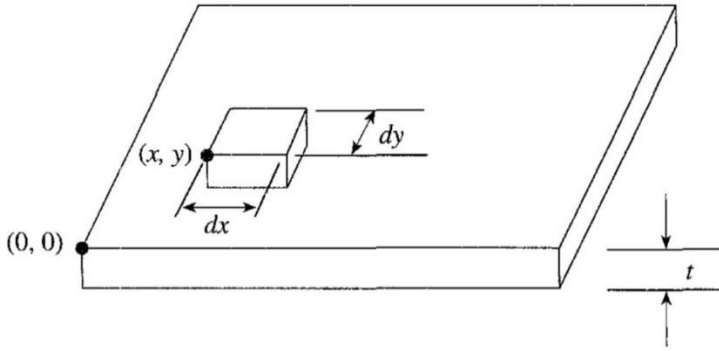
(2) denklemi Laplace denklemi olarak bilinir (Lynch, 2005).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (3)$$

(3) denklemi ise Poisson denklemi olarak tanımlanmıştır (Burden, Faires ve Burden, 2014; Gordon,2010).

Özel olarak $\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ biçiminde gösterilir (Wazwaz, 2009). ∇^2 sembolü

Laplasiyen operatörü olarak adlandırılır. τ kalınlığında düzgün dörtgensel bir levha göz önüne alınsın (Şekil 1).



Şekil 1. Dörtgensel levhanın kartezyen koordinatlarda gösterimi

Levhanın O ile birlikte sol alt köşesi başlangıç noktası olmak üzere düzenlenen bir (x, y) kartezyen koordinat sisteminde sol alt köşesi $P(x, y)$ noktasında yer alan ve (dx, dy, τ) kenar uzunluklarına sahip bir hacim elemanını ele alalım. Hacim elemanına x doğrultusunda birim zamanda giren ısı

$$= -kA \frac{\partial u}{\partial x} = -k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x}$$

şeklinde ifade edilir. x doğrultusunda birim zamanda çıkan ısı ise $x + dx$ kesitindeki gradyant hesaplanarak

$$= -k(\tau dy) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -k(\tau dy) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right]$$

şeklinde gösterilebilir.

Bunun gibi y doğrultusunda birim zamanda giren ve çıkan ısılar da sırasıyla

$$= -k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= -k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] = -k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right]$$

olacaktır.

Hacim elemanın alt ve üst yüzeylerinden ısı kaybı olduğu varsayılırsa, birim zamanda çıkan ısı $Q dx dy$ şeklinde belirtilir. Buradan Q büyüklüğü birim zamanda birim yüzey başına (alt ve üst düzeyden) ısı kaybını belirten katsayıdır. Daimi-durumda giren ve çıkan ısılar toplamı eşit olacağından

$$-k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x} - k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y} = -k(\tau dy) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] - k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] + Q dx dy$$

$$-k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x} - k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y} = -k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x} - k(\tau dy) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

$$-k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y} - k(\tau dx) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + Q dx dy$$

$$\underbrace{-k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x}}_{*} \underbrace{-k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y}}_{**} = \underbrace{-k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x}}_{*} - k(\tau dy) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \underbrace{-k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y}}_{**}$$

$$-k(\tau dx) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + Q dx dy$$

$$0 = -k(\tau dy) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - k(\tau dx) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + Q dx dy$$

$$k(\tau dy) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + k(\tau dx) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = Q dx dy$$

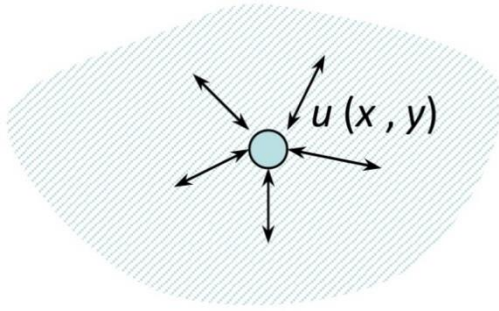
$$k(\tau dydx) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = Q dx dy$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \frac{Q dx dy}{k \tau dy dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{Q}{k \tau} \quad (4)$$

(4) şeklinde bir denge denklemi sadeleştirme ve düzenlemelerle yazılmış olur.

Ayrıca eliptik problemler için kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin ihtiva ettiği bağımlı değişkenin keyfiyetine göre bir grid noktasındaki değeri çevresindeki grid noktalardan etkilendiği gibi, çevresindeki grid noktalarını da etkiler. Bu etkileşim sonucu eliptik denklem tiplerinde Şekil 2'deki etki alanı meydana gelir.



Şekil 2. Eliptik denklem tipleri için etki bölgesi

1.4. Parabolik Denklem Tipleri

Parabolik denklemlerde potansiyelin farklı bir durumdan geçerli olmak üzere ulaştığı nihai durum değerlerini temsil eder. Burada zamana bağlı ısı ve madde yayılması problemlerinde karşılaşılr (Weinberger, 1965). Potansiyelin bir başlangıç durumundan itibaren eriştiği daimi durum değerleri bir parabolik denklemi temsil eder. Dolayısıyla bu denklemler t (zaman) değişkeni de bağımsız değişkenlerden biri olarak içerir. Başlangıç durumundan itibaren zaman ilerledikçe nihai denge durumuna doğru adım adım ilerlenir (URL-1, 2009). Buradaki incelemelerde de örnek olarak ısı problemleri ele alınacaktır. Parabolik denklem tiplerinin daimi durum problemi olmayıp, zamana bağlı olacak şekilde sıcaklığın zamanla değiştiği problemler olmasıdır.

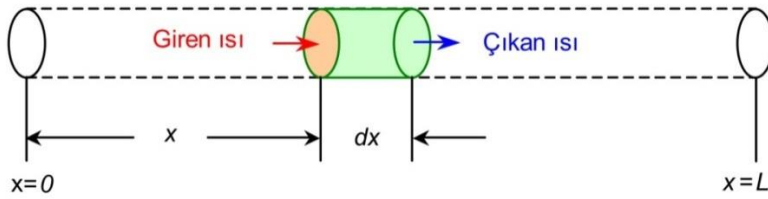
İlk olarak bir çubuk boyunca bir boyutlu ısı akışı problemi ele alınacaktır. Şayet zaman yeterince uzun tutulur ve sıcaklıklar denge-durum şartlarına erişirse bu problem de daha önceki eliptik problem örneğiyle özdeş olur. L uzunluğundaki bir çubuk üzerinde dx genişlikli (Şekil 3) bir çubuk elemanı işaretlensin. Çubuğun çevresinin izole olduğu ve bu yüzden çevreyle ısı alışverişi olmadığı varsayılmaktadır. x ekseni çubuk boyunca soldan sağa doğru yönelmiş olup x ekseni boyunca

$$-kA \frac{dT}{dx} \text{ (giren ısı)} \quad (5)$$

formülü uyarınca akmakta olan ısı [cal/s] olarak ölçülmektedir. Buradaki eksi işaretinin ısının sıcaktan soğuğa doğru akmasıyla ilgili olduğu bilinmektedir. dx uzunluğundaki çubuk elemanının sağ tarafından çıkan ısı da

$$-kA \frac{dT}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right) \text{ (çıkan ısı)} \quad (6)$$

şeklinde ifade edilebilir (Demir, 2012).



Şekil 3. L uzunluğunda x genişlikli çubuk

Daimi durumda bu çubuk elemanına giren ve çıkan ısılar eşit olur. Zamana bağlı olayda ise çubuk elemanına birim zamanda giren ısı ile çıkan ısı arasındaki fark bu süreçte çubuk elemanının bünyesinde depolanan ısıya eşit olacaktır. Depolanan bu ısı da çubuk elemanının sıcaklığını arttıracaktır. Çubuk elemanının sıcaklık değişimiyle ilgili olarak birim zamanda depolanan ısı miktarı elemanının hacmi ($A \cdot dx$), malzemenin yoğunluğu (ρ) ve malzemenin ısı kapasitesine (c - birim kütle ve birim sıcaklık başına depolayabildiği ısı - cal/gr°C) bağlıdır.

Bu ise;

$$c\rho(A dx) \frac{dT}{dt} \text{ (depolanan ısı)} \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir. Bu üç ifade [(5),(6),(7)] kullanılarak;

$$-kA \frac{dT}{dx} - \left[-kA \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) \right] = c\rho (Adx) \frac{dT}{dt} \quad (8)$$

(8) gerekli işlemler yapılarak;

$$k \frac{d^2T}{dx^2} = c\rho \frac{dT}{dt} \quad (9)$$

(9) denklemi elde edilir. İki veya üç boyutlu halde de bu denkleme eşdeğer

$$k\nabla^2 T = c\rho \frac{dT}{dt} \quad (10)$$

(10) denklemi elde edilir.

Eğer malzeme homojen değilse daha genel;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = c(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

olur (Gerald ve Wheatley, 2004).

Yukarıdaki(5)'ten başlayıp (11)'e kadar bütün denklemlerde konum dışında ayrıca zamana bağlıdır. Bu denklemlerin belli bir başlangıç zamanında verilen başlangıç şartlarıyla başlatılması gereklidir. Ayrıca sınır değerlerinin bilinmesine de ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bu tip problemler konuma göre sınır değer, zamana göre de başlangıç değer problemi olarak nitelendirilmelidir (Demir, 2012).

Başlangıç ve Sınır Şartları: İnce bir çubukta ısı iletiminde sıcaklık fonksiyonu $u(x, t)$ denklemi sağlamalıdır. Fiziksel yönden, sadece diferansiyel denklemin tek başına çubuktaki herhangi bir belirli zamandaki sıcaklık dağılımını belirleyemediği bilinmektedir. Bu sebeple çubuğun uç noktalarında sağlanması gereken şartlarla, çubuğun başlangıç sıcaklığı hakkında ilave bilgilere sahip olmalıyız. Yani bazı başlangıç zamanında ($t=0$ diyelim) $u(x, t)$ fonksiyonunu belirlemeliyiz ve çubuğun her iki ucuyla, bulunduğu ısı enerjisinin nasıl değiştiğini tanımlamalıyız (Smith, 1985).

1. Hiç ısı kaynağı yoksa,

2. $t=0$ da çubuğun sıcaklığı $0 \leq x \leq L$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu ile tanımlanıyorsa,

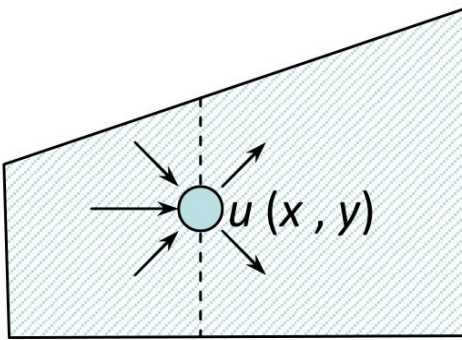
3. İki uç nokta tüm zaman için sıfır sıcaklığında muhafaza ediliyorsa sonraki herhangi bir $t > 0$ zamanın da çubuktaki $u(x,t)$ sıcaklık dağılımı; $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$,

$u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \geq 0$ şartlarıyla $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 \leq x \leq L$, $t > 0$ diferansiyel

denklemini göz önüne alınabilir. Bu problem ısı denklemi için bir başlangıç-sınır değer problemi olarak adlandırılır (Demir, 2012).

Isı denklemi $u_t = u_{xx} + s(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,1]$ başlangıç koşulu, $u(1,t) = g(t)$ sınır koşulu ve $\int_0^b u(x,t) dx = E(t)$, $0 < t \leq T$, $0 < b \leq 1$ nonlocal sınır koşulu ile verilir (Dehghan, 2007).

Parabolik problemler için kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin içerdiği bağımlı değişkenin keyfiyetine göre seçilmiş pivot noktasındaki değeri çevresindeki pivot noktalardan etkilendiği gibi, çevresindeki pivot noktalarını de etkiler. Bu etkileşim sonucu parabolik denklem tiplerinde Şekil 4'teki gibi etki bölgesi meydana gelir.



Şekil 4. Parabolik denklem tipleri için etki bölgesi

1.5. Hiperbolik Denklem Tipleri

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler, fen ve mühendislik alanlarında önemli rol oynarlar. Örneğin, yapıların titreşiminde (bina, makine, kiriş) ve atom fiziğinde kullanılan temel bir denklemdir (Kemancı, 2012). Bir başka ifadeyle zamana bağlı olmak üzere, bir ortam içerisinde yayılma ve titreşimleri tanımlar. Bu nedenle literatürde "dalga denklemi" olarak isimlendirilir. Dalga denklemlerini bir boyutlu haldeyken salınım halinde olan yay problemi, iki boyutlu da titreşen membran bir zar, üç boyutlu da ise jelatin haldeki bir sıvı içerisinde askı halinde yer alan taneciklerin jelatin bir cisme çarpmasıyla oluşturduğu hareketi problemini olarak ele alınabilir (Demir, 2012).

1.5.1. Dalga Denklemi

$u_{tt} - u_{xx} = q(x, t)$ denklemi $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = f(x)$, $x \in [0, 1]$ başlangıç koşulları, $u(0, t) = h(t)$ Dirichlet sınır koşulu ve $\int_0^1 u(x, t) dx = s(t)$, $0 < t \leq T$

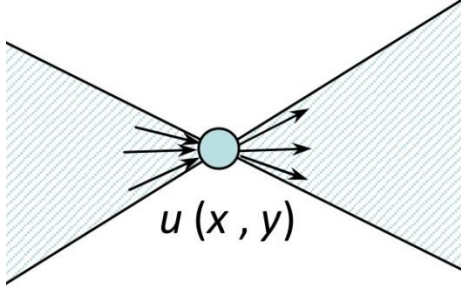
nonlocal sınır koşulu ile verilir. Dalga denklemi daha çok titreşen yay (vibrating string) hareketinin modellenmesinde karşımıza çıkmaktadır (Weinberger, 1965). Bununla birlikte elastikiyet, aerodinamik, akustik, elektrodinamik, elektromanyetik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda da karşılaşılmaktadır (Polyanin, 2000).

1.5.2. Titreşen Yay Problemi

Kısmi diferansiyel denklemlerin hiperbolik türdeki denklemlerine sabit iki uç noktada gerilmiş bir yayın titreşimi veya salınımını modelleyen dalga denklemleri örnek olarak verilebilir.

Eliptik ve parabolik denklem tipleri için var olan etki bölgesi hiperbolik problemler için kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin içerdiği bağımlı değişkenin durumuna göre de mevcuttu. Ele alınan noktasındaki değeri çevresindeki pivot

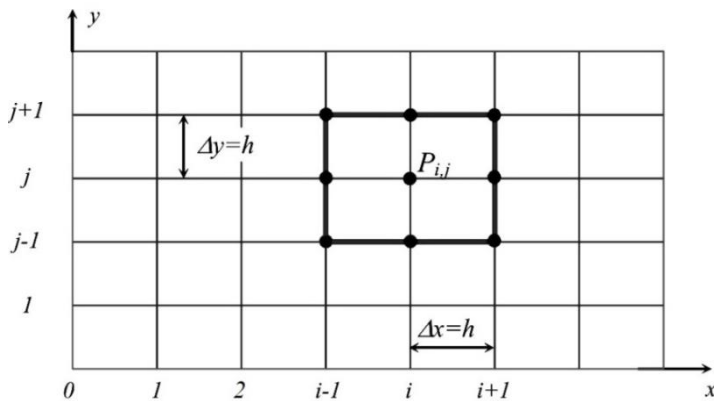
noktalardan etkilendiği gibi, çevresindeki pivot noktalarını da etkiler. Bu etkileşim sonucu hiperbolik denklem tiplerinde Şekil 5’teki gibi etki bölgesi meydana gelir.



Şekil 5. Hiperbolik denklem tipleri için etki bölgesi

2. SONLU FARK YAKLAŞIMLARI

Verilmiş olan kısmi diferansiyel denklemlerde tayin edilmiş bölgelerin büyüklüğünün elde edilmesinde ki standart prosedür; hesap bölgesini oluşturulacak pivot (grid, düğüm, ağ, nod) noktalarla oluşturulmuş ağ sistemiyle, sınırları tayin edilmiş bölgeyi sonlu sayıda elemana bölünerek her bir pivot nokta üstünde türevlerini sonlu fark denklemleriyle ifade ederek ortaya konulmasıdır. Şekil 6’da gösterildiği gibi bütün hesap bölgesinde eşit aralıklarla dağıtılan ağ noktalarının uygun seçilmesi halinde kolaylık sağlayacaktır. Kenar uzunlukları $h = \Delta x = \Delta y$ olarak gösterilirken, problemin çözümü için belirleyici unsur olarak ağ sisteminde ağ düğüm noktaları indislenerek gösterilmiştir.



Şekil 6. Ağ sisteminin gösterimi

$P_{i,j}$ noktasındaki çözümler için, o noktadaki türevli eşitliklerin Taylor seri açılımı yardımıyla eldesi gerekmektedir.

2.1. Sonlu Fark Formülasyonları

Karmaşık bir problemi çözmek adına ortaya atılan sayısal hesaplamalar çoğunlukla çok fazla aritmetik işlem içerir. Bu karmaşık problemlerin çözümü ancak sistematik bir tertiple mümkün olacaktır. Ortaya koyulacak bu aranjmanlar problemlerin spesifik bir çözüme sahip denklemlerin ifadesiyle başlayarak yapılabilir. İfade edilen denklem problemin çözümünde kullanılırken ortaya çıkan türevlerin sayısal çözüme katkı sağlaması için cebirsel bağlantılarla yaklaşık olarak düzenlenmesi gerekmektedir. Organize edilmiş bu yapılara türevin ayrıklaştırılması denmiştir.

Belirli bir çözüm için düzenlenen denklemler 18. Yüzyıldan itibaren fizikteki uygulamaların matematiksel modellemesiyle birçok yeni keşfe yol açtı. Uygulamalı bilimlerde sıkça rastladığımız bu problemleri teorik olarak çözmek mümkün oldu. Analitik çözümlerin zor olduğu veya mümkün olmadığı yerde sayısal çözümlere ihtiyaç duyuldu. Hatta bazı problemlerde analitik çözümü mevcutken bile nümerik çözümler çok daha basit hale getirdiği için tercih edilmiştir.

Tarihsel gelişim süreci incelendiğinde sonlu farklar formülasyonları diferansiyel denklem şeklinde ortaya konan problemlerin çözümünde çokça başvurulan nümerik çözümlerin temelini oluşturur. Burada temel amaç sonlu fark formülasyonları ile problemde var olan türevli operatörlerin yer değiştirerek çözülmesidir. Bu değişim ise Taylor seri açılımıyla yapılarak ortaya konur.

2.1.1. Sonlu Fark Formülasyonunda Birinci Türev Yaklaşımları ve Taylor Seri Açılımının Gösterimi

$f(x, t)$ fonksiyonunun birinci türev yaklaşım için $(x + \Delta x, t)$ noktasındaki Taylor seri açılımı;

$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + (\Delta x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots$$

$$= f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir. (12)'de gerekli düzenlemeler yapıp birinci türev yalnız bırakılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - \dots \end{aligned} \quad (13)$$

ya da

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - \dots \quad (14)$$

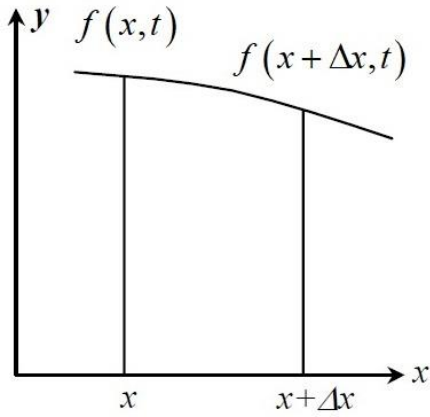
(13)'te (14) eşitliği hata terimi olmak üzere,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (15)$$

yazılabilir. Elde edilen bu sonuç f fonksiyonunun x 'e göre birinci türevinde ortaya çıkmış birinci dereceden yaklaşımdır. Bu yaklaşım indissel formda konuma göre türevlerin sonlu fark açılımlarında x yönünde i alt indisi, y yönünde j alt indisi yazılacak olursa;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir. (16)'daki ifade türev için birinci mertebeden ileri fark formülasyonu olarak söylenir. Ayrıca birinci mertebeden türev için yazılmış olan ileri fark formülasyonu için ağ noktaları Şekil 7' de görülmektedir.



Şekil 7. Birinci mertebeden türev için ileri fark ağ noktaları

$f(x, t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi için $(x - \Delta x, t)$ noktasındaki Taylor seri açılımı;

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x, t) &= f(x, t) - (\Delta x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıp birinci türev yalnız bırakılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= \frac{f(x - \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned}$$

ya da

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + \dots$$

hata terimi olmak üzere,

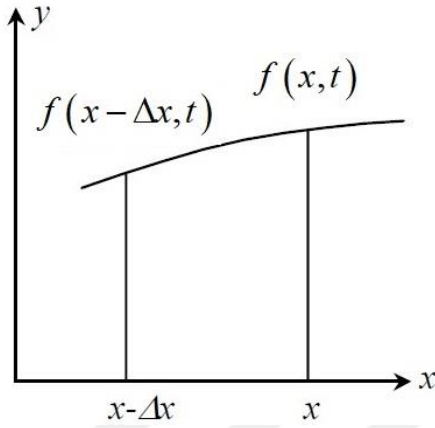
$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

yazılabilir. Elde edilen bu sonuç f fonksiyonunun x 'e göre birinci türevinde ortaya çıkmış birinci dereceden yaklaşımıdır. Bu yaklaşım indissel formda konuma göre

türevlerin sonlu fark açılımlarında x yönünde i alt indisi, y yönünde j alt indisi yazılacak olursa;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade türev için birinci mertebeden geri fark formülasyonu olarak ifade edilir. Ayrıca birinci mertebeden türev için yazılmış olan geri fark formülasyonu için ağ noktaları Şekil 8’de görülmektedir.



Şekil 8. Birinci mertebeden türev için geri fark ağ noktaları

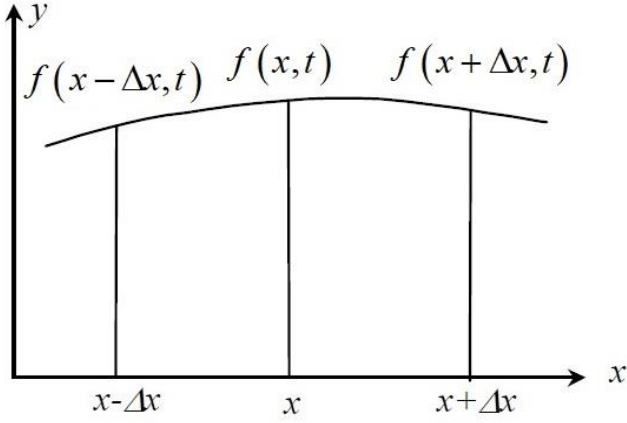
İleri fark ve geri fark formülasyonlarını bulmak için kullanılan Taylor açılımları (12) ve (17) birbirlerinden çıkarılarak;

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t) &= 2\Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} \\ &\quad + 2 \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{\partial^5 f(x, t)}{\partial x^5} + 2 \frac{(\Delta x)^7}{7!} \frac{\partial^7 f(x, t)}{\partial x^7} + \dots \end{aligned}$$

burada gerekli düzenlemeler yapıp birinci türev yalnız bırakılırsa;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

şeklinde merkezi fark formülasyonu elde edilmiş olur ki bunun ikinci mertebeden olduğu aşıkardır. Ayrıca birinci mertebeden türev için yazılmış olan merkezi fark formülasyonu için ağ noktaları Şekil 9’da görülmektedir.



Şekil 9. Birinci mertebeden türev için merkezi fark ağ noktaları

2.1.2. Sonlu Fark Formülasyonunda İkinci Türev Yaklaşımları ve Taylor Seri Açılımının Gösterimi

$f(x, t)$ fonksiyonun ikinci türev yaklaşımları için $(x + 2\Delta x, t)$ ve $(x - 2\Delta x, t)$ noktalarındaki Taylor seri açılımları;

$$\begin{aligned} f(x + 2\Delta x, t) = & f(x, t) + (2\Delta x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ & + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$f(x + 2\Delta x, t) = f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f(x - 2\Delta x, t) = & f(x, t) - (2\Delta x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ & - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - \dots \\ f(x - 2\Delta x, t) = & f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. (18) eşitliğini 2 ile çarpıp (19) denkleminde çıkartılarak;

$$f(x + 2\Delta x, t) - 2f(x + \Delta x, t) = -f(x, t) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots$$

ve buradan ikinci türev çekilerek,

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x,t) - 2f(x+\Delta x,t) + f(x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu eşitlik indissel formda yazılırsa;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

şeklinde ikinci türev için ileri fark formülasyonu elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra indissel formda;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

ikinci türevin için geri fark formülasyonu elde edilmiş olur.

