

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem BOĞA KOZAN

KISITLI TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISITLI TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ

Özlem BOĞA KOZAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİMDALI

**Bu tez .../.../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği /
Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.**

İmza:.....	İmza:.....	İmza:.....
Doç. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU	Yard. Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod no:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISITLI TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ

Özlem BOĞA KOZAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİMDALI

Danışman: Doç. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR

Yıl: 2006, Sayfa: 75

Jüri: Doç. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR

Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

Yard. Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Bu çalışmada, tam ya da stokastik lineer kısıtlamalar altında tahmin konusu incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın birinci bölümünde gerekli matris kuramı teoremleri verilmiştir. İkinci bölümde tam ve stokastik kısıtlamalar üzerinde çalışılmış ve sonraki bölümlerde, verilen teoremler yardımıyla iki yanlı tahmin edicinin Hata Kareleri Ortalaması (MSE) kriterlerine göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Son bölümde ise zayıf (R,r) -yansızlığı incelenerek, zayıflatılmış lineer kısıtlamalar altında optimal tahmin ediciler ve bu tahmin edicilerin karşılaştırmalarını içeren konular ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, Lineer Kısıtlama, MSE Kriterleri, Varyans-Kovaryans Matrisi, Zayıf (R,r) -yansızlık.

ABSTRACT

MSc THESIS

EXAMINING THE RESTRICTED ESTIMATORS

Özlem BOĞA KOZAN

**DEPARTMENT OF STATISTICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR

Year: 2006, Pages: 75

Jury: Assoc. Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR

Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

Assist. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

In this study, estimation under exact or stochastic linear restrictions is examined. For this purpose, in the first and the second chapters, required theorems of matrix theory and exact and stochastic restrictions are given respectively. In the following chapters comparisons of two biased estimators according to MSE criterion, which is based on the theorems mentioned in the previous chapters, are given.

In the last chapter, after the study of weakly (R,r) -unbiasedness, optimal estimators, under weakened linear restrictions including the comparisons of these estimators, are examined.

Key Words: Linear restrictions, Matrix of variance-covariance, MSE Criterion, Restricted Least Square Estimator, Weakly (R,r) -unbiasedness.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tezimi hazırlarken her zaman yanımda olan ve beni anlayışla karşılayan eşim Fatih KOZAN'a, aileme ve değerli arkadaşım Deniz ÜNAL'a her türlü desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Bilgiler	1
2. TAM VE STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR	15
2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler (RLS) Tahmin Edicisi	15
2.2. RLS Tahmin Edicisi ile Kısıtlı Ridge Tahmin Edicisi'nin Karşılaştırması	17
2.3. Tam Lineer Kısıtlayıcıların Kademeli Olarak Eklenmesi.....	27
3. YANLI LİNEER KISITLAMALAR VE MSE KRİTERİNE GÖRE LSE İLE KARŞILAŞTIRMALAR	35
3.1. $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}(R)$ 'nin MSE Karşılaştırması	36
3.2. $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}(R)$ 'nin Karşılaştırılması için MSE-II Kriterinin Uygulanması.....	37
4. İKİ YANLI KISITLI TAHMİN EDİCİNİN MSE KARŞILAŞTIRMASI.....	40
4.1. Kademeli Yanlı Kısıtlamalar (Özel Durum)	42
4.2. Sonuç	45
5. STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR	48
5.1. Mixed Tahmin Edici	48
5.2. Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar	50
5.3. Yanlı Stokastik Kısıtlamalar	53
5.3.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$ 'nin $\hat{\beta}$ Üzerine Üstünlüğü.....	53
5.3.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}$ 'nin $\hat{\beta}(R)$ Üzerine Üstünlüğü.....	55
5.3.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$ 'nin $\hat{\beta}$ Üzerine Üstünlüğü	56
5.3.4. $\hat{\beta}(R)$ ve $\hat{\beta}$ için MSE-III Karşılaştırması	57
6. ZAYIFLATILMIŞ LİNEER KISITLAMALAR	60

6.1. Zayıf $(R, \mathbf{r})$ -Yansızlık	60
6.2. Optimal Zayıf $(R, \mathbf{r})$ -Yansız Tahmin Ediciler	61
6.3. Uygulanabilir Tahmin Ediciler- $\hat{\beta}_1(\beta, A)$ Tahmin Edicisinde β 'nın En Uygun Seçimi.....	67
6.4. Mixed Tahmin Edici Yerine RLS Tahmin Edicisinin Kullanılması.....	69
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ.....	74

1. GİRİŞ

İstatistiksel araştırmalarda daima en iyi tahmin ediciyi bulma çalışmaları yapılmaktadır. Regresyon katsayılarının stokastik ve stokastik olmayan kısıtlamalar altında tahmini de bu araştırmalar içerisinde yer almıştır ve almaya devam etmektedir.