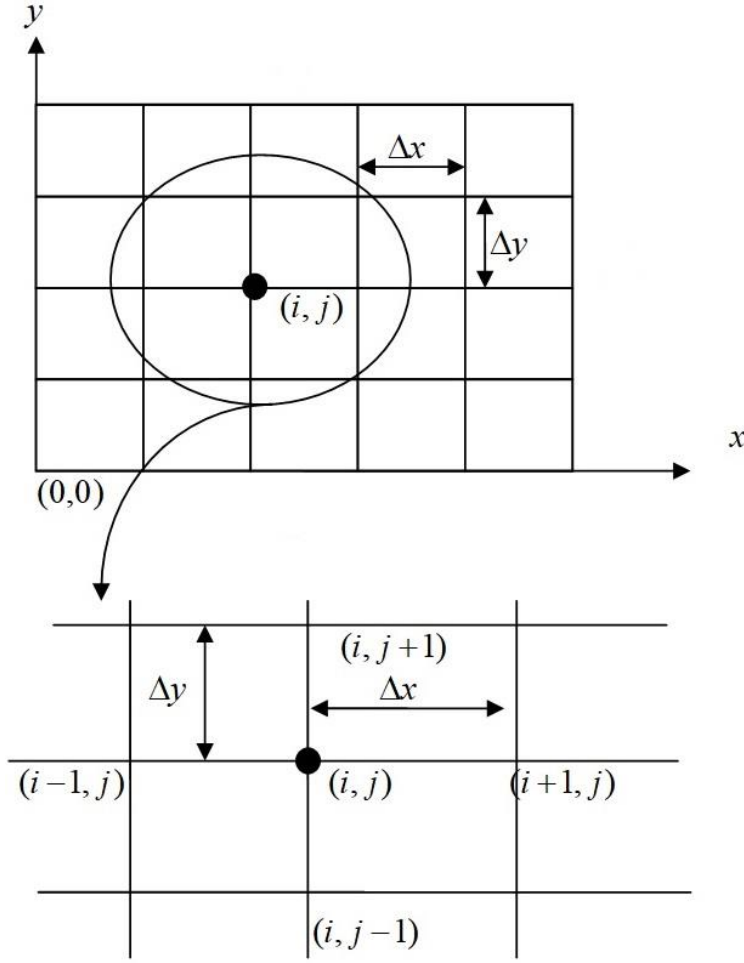
Son olarak iler fark ve geri fark açılımları taraf tarafa toplanarak gerekli işlemler ardından;

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x,t) - 2f(x,t) + f(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

şeklinde indissel formda ikinci türev için merkezi fark formülasyonu elde edilmiş olur.

Şekil 6'da ağ siteminde gösterilen $P_{i,j}$ noktası civarında kenar uzunlukları $h = \Delta x = \Delta y$ olarak kabul edilmişti. Daha yakından bakarak anlayacağımız/anlamlandıracağımız Şekil 10'daki durum



Şekil 10. Plaka alanının detaylı gösterimi

f fonksiyonu x ve y ye bağlı olmak üzere konuma göre türevlerin t_n anında ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi I. mertebeden fark formülasyonları için sırasıyla;

$$\text{İleri fark formülasyonları: } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{h}$$

$$\text{Geri fark formülasyonları: } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h}$$

$$\text{Merkezi fark formülasyonları: } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h}$$

II. mertebeden fark formülasyonları için sırasıyla;

İleri fark formülasyonları:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i,j}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+2} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j}}{h^2}$$

Geri fark formülasyonları:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i+2,j}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j+2}}{h^2}$$

Merkezi fark formülasyonları:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2}$$

gösterilir. Eldeki bu verilerden f fonksiyonunun Laplasiyen için

$$\left(\nabla^2 f \right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}}{h^2} \quad (21)$$

elde edilir.

2.2. Eliptik Denklemler İçin

2.2.1. Levha Boyunca Sıcaklık Dağılımı

Herhangi bir levha boyunca incelenecek sıcaklık dağılımlarında (21) gösterilen merkezi farklar için elde edilmiş Laplasiyen kullanılıyor olup pivot noktadaki elemanların bütün hesap bölgesinde eşit büyüklükte kare elemanlar olduğu ağ(nod) noktalarının eşit aralıklarla davrandığı kabul edilir.

2.2.2. Sonlu Fark Denklemleri

Bir kısmi denklemde yer alan diferansiyel denklemin bütün türevleri daha önce I. ve II. mertebeden fark formülasyonları için sırasıyla gösterildiği gibi ayrıklaştırılarak denklemin tamamı ayırık formda yazılır ve sayısal çözümü araştırılır. $f = f(x, y, t)$ bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

denklemini ayrıştırırsak; zamana göre türevin fark açılımında üst indisi k , konuma göre türevlerin sonlu fark açılımlarında x yönünde i alt indisi ve y yönünde j alt indisi kullanılarak t anında f fonksiyonunun bütün x, y konumlarındaki değerleri bilinsin. Buna göre zamana göre türevi farkla hesaplanması uygun olur. Zamana göre ileri fark açılımı;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{i,j}^k = \frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

konuma göre türevlerin t_k veya t_{k+1} anındaki ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi elde edilebilir. Bunlar k anındaki adımda merkezi farkı;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j}^k = \frac{f_{i+1,j}^k - 2f_{i,j}^k + f_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j}^k = \frac{f_{i,j+1}^k - 2f_{i,j}^k + f_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

$k+1$ anındaki adımda merkezi farkı;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j}^{k+1} = \frac{f_{i+1,j}^{k+1} - 2f_{i,j}^{k+1} + f_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j}^{k+1} = \frac{f_{i,j+1}^{k+1} - 2f_{i,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

olmak üzere ortaya konulan eşitlikler k ve $k+1$ anındaki ileri ve merkezi fark

açılımları $\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$ denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^k - 2f_{i,j}^k + f_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^k - 2f_{i,j}^k + f_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right] + O((\Delta t), (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

eşitliğine ulaşılmış olur. Bu eşitlikte tek bilinmeyenin varlığı açık (explicit) olarak ifade edilir.

$$\frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^{k+1} - 2f_{i,j}^{k+1} + f_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{k+1} - 2f_{i,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O((\Delta t), (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

eşitliğine ulaşılmış olur ki, burada eşitlikte beş bilinmeyenin var oluşu durumu kapalı (implicit) olarak ifade edilir.

2.3. İteratif (Yinelemeli) Yöntemler

2.3.1. Gauss-Siedel Yöntemi

Bir levha boyunca sıcaklık dağılımı hesaplanırken kullanılan teknik sebebiyle ortaya çıkan en önemli sorun büyük boyutlu matrislerle işlemlerin yapılabilmesidir. Öyle ki grid noktaları arasındaki mesafe ne kadar kısa seçilirse büyük boyutlu matrisler yüzünden çok fazla matris işlemi gerekmektedir. Bunu aşıp kısa sürelerde bu işlemleri yapabilmek için kullanılacak bilgisayarların hızlı işlemcilerle donatılması gerekmektedir. Her ne kadar matrisler büyük olsa da çoğu elemanı sıfır olduğundan çözüm için en hızlı yöntem iteratif yöntemler olacaktır.

Burada Laplace denkleminin ayrık yapısı $f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}}{4}$ şeklinde düzenlenerek Gauss-Siedel olarak bilinen yöntem uygulanabilir. Böylece herhangi bir adımda bilinen sıcaklık değerleri $f_{i,j}^k$ olmak üzere bir sonraki adımdaki sıcaklıklar Laplace denkleminin ayrık yapısı yardımıyla iteratif yöntemle $f_{i,j}^{k+1} = \frac{f_{i+1,j}^k + f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^{k+1}}{4}$ şeklinde hesaplanabilir. Yapılmakta olan işlemler sırasında tercih edilen bir iterasyon adımında seçilen grid noktasının sağında ve üstündeki değerlere karşılık bir önceki adımdaki değerler alınırken, altında ve solundaki değerlere karşılık ise işlemin yapıldığı adımdaki hesaplanmış değerleri alınır.

Burada yapılan iteratif işlemlerde belli bir iterasyondan sonra hesaplanan sıcaklık değerleri istenilen hassasiyete yakınsamış olmalıdır. Bu hassasiyet oranı 0,0001 olacak şekilde

$$|\varepsilon|_{i,j} = \left| \frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{f_{i,j}^{k+1}} \right| \times 100 \quad (22)$$

ile hesaplanır.

2.3.2. Gauss-Siedel Yöntemin Hızlandırılması-Art Arda Aşırı Gevşetme (SOR) Yöntemi

Gauss-Siedel yönteminde yakınsama yapılırken uygulamanın hızlandırılması “successive over relaxation-art arda aşırı gevşetme (SOR)” yöntemiyle mümkündür. Bu aşırı gevşetme yöntemi Liebmann yöntemi olarak da bilinir. Art arda aşırı gevşetme (SOR) yöntemi için Laplace denkleminin basit iterasyon formunun;

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^k}{4} \quad (23)$$

(23) 'e bir kez $f_{i,j}$ eklenip, çıkarılırsa;

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k - f_{i,j}^k + \frac{f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^k}{4} \quad (24)$$

(24) elde edilir. (24) düzenlenerek;

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k - \frac{4f_{i,j}^k}{4} + \frac{f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^k}{4}$$

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \underbrace{\frac{f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^k - 4f_{i,j}^k}{4}}_{\otimes} \quad (25)$$

(25) 'te $\otimes$ ile gösterilen ikinci terim kalıntı olup bir β ağırlık çarpanı kullanılarak

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \beta \frac{f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^{k+1} - 4f_{i,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^k}{4} \quad (26)$$

(26) elde edilir. (26) düzenlenerek

$$f_{i,j}^{k+1} = (1-\beta) f_{i,j}^k + \beta \frac{f_{i+1,j}^k + f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^{k+1}}{4} \quad (27)$$

(27) eşitliğine ulaşılır. Burada β ağırlık faktör çarpanı, “art arda aşırı gevşetme (SOR) çarpanı” olarak da isimlendirilir. Bu eşitliğin daha iyi anlaşılması ve üst indislerinin karışmaması adına (28), (29) ve (30) 'da gösterilen değişiklikler yapılırsa;

$$f_{i,j}^k = f_{i,j}^{yeni} = \text{akım yinelenmesinden gelen sıcaklık değeri} \quad (28)$$

$$\frac{f_{i+1,j}^k + f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i,j+1}^k + f_{i,j-1}^{k+1}}{4} = f_{i,j}^{eski} = \text{önceki yinelenmeden gelen sıcaklık değeri} \quad (29)$$

$$\beta = \text{art arda aşırı gevşetme (SOR) çarpanı, } 1 < \beta < 2 \text{ iken} \quad (30)$$

$$f_{i,j}^{ge\check{v}\check{s}etme} = \beta f_{i,j}^{yeni} + (1-\beta) f_{i,j}^{eski} \quad (31)$$

(31)'de ki gibi özetlenebilir. Unutulmaması gerekir ki bu yöntem Gauss-Siedel yönteminin hızlandırılması için yapılmaktadır. Dolayısıyla bu yinelemeler, tüm düğüm sıcaklıkları için önceden belirlenmiş tolerans sağlanana kadar devam eder.

SOR çarpanının optimum değerinin bulmak için Dirichlet tipi sınır koşullarının kullanıldığı dikdörtgensel bir hesap bölgesinin önerilmiş yöntemi,

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \right]^2 \beta^2 - 16\beta + 16 = 0$$

eşitliğinin β_1 ve β_2 gibi köklerinden en küçük olan kökü için bulunan değer aşırı gevşetme çarpanı için kullanıldığında iterasyonun kaçında adımından sonra yakınsadığını tespit etmektedir. Burada p ve q ifadeleri seçilmiş bölgedeki her iki yöne bakan hücre sayısını belirtmektedir.

2.4. Parabolik Denklemler İçin

Parabolik denklemlerde konuma ek olarak zaman parametresi de kullanılır. Burada belli bir başlangıç zamanına ek olarak başlangıç durumlarıyla harekete geçilir. Sınır değerlerinin de olması gerektiği düşünülürse bu tip problemlere zamana göre başlangıç zaman değer ya da konuma göre sınır değer problemi denir.

2.4.1. Bir Boyutlu Isı Denklemlerinin Çözümü

Bir boyutlu ısı denklemlerinin çözümünde ele alınan metal borunun boyunca ısı akışı sırasında meydana gelen sıcaklık değişimi incelenir. Konumsal türevlerinin merkezi fark formülasyonlarıyla ayrıklaştırılması minvalinde değişiklik sadece zamansal türevlerin ayrıklaştırılmasından kaynaklanmaktadır. Bu farklılıktan doğan sebepler açık formülasyon (explicit method) ya da FTCS (Forward Time Central Space), Crank-Nicolson ve Teta isimleriyle adlandırılan yöntemlerle çözüme kavuşturulmaktadır.

2.4.2. Açık Formülasyon (Explicit Method)

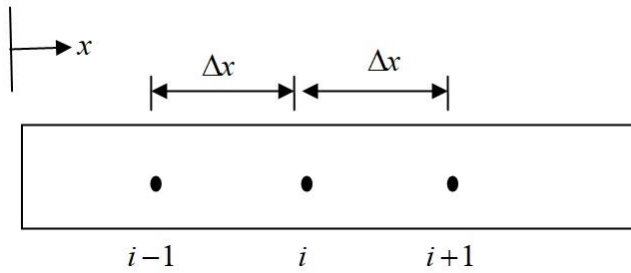
Burada $f = f(x, t)$ bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (32)$$

denklemini gibi parabolik kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kısmi türevlerin sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Bu yöntemde belirli düğümlerde (x - konumu) ve zamanda (t) zamana göre türev ileri farkla

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^k \cong \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (33)$$

gibi ayrıklaştırılmaktadır. (33)'deki eşitlik Şekil 11'de düğüm temsilini gösteren şematik diyagramda resmedildiği gibi



Şekil 11. Düğüm temsilini gösteren şematik diyagram

i noktasında k anında zamana göre türevi gösterirken, f_i^k büyüklüğü i noktasında k anındaki sıcaklığı, f_i^{k+1} büyüklüğü i noktasında $k+1$ (veya $k + \Delta t$) anındaki sıcaklığı belirtmektedir. i noktası etrafında k anında merkezi farkla;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (34)$$

şeklinde ayrıklaştırılır. Ayrıklaştırmalardaki farklılık nedeniyle bu yönteme FTCS (Forward Time Central Space) yöntemi denir. Zaman Δt gibi birinci dereceden ayrıklaşma ihtiva ederken, konum $(\Delta x)^2$ gibi ikinci dereceden hata mertebesinde.

Bu farklılık bu yöntemde kararlılığını etki altına almaktadır. Ayrıklaştırılmış (33) ve (34) 'deki ifadeler (32) 'de yerine yazılıp;

$$\underbrace{\frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}}_{\frac{\partial f}{\partial t}} = \alpha \underbrace{\frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \quad (35)$$

(35) düzenlenerek

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (36)$$

(36) elde edilir. (36) 'da

$$\alpha = \frac{k}{c\rho}$$

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = r$$

olarak ifade edilirse

$$f_i^{k+1} = f_i^k + r(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (37)$$

(37) elde edilmiş olur.

2.4.3. Kapalı (Implicit) Yöntem

Açık yöntemde düğümlerin çözümü yapılırken bazı problemler ortaya çıkar. Bu problemler; belirlenmiş olan ilk zamanda iç düğüm noktalarındaki sıcaklık yapay olarak belli bir ortalamada tayin edilmesi ki bu durum fiziksel bir olay için aykırı bir durum arz eder, belirlenmiş olan bir zaman diliminde tüm düğümler için ısı geçişinin aynı anda mümkün olduğu kabul edilerek sıcaklık değerleri bulunmakta, belirli bir düğümdeki sıcaklık sadece önceki zaman adımındaki komşu düğümlerin sıcaklığına bağlı hesaplanmakta ve son olarak da açık yöntem, zaman adımının değerine, konum adımına ve eliptik denklemin parametrelerine bağlı olan kararlılığı garanti etmez. Kısmi diferansiyel denklemler için

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (38)$$

açık yöntemin yakınsak ve kararlılığı

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (39)$$

için mümkündür. Kapalı yöntemde sıcaklık her seferinde bir düğüm bulmak yerine, belirli bir süre için tüm iç düğümlerdeki sıcaklık için eşzamanlı doğrusal denklemlerle sonuçlandırır.

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (40)$$

parabolik kısmi diferansiyel denklemi çözmek için kapalı yöntem aşağıdaki gibidir. (40) denklemin sol tarafındaki ikinci türev, i düğümündeki $k+1$ zaman adımındaki merkezi fark formülasyonu ile ayrıklaştırılır.

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^{k+1} \cong \frac{f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (41)$$

(40) denklemin sağ tarafındaki birinci türev, $k+1$ zaman adımı ve i düğümü olmak üzere geri fark formülasyonu ile ayrıklaştırılır.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^{k+1} \cong \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (42)$$

Ayrıklaştırılmış (41) ve (42) denklemleri (40)'taki parabolik kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılarak

$$\alpha \frac{f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (43)$$

elde edilir. (43) gerekli düzenlemeler yapılarak

$$-\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} f_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}) f_i^{k+1} - \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} f_{i+1}^{k+1} = f_i^k \quad (44)$$

bulunur. (44)'te

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = r$$

denirse

$$-rf_{i-1}^{k+1} + (1+2r)f_i^{k+1} - rf_{i+1}^{k+1} = r_i^k \quad (45)$$

belirli bir zaman adımında tüm düğümler için (dış düğümler hariç) yazılabilir. (45) nolu denklem belirli bir zamanda düğüm noktalarının sıcaklığını bulmak için eşzamanlı doğrusal denklem olarak ifade edilir (Kaw ve Garapati, 2011).

2.4.4. Crank-Nicolson Yöntemi

Crank-Nicolson yöntemi, kapalı (implicit) yöntem için alternatif bir şema sunar. Crank-Nicolson yönteminin doğruluğu hem alanda hem de zamanda aynıdır. Kapalı (implicit) yöntemde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ yaklaşımı $O(\Delta x)^2$ kesinliğine sahipken, $\frac{\partial f}{\partial t}$, nin yaklaşımı (Δt) kadardır. Crank-Nicolson yöntemindeki doğruluk, türevin zaman adımının ortasındaki noktaya yaklaştırılmasıyla sağlanır (Kaw ve Garapati, 2011).

$$\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0,5 \quad \text{ya da} \quad \alpha = \frac{k}{c\rho} \quad \text{olmak üzere} \quad \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \leq 0,5 \quad \text{olduğunda}$$

kararsızlığın (hata payının) nedeni konumsal (merkezi fark)

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i \right]^k = \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (46)$$

ve zamansal (ileri fark)

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i \right]^k = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (47)$$

türevlerinin sonlu fark ayrıştırmalarının mertebelerindeki farklılıklardır. Crank-Nicolson yöntemi (kapalı yöntem/implicit method) bu ayrışmalardaki farkları aynı mertebeye getiren tekniktir.

Zamansal sonlu fark ayrıklaştırılması

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad (48)$$

zaman aralığının $k + \frac{1}{2}$ anı olacak şekilde seçilip, zamansal anlamda merkezi olarak ayrıklaştırılmasıyla ifade edilebilir. Bu noktada konumsal olarak ayrıklaştırma belirlenmiş olan $k + \frac{1}{2}$ zaman adımında gerçekleştirilebilir. Konumsal olarak ifade edilecek bu ayrıklaştırma için $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ türevinin bir kez zaman adımının başında bir kez de sonunda ayrıklaştırılarak ortalamasının alınmasından yararlanılır.

k zaman adımında ayrıklaştırma;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (49)$$

$k+1$ zaman adımında ayrıklaştırma;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (50)$$

$k + \frac{1}{2}$ zaman adımında ayrıklaştırma;

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) + (f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2} \quad (51)$$

ayrıklaştırılmış olan türevler $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ denkleminde yerine yazılarak

$$\frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho} \frac{1}{2} \frac{(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) + (f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2} \quad (52)$$

elde edilir. (52) nolu denklem düzenlenerek sırasıyla;

$$f_i^{k+1} - f_i^k = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \frac{(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) + (f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1})}{2} \quad (53)$$

$$(53)'te \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = r \text{ olsun,}$$

$$f_i^{k+1} - f_i^k = r \frac{(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) + (f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1})}{2} \quad (54)$$

olur ki (54)'ten Crank-Nicolson formülü,

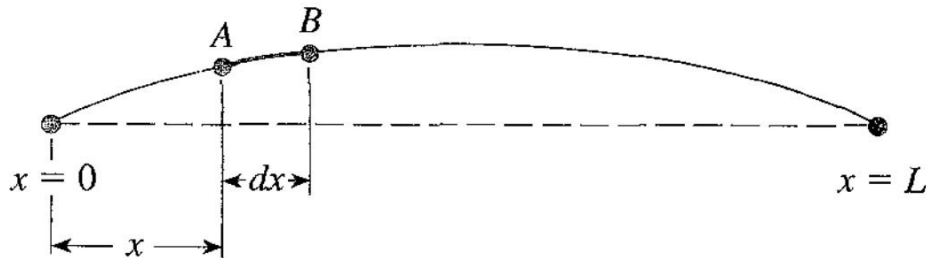
$$-rf_{i-1}^{k+1} + 2(1+r)f_i^{k+1} - rf_{i+1}^{k+1} = rf_{i-1}^k + 2(1+r)f_i^k + rf_{i+1}^k \quad (55)$$

olarak bulunur.

Crank-Nicolson formülünde her bir noktada tek sefer yazılmasıyla oluşan denklem sistemi çözüldüğünde kapalı yöntem (implicit method) formülasyonu bulunmuş olur. Bu yöntemin avantajı $\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = r$ için herhangi bir değerde kararlı yapıda olması ya da kararlılık sorunu olmayışıdır.

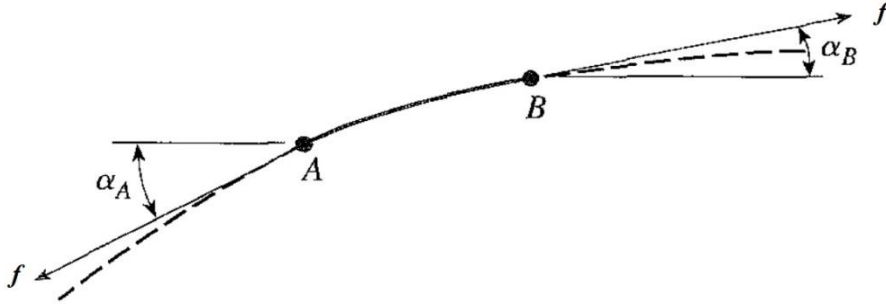
2.5. Hiperbolik Denklemler İçin

Titreşen Yay Problemleri: Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemleri herhangi bir ortamda titreşimlerin nasıl yayıldığını açıklığa kavuşturur. Özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımladığı içinde “dalga denklemi” olarak adlandırılır. Dalga denklemleri kendi içerisinde; bir boyutta salınım yapan yay, iki boyutlu halde çalınırken titreşen davul zarının hareketi ve son olarak üç boyutlu halde şeffaf bir jelatin içerisinde suspansiyonel halde bulunan taneciklerin çarpışma olduğunda tespit edilebilmekteki hareketi problemidir.



Şekil 12. Bir boyutta titreşen yay anlık görünümü

Şekil 12’de titreşmekte olan bir boyuttaki yay gösterilmektedir. Yayın A ve B gibi birbirine son derece yakın iki nokta arasındaki mesafe Şekil 13’ te abartılarak daha fazla yakınlaştırılarak gösterilmiştir.



Şekil 13. Odaklanarak gösterilen bir boyutta titreşen yay

A ve B noktalarında teğetlerin eğimlerinin açısı sırasıyla α_A ve α_B dir. Yayın ötelemeleri iki ucu birleştiren dik olarak ölçülmekte olup u ile gösterilmektedir. Yayı etkileyen kuvvet A ve B noktalarında f ile belirtilmiştir. Yukarı doğru kuvvetler pozitif işaretli olup yayın A ve B noktalarını etkileyen düşey bileşenler;

$$A = -f \sin(\alpha_A) \text{ ve } B = f \sin(\alpha_B)$$

dir. Şekil 12 ve Şekil 13’te temsiller abartılı olduğundan açıların çok çok küçük olduğu göz önünde bulundurularak yaklaşık olarak sinüsleri ve tanjantları eşit kabul edebiliriz. Buradan;

$$A = -f \sin(\alpha_A) = -f \tan(\alpha_A) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A,$$

$$B = f \sin(\alpha_B) = f \tan(\alpha_B) = f \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_B = f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right]$$

olur. Burada net bileşke kuvvet $f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$ olur. Düşey konumda Newton kanunu uygulanarak yayın kütlesi ve ivmesinin çarpımına eşitlenirse (w birim uzunluk başına ağırlık)

$$f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \frac{w dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (56)$$

(56) eşitliği düzenlenerek

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{fg}{w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (57)$$

(57) elde edilir. Burada $A=1$, $B=0$, $C=-\frac{fg}{w}$ olduğu ve bu büyüklüklerle birlikte denkleminizin hiperbolik denklem sınıfına girdiği görülür. Burada yay yerine bir membran tercih edilirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \nabla^2 u \quad (58)$$

(58) nolu denkleme ulaşılır.

Titreşen yay probleminin nümerik çözümü için $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ denkleminin türevleri sonlu fark yaklaşımlarıyla ayrıklaştırılarak çözülüp, uzayda hesaplanmış zaman adımında merkezi farklarla

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (59)$$

zaman adımının etrafında hesabı

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f_i^{k+1} - 2f_i^k + f_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (60)$$

yapılarak (60), $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \nabla^2 u$ denkleminde yerine yazılıp

$$\frac{f_i^{k+1} - 2f_i^k + f_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} = C \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (61)$$

elde edilir. (61)'de gerekli düzenlemeler yapıp sonraki zaman adımındaki ötelemeler için

$$f_i^{k+1} = -f_i^{k-1} + 2f_i^k + C \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (62)$$

$$f_i^{k+1} = C \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^k + f_{i-1}^k) - f_i^{k-1} + 2 \left[1 - C \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right] f_i^k \quad (63)$$

yapılır. Şayet (63)'te

$$C \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = 1 \rightarrow \Delta t = \sqrt{C} \Delta x$$

alınırsa (kararsızlığın olmayacağı en büyük değer bu değerdir) denklem,

$$f_i^{k+1} = f_{i+1}^k + f_{i-1}^k - f_i^{k-1} \quad (64)$$

(64) haline gelir. (64) ile bulunmuş olan denklem açık bir şekilde zamanda ilerleyişi tasvir etmektedir. Şöyle ki x_i noktasındaki ötelemenin hemen peşi sıra gelen zaman adımında bulunması için; komşu noktanın hemen bir öncesinde gelen zaman adımındaki ötelemeleri toplanıp, işleme muhatap olan iki zaman önceki ötelemenin değerinden çıkarılmaktadır. Özetle herhangi bir zaman adımında bulunacak değer için kendinden önce gelen iki zaman adımındaki değerlere ihtiyaç vardır.

Ayrıca bu zaman hesaplama yönteminde sadece belli bir iki zaman adımından sonra kullanılacağı açıktır. Bunun için $t=0$ anında ve $\Delta t=t$ ilk zaman adımında var olan ötelemelerin bilinmesi gerekmektedir. Yani $\Delta t=t$ adımındaki var olan ötelemelere nasıl ulaşılabileceği açık değildir. $t=0$ anında hesaplama yapabilmek için daha önce gelecek ötelemelerin bilinmesi gerekmektedir. Bu durum özellikle titreşen yay problemleri göz önüne alınarak bakılırsa, salınımlarda zaman göre fonksiyonun periyodik olduğu görülür ve önemli bir sorun teşkil etmediği ortaya çıkmış olur. Bu kriteri netleştirdikten sonra başlangıç belirlenip bu andaki hızlar ve ivmeler bilinerek $t=0$ anından önceki ötelemeler bulunabilir. Bu bilgilerden yola çıkarak başlangıç belirlenip bu andaki hızlar ve ivmeler verilirse ve merkezi farklarla ayrıklaştırma yaparak ilk zaman için $t=0$ da $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_0 = g(x)$ olarak verilirse;

$$f_i^{+1} = \frac{f_{i-1}^0 + f_{i+1}^0}{2} + g(x) \Delta t \quad (65)$$

(65) ilk zaman için kullanılır. Bundan sonra gelecek her adım için

$$f_i^{k+1} = f_{i+1}^k + f_{i-1}^k - f_i^{k-1} \quad (66)$$

(66) nolu eşitlik kullanılır.

Grid noktaları hem x hemde y ilerliyorsa ilk zaman için (67) kullanılır.

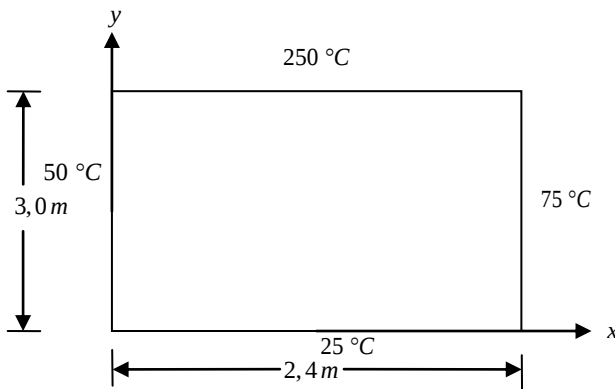
$$f_{i,j}^1 = \frac{1}{4} (f_{i-1,j}^0 + f_{i+1,j}^0 + f_{i,j-1}^0 + f_{i,j+1}^0) \quad (67)$$

İlk zaman adımı için bulunan bu değer daha sonra gelecek konum ve zaman değerleri için gereklidir. Sıralı konum zaman işlemleriyle için gerekli adımları (68) kullanılacaktır.

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j-1}^k + f_{i,j+1}^k) + \Delta t \cdot f(x_i, y_i) \quad (68)$$

Örnek 1:

Şekil 14' te gösterildiği gibi boyutu $2,4m \times 3m$ olan plaka, sınır sıcaklığı alt, sağ üst ve sol değerleri sırasıyla $25^\circ C$, $75^\circ C$, $50^\circ C$, $250^\circ C$ olacak şekilde sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Buna göre doğrudan çözüm yöntemi kullanarak $0,6m$ uzunluğunda düğüm noktalarına bölünecek bu plakanın iç düğümlerdeki sıcaklığı ne olur?



Şekil 14. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka

Çözüm:

$\Delta x = \Delta y = h = 0,6m$ olacak şekilde x eksenindeki gridlerin adedi m ile y eksenindeki gridlerin adedi n ile gösterilmek üzere;

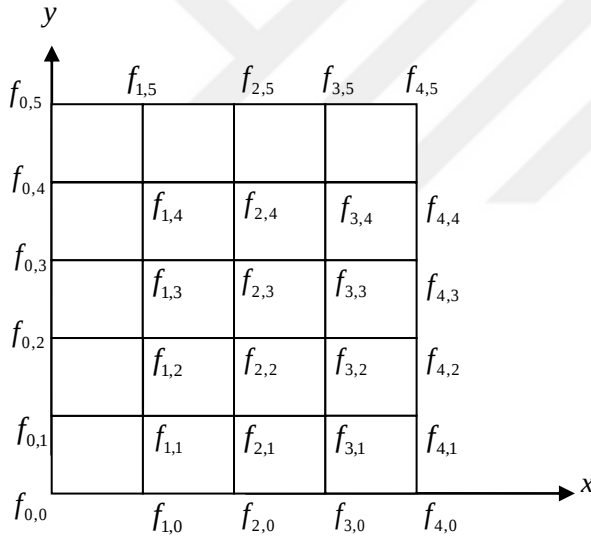
$$m = \frac{2,4}{0,6}$$

$$= 4$$

$$n = \frac{3}{0,6}$$

$$= 5$$

bulundu. Tüm düğüm noktaları Şekil 15' te gösterildiği gibi düzenlenmiştir.



Şekil 15. Plakadaki düğüm noktaları

Şekil 15'te sol ve sağ sınırdaki i ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve m değerlerine sahiptir. Aynı şekilde üst ve alt sınırdaki j ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve n değerlerine sahiptir.

Sınır şartlarından yola çıkarak,

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_{0,j} = 50, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{4,j} = 75, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{i,0} = 25, i = 1, 2, 3 \\ f_{i,5} = 250, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

olacak şekilde Şekil 15' teki iç noktalar ve sınır noktaları Şekil 16' daki gibi temsil edilmiştir.

	$f_{1,5} = 250^\circ$	$f_{2,5} = 250^\circ$	$f_{3,5} = 250^\circ$	
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,4} = 0$	$f_{2,4} = 0$	$f_{3,4} = 0$	$f_{4,4} = 75^\circ$
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,3} = 0$	$f_{2,3} = 0$	$f_{3,3} = 0$	$f_{4,3} = 75^\circ$
$f_{0,2} = 50^\circ$	$f_{1,2} = 0$	$f_{2,2} = 0$	$f_{3,2} = 0$	$f_{4,2} = 75^\circ$
$f_{0,1} = 50^\circ$	$f_{1,1} = 0$	$f_{2,1} = 0$	$f_{3,1} = 0$	$f_{4,1} = 75^\circ$
	$f_{1,0} = 25$	$f_{2,0} = 25$	$f_{3,0} = 25$	

Şekil 16. İç noktalar ve sınır noktaları

İç grid noktalarındaki sıcaklığı bulmak için i ve j tüm kombinasyonlarını f fonksiyonunun Laplasiyeni

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = 0$$

merkezi farklarla ayrıştırılarak

$$\frac{f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$\text{veya } f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j} = 0$$

denkleminde beş bilinmeyeninin varlığında 12 iç nokta için ayrı ayrı yazılabilir.

Kenarlara komşu olan $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{2,4}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}$ ve $f_{3,4}$ noktaları denklemlerde sınır koşulları olarak kendine yer bulacaktır.

$i=1, j=1$ için;

$$f_{2,1} + f_{0,1} + f_{1,2} + f_{1,0} - 4f_{1,1} = 0$$

$$f_{2,1} + 50 + f_{1,2} + 25 - 4f_{1,1} = 0$$

$$-4f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1} = -75 \quad (69)$$

$i=1, j=2$ için;

$$f_{2,2} + f_{0,2} + f_{1,3} + f_{1,1} - 4f_{1,2} = 0$$

$$f_{2,2} + 50 + f_{1,3} + f_{1,1} - 4f_{1,2} = 0$$

$$f_{1,1} - 4f_{1,2} + f_{1,3} + f_{2,2} = -50 \quad (70)$$

$i=1, j=3$ için;

$$f_{2,3} + f_{0,3} + f_{1,4} + f_{1,2} - 4f_{1,3} = 0$$

$$f_{2,3} + 50 + f_{1,4} + f_{1,2} - 4f_{1,3} = 0$$

$$f_{1,2} - 4f_{1,3} + f_{1,4} + f_{2,3} = -50 \quad (71)$$

$i=1, j=4$ için;

$$f_{2,4} + f_{0,4} + f_{1,5} + f_{1,3} - 4f_{1,4} = 0$$

$$f_{2,4} + 50 + 250 + f_{1,3} - 4f_{1,4} = 0$$

$$f_{1,3} - 4f_{1,4} + f_{2,4} = -300 \quad (72)$$

$i=2, j=1$ için;

$$f_{3,1} + f_{1,1} + f_{2,2} + f_{2,0} - 4f_{2,1} = 0$$

$$f_{3,1} + f_{1,1} + f_{2,2} + 25 - 4f_{2,1} = 0$$

$$f_{1,1} - 4f_{2,1} + f_{2,2} + f_{3,1} = -25 \quad (73)$$

$i=2, j=2$ için;

$$f_{3,2} + f_{1,2} + f_{2,3} + f_{2,1} - 4f_{2,2} = 0$$

$$f_{1,2} + f_{2,1} - 4f_{2,2} + f_{2,3} + f_{3,2} = 0 \quad (74)$$

$i=2, j=3$ için;

$$f_{3,3} + f_{1,3} + f_{2,4} + f_{2,2} - 4f_{2,3} = 0$$

$$f_{1,3} + f_{2,2} - 4f_{2,3} + f_{2,4} + f_{3,3} = 0 \quad (75)$$

$i=2, j=4$ için;

$$f_{3,4} + f_{1,4} + f_{2,5} + f_{2,3} - 4f_{2,4} = 0$$

$$f_{3,4} + f_{1,4} + 250 + f_{2,3} - 4f_{2,4} = 0$$

$$f_{1,4} + f_{2,3} - 4f_{2,4} + f_{3,4} = -250 \quad (76)$$

$i=3, j=1$ için;

$$f_{4,1} + f_{2,1} + f_{3,2} + f_{3,0} - 4f_{3,1} = 0$$

$$75 + f_{2,1} + f_{3,2} + 25 - 4f_{3,1} = 0$$

$$f_{2,1} - 4f_{3,1} + f_{3,2} = -100 \quad (77)$$

$i=3, j=2$ için;

$$f_{4,2} + f_{2,2} + f_{3,3} + f_{3,1} - 4f_{3,2} = 0$$

$$75 + f_{2,2} + f_{3,3} + f_{3,1} - 4f_{3,2} = 0$$

$$f_{2,2} + f_{3,1} - 4f_{3,2} + f_{3,3} = -75 \quad (78)$$

$i=3, j=3$ için;

$$f_{4,3} + f_{2,3} + f_{3,4} + f_{3,2} - 4f_{3,3} = 0$$

$$75 + f_{2,3} + f_{3,4} + f_{3,2} - 4f_{3,3} = 0$$

$$f_{2,3} + f_{3,2} - 4f_{3,3} + f_{3,4} = -75 \quad (79)$$

$i=3, j=4$ için;

$$f_{4,4} + f_{2,4} + f_{3,5} + f_{3,3} - 4f_{3,4} = 0$$

$$75 + f_{2,4} + 250 + f_{3,3} - 4f_{3,4} = 0$$

$$f_{2,4} + f_{3,3} - 4f_{3,4} = -325 \quad (80)$$

(69) ile (80) arasındaki on iki doğrusal denklem grubu daha geniş bir şekilde

$$-4f_{1,1} + f_{1,2} + 0(f_{1,3} + f_{1,4}) + f_{2,1} + 0(f_{2,2} + f_{2,3} + f_{2,4} + f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,4}) = -75$$

$$f_{1,1} - 4f_{1,2} + f_{1,3} + 0(f_{1,4} + f_{2,1}) + f_{2,2} + 0(f_{2,3} + f_{2,4} + f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,4}) = -50$$

$$0f_{1,1} + f_{1,2} - 4f_{1,3} + f_{1,4} + 0(f_{2,1} + f_{2,2}) + f_{2,3} + 0(f_{2,4} + f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,4}) = -50$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2}) + f_{1,3} - 4f_{1,4} + 0(f_{2,1} + f_{2,2} + f_{2,3}) + f_{2,4} + 0(f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,4}) = -300$$

$$f_{1,1} + 0(f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,4}) - 4f_{2,1} + f_{2,2} + 0(f_{2,3} + f_{2,4}) + f_{3,1} + 0(f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,4}) = -25$$

$$0f_{1,1} + f_{1,2} + 0(f_{1,3} + f_{1,4}) + f_{2,1} - 4f_{2,2} + f_{2,3} + 0(f_{2,4} + f_{3,1}) + f_{3,2} + 0(f_{3,3} + f_{3,4}) = 0$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2}) + f_{1,3} + 0(f_{1,4} + f_{2,1}) + f_{2,2} - 4f_{2,3} + f_{2,4} + 0(f_{3,1} + f_{3,2}) + f_{3,3} + 0f_{3,4} = 0$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3}) + f_{1,4} + 0(f_{2,1} + f_{2,2}) + f_{2,3} - 4f_{2,4} + 0(f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,3}) + f_{3,4} = -250$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,4}) + f_{2,1} + 0(f_{2,2} + f_{2,3} + f_{2,4}) - 4f_{3,1} + f_{3,2} + 0(f_{3,3} + f_{3,4}) = -100$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,4} + f_{2,1}) + f_{2,2} + 0(f_{2,3} + f_{2,4}) + f_{3,1} - 4f_{3,2} + f_{3,3} + 0f_{3,4} = -75$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,4} + f_{2,1} + f_{2,2}) + f_{2,3} + 0(f_{2,4} + f_{3,1}) + f_{3,2} - 4f_{3,3} + f_{3,4} = -75$$

$$0(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,4} + f_{2,1} + f_{2,2} + f_{2,3}) + f_{2,4} + 0(f_{3,1} + f_{3,2}) + f_{3,3} - 4f_{3,4} = -325$$

ifade edilip, bu on iki denklemi çözüp on iki iç düğümdeki sıcaklığı buluruz.

$$\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-75 \\
-50 \\
-50 \\
-300 \\
-25 \\
0 \\
0 \\
-250 \\
-100 \\
-75 \\
-75 \\
-325
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_{1,1} \\
f_{1,2} \\
f_{1,3} \\
f_{1,4} \\
f_{2,1} \\
f_{2,2} \\
f_{2,3} \\
f_{2,4} \\
f_{3,1} \\
f_{3,2} \\
f_{3,3} \\
f_{3,4}
\end{pmatrix}$$

gerekli matrisi işlemleri yapıldıktan sonra

$$f_{1,1} = \frac{3029565}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 79,218811^{\circ}\text{C}$$

$$f_{1,2} = \frac{7336475}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 95,919188^{\circ}\text{C}$$

$$f_{1,3} = \frac{4787260}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 125,180033^{\circ}\text{C}$$

$$f_{1,4} = \frac{15348655}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 200,672737^{\circ}\text{C}$$

$$f_{2,1} = \frac{11163595}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 145,956057^{\circ}\text{C}$$

$$f_{2,2} = \frac{4943975}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 129,277907^{\circ}\text{C}$$

$$f_{2,3} = \frac{5894325}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 154,128206^{\circ}\text{C}$$

$$f_{2,4} = \frac{177446495}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 231,55486^{\circ}\text{C}$$

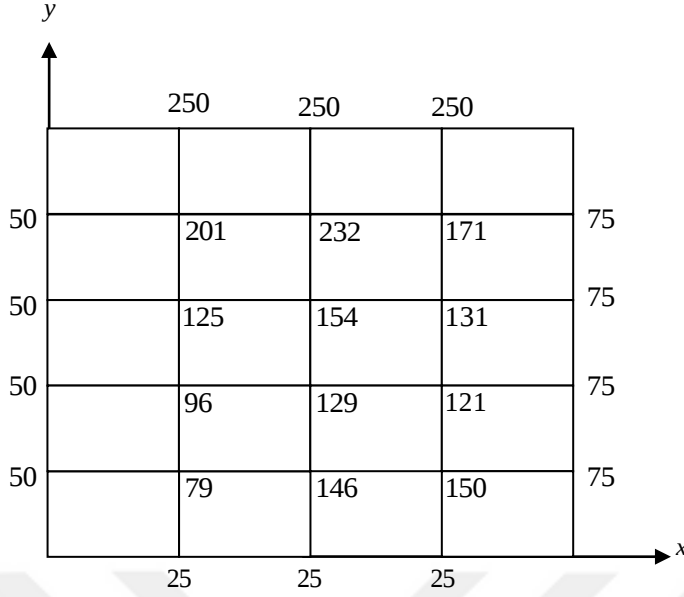
$$f_{3,1} = \frac{11446495}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 149,654773^{\circ}\text{C}$$

$$f_{3,2} = \frac{4631540}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 121,108177^{\circ}\text{C}$$

$$f_{3,3} = \frac{9981425}{76486}^{\circ}\text{C} \cong 130,500026^{\circ}\text{C}$$

$$f_{3,4} = \frac{6568760}{38243}^{\circ}\text{C} \cong 171,763721^{\circ}\text{C}$$

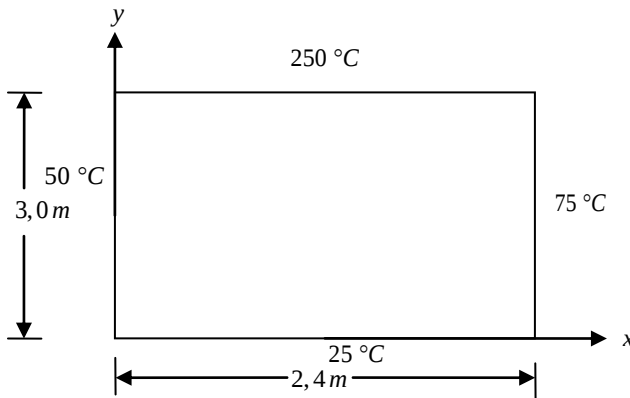
$$\begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ f_{1,4} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ f_{2,4} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \\ f_{3,4} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 79,218811 \\ 95,919188 \\ 125,180033 \\ 200,672737 \\ 145,956057 \\ 129,277907 \\ 154,128206 \\ 231,55486 \\ 149,654773 \\ 121,108177 \\ 130,500026 \\ 171,763721 \end{bmatrix}^{\circ}\text{C}$$



Şekil 17. Plakanın iç düğümlerindeki sıcaklıkların yaklaşık gösterimi

Örnek 2:

Şekil 18' de gösterildiği gibi boyutu $2,4\text{ m} \times 3\text{ m}$ olan plaka, sınır sıcaklığı alt, sağ üst ve sol değerleri sırasıyla 25°C , 75°C , 250°C , 50°C olacak şekilde sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Tüm iç düğümlerdeki başlangıç sıcaklığının 0°C olduğunu varsayarak $0,6\text{ m}$ uzunluğunda düğüm noktalarına bölünecektir. Buna göre Gauss-Seidel yöntemini kullanarak iç düğümlerdeki sıcaklığı ve tüm iç düğümlerde yinelemenin sonunda maksimum mutlak göreceli hatayı $0,0001$ olacak şekilde bulunuz?



Şekil 18. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka

Çözüm:

$\Delta x = \Delta y = h = 0,6m$ olacak şekilde x eksenindeki gridlerin adedi m ile y eksenindeki gridlerin adedi n ile gösterilmek üzere;

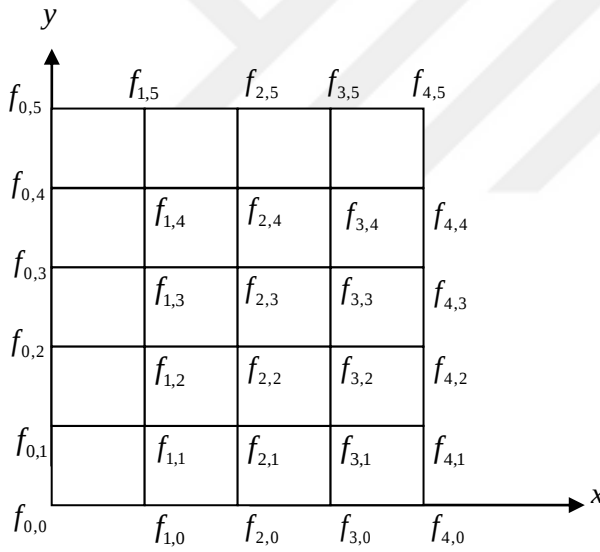
$$m = \frac{2,4}{0,6}$$

$$= 4$$

$$n = \frac{3}{0,6}$$

$$= 5$$

bulunur. Tüm düğüm noktaları Şekil 19' da gösterildiği gibi oluşmuş olur.



Şekil 19. Plakadaki düğüm noktaları

Şekil 19' da sol ve sağ sınırdaki i ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve m değerlerine sahiptir. Aynı şekilde üst ve alt sınırdaki j ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve n değerlerine sahiptir.

Sınır şartlarından yola çıkarak,

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_{0,j} = 75, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{4,j} = 100, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{i,0} = 50, i = 1, 2, 3 \\ f_{i,5} = 300, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

olacak şekilde Şekil 19'daki iç noktalar ve sınır noktaları Şekil 20'deki gibi temsil edilebilir.

	$f_{1,5} = 250^\circ$	$f_{2,5} = 250^\circ$	$f_{3,5} = 250^\circ$	
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,4} = 0$	$f_{2,4} = 0$	$f_{3,4} = 0$	$f_{4,4} = 75^\circ$
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,3} = 0$	$f_{2,3} = 0$	$f_{3,3} = 0$	$f_{4,3} = 75^\circ$
$f_{0,2} = 50^\circ$	$f_{1,2} = 0$	$f_{2,2} = 0$	$f_{3,2} = 0$	$f_{4,2} = 75^\circ$
$f_{0,1} = 50^\circ$	$f_{1,1} = 0$	$f_{2,1} = 0$	$f_{3,1} = 0$	$f_{4,1} = 75^\circ$
	$f_{1,0} = 25^\circ$	$f_{2,0} = 25^\circ$	$f_{3,0} = 25^\circ$	

Şekil 20. İç noktalar ve sınır noktaları

Ayrıklaştırılmış denklemi

$$f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}}{4}, i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

olan Gauss-Seidel yönteminde tüm iç düğümler için herhangi bir adımda (k adım sayısı olmak üzere) bilinen sıcaklık değerleri $f_{i,j}^k$ olmak üzere bir sonraki adımdaki sıcaklıklar Laplace denkleminin ayrık yapısı yardımıyla iteratif yöntemle

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{f_{i+1,j}^k + f_{i,j+1}^{k+1} + f_{i-1,j}^k + f_{i,j-1}^{k+1}}{4} \quad (81)$$

şeklinde yazılarak bulunacak. Buradan yola çıkarak denklem (81), iç düğümlerdeki tüm sıcaklıklar önceden belirlenmiş bir tolerans içinde olana kadar yinelenerek bulunacaktır.

İterasyon 1:

İterasyon 1 için tüm iç grid noktaların sıcaklığı 0°C ile başlar.