Bu nedenle bu çalışmada, tam yada stokastik lineer kısıtlamalar altında tahmin konusu incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın birinci bölümünde gerekli temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tam ve stokastik kısıtlamalar üzerinde çalışılmış ve sonraki bölümlerde, verilen teoremler yardımıyla, iki yanlı tahmin edicinin MSE kriterlerine göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Son bölümde ise zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansızlığı incelenerek, zayıflatılmış lineer kısıtlamalar altında optimal tahmin ediciler ve bu tahmin edicilerin karşılaştırmalarını içeren konular ele alınmıştır.

1.1. Temel Bilgiler

Bu bölümde, sonraki bölümlerdeki, bazı teoremlerin ispatlarında gerekli olabilecek tanım ve teoremler verilecektir.

Teorem 1.1

A, B, C, D matrisleri uygun boyutta tersi alınabilir matrisler ise, aşağıdakiler geçerlidir:

- i. c bir skaler olmak üzere, $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$ 'dir.
- ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- iii. $A: p \times p, B: p \times n, C: n \times n, D: n \times p$ matris ise,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

dir.

- iv. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ uygun boyutta vektörler olmak üzere, $1 + \mathbf{b}'A^{-1}\mathbf{a} \neq 0$ ise (iii)'den,

$$(A + \mathbf{a}\mathbf{b}')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{a}\mathbf{b}'A^{-1}}{1 + \mathbf{b}'A^{-1}\mathbf{a}}$$

olur.

$$\mathbf{v.} \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Teorem 1.2 (Parçalı Matrisin Tersi)

$A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ matrisi için, $E : n_1 \times n_1, F : n_1 \times n_2, G : n_2 \times n_1, H : n_2 \times n_2, (n_1 + n_2 = n)$ ve

$D = H - GE^{-1}F$ olsun. E ve D tekil olmayan matrisler olmak üzere, A matrisinin tersi A^{-1} ;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1}(I + FD^{-1}GE^{-1}) & -E^{-1}FD^{-1} \\ -D^{-1}GE^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 1.3

$A : m \times n$ tipinde bir matris olsun.

- i. $0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$.
- ii. A' , A matrisinin transpozu olmak üzere, $\text{rank}(A) = \text{rank}(A')$ 'dür.
- iii. $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.
- iv. $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,
- v. $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A'A) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A')$.
- vi. $B : m \times m$ ve $C : n \times n$ tekil olmayan (nonsingüler) matrisleri için, $\text{rank}(BAC) = \text{rank}(A)$ 'dır.
- vii. $A : n \times n$ matrisi için, $\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow A$ 'nın tekil olmayan matris olmasıdır.

Teorem 1.4

$A \geq 0$ olsun; λ_i 'ler A 'nın özdeğerleri olmak üzere;

- i. $\lambda_i \geq 0$.
- ii. $\text{tr}(A) \geq 0$.

iii. $A^{1/2} = \Gamma \Lambda^{1/2} \Gamma'$ için $A = A^{1/2} A^{1/2}$ 'dir.

Burada, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan diagonal matris ve

$\Gamma = (\gamma_{(1)}, \dots, \gamma_{(p)})$, standartlaştırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal matristir.

iv. Herhangi bir $C : n \times m$ matrisi için $C'AC \geq 0$ 'dır.

v. Herhangi bir C matrisi için $C'C \geq 0$ ve $CC' \geq 0$ 'dır.

Teorem 1.5

$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ simetrik $A : n \times n$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\sup_x \frac{\mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1, \inf_x \frac{\mathbf{x}'A\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_n$$

dir.