$k=0, i=1, j=1$ için;

$$\begin{aligned} f_{1,1}^1 &= \frac{f_{2,1}^0 + f_{0,1}^1 + f_{1,2}^0 + f_{1,0}^1}{4} \\ &= \frac{0 + 50 + 0 + 25}{4} \\ &= 18,75^\circ C \end{aligned}$$

$k=0, i=1, j=2$ için;

$$\begin{aligned} f_{1,2}^1 &= \frac{f_{2,2}^0 + f_{0,2}^1 + f_{1,3}^0 + f_{1,1}^1}{4} \\ &= \frac{0 + 50 + 0 + 18,75}{4} \\ &= 17,1875^\circ C \end{aligned}$$

$k=0, i=1, j=3$ için;

$$\begin{aligned} f_{1,3}^1 &= \frac{f_{2,3}^0 + f_{0,3}^1 + f_{1,4}^0 + f_{1,2}^1}{4} \\ &= \frac{0 + 50 + 0 + 17,1875}{4} \\ &= 16,796875^\circ C \end{aligned}$$

$k=0, i=1, j=4$ için;

$$\begin{aligned} f_{1,4}^1 &= \frac{f_{2,4}^0 + f_{0,4}^1 + f_{1,5}^0 + f_{1,3}^1}{4} \\ &= \frac{0 + 50 + 250 + 16,796875}{4} \\ &= 79,19921875^\circ C \end{aligned}$$

$k=0, i=2, j=1$ için;

$$\begin{aligned} f_{2,1}^1 &= \frac{f_{3,1}^0 + f_{1,1}^1 + f_{2,2}^0 + f_{2,0}^1}{4} \\ &= \frac{0 + 18,75 + 0 + 25}{4} \end{aligned}$$

$$=10,9375^{\circ}C$$

$k=0, i=2, j=2$ için:

$$f_{2,2}^1 = \frac{f_{3,2}^0 + f_{1,2}^1 + f_{2,3}^0 + f_{2,1}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 17,1875 + 0 + 10,9375}{4}$$

$$= 7,03125^{\circ}C$$

$k=0, i=2, j=3$ için:

$$f_{2,3}^1 = \frac{f_{3,3}^0 + f_{1,3}^1 + f_{2,4}^0 + f_{2,2}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 16,796875 + 0 + 7,03125}{4}$$

$$= 5,95703125^{\circ}C$$

$k=0, i=2, j=4$ için:

$$f_{2,4}^1 = \frac{f_{3,4}^0 + f_{1,4}^1 + f_{2,5}^0 + f_{2,3}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 79,19921875 + 250 + 5,95703125}{4}$$

$$= 83,7890625^{\circ}C$$

$k=0, i=3, j=1$ için:

$$f_{3,1}^1 = \frac{f_{4,1}^0 + f_{2,1}^1 + f_{3,2}^0 + f_{3,0}^1}{4}$$

$$= \frac{75 + 10,9375 + 0 + 25}{4}$$

$$= 27,734375^{\circ}C$$

$k=0, i=3, j=2$ için:

$$f_{3,2}^1 = \frac{f_{4,2}^0 + f_{2,2}^1 + f_{3,3}^0 + f_{3,1}^1}{4}$$

$$= \frac{75 + 7,03125 + 0 + 27,734375}{4}$$

$$= 27,44140625^{\circ}C$$

$k=0, i=3, j=3$ için:

$$f_{3,3}^1 = \frac{f_{4,3}^0 + f_{2,3}^1 + f_{3,4}^0 + f_{3,2}^1}{4}$$

$$= \frac{75 + 5,95703125 + 0 + 27,44140625}{4}$$

$$= 27,09960938^{\circ}C$$

$k=0, i=3, j=4$ için:

$$f_{3,4}^1 = \frac{f_{4,4}^0 + f_{2,4}^1 + f_{3,5}^0 + f_{3,3}^1}{4}$$

$$= \frac{75 + 83,78906250 + 250 + 27,09960938}{4}$$

$$= 108,97216797^{\circ}C$$

İterasyon 2:

İterasyon 2'de iç grid noktaların sıcaklığı için iterasyon 1'deki iç düğüm noktaları kullanılır.

$k=1, i=1, j=1$ için:

$$f_{1,1}^2 = \frac{f_{2,1}^1 + f_{0,1}^2 + f_{1,2}^1 + f_{1,0}^2}{4}$$

$$= \frac{10,9375 + 50 + 17,1875 + 25}{4}$$

$$= 25,78125^{\circ}C$$

$$|\varepsilon|_{1,1} = \left| \frac{f_{1,1}^2 - f_{1,1}^1}{f_{1,1}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{25,78125 - 18,75}{25,78125} \right| \times 100$$

$$= \%27, \overline{27}$$

k=1, i=1, j=2 için;

$$\begin{aligned} f_{1,2}^2 &= \frac{f_{2,2}^1 + f_{0,2}^2 + f_{1,3}^1 + f_{1,1}^2}{4} \\ &= \frac{7,03125 + 50 + 16,796875 + 25,78125}{4} \\ &= 24,90234375^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{1,2} &= \left| \frac{f_{1,2}^2 - f_{1,2}^1}{f_{1,2}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{24,90234375 - 17,1875}{24,90234375} \right| \times 100 \\ &= \%30,98039216 \end{aligned}$$

k=1, i=1, j=3 için;

$$\begin{aligned} f_{1,3}^2 &= \frac{f_{2,3}^1 + f_{0,3}^2 + f_{1,4}^1 + f_{1,2}^2}{4} \\ &= \frac{5,95703125 + 50 + 79,19921875 + 24,90234375}{4} \\ &= 40,01464844^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{1,3} &= \left| \frac{f_{1,3}^2 - f_{1,3}^1}{f_{1,3}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{40,01464844 - 16,796875}{40,01464844} \right| \times 100 \\ &= \%58,02318487 \end{aligned}$$

k=1, i=1, j=4 için;

$$\begin{aligned} f_{1,4}^2 &= \frac{f_{2,4}^1 + f_{0,4}^2 + f_{1,5}^1 + f_{1,3}^2}{4} \\ &= \frac{83,7890625 + 50 + 250 + 40,01464844}{4} \end{aligned}$$

$$= 105,95092773^{\circ}C$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{1,4} &= \left| \frac{f_{1,4}^2 - f_{1,4}^1}{f_{1,4}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{105,95092773 - 79,19921875}{105,95092773} \right| \times 100 \\ &= \%25,2491503 \end{aligned}$$

$k=1, i=2, j=1$ için;

$$\begin{aligned} f_{2,1}^2 &= \frac{f_{3,1}^1 + f_{1,1}^2 + f_{2,2}^1 + f_{2,0}^2}{4} \\ &= \frac{27,734375 + 25,78125 + 7,03125 + 25}{4} \\ &= 21,38671875^{\circ}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{2,1} &= \left| \frac{f_{2,1}^2 - f_{2,1}^1}{f_{2,1}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{21,38671875 - 10,9375}{21,38671875} \right| \times 100 \\ &= \%48,85844749 \end{aligned}$$

$k=1, i=2, j=2$ için;

$$\begin{aligned} f_{2,2}^2 &= \frac{f_{3,2}^1 + f_{1,2}^2 + f_{2,3}^1 + f_{2,1}^2}{4} \\ &= \frac{27,44140625 + 24,90234375 + 5,95703125 + 21,38671875}{4} \\ &= 19,921875^{\circ}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{2,2} &= \left| \frac{f_{2,2}^2 - f_{2,2}^1}{f_{2,2}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{19,921875 - 7,03125}{19,921875} \right| \times 100 \end{aligned}$$

$$= \%64,70588235$$

$k=1, i=2, j=3$ için:

$$f_{2,3}^2 = \frac{f_{3,3}^1 + f_{1,3}^2 + f_{2,4}^1 + f_{2,2}^2}{4}$$

$$= \frac{27,09960938 + 40,01464844 + 83,7890625 + 19,921875}{4}$$

$$= 42,70629883^\circ\text{C}$$

$$|\varepsilon|_{2,3} = \left| \frac{f_{2,3}^2 - f_{2,3}^1}{f_{2,3}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{42,70629883 - 5,95703125}{42,70629883} \right| \times 100$$

$$= \%86,05116478$$

$k=1, i=2, j=4$ için:

$$f_{2,4}^2 = \frac{f_{3,4}^1 + f_{1,4}^2 + f_{2,5}^1 + f_{2,3}^2}{4}$$

$$= \frac{108,97216797 + 105,95092773 + 250 + 42,70629883}{4}$$

$$= 126,90734863^\circ\text{C}$$

$$|\varepsilon|_{2,4} = \left| \frac{f_{2,4}^2 - f_{2,4}^1}{f_{2,4}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{126,90734863 - 83,7890625}{126,90734863} \right| \times 100$$

$$= \%33,97619334$$

$k=1, i=3, j=1$ için:

$$f_{3,1}^2 = \frac{f_{4,1}^1 + f_{2,1}^2 + f_{3,2}^1 + f_{3,0}^2}{4}$$

$$= \frac{75 + 21,38671875 + 27,44140625 + 25}{4}$$

$$= 37,20703125^{\circ}\text{C}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{3,1} &= \left| \frac{f_{3,1}^2 - f_{3,1}^1}{f_{3,1}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{37,20703125 - 27,734375}{37,20703125} \right| \times 100 \\ &= \%25,45931759 \end{aligned}$$

$k=1, i=3, j=2$ için;

$$\begin{aligned} f_{3,2}^2 &= \frac{f_{4,2}^1 + f_{2,2}^2 + f_{3,3}^1 + f_{3,1}^2}{4} \\ &= \frac{75 + 19,92187500 + 27,09960938 + 37,20703125}{4} \\ &= 39,80712891^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{3,2} &= \left| \frac{f_{3,2}^2 - f_{3,2}^1}{f_{3,2}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{39,80712891 - 27,44140625}{39,80712891} \right| \times 100 \\ &= \%31,06409077 \end{aligned}$$

$k=1, i=3, j=3$ için;

$$\begin{aligned} f_{3,3}^2 &= \frac{f_{4,3}^1 + f_{2,3}^2 + f_{3,4}^1 + f_{3,2}^2}{4} \\ &= \frac{75 + 42,70629883 + 108,97216797 + 39,80712891}{4} \\ &= 66,62139893^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

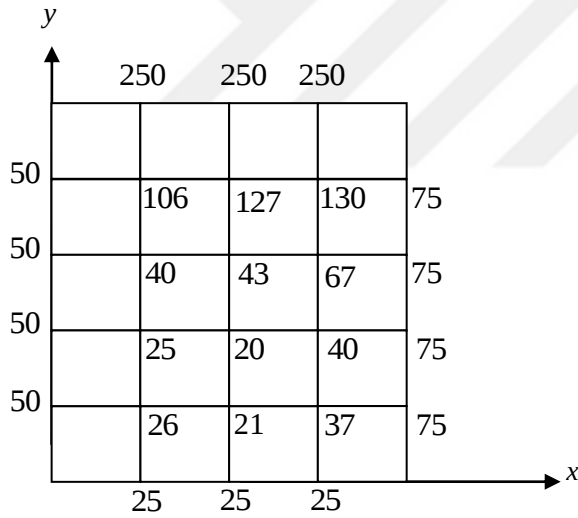
$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{3,3} &= \left| \frac{f_{3,3}^2 - f_{3,3}^1}{f_{3,3}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{66,62139893 - 27,09960938}{66,62139893} \right| \times 100 \end{aligned}$$

$$= \%59,32296558$$

$k=1, i=3, j=4$ için:

$$\begin{aligned} f_{3,4}^2 &= \frac{f_{4,4}^1 + f_{2,4}^2 + f_{3,5}^1 + f_{3,3}^2}{4} \\ &= \frac{75 + 126,90734863 + 250 + 66,62139893}{4} \\ &= 129,63218689^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon|_{3,4} &= \left| \frac{f_{3,4}^2 - f_{3,4}^1}{f_{3,4}^2} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{129,63218689 - 108,97216797}{129,63218689} \right| \times 100 \\ &= \%15,93741448 \end{aligned}$$



Şekil 21. İki yinelemeden sonra sıcaklık dağılımı

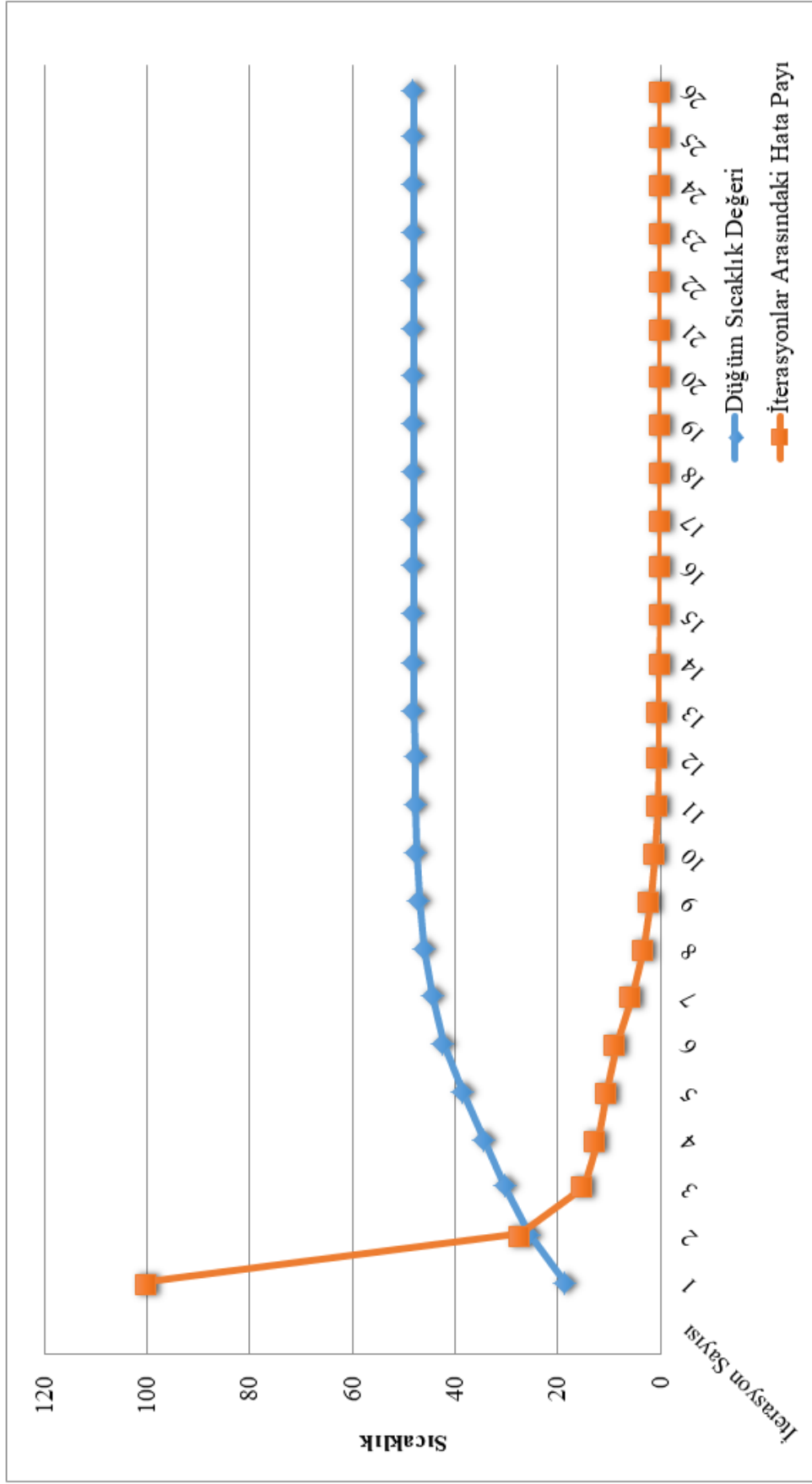
sıcaklık değerlerini 0,0001 hata dahilinde gösterebilmek yirmi altıncı iteratifin sonunda mümkün olmuştur. Tablo 2’ de her yinelemenin sonunda iç düğümlerdeki sıcaklık değerleri belli bir iterasyona kadar listelenmektedir. Ayrıca Tablo 3’ te birinci düğüm noktası için sıcaklık değerleri 0,0001 hata olacak şekilde tablolaştırılmıştır.

Tablo 2. Gauss-Seidel yöntemine göre düğüm noktalarının belirli iterasyon (adım) sonucundaki değişimi ve değerleri

Düğüm Noktaları	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.	
	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri
$f_{1,1}$	18,75	25,78125	30,322266	34,544373	38,584042	42,176872	44,569797	46,025647								
$f_{1,2}$	17,1875	24,902344	35,064697	44,849396	53,065825	58,342673	61,497725	63,339152								
$f_{1,3}$	16,796875	40,014648	58,430481	72,069836	79,842305	84,223935	86,711283	88,131420								
$f_{1,4}$	79,199219	105,950928	121,334457	128,833842	132,717022	134,827275	136,006713	136,675581								
$f_{2,1}$	10,9375	21,386719	28,112793	34,486771	40,641665	44,936514	47,604863	49,190134								
$f_{2,2}$	7,03125	19,921875	36,422729	51,609421	61,351514	67,197168	70,619676	72,602753								
$f_{2,3}$	5,957031	42,706299	72,09549	87,469554	95,836045	100,520134	103,179817	104,699944								
$f_{2,4}$	83,789063	126,907349	143,265533	151,025784	155,085164	157,315567	158,570902	159,285481								
$f_{3,1}$	27,734375	37,207031	41,979980	47,373199	51,217669	53,652488	55,115211	55,973010								
$f_{3,2}$	27,441406	39,807129	55,006027	64,229012	69,67344	72,855981	74,701908	75,767616								
$f_{3,3}$	27,099609	66,621399	82,933426	91,124576	95,574269	98,072743	99,494701	100,30849								
$f_{3,4}$	108,972168	129,632187	137,79974	141,78759	143,914858	145,097078	145,766401	146,148493								

Tablo 3. Gauss-Seidel yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri

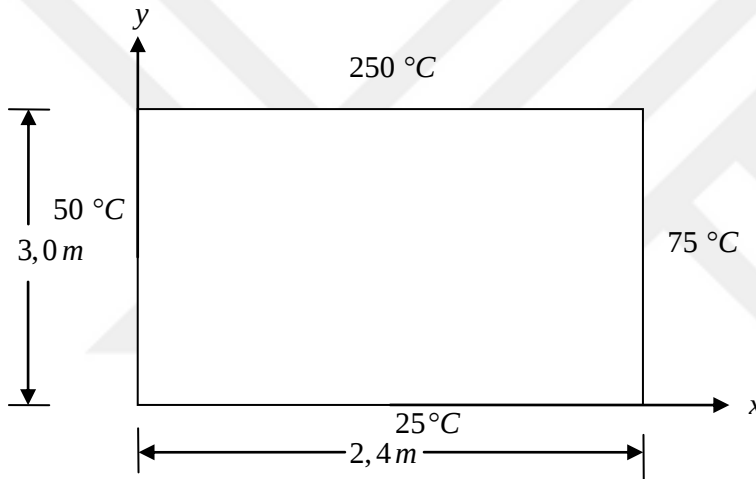
İterasyon Sayısı (n)	$f_{1,1}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)	İterasyon Sayısı (n)	$f_{1,1}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)
1	18,75	100	14	47,981774	0,113912
2	25,78125	27,272727	15	48,013189	0,065429
3	30,322266	14,975845	16	48,031243	0,037588
4	34,544376	12,222271	17	48,041618	0,021596
5	38,584042	10,469792	18	48,04758	0,012409
6	42,176872	8,518486	19	48,051007	0,007131
7	44,569797	5,368937	20	48,052976	0,004098
8	46,025647	3,163128	21	48,054107	0,002355
9	46,882321	1,827286	22	48,054757	0,001353
10	47,379661	1,049691	23	48,055131	0,000778
11	47,666742	0,602266	24	48,055346	0,000447
12	47,832042	0,345585	25	48,055469	0,000257
13	47,927117	0,198374	26	48,0555401	0,000148



Şekil 22. $f_{1,1}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{|r-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısının ve sıcaklık değerlerinin grafiği

Örnek 3:

Şekil 23' te gösterildiği gibi boyutu $2,4m \times 3m$ olan plaka, sınır sıcaklığı alt, sağ üst ve sol değerleri sırasıyla $25^\circ C$, $75^\circ C$, $250^\circ C$, $50^\circ C$ olacak şekilde sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Tüm iç düğümlerdeki başlangıç sıcaklığının $0^\circ C$ olduğunu varsayarak $0,6m$ uzunluğunda düğüm noktalarına bölünecektir. Buna göre Gauss-Seidel'i iç düğümlerdeki sıcaklığı bulmak için β ağırlık faktörü çarpanı ile art arda gevşeme yöntemiyle kullanılarak iç düğümlerdeki sıcaklığı ve tüm iç düğümlerde yinelemenin sonunda maksimum mutlak göreceli hatayı $0,0001$ olacak şekilde bulunuz?



Şekil 23. Boyutu ve sınır sıcaklıkları belli olan plaka

Çözüm:

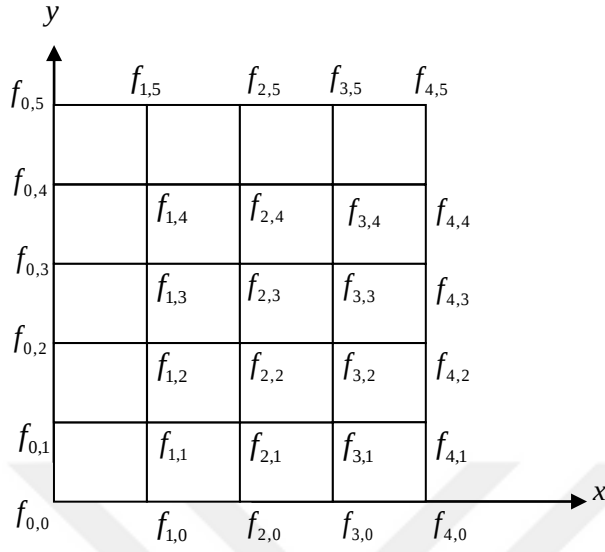
$\Delta x = \Delta y = h = 0.6m$ olacak şekilde x eksenindeki gridlerin adedi m ile y eksenindeki gridlerin adedi n ile gösterilmek üzere;

$$m = \frac{2,4}{0,6}$$

$$= 4$$

$$n = \frac{3}{0,6} = 5$$

bulunur. Tüm düğüm noktaları Şekil 24’ de gösterildiği gibi oluşmuş olur.



Şekil 24. Plakadaki düğüm noktaları

Şekil 24’ te sol ve sağ sınırdaki i ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve m değerlerine sahiptir. Aynı şekilde üst ve alt sınırdaki j ile gösterilen tüm düğümler sırasıyla 0 ve n değerlerine sahiptir.

Sınır şartlarından yola çıkarak,

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_{0,j} = 50, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{4,j} = 75, j = 1, 2, 3, 4 \\ f_{i,0} = 25, i = 1, 2, 3 \\ f_{i,5} = 250, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

olacak şekilde Şekil 24’teki iç noktalar ve sınır noktaları Şekil 25’teki gibi temsil edilebilir.

	$f_{1,5} = 250^\circ$	$f_{2,5} = 250^\circ$	$f_{3,5} = 250^\circ$	
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,4} = 0$	$f_{2,4} = 0$	$f_{3,4} = 0$	$f_{4,4} = 75^\circ$
$f_{0,3} = 50^\circ$	$f_{1,3} = 0$	$f_{2,3} = 0$	$f_{3,3} = 0$	$f_{4,3} = 75^\circ$
$f_{0,2} = 50^\circ$	$f_{1,2} = 0$	$f_{2,2} = 0$	$f_{3,2} = 0$	$f_{4,2} = 75^\circ$
$f_{0,1} = 50^\circ$	$f_{1,1} = 0$	$f_{2,1} = 0$	$f_{3,1} = 0$	$f_{4,1} = 75^\circ$
	$f_{1,0} = 25^\circ$	$f_{2,0} = 25^\circ$	$f_{3,0} = 25^\circ$	

Şekil 25. İç noktalar ve sınır noktaları

$$f_{i,j}^{gevs\text{etme}} = \beta f_{i,j}^{yeni} + (1-\beta) f_{i,j}^{eski} \quad (82)$$

(82) eşitliğiyle iç düğümlerdeki tüm sıcaklıklar β ağırlık faktörü çarpanı ile art arda gevşeme yöntemiyle kullanılarak önceden belirlenmiş bir tolerans içinde olana kadar yinelenerek çözülecek. Burada β ağırlık faktörü çarpanını bulmak için

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \right]^2 \beta^2 - 16\beta + 16 = 0$$

eşitliğinin köklerinden aşırı gevşetme çarpanı bulunarak kaçınıcı adımdan sonra yakınsadığı tespit edilecektir. $p = 4$ ve $q = 5$ ifadeleri seçilmiş kapalı bölgedeki her iki yöndeki hücre sayısıdır.

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2 \beta^2 - 16\beta + 16 = 0$$

kökleri bulmak için kökler toplamı ve kökler farkı

$$\beta_1 + \beta_2 = -\frac{-16}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2}$$

$$|\beta_1 - \beta_2| = \frac{\sqrt{(-16)^2 - 4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2 16}}{\left| \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2 \right|}$$

ifade edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\beta_1 = \frac{89846}{15625} = 5,750144$$

$$\beta_2 = \frac{30263}{25000} = 1,21052$$

bulunur. Burada $\beta_2 \cong 1,2$ ağırlık faktörü çarpanı olarak alınır.

İterasyon 1:

İterasyon 1 için tüm iç grid noktaların sıcaklığı 0°C ile başlar.

$k=0, i=1, j=1$ için;

$$f_{1,1}^1 = \frac{f_{2,1}^0 + f_{0,1}^1 + f_{1,2}^0 + f_{1,0}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 50 + 0 + 25}{4}$$

$$= 18,75^\circ\text{C}$$

$$f_{1,1}^1 = \beta \frac{f_{2,1}^0 + f_{0,1}^1 + f_{1,2}^0 + f_{1,0}^1}{4} + (1 - \beta) f_{1,1}^0$$

$$f_{1,1}^{\text{gevşetme}} = \beta f_{1,1}^{\text{yeni}} + (1 - \beta) f_{1,1}^{\text{eski}}$$

$$= 1,2(18,75) + (1 - 1,2)0$$

$$= 22,5^\circ\text{C}$$

$k=0, i=1, j=2$ için;

$$f_{1,2}^1 = \frac{f_{2,2}^0 + f_{0,2}^1 + f_{1,3}^0 + f_{1,1}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 50 + 0 + 22,5}{4}$$

$$= 18,125^\circ\text{C}$$

$$f_{1,2}^1 = \beta \frac{f_{2,2}^0 + f_{0,2}^1 + f_{1,3}^0 + f_{1,1}^1}{4} + (1 - \beta) f_{1,2}^0$$

$$\begin{aligned}
f_{1,2}^{gevşetme} &= \beta f_{1,2}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,2}^{eski} \\
&= 1,2(18,125) + (1-1,2)0 \\
&= 21,75^\circ C
\end{aligned}$$

k=0, i=1, j=3 için;

$$\begin{aligned}
f_{1,3}^1 &= \frac{f_{2,3}^0 + f_{0,3}^1 + f_{1,4}^0 + f_{1,2}^1}{4} \\
&= \frac{0 + 50 + 0 + 21,75}{4} \\
&= 17,9375^\circ C
\end{aligned}$$

$$f_{1,3}^1 = \beta \frac{f_{2,3}^0 + f_{0,3}^1 + f_{1,4}^0 + f_{1,2}^1}{4} + (1-\beta) f_{1,3}^0$$

$$\begin{aligned}
f_{1,3}^{gevşetme} &= \beta f_{1,3}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,3}^{eski} \\
&= 1,2(17,9375) + (1-1,2)0 \\
&= 21,525^\circ C
\end{aligned}$$

k=0, i=1, j=4 için;

$$\begin{aligned}
f_{1,4}^1 &= \frac{f_{2,4}^0 + f_{0,4}^1 + f_{1,5}^0 + f_{1,3}^1}{4} \\
&= \frac{0 + 50 + 250 + 21,525}{4} \\
&= 80,38125^\circ C
\end{aligned}$$

$$f_{1,4}^1 = \beta \frac{f_{2,4}^0 + f_{0,4}^1 + f_{1,5}^0 + f_{1,3}^1}{4} + (1-\beta) f_{1,4}^0$$

$$\begin{aligned}
f_{1,4}^{gevşetme} &= \beta f_{1,4}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,4}^{eski} \\
&= 1,2(80,38125) + (1-1,2)0 \\
&= 96,4575^\circ C
\end{aligned}$$

$k=0, i=2, j=1$ için;

$$f_{2,1}^1 = \frac{f_{3,1}^0 + f_{1,1}^1 + f_{2,2}^0 + f_{2,0}^1}{4}$$
$$= \frac{0 + 22,5 + 0 + 25}{4}$$

$$= 11,875^\circ\text{C}$$

$$f_{2,1}^1 = \beta \frac{f_{3,1}^0 + f_{1,1}^1 + f_{2,2}^0 + f_{2,0}^1}{4} + (1-\beta) f_{2,1}^0$$

$$f_{2,1}^{\text{gevşetme}} = \beta f_{2,1}^{\text{yeni}} + (1-\beta) f_{2,1}^{\text{eski}}$$

$$= 1,2(11,875) + (1-1,2)0$$

$$= 14,25^\circ\text{C}$$

$k=0, i=2, j=2$ için;

$$f_{2,2}^1 = \frac{f_{3,2}^0 + f_{1,2}^1 + f_{2,3}^0 + f_{2,1}^1}{4}$$
$$= \frac{0 + 21,75 + 0 + 14,25}{4}$$

$$= 9^\circ\text{C}$$

$$f_{2,2}^1 = \beta \frac{f_{3,2}^0 + f_{1,2}^1 + f_{2,3}^0 + f_{2,1}^1}{4} + (1-\beta) f_{2,2}^0$$

$$f_{2,2}^{\text{gevşetme}} = \beta f_{2,2}^{\text{yeni}} + (1-\beta) f_{2,2}^{\text{eski}}$$

$$= 1,2(9) + (1-1,2)0$$

$$= 10,8^\circ\text{C}$$

$k=0, i=2, j=3$ için;

$$f_{2,3}^1 = \frac{f_{3,3}^0 + f_{1,3}^1 + f_{2,4}^0 + f_{2,2}^1}{4}$$
$$= \frac{0 + 21,525 + 0 + 10,8}{4}$$

$$= 8,08125^\circ\text{C}$$

$$f_{2,3}^1 = \beta \frac{f_{3,3}^0 + f_{1,3}^1 + f_{2,4}^0 + f_{2,2}^1}{4} + (1-\beta) f_{2,3}^0$$

$$f_{2,3}^{gevşetme} = \beta f_{2,3}^{yeni} + (1-\beta) f_{2,3}^{eski}$$

$$= 1,2(8,08125) + (1-1,2)0$$

$$= 9,6975^\circ C$$

k=0, i=2, j=4 için;

$$f_{2,4}^1 = \frac{f_{3,4}^0 + f_{1,4}^1 + f_{2,5}^0 + f_{2,3}^1}{4}$$

$$= \frac{0 + 96,4575 + 250 + 9,6975}{4}$$

$$= 89,03875^\circ C$$

$$f_{2,4}^1 = \beta \frac{f_{3,4}^0 + f_{1,4}^1 + f_{2,5}^0 + f_{2,3}^1}{4} + (1-\beta) f_{2,4}^0$$

$$f_{2,4}^{gevşetme} = \beta f_{2,4}^{yeni} + (1-\beta) f_{2,4}^{eski}$$

$$= 1,2(89,03875) + (1-1,2)0$$

$$= 106,8465^\circ C$$

k=0, i=3, j=1 için;

$$f_{3,1}^1 = \frac{f_{4,1}^0 + f_{2,1}^1 + f_{3,2}^0 + f_{3,0}^1}{4}$$

$$= \frac{75 + 14,25 + 0 + 25}{4}$$

$$= 28,5625^\circ C$$

$$f_{3,1}^1 = \beta \frac{f_{4,1}^0 + f_{2,1}^1 + f_{3,2}^0 + f_{3,0}^1}{4} + (1-\beta) f_{3,1}^0$$

$$f_{3,1}^{gevşetme} = \beta f_{3,1}^{yeni} + (1-\beta) f_{3,1}^{eski}$$

$$= 1,2(28,5625) + (1-1,2)0$$

$$= 34,275^\circ C$$

$k=0, i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^1 = \frac{f_{4,2}^0 + f_{2,2}^1 + f_{3,3}^0 + f_{3,1}^1}{4}$$
$$= \frac{75 + 10,8 + 0 + 34,275}{4}$$

$$= 30,01875^\circ\text{C}$$

$$f_{3,2}^1 = \beta \frac{f_{4,2}^0 + f_{2,2}^1 + f_{3,3}^0 + f_{3,1}^1}{4} + (1 - \beta) f_{3,2}^0$$

$$f_{3,2}^{\text{gevşetme}} = \beta f_{3,2}^{\text{yeni}} + (1 - \beta) f_{3,2}^{\text{eski}}$$

$$= 1,2(30,01875) + (1 - 1,2)0$$

$$= 36,0225^\circ\text{C}$$

$k=0, i=3, j=3$ için;

$$f_{3,3}^1 = \frac{f_{4,3}^0 + f_{2,3}^1 + f_{3,4}^0 + f_{3,2}^1}{4}$$
$$= \frac{75 + 9,6975 + 0 + 36,0225}{4}$$

$$= 30,18^\circ\text{C}$$

$$f_{3,3}^1 = \beta \frac{f_{4,3}^0 + f_{2,3}^1 + f_{3,4}^0 + f_{3,2}^1}{4} + (1 - \beta) f_{3,3}^0$$

$$f_{3,3}^{\text{gevşetme}} = \beta f_{3,3}^{\text{yeni}} + (1 - \beta) f_{3,3}^{\text{eski}}$$

$$= 1,2(30,18) + (1 - 1,2)0$$

$$= 36,216^\circ\text{C}$$

$k=0, i=3, j=4$ için;

$$f_{3,4}^1 = \frac{f_{4,4}^0 + f_{2,4}^1 + f_{3,5}^0 + f_{3,3}^1}{4}$$
$$= \frac{75 + 106,8465 + 250 + 36,216}{4}$$

$$= 117,015625^\circ\text{C}$$

$$f_{3,4}^1 = \beta \frac{f_{4,4}^0 + f_{2,4}^1 + f_{3,5}^0 + f_{3,3}^1}{4} + (1-\beta) f_{3,4}^0$$

$$f_{3,4}^{gevşetme} = \beta f_{3,4}^{yeni} + (1-\beta) f_{3,4}^{eski}$$

$$= 1,2(117,015625) + (1-1,2)0$$

$$= 140,41875^\circ C$$

İterasyon 2:

İterasyon 2’de iç grid noktaların sıcaklığı için iterasyon 1’deki iç düğüm noktaları kullanılır.

$k=1, i=1, j=1$ için:

$$f_{1,1}^2 = \frac{f_{2,1}^1 + f_{0,1}^2 + f_{1,2}^1 + f_{1,0}^2}{4}$$

$$= \frac{14,25 + 50 + 21,75 + 50}{4}$$

$$= 27,75^\circ C$$

$$f_{1,1}^2 = \beta \frac{f_{2,1}^1 + f_{0,1}^2 + f_{1,2}^1 + f_{1,0}^2}{4} + (1-\beta) f_{1,1}^1$$

$$f_{1,1}^{gevşetme} = \beta f_{1,1}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,1}^{eski}$$

$$= 1,2(27,75) + (1-1,2)27,75$$

$$= 28,8^\circ C$$

$$|\varepsilon|_{1,1} = \left| \frac{f_{1,1}^2 - f_{1,1}^1}{f_{1,1}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{28,8 - 22,5}{28,8} \right| \times 100$$

$$= \%21,875$$

$k=1, i=1, j=2$ için:

$$f_{1,2}^2 = \frac{f_{2,2}^1 + f_{0,2}^2 + f_{1,3}^1 + f_{1,1}^2}{4}$$

$$= \frac{10,8 + 50 + 21,525 + 28,8}{4}$$

$$= 27,78125^{\circ}C$$

$$f_{1,2}^2 = \beta \frac{f_{2,2}^1 + f_{0,2}^2 + f_{1,3}^1 + f_{1,1}^2}{4} + (1-\beta) f_{1,2}^1$$

$$f_{1,2}^{gevşetme} = \beta f_{1,2}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,2}^{eski}$$

$$= 1,2(27,78125) + (1-1,2)21,75$$

$$= 28,9875^{\circ}C$$

$$|\varepsilon|_{1,2} = \left| \frac{f_{1,2}^2 - f_{1,2}^1}{f_{1,2}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{28,9875 - 21,75}{28,9875} \right| \times 100$$

$$= \%24,96765847$$

k=1, i=1, j=3 için;

$$f_{1,3}^2 = \frac{f_{2,3}^1 + f_{0,3}^2 + f_{1,4}^1 + f_{1,2}^2}{4}$$

$$= \frac{9,6975 + 50 + 96,4575 + 28,9875}{4}$$

$$= 46,285625^{\circ}C$$

$$f_{1,3}^2 = \beta \frac{f_{2,3}^1 + f_{0,3}^2 + f_{1,4}^1 + f_{1,2}^2}{4} + (1-\beta) f_{1,3}^1$$

$$f_{1,3}^{gevşetme} = \beta f_{1,3}^{yeni} + (1-\beta) f_{1,3}^{eski}$$

$$= 1,2(46,285625) + (1-1,2)21,525$$

$$= 51,23775^{\circ}C$$

$$|\varepsilon|_{1,3} = \left| \frac{f_{1,3}^2 - f_{1,3}^1}{f_{1,3}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{51,23775 - 21,525}{51,23775} \right| \times 100$$

$$= \%57,98995858$$

$k=1, i=1, j=4$ için:

$$f_{1,4}^2 = \frac{f_{2,4}^1 + f_{0,4}^2 + f_{1,5}^1 + f_{1,3}^2}{4}$$

$$= \frac{106,8465 + 50 + 250 + 51,23775}{4}$$

$$= 114,5210625^\circ C$$

$$f_{1,4}^2 = \beta \frac{f_{2,4}^1 + f_{0,4}^2 + f_{1,5}^1 + f_{1,3}^2}{4} + (1 - \beta) f_{1,4}^1$$

$$f_{1,4}^{gevşetme} = \beta f_{1,4}^{yeni} + (1 - \beta) f_{1,4}^{eski}$$

$$= 1,2(114,5210625) + (1 - 1,2)96,4575$$

$$= 118,133775^\circ C$$

$$|\varepsilon|_{1,4} = \left| \frac{f_{1,4}^2 - f_{1,4}^1}{f_{1,4}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{118,133775 - 96,4575}{118,133775} \right| \times 100$$

$$= \%18,34892265$$

$k=1, i=2, j=1$ için:

$$f_{2,1}^2 = \frac{f_{3,1}^1 + f_{1,1}^2 + f_{2,2}^1 + f_{2,0}^2}{4}$$

$$= \frac{34,275 + 28,8 + 10,8 + 25}{4}$$

$$= 24,71875^\circ C$$

$$f_{2,1}^2 = \beta \frac{f_{3,1}^1 + f_{1,1}^2 + f_{2,2}^1 + f_{2,0}^2}{4} + (1 - \beta) f_{2,1}^1$$

$$\begin{aligned}
f_{2,1}^{gevşetme} &= \beta f_{2,1}^{yeni} + (1-\beta) f_{2,1}^{eski} \\
&= 1,2(24,71875) + (1-1,2)14,25 \\
&= 26,8125^\circ C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon|_{2,1} &= \left| \frac{f_{2,1}^2 - f_{2,1}^1}{f_{2,1}^2} \right| \times 100 \\
&= \left| \frac{26,8125 - 14,25}{26,8125} \right| \times 100 \\
&= \%46,8531469
\end{aligned}$$

k=1, i=2, j=2 için;

$$\begin{aligned}
f_{2,2}^2 &= \frac{f_{3,2}^1 + f_{1,2}^2 + f_{2,3}^1 + f_{2,1}^2}{4} \\
&= \frac{36,0225 + 28,9875 + 9,6975 + 26,8125}{4} \\
&= 25,38^\circ C
\end{aligned}$$

$$f_{2,2}^2 = \beta \frac{f_{3,2}^1 + f_{1,2}^2 + f_{2,3}^1 + f_{2,1}^2}{4} + (1-\beta) f_{2,2}^1$$

$$\begin{aligned}
f_{2,2}^{gevşetme} &= \beta f_{2,2}^{yeni} + (1-\beta) f_{2,2}^{eski} \\
&= 1,2(25,38) + (1-1,2)10,8 \\
&= 28,296^\circ C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon|_{2,2} &= \left| \frac{f_{2,2}^2 - f_{2,2}^1}{f_{2,2}^2} \right| \times 100 \\
&= \left| \frac{28,296 - 10,8}{28,296} \right| \times 100 \\
&= \%61,8320611
\end{aligned}$$

k=1, i=2, j=3 için;

$$f_{2,3}^2 = \frac{f_{3,3}^1 + f_{1,3}^2 + f_{2,4}^1 + f_{2,2}^2}{4}$$

$$= \frac{36,216 + 51,23775 + 106,8465 + 28,296}{4}$$

$$= 55,6490625^{\circ}C$$

$$f_{2,3}^2 = \beta \frac{f_{3,3}^1 + f_{1,3}^2 + f_{2,4}^1 + f_{2,2}^2}{4} + (1 - \beta) f_{2,3}^1$$

$$f_{2,3}^{gevşetme} = \beta f_{2,3}^{yeni} + (1 - \beta) f_{2,3}^{eski}$$

$$= 1,2(55,6490625) + (1 - 1,2)9,6975$$

$$= 64,839375^{\circ}C$$

$$|\varepsilon|_{2,3} = \left| \frac{f_{2,3}^2 - f_{2,3}^1}{f_{2,3}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{64,839375 - 9,6975}{64,839375} \right| \times 100$$

$$= \%85,0438102$$

$k=1, i=2, j=4$ için;

$$f_{2,4}^2 = \frac{f_{3,4}^1 + f_{1,4}^2 + f_{2,5}^1 + f_{2,3}^2}{4}$$

$$= \frac{140,41875 + 118,133775 + 250 + 64,839375}{4}$$

$$= 143,347975^{\circ}C$$

$$f_{2,4}^2 = \beta \frac{f_{3,4}^1 + f_{1,4}^2 + f_{2,5}^1 + f_{2,3}^2}{4} + (1 - \beta) f_{2,4}^1$$

$$f_{2,4}^{gevşetme} = \beta f_{2,4}^{yeni} + (1 - \beta) f_{2,4}^{eski}$$

$$= 1,2(143,347975) + (1 - 1,2)106,8465$$

$$= 150,64827^{\circ}C$$

$$|\varepsilon|_{2,4} = \left| \frac{f_{2,4}^2 - f_{2,4}^1}{f_{2,4}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{150,64827 - 106,8465}{150,64827} \right| \times 100$$

$$= \%29,0755214$$

$k=1, i=3, j=1$ için;

$$f_{3,1}^2 = \frac{f_{4,1}^1 + f_{2,1}^2 + f_{3,2}^1 + f_{3,0}^2}{4}$$

$$= \frac{75 + 26,8125 + 36,0225 + 25}{4}$$

$$= 40,70875^\circ C$$

$$f_{3,1}^2 = \beta \frac{f_{4,1}^1 + f_{2,1}^2 + f_{3,2}^1 + f_{3,0}^2}{4} + (1-\beta) f_{3,1}^1$$

$$f_{3,1}^{gevşetme} = \beta f_{3,1}^{yeni} + (1-\beta) f_{3,1}^{eski}$$

$$= 1,2(40,70875) + (1-1,2)34,275$$

$$= 41,9955^\circ C$$

$$|\varepsilon|_{3,1} = \left| \frac{f_{3,1}^2 - f_{3,1}^1}{f_{3,1}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{41,9955 - 34,275}{41,9955} \right| \times 100$$

$$= \%18,38411258$$

$k=1, i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^2 = \frac{f_{4,2}^1 + f_{2,2}^2 + f_{3,3}^1 + f_{3,1}^2}{4}$$

$$= \frac{75 + 28,296 + 36,216 + 41,9955}{4}$$

$$= 45,376875^\circ C$$

$$f_{3,2}^2 = \beta \frac{f_{4,2}^1 + f_{2,2}^2 + f_{3,3}^1 + f_{3,1}^2}{4} + (1-\beta) f_{3,2}^1$$

$$\begin{aligned}
f_{3,2}^{gevşetme} &= \beta f_{3,2}^{yeni} + (1-\beta) f_{3,2}^{eski} \\
&= 1,2(45,376875) + (1-1,2)36,0225 \\
&= 47,24775^\circ C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon|_{3,2} &= \left| \frac{f_{3,2}^2 - f_{3,2}^1}{f_{3,2}^2} \right| \times 100 \\
&= \left| \frac{47,24775 - 36,0225}{47,24775} \right| \times 100 \\
&= \%23,7582742
\end{aligned}$$

k=1, i=3, j=3 için:

$$\begin{aligned}
f_{3,3}^2 &= \frac{f_{4,3}^1 + f_{2,3}^2 + f_{3,4}^1 + f_{3,2}^2}{4} \\
&= \frac{75 + 64,839375 + 140,41875 + 47,24775}{4} \\
&= 81,87646875^\circ C
\end{aligned}$$

$$f_{3,3}^2 = \beta \frac{f_{4,3}^1 + f_{2,3}^2 + f_{3,4}^1 + f_{3,2}^2}{4} + (1-\beta) f_{3,3}^1$$

$$\begin{aligned}
f_{3,3}^{gevşetme} &= \beta f_{3,3}^{yeni} + (1-\beta) f_{3,3}^{eski} \\
&= 1,2(81,87646875) + (1-1,2)36,216 \\
&= 91,0085625^\circ C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon|_{3,3} &= \left| \frac{f_{3,3}^2 - f_{3,3}^1}{f_{3,3}^2} \right| \times 100 \\
&= \left| \frac{91,0085625 - 36,216}{91,0085625} \right| \times 100 \\
&= \%60,20594216
\end{aligned}$$

k=1, i=3, j=4 için:

$$f_{3,4}^2 = \frac{f_{4,4}^1 + f_{2,4}^2 + f_{3,5}^1 + f_{3,3}^2}{4}$$

$$= \frac{75 + 150,64827 + 250 + 91,0085625}{4}$$

$$= 141,9132998^\circ C$$

$$f_{3,4}^2 = \beta \frac{f_{4,4}^1 + f_{2,4}^2 + f_{3,5}^1 + f_{3,3}^2}{4} + (1 - \beta) f_{3,4}^1$$

$$f_{3,4}^{gevşetme} = \beta f_{3,4}^{yeni} + (1 - \beta) f_{3,4}^{eski}$$

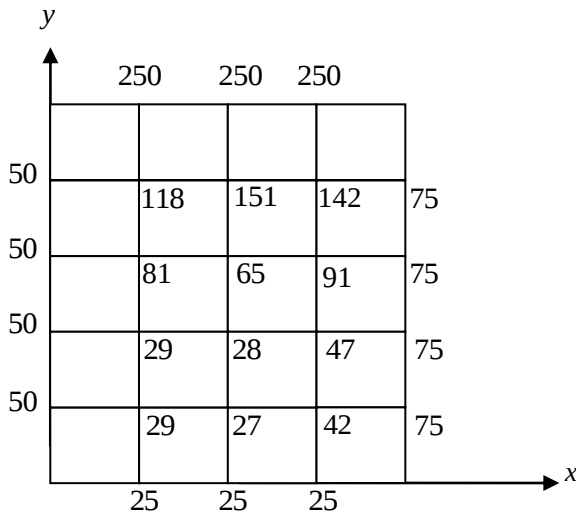
$$= 1,2(141,6642081) + (1 - 1,2)140,41875$$

$$= 141,9132998^\circ C$$

$$|\varepsilon|_{3,4} = \left| \frac{f_{3,4}^2 - f_{3,4}^1}{f_{3,4}^2} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{141,9132998 - 140,41875}{141,9132998} \right| \times 100$$

$$= \%1,053142836$$



Şekil 26. İkinci iterasyon sonundaki sıcaklık dağılımı

Tüm sıcaklık değerleri on birinci tekrar sonunda 0,0001 sapma ile bulunmuştur. Aşağıda; Tablo 4’ te art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 1.

ve 8. iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri, Tablo 5' te art arda aşırı gevssetme arpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 9. ve 16. iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri, Tablo 6' da art arda aşırı gevssetme arpanı (SOR) yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri, Tablo 7' de art arda aşırı gevssetme arpanı (SOR) yöntemine göre $f_{3,4}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri listelenmektedir.