Teorem 1.6

$\text{rank}(A) = m \leq n$, $A : n \times m$ matris ve $B : m \times m$ tipinde herhangi bir simetrik matris

olsun. $ABA' \geq 0 \Leftrightarrow B \geq 0$ olmasıdır.

Teorem 1.7

$A > 0$ ve T herhangi bir karesel matris ise;

$$\text{i. } \sub_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2}{\mathbf{x}'A\mathbf{x}} = \mathbf{y}'A^{-1}\mathbf{y},$$

$$\text{ii. } \sub_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{(\mathbf{y}'T\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'A\mathbf{x}} = \mathbf{y}'TA^{-1}T'\mathbf{y}$$

dir.

Teorem 1.8

$I : n \times n$ tipinde birim matris ve $\mathbf{a} : n$ -vektör olsun.

$I - \mathbf{a}\mathbf{a}' \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}'\mathbf{a} \leq 1$ olmasıdır.

Teorem 1.9

$MM' - NN' \geq 0$ olsun. Bu durumda $N = MH$ olacak şekilde bir H matrisi vardır.

Teorem 1.10

$A : n \times n$ matris, $(-A) > 0$ ve $\mathbf{a}$ bir n -vektör olsun. $n \geq 2$ olması durumunda

$A + \mathbf{a}\mathbf{a}'$ hiçbir zaman negatif olmayan tanımlı (n.n.d.) olamaz.

Teorem 1.11

$A: n \times n$ matrisi, $\text{rank}(A) = r \leq n$ olan idempotent matris olsun.

- i. A matrisinin özdeğerleri, 1 veya 0'dır.
- ii. $\text{tr}(A) = \text{rank}(A) = r$.
- iii. A matrisi tam ranklı matris ise $A = I_n$ 'dir.
- iv. A ve B matrisleri idempotent ve $AB = BA$ ise bu durumda AB matrisi de idempotenttir.
- v. A idempotent ve P ortogonal matris ise bu durumda PAP' matrisi de idempotenttir.
- vi. A idempotent matris ise $I - A$ matrisi de idempotenttir ve

$$A(I - A) = (I - A)A = 0$$

dir.

Teorem 1.12

$A: m \times n$ matris olsun.

- i. A tekil olmayan matris ise $A^+ = A^{-1}$.
- ii. $(A^+)^+ = A$.
- iii. $(A^+)' = (A')^+$.
- iv. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+) = \text{rank}(A^+A) = \text{rank}(AA^+)$.
- v. A ortogonal izdüşüm ise $A^+ = A$.
- vi. $\text{rank}(A): m \times n = m \Rightarrow A^+ = A'(AA')^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$.
- vii. $\text{rank}(A): m \times n = n \Rightarrow A^+ = (A'A)^{-1}A'$ ve $A^+A = I_n$.
- viii. $P: m \times m$ ve $Q: n \times n$ ortogonal matrisler ise $(PAQ)^+ = Q^{-1}A^+P^{-1}$ 'dir.
- ix. $(A'A)^+ = A^+(A')^+$ ve $(AA')^+ = (A')^+A^+$.
- x. $A^+ = (A'A)^+A' = A'(AA')^+$.

Burada A^+ , A 'nın Moore-Penrose tersidir.

Teorem 1.13

$A: n \times n$ simetrik matris, $\mathbf{a} \in \Re(A)$, $\mathbf{b} \in \Re(A)$ ve $1 + \mathbf{b}'A^+\mathbf{a} \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$(A + \mathbf{a}\mathbf{b}')^+ = A^+ - \frac{A^+\mathbf{a}\mathbf{b}'A^+}{1 + \mathbf{b}'A^+\mathbf{a}}$$

dır. Burada $\Re(A)$, A 'nın kolon uzayını göstermektedir.

Teorem 1.14 (Albert, 1972)

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ simetrik matris olsun. Bu durumda,

(a) $A \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

i. $A_{22} \geq 0$,

ii. $A_{21} = A_{22}A_{22}^-A_{21}$,

iii. $A_{11} \geq A_{12}A_{22}^-A_{21}$

olmasıdır.