Tablo 4. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 1. ve 8. iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri

Düğüm Noktaları	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.	
	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri
$f_{1,1}$	22,5		28,8	33,48	38,716673	43,701368	47,529333	47,765139	47,979785							
$f_{1,2}$	21,75	28,9875		43,106625	55,030475	63,456573	65,112767	65,609873	65,782156							
$f_{1,3}$	21,525	51,23775	51,23775	72,576383	85,965850	88,545012	89,614756	89,918240	90,007092							
$f_{1,4}$	96,4575	118,133775	118,133775	133,340641	136,046523	137,032804	137,431666	137,532504	137,560159							
$f_{2,1}$	14,25	26,8125	26,8125	33,26895	41,451868	49,108784	50,790584	51,166169	51,315075							
$f_{2,2}$	10,8	28,296	28,296	50,87961	68,541675	73,272594	74,728195	75,115745	75,244726							
$f_{2,3}$	9,6975	64,839375	64,839375	96,565973	102,957510	105,600292	106,429099	106,654474	106,719826							
$f_{2,4}$	106,8465	150,64827	150,64827	156,416320	158,928682	159,845998	160,144550	160,215109	160,235942							
$f_{3,1}$	34,275	41,9955	41,9955	45,75591	54,087481	56,239208	56,920954	57,065501	57,123786							
$f_{3,2}$	36,0225	47,24775	47,24775	69,343675	74,413563	76,438735	76,999470	77,141213	77,192954							
$f_{3,3}$	36,216	91,008563	91,008563	96,645172	99,893024	100,974910	101,289109	101,368809	101,395040							
$f_{3,4}$	140,41875	141,913300	141,913300	145,035788	146,139354	146,518402	146,626418	146,649892	146,659316							

Tablo 5. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) göre düğüm noktalarının 9. ve 16. iterasyonlar arasındaki değişimi ve değerleri

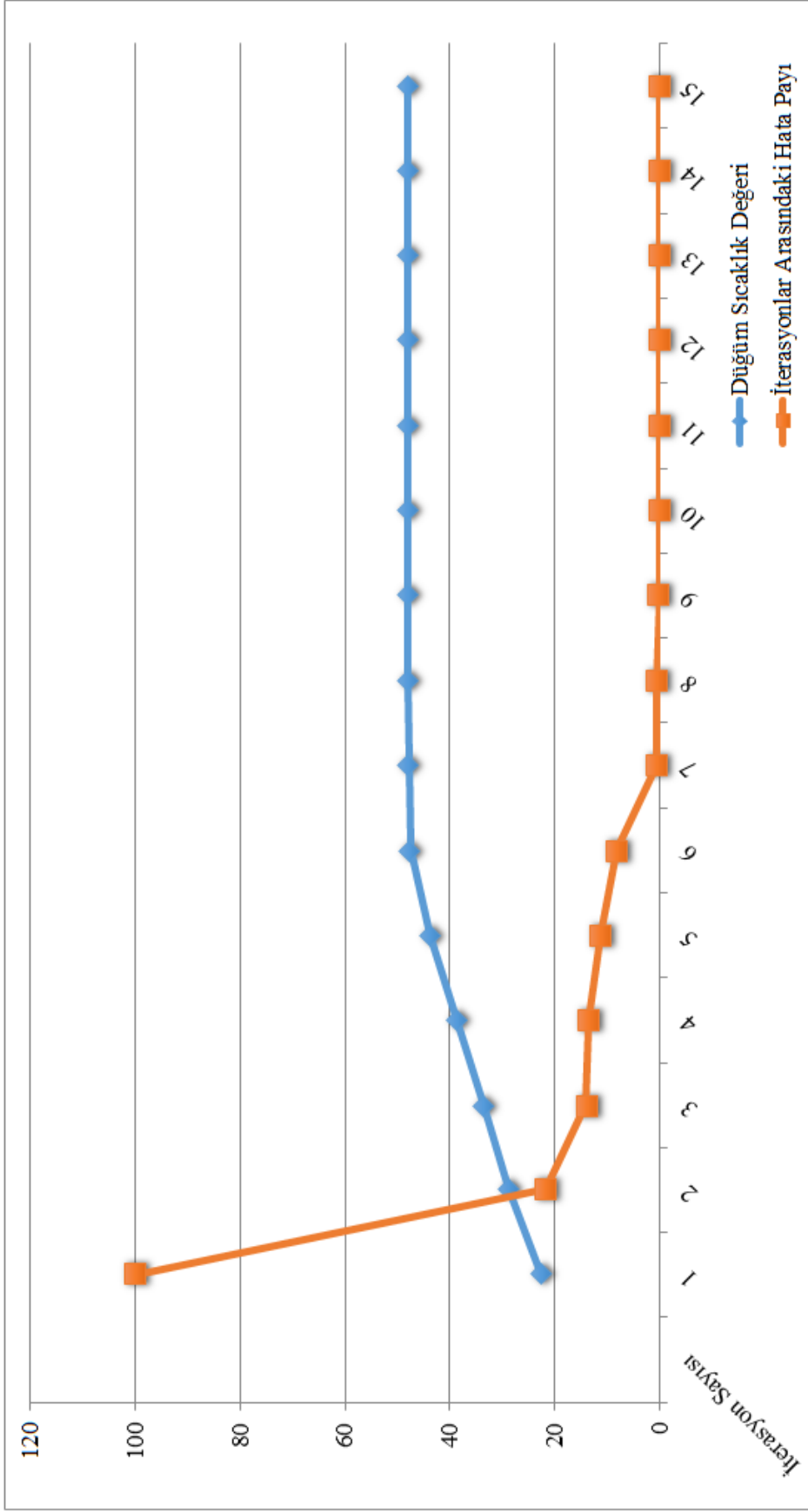
Düğüm Noktaları	9.		10.		11.		12.		13.		14.		15.		16.	
	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri	İterasyon Değerleri
$f_{1,1}$	48,033213	48,049332	48,053825	48,055087	48,055483	48,055591	48,055623	48,055632								
$f_{1,2}$	65,829078	65,842633	65,846551	65,847705	65,848033	65,848129	65,848157	65,848165								
$f_{1,3}$	90,031301	90,038665	90,040871	90,041465	90,041644	90,041696	90,041711	90,041715								
$f_{1,4}$	137,568141	137,570794	137,571480	137,571681	137,571741	137,571758	137,571763	137,571764								
$f_{2,1}$	51,357502	51,369672	51,372957	51,373963	51,374259	51,374341	51,374365	51,374372								
$f_{2,2}$	75,280863	75,291100	75,294091	75,294966	75,295218	75,295291	75,295312	75,295318								
$f_{2,3}$	106,738978	106,744667	106,746278	106,746742	106,746878	106,746917	106,746929	106,746932								
$f_{2,4}$	160,242742	160,244591	160,245126	160,245279	160,245325	160,245338	160,245341	160,245343								
$f_{3,1}$	57,140380	57,144714	57,146003	57,146389	57,146501	57,146532	57,146541	57,146544								
$f_{3,2}$	77,206294	77,210196	77,211335	77,211671	77,211766	77,211793	77,211801	77,211804								
$f_{3,3}$	101,402368	101,404486	101,405104	101,405280	101,405332	101,405347	101,405351	101,405352								
$f_{3,4}$	146,661670	146,662389	146,662591	146,662650	146,662667	146,662672	146,662673	146,662674								

Tablo 6. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{1,1}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri

İterasyon Sayısı (n)	$f_{1,1}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)	İterasyon Sayısı (n)	$f_{1,1}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)
1	22,5	100	9	48,033213	0,111230
2	28,8	21,875	10	48,049332	0,033547
3	33,48	13,978495	11	48,053825	0,009351
4	38,716673	13,525626	12	48,055087	0,002627
5	43,701368	11,406269	13	48,055483	0,000823
6	47,529333	8,053900	14	48,055591	0,000225
7	47,765139	0,493677	15	48,055623	0,000067
8	47,979785	0,447369	16	48,055632	0,000019

Tablo 7. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{3,4}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{n-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerleri

İterasyon Sayısı (n)	$f_{3,4}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)	İterasyon Sayısı (n)	$f_{3,4}$ Düğümünün Sıcaklık Değeri	İterasyonlar Arasındaki Hata Payı ($ \varepsilon _{n-1,n}$)
1	140,418750	100	7	146,649892	0,016007
2	141,913300	1,053143	8	146,659316	0,006426
3	145,035788	2,152908	9	146,661670	0,001605
4	146,139354	0,755147	10	146,662389	0,000490
5	146,518402	0,258703	11	146,662591	0,000138
6	146,626418	0,073668	12	146,662650	0,000040



Şekil 27. Art arda aşırı gevşetme çarpanı (SOR) yöntemine göre $f_{i,j}$ düğüm noktasının $|\varepsilon|_{tr-1,n} = 0,0001$ hata ile ulaştığı iterasyon sayısı ve değerlerinin grafiği

Örnek 4:

Uzunluğu 0,06 metre olan çelik bir çubuğun başlangıç sıcaklığı 15°C dir. Bu çelik çubuk sol uçtan 125°C ' lik sol uçtan ise 25°C ' lik sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Çubuktaki sıcaklık dağılımını $\Delta x = 0,01\text{m}$, $\Delta t = 2\text{sn}$ olacak şekilde $t = 0$ ile $t = 8$ saniye arasında açık (explicit) yöntem kullanarak bulunuz.

$$\left(k = 54 \frac{\text{W}}{\text{m} - \text{K}}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 490 \frac{\text{J}}{\text{kg} - \text{K}} \right)$$

Çözüm:

Açık (explicit) yöntemi kullanmak için sırasıyla;

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$= \frac{54}{7800 \times 490}$$

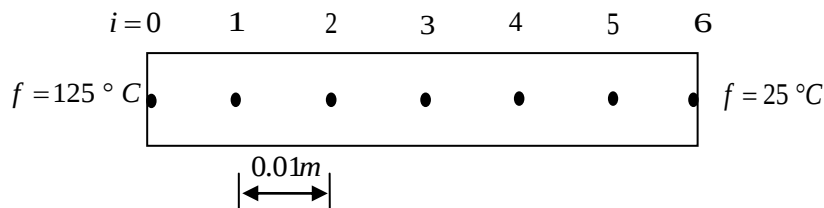
$$= 0,00001412873 \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$= 0,00001412873 \frac{2}{(0,01)^2}$$

$$= 0,282574$$

$$\text{Zaman (k) adımı sayısı} = \frac{t_{\text{son}} - t_{\text{ilk}}}{\Delta t} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$



Şekil 28. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram

Sınır koşulları;

$$\left. \begin{array}{l} f_0^k = 125^\circ C \\ f_6^k = 25^\circ C \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (83)$$

Çubuğun başlangıç sıcaklığı $15^\circ C$ olarak verilmiştir. Yani çubuğun içindeki tüm düğümlerin sıcaklıkları, (83)' te verilen sınır düğümleri hariç $t = 0$ anında $15^\circ C$ 'dir. Bu mevcut durum şu şekilde temsil edilebilir.

$$f_i^0 = 15^\circ C, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Çubuk içindeki düğümlerde başlangıç sıcaklığı ($t = 0$ için)

$$f_0^0 = 125^\circ C$$

$$f_1^0 = 15^\circ C$$

$$f_2^0 = 15^\circ C$$

$$f_3^0 = 15^\circ C$$

$$f_4^0 = 15^\circ C$$

$$f_5^0 = 15^\circ C$$

$$f_6^0 = 25^\circ C$$

olur. Açık (explicit) yöntemde kullanılan

$$f_i^{k+1} = f_i^k + r(f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (84)$$

denklem (84) ile aşağıdaki gibi çözülür.

$$t = 2 \text{ iken}$$

$k=0$ ve $i=0$ için;

$$f_0^1 = 125^\circ C$$

$k=0$ ve $i=1$ için;

$$f_1^1 = f_1^0 + r(f_2^0 - 2f_1^0 + f_0^0)$$

$$= 15 + 0,282574(15 - 2(15) + 125)$$

$$= 15 + 0,282574(110)$$

$$= 15 + 31,0832025$$

$$= 46,0832025^{\circ}\text{C}$$

$k=0$ ve $i=2$ için;

$$f_2^1 = f_2^0 + r(f_3^0 - 2f_2^0 + f_1^0)$$

$$= 15 + 0,282574(15 - 2(15) + 15)$$

$$= 15 + 0,282574(0)$$

$$= 15 + 0$$

$$= 15^{\circ}\text{C}$$

$k=0$ ve $i=3$ için;

$$f_3^1 = f_3^0 + r(f_4^0 - 2f_3^0 + f_2^0)$$

$$= 15 + 0,282574(15 - 2(15) + 15)$$

$$= 15 + 0,282574(0)$$

$$= 15 + 0$$

$$= 15^{\circ}\text{C}$$

$k=0$ ve $i=4$ için;

$$= 15 + 0,282574(0)$$

$$= 15 + 0$$

$$= 15^{\circ}\text{C}$$

$k=0$ ve $i=5$ için;

$$f_5^1 = f_5^0 + r(f_6^0 - 2f_5^0 + f_4^0)$$

$$= 15 + 0,282574(25 - 2(15) + 15)$$

$$= 15 + 0,282574(10)$$

$$= 15 + 2,8257457$$

$$= 17,8257457^{\circ}C$$

$k=0$ ve $i=6$ için;

$$f_6^1 = 25^{\circ}C$$

$t = 4$ iken

$k=1$ ve $i=0$ için;

$$f_0^2 = 125^{\circ}C$$

$k=1$ ve $i=1$ için;

$$f_1^2 = f_1^1 + r(f_2^1 - 2f_1^1 + f_0^1)$$

$$= 46,0832025 + 0,282574(15 - 2(46,0832025) + 125)$$

$$= 46,0832025 + 0,282574(47,8335950)$$

$$= 46,0832025 + 13,5165575$$

$$= 59,5997600^{\circ}C$$

$k=1$ ve $i=2$ için;

$$f_2^2 = f_2^1 + r(f_3^1 - 2f_2^1 + f_1^1)$$

$$= 15 + 0,282574(15 - 2(15) + 46,0832025)$$

$$= 15 + 0,282574(31,0832025)$$

$$= 15 + 8,7833225$$

$$= 23,7833225^{\circ}C$$

$k=1$ ve $i=3$ için;

$$f_3^2 = f_3^1 + r(f_4^1 - 2f_3^1 + f_2^1)$$

$$= 15 + 0,282574(15 - 2(15) + 15)$$

$$= 15 + 0,282574(0)$$

$$=15+0$$

$$=15^{\circ}C$$

k=1 ve i=4 için;

$$f_4^2 = f_4^1 + r(f_5^1 - 2f_4^1 + f_3^1)$$

$$=15+0,282574(17,8257457-2(15)+15)$$

$$=15+0,282574(2,8257457)$$

$$=15+0,7984839$$

$$=15,7984839^{\circ}C$$

k=1 ve i=5 için;

$$f_5^2 = f_5^1 + r(f_6^1 - 2f_5^1 + f_4^1)$$

$$=17,8257457+0,282574(25-2(17,8257457)+15)$$

$$=17,8257457+0,282574(4,3485086)$$

$$=17,8257457+1,2287780$$

$$=19,0545236^{\circ}C$$

k=1 ve i=6 için;

$$f_6^2 = 25^{\circ}C$$

$$t=6 \text{ iken}$$

k=2 ve i=0 için;

$$f_0^3 = 125^{\circ}C$$

k=2 ve i=1 için;

$$f_1^3 = f_1^2 + r(f_2^2 - 2f_1^2 + f_0^2)$$

$$=59,5997600+0,282574(23,7833225-2(59,5997600)+125)$$

$$=59,5997600+0,282574(29,5838026)$$

$$= 59,5997600 + 8,3596302$$

$$= 67,9593902^{\circ}C$$

k=2 ve i=2 için;

$$f_2^3 = f_2^2 + r(f_3^2 - 2f_2^2 + f_1^2)$$

$$= 23,7833225 + 0,282574(15 - 2(23,7833225) + 59,5997600)$$

$$= 23,7833225 + 0,282574(27,0331149)$$

$$= 23,7833225 + 7,6388708$$

$$= 31,4221933^{\circ}C$$

k=2 ve i=3 için;

$$f_3^3 = f_3^2 + r(f_4^2 - 2f_3^2 + f_2^2)$$

$$= 15 + 0,282574(15,7984839 - 2(15) + 23,7833225)$$

$$= 15 + 0,282574(9,5818064)$$

$$= 15 + 2,7075748$$

$$= 17,7075748^{\circ}C$$

k=2 ve i=4 için;

$$f_4^3 = f_4^2 + r(f_5^2 - 2f_4^2 + f_3^2)$$

$$= 15 + 0,282574(19,0545236 - 2(15,7984839) + 15)$$

$$= 15 + 0,282574(2,4575559)$$

$$= 15 + 0,6944428$$

$$= 16,4929267^{\circ}C$$

k=2 ve i=5 için;

$$f_5^3 = f_5^2 + r(f_6^2 - 2f_5^2 + f_4^2)$$

$$= 19,0545236 + 0,282574(25 - 2(19,0545236) + 15,7984839)$$

$$= 19,0545236 + 0,282574(2,6894366)$$

$$= 19,0545236 + 0,7599664$$

$$= 19,8144900^{\circ}\text{C}$$

k=2 ve i=6 için;

$$f_6^3 = 25^{\circ}\text{C}$$

t = 8 iken

k=3 ve i=0 için;

$$f_0^4 = 125^{\circ}\text{C}$$

k=3 ve i=1 için;

$$f_1^4 = f_1^3 + r(f_2^3 - 2f_1^3 + f_0^3)$$

$$= 67,9593902 + 0,282574(31,4221933 - 2(67,9593902) + 125)$$

$$= 67,9593902 + 0,282574(20,5034129)$$

$$= 67,9593902 + 5,7937430$$

$$= 73,7531333^{\circ}\text{C}$$

k=3 ve i=2 için;

$$f_2^4 = f_2^3 + r(f_3^3 - 2f_2^3 + f_1^3)$$

$$= 31,4221933 + 0,282574(17,7075748 - 2(31,4221933) + 67,9593902)$$

$$= 31,4221933 + 0,282574(22,8225784)$$

$$= 31,4221933 + 6,4490802$$

$$= 37,8712735^{\circ}\text{C}$$

k=3 ve i=3 için;

$$f_3^4 = f_3^3 + r(f_4^3 - 2f_3^3 + f_2^3)$$

$$= 17,7075748 + 0,282574(16,4929267 - 2(17,7075748) + 31,4221933)$$

$$= 17,7075748 + 0,282574(12,4999704)$$

$$= 17,7075748 + 3,5321737$$

$$= 21,2397485^{\circ}\text{C}$$

$k=3$ ve $i=4$ için;

$$f_4^4 = f_4^3 + r(f_5^3 - 2f_4^3 + f_3^3)$$

$$= 16,4929267 + 0,282574(19,8144900 - 2(16,4929267) + 17,7075748)$$

$$= 16,4929267 + 0,282574(4,5362115)$$

$$= 16,4929267 + 1,2818180$$

$$= 17,7747447^{\circ}\text{C}$$

$k=3$ ve $i=5$ için;

$$f_5^4 = f_5^3 + r(f_6^3 - 2f_5^3 + f_4^3)$$

$$= 19,8144900 + 0,282574(25 - 2(19,8144900) + 16,4929267)$$

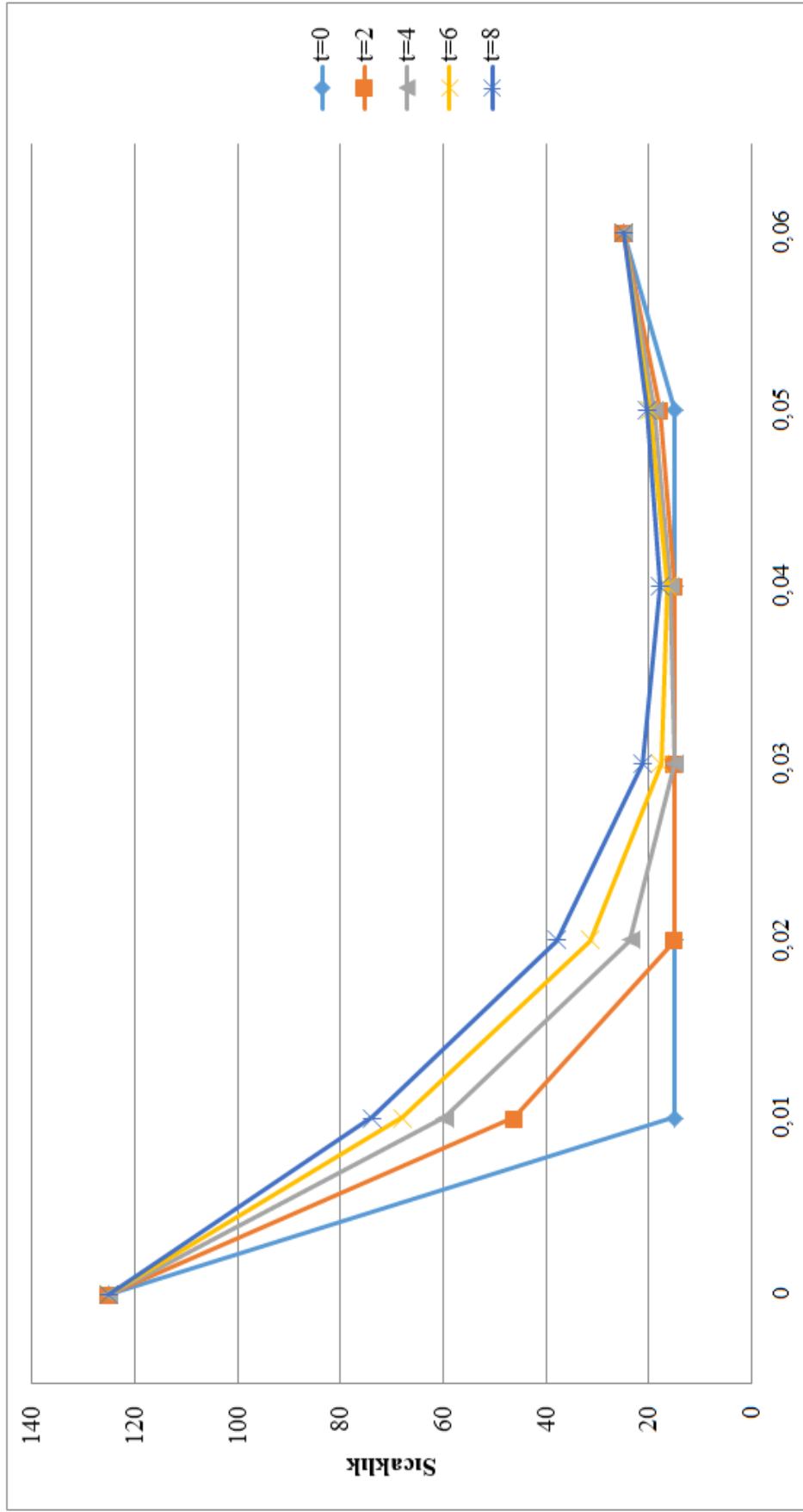
$$= 19,8144900 + 0,282574(1,8639466)$$

$$= 19,8144900 + 0,5267039$$

$$= 20,3411939^{\circ}\text{C}$$

$k=3$ ve $i=6$ için;

$$f_6^4 = 25^{\circ}\text{C}$$



Şekil 29. Açık (explicit) yöntemle zamana göre sıcaklık konum dağılımı

Örnek 5:

Uzunluğu 0,06 metre olan çelik bir çubuğun başlangıç sıcaklığı 15°C dir. Bu çelik çubuk sol uçtan 125°C ' lik sol uçtan ise 25°C ' lik sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Çubuktaki sıcaklık dağılımını $\Delta x = 0,01\text{m}$, $\Delta t = 2\text{sn}$ olacak şekilde $t = 0$ ile $t = 8$ saniye arasında kapalı (implicit) yöntem kullanarak bulunuz.

$$\left(k = 54 \frac{\text{W}}{\text{m} - \text{K}}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 490 \frac{\text{J}}{\text{kg} - \text{K}} \right)$$

Çözüm:

Kapalı (implicit) yöntemi kullanmak için sırasıyla;

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$= \frac{54}{7800 \times 490}$$

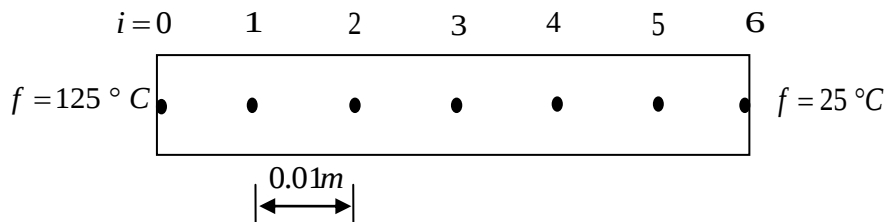
$$= 0,00001412873 \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$= 0,00001412873 \frac{2}{(0,01)^2}$$

$$= 0,282574$$

$$\text{Zaman (k) adımı sayısı} = \frac{t_{\text{son}} - t_{\text{ilk}}}{\Delta t} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$



Şekil 30. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram

Sınır koşulları;

$$\left. \begin{array}{l} f_0^k = 125^\circ C \\ f_6^k = 25^\circ C \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (85)$$

Çubuğun başlangıç sıcaklığı $15^\circ C$ olarak verilmiştir. Yani çubuğun içindeki tüm düğümlerin sıcaklıkları, (85)' te verilen sınır düğümleri hariç $t = 0$ anında $15^\circ C$ dir. Bu mevcut durum şu şekilde temsil edilebilir.

$$f_i^0 = 15^\circ C, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Çubuk içindeki düğümlerde başlangıç sıcaklığı ($t = 0$ için)

$$f_0^0 = 125^\circ C$$

$$f_1^0 = 15^\circ C$$

$$f_2^0 = 15^\circ C$$

$$f_3^0 = 15^\circ C$$

$$f_4^0 = 15^\circ C$$

$$f_5^0 = 15^\circ C$$

$$f_6^0 = 25^\circ C$$

olur. Kapalı (implicit) yöntemde

$$-rf_{i-1}^{k+1} + (1+2r)f_i^{k+1} - rf_{i+1}^{k+1} = f_i^k \quad (86)$$

denklemini kullanılarak aşağıdaki gibi çözülür.

Tüm iç düğümler için, (86)' da sırasıyla;

$k=0$ ' da $t = 2$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^1 = 125^\circ C \\ f_6^1 = 25^\circ C \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^1 + (1+2r)f_1^1 - rf_2^1 = f_1^0$$

$$(-0,282574 \times 125) + (1 + 2 \times 0,282574) f_1^1 - (0,282574 f_2^1) = 15$$

$$-35,321821 + 1,565149 f_1^1 - 0,282574 f_2^1 = 15$$

$$1,565149 f_1^1 - 0,282574 f_2^1 = 50,321821 \quad (87)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^1 + (1 + 2r) f_2^1 - rf_3^1 = f_2^0$$

$$-0,282574 f_1^1 + (1 + 2 \times 0,282574) f_2^1 - 0,282574 f_3^1 = 15$$

$$-0,282574 f_1^1 + 1,565149 f_2^1 - 0,282574 f_3^1 = 15 \quad (88)$$

$i=3$ için,

$$-rf_2^1 + (1 + 2r) f_3^1 - rf_4^1 = f_3^0$$

$$-0,282574 f_2^1 + 1,565149 f_3^1 - 0,282574 f_4^1 = 15 \quad (89)$$

$i=4$ için,

$$-rf_3^1 + (1 + 2r) f_4^1 - rf_5^1 = f_4^0$$

$$-0,282574 f_3^1 + 1,565149 f_4^1 - 0,282574 f_5^1 = 15 \quad (90)$$

$i=5$ için,

$$-rf_4^1 + (1 + 2r) f_5^1 - rf_6^1 = f_5^0$$

$$-0,282574 f_4^1 + (1 + 2 \times 0,282574) f_5^1 - 0,282574 \times 25 = f_5^0$$

$$-0,282574 f_4^1 + 1,565149 f_5^1 - 0,282574 \times 25 = 15$$

$$-0,282574 f_4^1 + 1,565149 f_5^1 = 22,064364 \quad (91)$$

(87) - (91) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,321821 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 22,064364 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,555089 \\ 18,852341 \\ 15,782697 \\ 15,482994 \\ 16,892613 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 2$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \\ f_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 35,555089 \\ 18,852341 \\ 15,782697 \\ 15,482994 \\ 16,892613 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$k=1$ 'de $t = 4$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^2 = 125^\circ\text{C} \\ f_6^2 = 25^\circ\text{C} \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^2 + (1+2r)f_1^2 - rf_2^2 = f_1^1$$

$$(-0,282574 \times 125) + (1+2 \times 0,282574)f_1^2 - (0,282574 f_2^2) = 35,555089$$

$$-35,321821 + 1,565149 f_1^2 - 0,282574 f_2^2 = 35,555089$$

$$1,565149 f_1^2 - 0,282574 f_2^2 = 70,876904 \quad (92)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^2 + (1+2r)f_2^2 - rf_3^2 = f_2^1$$

$$-0,282574 f_1^2 + (1+2 \times 0,282574) f_2^2 - 0,282574 f_3^2 = 18,852341$$

$$-0,282574 f_1^2 + 1,565149 f_2^2 - 0,282574 f_3^2 = 18,852341 \quad (93)$$

$i=3$ için,

$$-rf_2^2 + (1+2r)f_3^2 - rf_4^2 = f_3^1$$

$$-0,282574 f_2^2 + 1,565149 f_3^2 - 0,282574 f_4^2 = 15,782697 \quad (94)$$

$i=4$ için,

$$-rf_3^2 + (1+2r)f_4^2 - rf_5^2 = f_4^1$$

$$-0,282574 f_3^2 + 1,565149 f_4^2 - 0,282574 f_5^2 = 15,4829943 \quad (95)$$

$i=5$ için,

$$-rf_4^2 + (1+2r)f_5^2 - rf_6^2 = f_5^1$$

$$-0,282574 f_4^2 + (1+2 \times 0,282574) f_5^2 - 0,282574 \times 25 = f_5^1$$

$$-0,282574 f_4^2 + 1,565149 f_5^2 - 0,282574 \times 25 = 16,8926125$$

$$-0,282574 f_4^2 + 1,565149 f_5^2 = 22,064362 \quad (96)$$

(92) - (96) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70,876904 \\ 18,852341 \\ 15,782697 \\ 15,482994 \\ 22,064364 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,308661 \\ 24,410451 \\ 18,902071 \\ 17,317575 \\ 16,974448 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 4$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^2 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \\ f_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 36,308661 \\ 24,410451 \\ 18,902071 \\ 17,317575 \\ 16,974448 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$k=2$ ' de $t = 6$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^3 = 125^\circ\text{C} \\ f_6^3 = 25^\circ\text{C} \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^3 + (1+2r)f_1^3 - rf_2^3 = f_1^2$$

$$(-0,282574 \times 125) + (1+2 \times 0,282574)f_1^3 - (0,282574 f_2^3) = 36,308661$$

$$-35,321821 + 1,565149 f_1^3 - 0,282574 f_2^3 = 36,308661$$

$$1,565149 f_1^3 - 0,282574 f_2^3 = 71,630482 \quad (97)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^3 + (1+2r)f_2^3 - rf_3^3 = f_2^2$$

$$-0,282574 f_1^3 + (1+2 \times 0,282574)f_2^3 - 0,282574 f_3^3 = 25,410451$$

$$-0,282574 f_1^3 + 1,565149 f_2^3 - 0,282574 f_3^3 = 25,410451 \quad (98)$$

$i=3$ için,

$$-rf_2^3 + (1+2r)f_3^3 - rf_4^3 = f_3^2$$

$$-0,282574 f_2^3 + 1,565149 f_3^3 - 0,282574 f_4^3 = 18,902071 \quad (99)$$

$i=4$ için,

$$-rf_3^3 + (1+2r)f_4^3 - rf_5^3 = f_4^2$$

$$-0,282574 f_3^3 + 1,565149 f_4^3 - 0,282574 f_5^3 = 17,317575 \quad (100)$$

$i=5$ için,

$$-rf_4^3 + (1+2r)f_5^3 - rf_6^3 = f_5^2$$

$$-0,282574 f_4^3 + (1+2 \times 0,282574)f_5^3 - 0,282574 \times 25 = f_5^2$$

$$-0,282574 f_4^3 + 1,565149 f_5^3 - 0,282574 \times 25 = 16,974448$$

$$-0,282574 f_4^3 + 1,565149 f_5^3 = 36,193093 \quad (101)$$

(97) - (101) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71,630482 \\ 25,410451 \\ 18,902071 \\ 17,317575 \\ 36,193093 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,042038 \\ 29,223897 \\ 20,901246 \\ 19,653542 \\ 26,672651 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 6$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^3 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \\ f_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 51,042038 \\ 29,223897 \\ 20,901246 \\ 19,653542 \\ 26,672651 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Ve son olarak

$k=3$ ' te $t = 8$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^4 = 125^\circ C \\ f_6^4 = 25^\circ C \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^4 + (1+2r)f_1^4 - rf_2^4 = f_1^3$$

$$(-0,282574 \times 125) + (1+2 \times 0,282574)f_1^4 - (0,282574 f_2^4) = 51,042038$$

$$-35,321821 + 1,565149 f_1^4 - 0,282574 f_2^4 = 51,042038$$

$$1,565149 f_1^4 - 0,282574 f_2^4 = 86,363859 \quad (102)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^4 + (1+2r)f_2^4 - rf_3^4 = f_2^3$$

$$-0,282574 f_1^4 + (1+2 \times 0,282574)f_2^4 - 0,282574 f_3^4 = 29,223897$$

$$-0,282574 f_1^4 + 1,565149 f_2^4 - 0,282574 f_3^4 = 29,223897 \quad (103)$$

$i=3$ için,

$$-rf_2^4 + (1+2r)f_3^4 - rf_4^4 = f_3^3$$

$$-0,282574 f_2^4 + 1,565149 f_3^4 - 0,282574 f_4^4 = 20,901246 \quad (104)$$

$i=4$ için,

$$-rf_3^4 + (1+2r)f_4^4 - rf_5^4 = f_4^3$$

$$-0,282574 f_3^4 + 1,565149 f_4^4 - 0,282574 f_5^4 = 19,653542 \quad (105)$$

$i=5$ için,

$$-rf_4^4 + (1+2r)f_5^4 - rf_6^4 = f_5^3$$

$$-0,282574 f_4^4 + (1+2 \times 0,282574)f_5^4 - 0,282574 \times 25 = f_5^3$$

$$-0,282574 f_4^4 + 1,565149 f_5^4 - 0,282574 \times 25 = 26,67651$$

$$-0,282574 f_4^4 + 1,565149 f_5^4 = 33,740874 \quad (106)$$

(102) - (106) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 & -0,282574 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282574 & 1,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86,363859 \\ 29,223897 \\ 20,901246 \\ 19,653542 \\ 33,740874 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

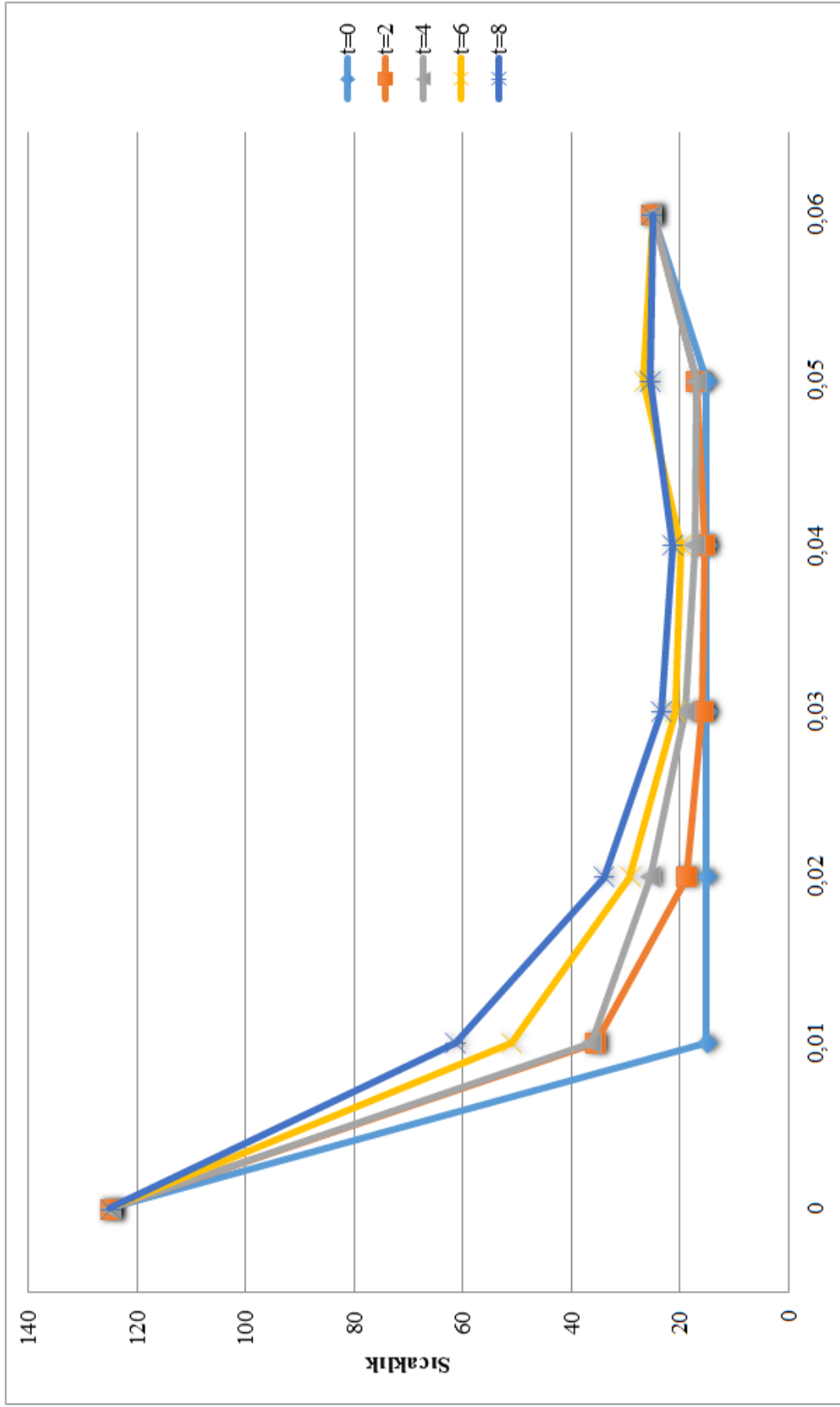
$$\begin{bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,309504 \\ 33,954468 \\ 23,340549 \\ 21,359154 \\ 25,413820 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 8$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^4 \\ f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \\ f_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 61,309504 \\ 33,954468 \\ 23,340549 \\ 21,359154 \\ 25,413820 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Farklı zamanlarda farklı yerlerde sıcaklık değişimini daha iyi görselleştirmek için, çubuk uzunluğu boyunca sıcaklık dağılımı Şekil 31'de gösterilmektedir.



Şekil 31. Kapalı (implicit) yöntemle zamana göre sıcaklık konum dağılımı

Örnek 6:

Uzunluğu 0,06 metre olan çelik bir çubuğun başlangıç sıcaklığı 15°C dir. Bu çelik çubuk sol uçtan 125°C ' lik sol uçtan ise 25°C ' lik sıcaklığa maruz bırakılmaktadır. Çubuktaki sıcaklık dağılımını $\Delta x = 0,01\text{m}$, $\Delta t = 2\text{sn}$ olacak şekilde $t = 0$ ile $t = 8$ saniye arasında Crank-Nicolson yöntemini kullanarak bulunuz.

$$\left(k = 54 \frac{\text{W}}{\text{m-K}}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, c = 490 \frac{\text{J}}{\text{kg-K}} \right)$$

Çözüm:

Crank-Nicolson yöntemi kullanmak için sırasıyla;

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$= \frac{54}{7800 \times 490}$$

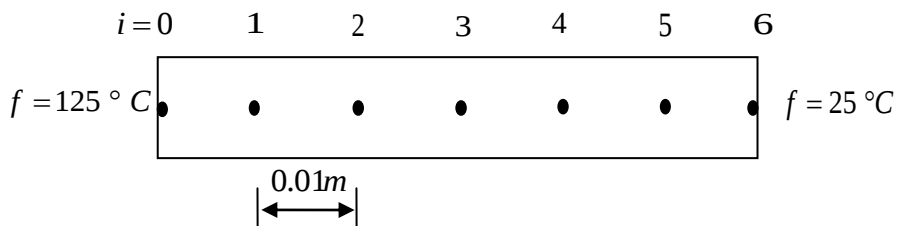
$$= 0,00001412873 \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$= 0,00001412873 \frac{2}{(0,01)^2}$$

$$= 0,282574$$

$$\text{Zaman (k) adımı sayısı} = \frac{t_{\text{son}} - t_{\text{ilk}}}{\Delta t} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$



Şekil 32. Çubuktaki düğüm dağılımını gösteren şematik diyagram

Sınır koşulları;

$$\left. \begin{array}{l} f_0^k = 125^\circ C \\ f_6^k = 25^\circ C \end{array} \right\} k = 0,1,2,3,4 \quad (107)$$

Çubuğun başlangıç sıcaklığı $15^\circ C$ olarak verilmiştir. Yani çubuğun içindeki tüm düğümlerin sıcaklıkları, (107)'de verilen sınır düğümleri hariç $t = 0$ anında $15^\circ C$ ' dir. Bu mevcut durum şu şekilde temsil edilebilir.

$$f_i^0 = 15^\circ C, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Çubuk içindeki düğümlerde başlangıç sıcaklığı ($t = 0$ için)

$$f_0^0 = 125^\circ C$$

$$f_1^0 = 15^\circ C$$

$$f_2^0 = 15^\circ C$$

$$f_3^0 = 15^\circ C$$

$$f_4^0 = 15^\circ C$$

$$f_5^0 = 15^\circ C$$

$$f_6^0 = 25^\circ C$$

olur. Crank-Nicolson yönteminde

$$-rf_{i-1}^{k+1} + 2(1+r) f_i^{k+1} - rf_{i+1}^{k+1} = rf_{i-1}^k + 2(1+r) f_i^k + rf_{i+1}^k \quad (108)$$

denklemini kullanılarak aşağıdaki gibi çözülür.

Tüm iç düğümler için, (108)' de sırasıyla;

$k=0$ ' da $t = 2$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^1 = 125^\circ C \\ f_6^1 = 25^\circ C \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^1 + 2(1+r) f_1^1 - rf_2^1 = rf_0^0 + 2(1-r) f_1^0 + rf_2^0$$

$$\begin{aligned}
& (-0,282574 \times 125) + 2(1 + 0,282574) f_1^1 - 0,282574 f_2^1 = \\
& \quad (0,282574)125 + 2(1 - 0,282574)15 + (0,282574)15 \\
& -35,321821 + 2,565149 f_1^1 - 0,282574 f_2^1 = 35,321821 + 21,522763 + 4,238619 \\
& 2,565149 f_1^1 - 0,282574 f_2^1 = 96,405024 \tag{109}
\end{aligned}$$

$i=2$ için,

$$\begin{aligned}
& -rf_1^1 + 2(1+r) f_2^1 - rf_3^1 = rf_1^0 + 2(1-r) f_2^0 + rf_3^0 \\
& -0,282574 f_1^1 + 2(1 + 0,282574) f_2^1 - 0,282574 f_3^1 = \\
& \quad (0,282574)15 + 2(1 - 0,282574)15 + (0,282574)15 \\
& -0,282574 f_1^1 + 2,565149 f_2^1 - 0,282574 f_3^1 = 30 \tag{110}
\end{aligned}$$

$i=3$ için,

$$\begin{aligned}
& -rf_2^1 + 2(1+r) f_3^1 - rf_4^1 = rf_2^0 + 2(1-r) f_3^0 + rf_4^0 \\
& -0,282574 f_2^1 + 2(1 + 0,282574) f_3^1 - 0,282574 f_4^1 = \\
& \quad (0,282574)15 + 2(1 - 0,282574)15 + (0,282574)15 \\
& -0,282574 f_2^1 + 2,565149 f_3^1 - 0,282574 f_4^1 = 30 \tag{111}
\end{aligned}$$

$i=4$ için,

$$\begin{aligned}
& -rf_3^1 + 2(1+r) f_4^1 - rf_5^1 = rf_3^0 + 2(1-r) f_4^0 + rf_5^0 \\
& -0,282574 f_3^1 + 2(1 + 0,282574) f_4^1 - 0,282574 f_5^1 = \\
& \quad (0,282574)15 + 2(1 - 0,282574)15 + (0,282574)15 \\
& -0,282574 f_3^1 + 2,565149 f_4^1 - 0,282574 f_5^1 = 30 \tag{112}
\end{aligned}$$

$i=5$ için,

$$\begin{aligned}
& -rf_4^1 + 2(1+r) f_5^1 - rf_6^1 = rf_4^0 + 2(1-r) f_5^0 + rf_6^0 \\
& -0,282574 f_4^1 + 2(1 + 0,282574) f_5^1 - (0,282574)25 = \\
& \quad (0,282574)15 + 2(1 - 0,282574)15 + (0,282574)25
\end{aligned}$$

$$-0,282574 f_4^1 + 2,565149 f_5^1 - 7,064364 = 4,238619 + 21,522763 + 7,064364$$

$$-0,282574 f_4^1 + 2,565149 f_5^1 = 39,890109 \quad (113)$$

(109) - (113) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,405024 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 39,890109 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,536798 \\ 17,739617 \\ 15,332940 \\ 15,282802 \\ 17,234333 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 2$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \\ f_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 39,536798 \\ 17,739617 \\ 15,332940 \\ 15,282802 \\ 17,234333 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$k=1$ ' de $t = 4$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^2 = 125^\circ C \\ f_6^2 = 25^\circ C \end{array} \right\} \text{ sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^2 + 2(1+r)f_1^2 - rf_2^2 = rf_0^1 + 2(1-r)f_1^1 + rf_2^1$$

$$(-0,282574 \times 125) + 2(1+0,282574)f_1^2 - 0,282574f_2^2 =$$

$$(0,282574)125 + 2(1-0,282574)39,536798 + (0,282574)17,739617$$

$$-35,321821 + 2,565149f_1^2 - 0,282574f_2^2 = 35,321821 + 56,729409 + 5,012765$$

$$2,565149f_1^2 - 0,282574f_2^2 = 132,385815 \quad (114)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^2 + 2(1+r)f_2^2 - rf_3^2 = rf_1^1 + 2(1-r)f_2^1 + rf_3^1$$

$$-0,282574f_1^2 + 2(1+0,282574)f_2^2 - 0,282574f_3^2 =$$

$$(0,282574)39,536798 + 2(1-0,282574)17,739617 + (0,282574)15,33294$$

$$-0,282574f_1^2 + 2,565149f_2^2 - 0,282574f_3^2 = 40,958497 \quad (115)$$

$i=3$ için,

$$-rf_2^2 + 2(1+r)f_3^2 - rf_4^2 = rf_2^1 + 2(1-r)f_3^1 + rf_4^1$$

$$-0,282574f_2^2 + 2(1+0,282574)f_3^2 - 0,282574f_4^2 =$$

$$(0,282574)17,739617 + 2(1-0,282574)15,33294 + (0,282574)15,282802$$

$$-0,282574f_2^2 + 2,565149f_3^2 - 0,282574f_4^2 = 31,331778 \quad (116)$$

$i=4$ için,

$$-rf_3^2 + 2(1+r)f_4^2 - rf_5^2 = rf_3^1 + 2(1-r)f_4^1 + rf_5^1$$

$$-0,282574f_3^2 + 2(1+0,282574)f_4^2 - 0,282574f_5^2 =$$

$$(0,282574)15,33294 + 2(1-0,282574)15,282802 + (0,282574)17,234333$$

$$-0,282574 f_3^2 + 2,565149 f_4^2 - 0,282574 f_5^2 = 31,131225 \quad (117)$$

$i=5$ için,

$$-rf_4^2 + 2(1+r)f_5^2 - rf_6^2 = rf_4^1 + 2(1-r)f_5^1 + rf_6^1$$

$$-0,282574 f_4^2 + 2(1+0,282574) f_5^2 - (0,282574)25 =$$

$$(0,282574)15,282802 + 2(1-0,282574)17,234333 + (0,282574)25$$

$$-0,282574 f_4^2 + 2,565149 f_5^2 - 7,064364 = 4,318531 + 24,728698 + 7,064364$$

$$-0,282574 f_4^2 + 2,565149 f_5^2 = 43,175957 \quad (118)$$

(114) - (118) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132,385815 \\ 40,958497 \\ 31,331778 \\ 31,131225 \\ 43,175957 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54,227813 \\ 23,769287 \\ 16,596798 \\ 16,013009 \\ 18,595736 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 4$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^2 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \\ f_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 54,227813 \\ 23,769287 \\ 16,596798 \\ 16,013009 \\ 18,595736 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$k=2$ ' de $t = 6$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^3 = 125^\circ\text{C} \\ f_6^3 = 25^\circ\text{C} \end{array} \right\} \text{sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^3 + 2(1+r)f_1^3 - rf_2^3 = rf_0^2 + 2(1-r)f_1^2 + rf_2^2$$

$$(-0,282574 \times 125) + 2(1+0,282574)f_1^3 - 0,282574f_2^3 =$$

$$(0,282574)125 + 2(1-0,282574)54,227813 + (0,282574)23,769287$$

$$-35,321821 + 2,565149f_1^3 - 0,282574f_2^3 = 35,321821 + 77,808824 + 6,716596$$

$$2,565149f_1^3 - 0,282574f_2^3 = 155,169062 \quad (119)$$

$i=2$ için,

$$-rf_1^3 + 2(1+r)f_2^3 - rf_3^3 = rf_1^2 + 2(1-r)f_2^2 + rf_3^2$$

$$-0,282574f_1^3 + 2(1+0,282574)f_2^3 - 0,282574f_3^3 =$$

$$(0,282574)54,227813 + 2(1-0,282574)23,769287 + (0,282574)16,596798$$

$$-0,282574f_1^3 + 2,565149f_2^3 - 0,282574f_3^3 = 54,118616 \quad (120)$$

i=3 için,

$$\begin{aligned}
 -rf_2^3 + 2(1+r)f_3^3 - rf_4^3 &= rf_2^2 + 2(1-r)f_3^2 + rf_4^2 \\
 -0,282574 f_2^3 + 2(1+0,282574) f_3^3 - 0,282574 f_4^3 &= \\
 (0,282574)23,769287 + 2(1-0,282574)16,596798 + (0,282574)16,013009 \\
 -0,282574 f_2^3 + 2,565149 f_3^3 - 0,282574 f_4^3 &= 35,055395
 \end{aligned} \tag{121}$$

i=4 için,

$$\begin{aligned}
 -rf_3^3 + 2(1+r)f_4^3 - rf_5^3 &= rf_3^2 + 2(1-r)f_4^2 + rf_5^2 \\
 -0,282574 f_3^3 + 2(1+0,282574) f_4^3 - 0,282574 f_5^3 &= \\
 (0,282574)16,596798 + 2(1-0,282574)16,013009 + (0,282574)18,595736 \\
 -0,282574 f_3^3 + 2,565149 f_4^3 - 0,282574 f_5^3 &= 32,920795
 \end{aligned} \tag{122}$$

i=5 için,

$$\begin{aligned}
 -rf_4^3 + 2(1+r)f_5^3 - rf_6^3 &= rf_4^2 + 2(1-r)f_5^2 + rf_6^2 \\
 -0,282574 f_4^3 + 2(1+0,282574) f_5^3 - (0,282574)25 &= \\
 (0,282574)16,013009 + 2(1-0,282574)18,595736 + (0,282574)25 \\
 -0,282574 f_4^3 + 2,565149 f_5^3 - 7,064364 &= 4,524869 + 26,682108 + 7,064364 \\
 -0,282574 f_4^3 + 2,565149 f_5^3 &= 45,335705
 \end{aligned} \tag{123}$$

(119) - (123) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155,169062 \\ 54,118616 \\ 35,055395 \\ 32,920795 \\ 45,335705 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63,818829 \\ 30,207001 \\ 18,873699 \\ 17,067019 \\ 19,553803 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 6$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^3 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \\ f_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 63,818829 \\ 30,207001 \\ 18,873699 \\ 17,067019 \\ 19,553803 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$k=3$ ' te $t = 8$ saniyedir. Burada çubuğun içindeki düğümlerde sıcaklık tespiti

$$\left. \begin{array}{l} f_0^4 = 125^\circ C \\ f_6^4 = 25^\circ C \end{array} \right\} \text{ sınır koşulları olmak üzere}$$