(b) $A > 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

i. $A_{22} > 0$,

ii. $A_{11} > A_{12}A_{22}^-A_{21}$

olmasıdır. Burada A^- , A 'nın genişletilmiş tersini (g-ters) gösterir.

Teorem 1.15

$\mathbf{x}$ bir n - vektör ve A bir $n \times n$ simetrik matris olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'A\mathbf{x} = 2A\mathbf{x}$$

dir.

Teorem 1.16

$\mathbf{x}$ bir n - vektör, $\mathbf{y}$ bir m -vektör ve C bir $n \times m$ matris olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial C} \mathbf{x}'C\mathbf{y} = \mathbf{xy}'$$

olur.

Teorem 1.17 (Aitken, 1935)

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2 W)$$

genel lineer modelinde, bağımlı değişken $\mathbf{y}$; $T \times 1$ tipinde bir vektör, bağımsız değişken X ; $T \times K$ tipinde stokastik olmayan bir matristir ve $\text{rank}(X) = K$ 'dır. $\boldsymbol{\beta}$; $K \times 1$ tipinde parametre vektörüdür. $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörü, $T \times 1$ tipindedir ve $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 W$ 'dur. Burada W ; $T \times T$ tipinde pozitif tanımlı (p.d.) simetrik matristir ve W matrisinin bilindiği kabul edilmektedir. Genel lineer model için genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi (GLSE);

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}\mathbf{y}$$

dir.

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E\left((X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}\mathbf{y}\right) \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}E(\mathbf{y}) \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}X\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

olduğundan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahmin edicisi $\boldsymbol{\beta}$ için yansızdır ve en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE). $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 'nın kovaryans matrisi;

$$\begin{aligned} V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= V\left((X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}\mathbf{y}\right) \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}V(\mathbf{y})(X'W^{-1}X)^{-1} \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1}\sigma^2 W W^{-1}X(X'W^{-1}X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'W^{-1}X)^{-1} = \sigma^2 S^{-1} \end{aligned}$$

dir. Bilinmeyen σ^2 parametresi ve kovaryans matrisi için kullanılan tahmin edici ise,

$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})' W^{-1} (\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})}{T - K}$$

ve

$$\hat{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = s^2 S^{-1}$$

dir. Bu tahmin ediciler σ^2 ve $\sigma^2 S^{-1}$ için yansızdır;

$$E(s^2) = \sigma^2$$

$$E(\hat{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}})) = \sigma^2 S^{-1}$$

dir.

Teorem 1.18 (Baksalary ve ark., 1983)

$M \geq 0$ matrisi $n \times n$ ve N matrisi $m \times n$ tipinde herhangi iki matris olsun.

$M - N'(NM^+N')^+ N \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\Re(N'NM) \subset \Re(M)$ olmasıdır.

Teorem 1.19

A , $n \times n$ tipinde herhangi bir karesel matris ve $\mathbf{a}$ bir n -vektör, $\mathbf{a} \notin \Re(A)$ olsun.

$\phi = 1 + \mathbf{a}'A^-\mathbf{a}$, $U = I - AA^-$, $V = I - A^-A$ olmak üzere;

$$(A + \mathbf{a}\mathbf{a}')^- = A^- - \frac{A^-\mathbf{a}\mathbf{a}'U'U}{\mathbf{a}'U'U\mathbf{a}} - \frac{VV'\mathbf{a}\mathbf{a}'A^-}{\mathbf{a}'VV'\mathbf{a}} + \phi \frac{VV'\mathbf{a}\mathbf{a}'U'U}{(\mathbf{a}'U'U\mathbf{a})(\mathbf{a}'VV'\mathbf{a})}$$

dir.

Teorem 1.20

A simetrik bir matris ve $\mathbf{c} \in \Re(A)$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir;

- i. $\text{rank}(A + \mathbf{c}\mathbf{c}') = \text{rank}(A)$.

$$\text{ii. } \Re(A + \mathbf{c}\mathbf{c}') = \Re(A).$$

$$\text{iii. } 1 + \mathbf{c}'A^-\mathbf{c} \neq 0.$$

Tanım 1.1

$\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\theta} \in R^p$ parametre vektörü için bir tahmin edici olarak tanımlansın. $D(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}$ 'nin varyans-kovaryans matrisi ve $\mathbf{d}$, bias (yanlılık) vektörü, sırasıyla;

$$D(\mathbf{t}) = E \left[(\mathbf{t} - E(\mathbf{t}))(\mathbf{t} - E(\mathbf{t}))' \right] = V(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{d} = \text{bias}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = E(\mathbf{t}) - \boldsymbol{\theta}$$

olmak üzere $\mathbf{t}$ 'nin Hata Kareleri Ortalaması (MSE) matrisi;

$$M(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = D(\mathbf{t}) + \mathbf{d}\mathbf{d}'$$

dır.

Tanım 1.2

$\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$, $\boldsymbol{\theta}$ 'nin iki tahmin edicisi olsun.

$$\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = M(\mathbf{t}_1, \boldsymbol{\theta}) - M(\mathbf{t}_2, \boldsymbol{\theta})$$

n.n.d. matris ise $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ 'dır. Bu durumda $\mathbf{t}_2$ tahmin edicisi, MSE-I'e göre $\mathbf{t}_1$ 'den daha güçlüdür denir.

$$\mathbf{d}_i = \text{bias}(\mathbf{t}_i, \boldsymbol{\theta}) \quad i = 1, 2$$

$$D(\mathbf{t}_i) = V(\mathbf{t}_i) \quad i = 1, 2$$

$$D = D(\mathbf{t}_1) - D(\mathbf{t}_2)$$

$$\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = D + \mathbf{d}_1\mathbf{d}_1' - \mathbf{d}_2\mathbf{d}_2'$$

olmak üzere $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ için aşağıdaki koşullar incelenerek, bu matrisin p.d. veya n.n.d. olduğuna karar verilebilir:

$\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' \geq 0$ olduğundan,

$D > 0$ ise $D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' > 0$

$D \geq 0$ ise $D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' \geq 0$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ 'nin p.d. veya n.n.d. olup olmadığına karar verme problemi, A p.d. ya da n.n.d. iken $A - \mathbf{a}\mathbf{a}'$ matrisinin, p.d veya n.n.d. olup olmaması problemine dönüşür.

1. Koşul: $D > 0$

Teorem 1.21 (Farebrother, 1976)

A , $n \times n$ tipinde p.d. bir matris ve $\mathbf{a}$, bir n -vektör olsun. $A - \mathbf{a}\mathbf{a}' > (\geq) 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{a}'A^{-1}\mathbf{a} < (\leq) 1$ olmasıdır.

Bu teoremin $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ matrisine uygulanması ile aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.22

$\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$ tahmin edicilerinin varyans-kovaryans matrisleri farkı $D = D(\mathbf{t}_1) - D(\mathbf{t}_2)$ p.d. olsun. MSE-I kriterine göre $\mathbf{t}_2$ 'nin $\mathbf{t}_1$ 'den iyi olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathbf{d}_2' (D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')^{-1} \mathbf{d}_2 < (\leq) 1 \quad (1.1)$$

olmasıdır.

Teorem 1.1 kullanılarak,

$$(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')^{-1} = D^{-1} - \frac{D^{-1} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' D^{-1}}{1 + \mathbf{d}_1' D^{-1} \mathbf{d}_1}$$

yazılabilir. $d_{ij} = \mathbf{d}_i' D^{-1} \mathbf{d}_j$ ($i, j = 1, 2$) kullanılarak, (1.1)'den,

$$\mathbf{d}_2' (D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')^{-1} \mathbf{d}_2 = d_{22} - d_{12}^2 (1 + d_{11})^{-1} \text{ yazılır, } (d_{12}^2 = d_{11} d_{22}).$$

Şimdi aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 1.

$D > 0$ iken, $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) > (\geq) 0$ olması için gerek ve yeter koşul $(1 + d_{11})(d_{22} - 1) < (\leq) d_{12}^2$ olmasıdır. Ayrıca aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarının her biri de $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) > (\geq) 0$ olması için yeterlidir.

i. $(1 + d_{11})d_{22} < (\leq) 1$

ii. $d_{22} < (\leq) 1$

Sonuç 2.

$D > 0$, $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ lineer bağımlı ise, $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) > (\geq) 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $d_{22} - d_{11} < (\leq) 1$ olmasıdır.

Sonuç 3.

$D > 0$