$i=1$ için,

$$-rf_0^4 + 2(1+r)f_1^4 - rf_2^4 = rf_0^3 + 2(1-r)f_1^3 + rf_2^3$$

$$(-0,282574 \times 125) + 2(1+0,282574)f_1^4 - 0,282574f_2^4 =$$

$$(0,282574)125 + 2(1-0,282574)63,818829 + (0,282574)30,207001 - 35,321821 + 2,565149f_1^4 - 0,282574f_2^4 = 35,321821 + 91,570502 + 8,535730$$

$$2,565149f_1^4 - 0,282574f_2^4 = 170,749874 \quad (124)$$

i=2 için,

$$\begin{aligned} -rf_1^4 + 2(1+r)f_2^4 - rf_3^4 &= rf_1^3 + 2(1-r)f_2^3 + rf_3^3 \\ -0,282574 f_1^4 + 2(1+0,282574) f_2^4 - 0,282574 f_3^4 &= \\ (0,282574)63,818829 + 2(1-0,282574)30,207001 + (0,282574)18,873699 \\ -0,282574 f_1^4 + 2,565149 f_2^4 - 0,282574 f_3^4 &= 66,7093469 \end{aligned} \quad (125)$$

i=3 için,

$$\begin{aligned} -rf_2^4 + 2(1+r)f_3^4 - rf_4^4 &= rf_2^3 + 2(1-r)f_3^3 + rf_4^3 \\ -0,282574 f_2^4 + 2(1+0,282574) f_3^4 - 0,282574 f_4^4 &= \\ (0,282574)30,207001 + 2(1-0,282574)18,873699 + (0,282574)17,067019 \\ -0,282574 f_2^4 + 2,565149 f_3^4 - 0,282574 f_4^4 &= 40,4393791 \end{aligned} \quad (126)$$

i=4 için,

$$\begin{aligned} -rf_3^4 + 2(1+r)f_4^4 - rf_5^4 &= rf_3^3 + 2(1-r)f_4^3 + rf_5^3 \\ -0,282574 f_3^4 + 2(1+0,282574) f_4^4 - 0,282574 f_5^4 &= \\ (0,282574)18,873699 + 2(1-0,282574)17,067019 + (0,282574)19,553803 \\ -0,282574 f_3^4 + 2,565149 f_4^4 - 0,282574 f_5^4 &= 35,347262 \end{aligned} \quad (127)$$

i=5 için,

$$\begin{aligned} -rf_4^4 + 2(1+r)f_5^4 - rf_6^4 &= rf_4^3 + 2(1-r)f_5^3 + rf_6^3 \\ -0,282574 f_4^4 + 2(1+0,282574) f_5^4 - (0,282574)25 &= \\ (0,282574)17,067019 + 2(1-0,282574)19,553803 + (0,282574)25 \\ -0,282574 f_4^4 + 2,565149 f_5^4 - 7,064364 &= 4,822706 + 28,056791 + 7,064364 \\ -0,282574 f_4^4 + 2,565149 f_5^4 &= 47,008225 \end{aligned} \quad (128)$$

(124) - (128) arasındaki doğrusal denklemler aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 & 0 \\ -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 & 0 \\ 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 & 0 \\ 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 & -0,282575 \\ 0 & 0 & 0 & -0,282575 & 2,565149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170,749874 \\ 66,709347 \\ 40,439379 \\ 35,347262 \\ 47,008225 \end{bmatrix}$$

matris formunda gerekli işlemler yapılırsa,

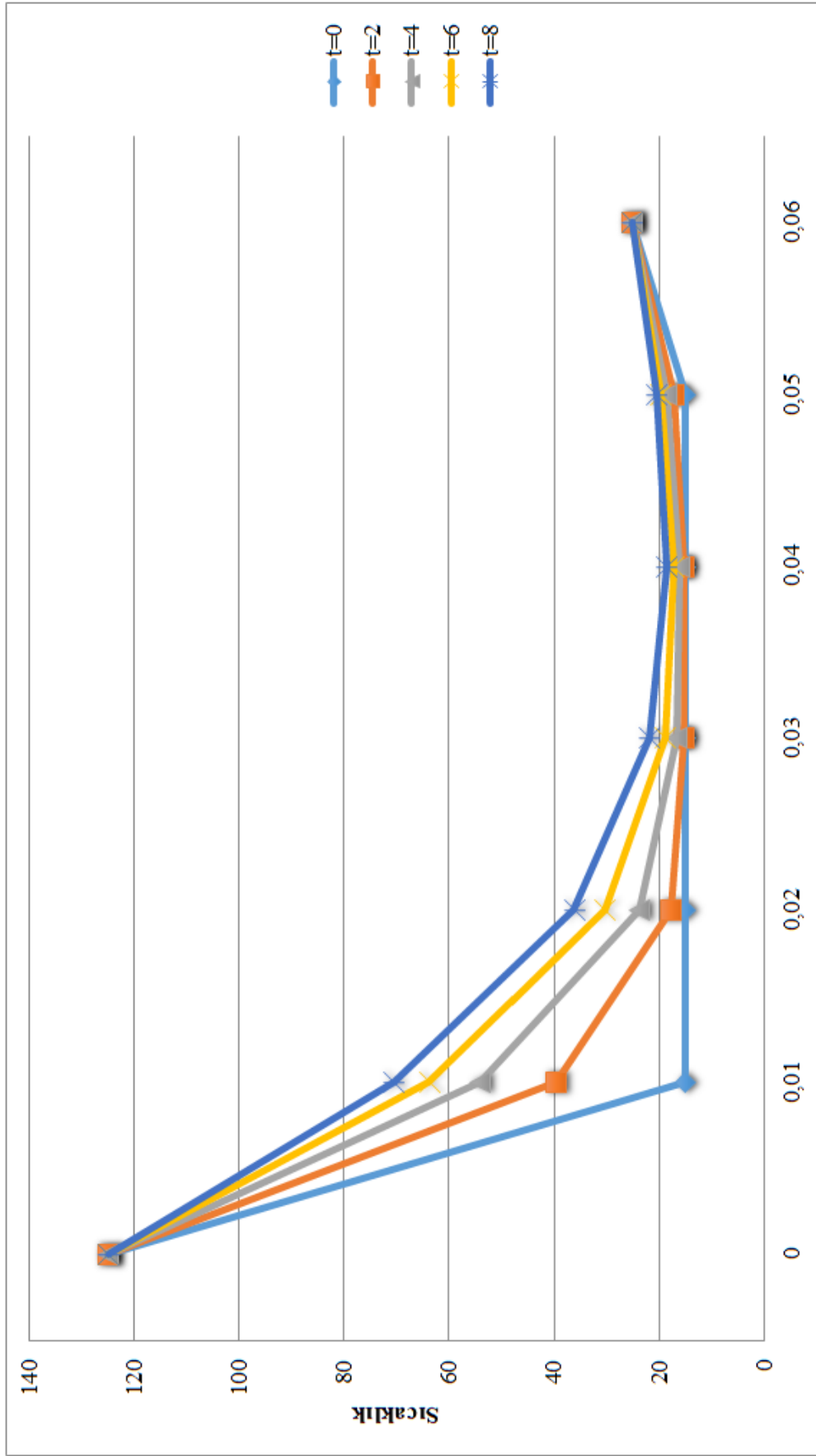
$$\begin{bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70,550522 \\ 36,177035 \\ 21,779440 \\ 18,421321 \\ 20,355009 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $t = 8$ zamanında tüm düğüm noktalarındaki sıcaklıklar,

$$\begin{bmatrix} f_0^4 \\ f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \\ f_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 70,550522 \\ 36,177035 \\ 21,779440 \\ 18,421321 \\ 20,355009 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Farklı zamanlarda farklı yerlerde sıcaklık değişimini daha iyi görselleştirmek için, çubuk uzunluğu boyunca sıcaklık dağılımı Şekil 33' de gösterilmektedir.



Şekil 33. Crank-Nicolson yöntemiyle zamana göre sıcaklık konum dağılımı

Örnek 4, Örnek 5 ve Örnek 6’ da ifade edilmeye çalışılan üç sayısal yöntemin (Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson) hepsini karşılaştırmak için, tüm iç düğüm noktalarında $t = 8$ saniyede elde edilen sıcaklık değerleri Tablo 8’ de sunulmaktadır. Tablo 8’ de, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin çözümü görmek için kullanılan sayısal yöntemler arasında Crank-Nicolson yöntemi, diğer iki sayısal yönteme (Açık Yöntem ve Kapalı Yöntem) kıyasla daha iyi ve hızlı doğruluk değerleri vermektedir.

Tablo 8. Farklı yöntemler kullanılarak iç düğümlerde elde edilen sıcaklığın karşılaştırılması

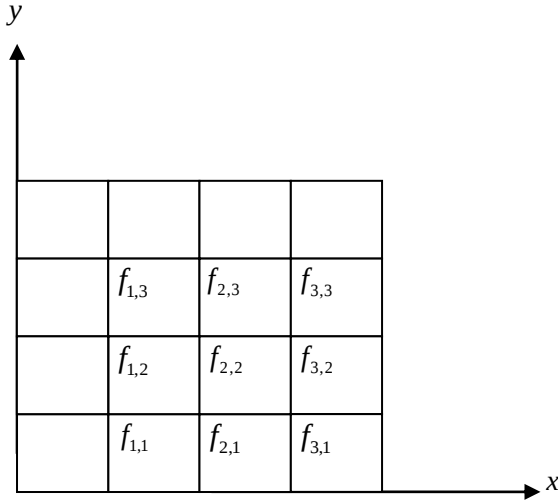
Düğüm Noktaları	Açık (Explicit) Yöntem	Kapalı (Implicit) Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi
f_1^4	73,753133	61,309504	70,550522
f_2^4	37,871274	33,954468	36,177035
f_3^4	21,239749	23,340549	21,779440
f_4^4	17,774744	21,359154	18,421321
f_4^5	20,341194	25,413820	20,355009

Örnek 7:

xy- düzleminde $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ sınırlarıyla belirlenmiş karesel bölge membran ile gerdirilmiştir. Membran için $c^2 = \frac{Tg}{w} = 3$ olan iç noktalardaki ilk hızlar ve ötelemeler $f(x, y) = x^2(2-x)y^2(2-y)$, $f_t(x, y) = 0$ olarak verilmiştir. Ötelemelerin zamana göre değişimini $\Delta x = \Delta y = h = 0,5$ olarak hesaplayınız.

Çözüm:

$\Delta x = \Delta y = h = 0,5$ olacak şekilde x ve y eksenindeki düğüm noktalarının adedi gösterilmek üzere, tüm düğüm noktaları Şekil 34’ te gösterildiği gibi oluşmuş olur.



Şekil 34. Membrandaki düğüm noktaları

zaman adımını hesaplamak için

$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

denklemden

$$\Delta t = \frac{h}{c\sqrt{2}} = \frac{0,5}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

$$\Delta t = 0,204124$$

olarak bulunur.

$f(x, y) = x^2(2-x)y^2(2-y)$ denkleminde hız fonksiyonu $f_t(x, y) = 0 = f(x_i, y_i)$ olarak verilmiştir.

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left(f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j-1}^k + f_{i,j+1}^k \right) + \Delta t \cdot f(x_i, y_i) \quad (129)$$

olur. (129)' da $f_t(x, y) = 0 = f(x_i, y_i)$ yazılırsa

$$f_{i,j}^1 = \frac{1}{4} \left(f_{i-1,j}^0 + f_{i+1,j}^0 + f_{i,j-1}^0 + f_{i,j+1}^0 \right) \quad (130)$$

elde edilir. Ayrıca

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left(f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^k + f_{i,j-1}^k + f_{i,j+1}^k \right) - f_{i,j}^{k+1} \quad (131)$$

(131)' de ilk zaman adımındaki değerleri bulmak için (130)' daki denklem yardımıyla ilk konumdaki değerler bulunur. Bunun için gerekli işlemler;

$t=0, i=1, j=1$ için;

$$f_{1,1}^0 = f^0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{2} = \frac{9}{64} = 0,140625 \quad (132)$$

$t=0, i=2, j=1$ için;

$$f_{2,1}^0 = f^0\left(1, \frac{1}{2}\right) = (1)^2 (2-1) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0,375 \quad (133)$$

$t=0, i=3, j=1$ için;

$$f_{3,1}^0 = f^0\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0,421875 \quad (134)$$

$t=0, i=1, j=2$ için;

$$f_{1,2}^0 = f^0\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) (1)^2 (2-1) = \frac{3}{8} = 0,375 \quad (135)$$

$t=0, i=2, j=2$ için;

$$f_{2,2}^0 = f^0(1, 1) = (1)^2 (2-1) (1)^2 (2-1) = 1 \quad (136)$$

$t=0, i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^0 = f^0\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) (1)^2 (2-1) = 1,125 \quad (137)$$

$t=0, i=1, j=3$ için;

$$f_{1,3}^0 = f^0\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 0,421875 \quad (138)$$

$t=0, i=2, j=3$ için;

$$f_{2,3}^0 = f^0\left(1, \frac{3}{2}\right) = (1)^2 (2-1) \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1,125 \quad (139)$$

$t=0, i=3, j=3$ için;

$$f_{3,3}^0 = f^0\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1,265625 \quad (140)$$

bu problem için bulunan (132) ile (140) arasındaki sonuçlar ($t=1, k=0$) için sırasıyla (131)'de yerine yazılarak hesaplanırsa;

ilk zaman adımı ($t=1, k=0$) için,

$i=1, j=1$ için;

$$f_{1,1}^1 = f^1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} (f_{0,1}^0 + f_{2,1}^0 + f_{1,0}^0 + f_{1,2}^0) = 0,1875$$

$i=2, j=1$ için;

$$f_{2,1}^1 = f^1\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} (f_{1,1}^0 + f_{3,1}^0 + f_{2,0}^0 + f_{2,2}^0) = 0,390625$$

$i=3, j=1$ için;

$$f_{3,1}^1 = f^1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} (f_{2,1}^0 + f_{4,1}^0 + f_{3,0}^0 + f_{3,2}^0) = 0,375$$

$i=1, j=2$ için;

$$f_{1,2}^1 = f^1\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4} (f_{0,2}^0 + f_{2,2}^0 + f_{1,1}^0 + f_{1,3}^0) = 0,390625$$

$i=2, j=2$ için;

$$f_{2,2}^1 = f^1(1,1) = \frac{1}{4} (f_{1,2}^0 + f_{3,2}^0 + f_{2,1}^0 + f_{2,3}^0) = 0,75$$

$i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^1 = f^1\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{1}{4} (f_{2,2}^0 + f_{4,2}^0 + f_{3,1}^0 + f_{3,3}^0) = 0,671875$$

$i=1, j=3$ için;

$$f_{1,3}^1 = f^1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} (f_{0,3}^0 + f_{2,3}^0 + f_{1,2}^0 + f_{1,4}^0) = 0,375$$

$i=2, j=3$ için;

$$f_{2,3}^1 = f^1\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}(f_{1,3}^0 + f_{3,3}^0 + f_{2,2}^0 + f_{2,4}^0) = 0,671875$$

$i=3, j=3$ için;

$$f_{3,3}^1 = f^1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}(f_{2,3}^0 + f_{4,3}^0 + f_{3,2}^0 + f_{3,4}^0) = 0,5625$$

sonraki zaman adımı ($t = 2, k = 1$) için,

$i=1, j=1$ için;

$$f_{1,1}^2 = f^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{0,1}^1 + f_{2,1}^1 + f_{1,0}^1 + f_{1,2}^1) - f_{1,1}^0 = 0,25$$

$i=2, j=1$ için;

$$f_{2,1}^2 = f^2\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{1,1}^1 + f_{3,1}^1 + f_{2,0}^1 + f_{2,2}^1) - f_{2,1}^0 = 0,28125$$

$i=3, j=1$ için;

$$f_{3,1}^2 = f^2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{2,1}^1 + f_{4,1}^1 + f_{3,0}^1 + f_{3,2}^1) - f_{3,1}^0 = 0,109375$$

$i=1, j=2$ için;

$$f_{1,2}^2 = f^2\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(f_{0,2}^1 + f_{2,2}^1 + f_{1,1}^1 + f_{1,3}^1) - f_{1,2}^0 = 0,28125$$

$i=2, j=2$ için;

$$f_{2,2}^2 = f^2(1, 1) = \frac{1}{2}(f_{1,2}^1 + f_{3,2}^1 + f_{2,1}^1 + f_{2,3}^1) - f_{2,2}^0 = 0,0625$$

$i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^2 = f^2\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(f_{2,2}^1 + f_{4,2}^1 + f_{3,1}^1 + f_{3,3}^1) - f_{3,2}^0 = -0,28125$$

$i=1, j=3$ için;

$$f_{1,3}^2 = f^2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{0,3}^1 + f_{2,3}^1 + f_{1,2}^1 + f_{1,4}^1) - f_{1,3}^0 = 0,109375$$

$i=2, j=3$ için;

$$f_{2,3}^2 = f^2\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{1,3}^1 + f_{3,3}^1 + f_{2,2}^1 + f_{2,4}^1) - f_{2,3}^0 = -0,28125$$

$i=3, j=3$ için;

$$f_{3,3}^2 = f^2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{2,3}^1 + f_{4,3}^1 + f_{3,2}^1 + f_{3,4}^1) - f_{3,3}^0 = -0,59375$$

sonraki zaman adımı ($t = 3, k = 2$) için,

$i=1, j=1$ için;

$$f_{1,1}^3 = f^3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{0,1}^2 + f_{2,1}^2 + f_{1,0}^2 + f_{1,2}^2) - f_{1,1}^1 = 0,09375$$

$i=2, j=1$ için;

$$f_{2,1}^3 = f^3\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{1,1}^2 + f_{3,1}^2 + f_{2,0}^2 + f_{2,2}^2) - f_{2,1}^1 = -0,17969$$

$i=3, j=1$ için;

$$f_{3,1}^3 = f^3\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{2,1}^2 + f_{4,1}^2 + f_{3,0}^2 + f_{3,2}^2) - f_{3,1}^1 = -0,375$$

$i=1, j=2$ için;

$$f_{1,2}^3 = f^3\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(f_{0,2}^2 + f_{2,2}^2 + f_{1,1}^2 + f_{1,3}^2) - f_{1,2}^1 = -0,179688$$

$i=2, j=2$ için;

$$f_{2,2}^3 = f^3(1, 1) = \frac{1}{2}(f_{1,2}^2 + f_{3,2}^2 + f_{2,1}^2 + f_{2,3}^2) - f_{2,2}^1 = -0,75$$

$i=3, j=2$ için;

$$f_{3,2}^3 = f^3\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(f_{2,2}^2 + f_{4,2}^2 + f_{3,1}^2 + f_{3,3}^2) - f_{3,2}^1 = -0,882813$$

$i=1, j=3$ için;

$$f_{1,3}^3 = f^3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{0,3}^2 + f_{2,3}^2 + f_{1,2}^2 + f_{1,4}^2) - f_{1,3}^1 = -0,375$$

$i=2, j=3$ için;

$$f_{2,3}^3 = f^3\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{1,3}^2 + f_{3,3}^2 + f_{2,2}^2 + f_{2,4}^2) - f_{2,3}^1 = -0,882813$$

$i=3, j=3$ için;

$$f_{3,3}^3 = f^3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{2,3}^2 + f_{4,3}^2 + f_{3,2}^2 + f_{3,4}^1) - f_{3,3}^1 = -0,84375$$

elde edilir. Bu dağılımı daha iyi görebilmek için; Tablo 9' da konum ve zamana göre $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,1}$ ve $f_{2,2}$ düğüm noktalarındaki değerleri, Tablo 10' da konum ve zamana göre $f_{2,3}, f_{3,1}, f_{3,2}$ ve $f_{3,3}$ düğüm noktalarındaki değerleri yazılmıştır.

Tablo 9. Konum ve zamana göre $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, $f_{2,1}$ ve $f_{2,2}$ düğüm noktalarındaki değerler

	(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$
	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$(t=0)$	0,204124	0,140625	0,375	0,421875	0,375	1
$(t=1,k=0)$	0,408248	0,1875	0,390625	0,375	0,390625	0,75
$(t=2,k=1)$	0,612372	0,25	0,28125	0,109375	0,28125	0,0625
$(t=3,k=2)$	0,816497	0,09375	-0,179688	-0,375	-0,179688	-0,75
$(t=4,k=3)$	1,02062	-0,429688	-0,796875	-0,640625	-0,796875	-1,125
$(t=5,k=4)$	1,224745	-0,890625	-0,917969	-0,375	-0,917969	-0,75
$(t=6,k=5)$	1,428869	-0,488281	-0,210938	0,109375	-0,210938	0,0625
$(t=7,k=6)$	1,632993	0,679688	0,759766	0,375	0,759766	0,75

Tablo 10. Konum ve zamana göre $f_{2,3}$, $f_{3,1}$, $f_{3,2}$ ve $f_{3,3}$ düğüm noktalarındaki değerler

	(i, j)	$(2, 3)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$
	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$(t = 0)$	0,204124	1,125	0,421875	1,125	1,265625
$(t = 1, k = 0)$	0,408248	0,671875	0,375	0,671875	0,5625
$(t = 2, k = 1)$	0,612372	-0,28125	0,109375	-0,28125	-0,59375
$(t = 3, k = 2)$	0,816497	-0,882813	-0,375	-0,882813	-0,84375
$(t = 4, k = 3)$	1,020621	-0,703125	-0,640625	-0,703125	-0,289063
$(t = 5, k = 4)$	1,224745	-0,144531	-0,375	-0,144531	0,140625
$(t = 6, k = 5)$	1,428869	0,210938	0,109375	0,210938	0,144531
$(t = 7, k = 6)$	1,632993	0,302734	0,375	0,302734	0,070313

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

1. Sonlu fark formülasyonları elde edilmiştir.
2. Bu formüller eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemlere uygulayarak bu denklemlerin nümerik olarak çözülmüştür.



4. ÖNERİLER

Bu çalışmada sonlu fark metodu kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanarak eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler nümerik olarak çözülmüştür.

Standart olmayan başlangıç koşullu problemlerin yaklaşık çözümleri için daha hassas ve kolay teknikler geliştirilebilir.



KAYNAKLAR

- Alkan, H. (2011). Kuadratik formlar ve diophantine denklemler. Yüksek Lisans Tezi. Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, Türkiye, 68 s.
- Ames, W. F. (1977). Numerical Methods For Partial Differential Equations. Academic Press Inc., Second Edition, ISBN: 0-12-056760-1, 367s.
- Bartels, S. (2015). Numerical Methods For Nonlinear Partial Differential Equations. Springer International Publishing, Volume 47, ISBN: 978-3-319-13797-1, 394 s.
- Baydemir, B. (2014). Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sumudu dönüşümü metodu ile çözümü. Yüksek Lisans Tezi. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, Türkiye, 40 s.
- Burden, R. L., Faires D. J. ve Burden, A. M. (2014). Numerical Analysis. Cengage Learning, Tenth Edition, ISBN: 978-1-305-25366-7, 918 s.
- Dehghan, M. (2007). The one-dimensional heat equation subject to a boundary integral specification. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2), 661-675.
- Demir, A. (2012). Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine. Yüksek Lisans Tezi. Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla, Türkiye, 69 s.
- Duran, S. (2012). Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri. Doktora Tezi. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, Türkiye, 70 s.
- Gerald, C. F. ve Wheatley, P. O. (2004). Applied Numerical Analysis. Pearson Addison Wesley Inc., Seventh Edition, ISBN: 0-321-13304-8, 618 s.
- Gordon, C. E. (2010). Numerical Solution of Partial Differential Equations. Gaither Gaithersburg, Maryland, 109 s.
- Kaw A. ve Garapati S. H. (2011). Parabolic Differential Equations. Textbook notes for the parabolic partial differential equations [PDF Belgesi]. 07 Şubat 2019 tarihinde <http://numericalmethods.eng.usf.edu> adresinden erişildi.
- Kemancı, B. (2012). İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin legendre polinom çözümleri ve uygulamaları. Doktora Tezi. Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla, Türkiye, 91 s.
- Koca K. (2013). Kısmi Türevli Denklemler. Gazi Kitabevi, Ankara, ISBN: 978-6053440192, 232 s.
- Lynch, D. R. (2005). Numerical Partial Differential Equations for Environmental Scientists and Engineers. Springer Science+Business Media. Inc., Boston, ISBN: 0-387-23620-1, 388 s.

- Polyanin, A. D. (2002). Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Chapman&Hall/CRC, ISBN: 1-58488-299-9, 785 s.
- Smith, G. D. (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Methods Difference Methods. Clarendon Press, Oxford, Third Edition, ISBN: 0-19-859650-2, 337 s.
- URL-1, (2018). https://web.itu.edu.tr/yukselen/UCK348/UCK348_Index.html (05 Mayıs 2018).
- URL-2, (2019). <https://web.itu.edu.tr/yukselen/HM504/05-%20K%FDsmi%20diferansiyel%20denklemler.pdf> (15 Nisan 2019).
- Wazwaz, A. M. (1996). Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Partial Differential Equations, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol.65, pp.293-308.
- Wazwaz, A. (2009). Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Beijing, ISBN: 978-7-04-025480-8, 742 s.
- Weinberger, H. F. (1965). First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, Inc., ISBN: 0-486-68640, 446s.
- Yaşar, İ. B. (2009). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Siyasal Kitabevi, 4. Baskı, ISBN: 978-9-75-735142-9, 478s.

ÖZGEÇMİŞ

Halil İbrahim DÖNMEZ, İzmir'de doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini İzmir'de tamamladı. Lisans eğitimini Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yaptı. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini halen daha devam ettirmektedir.

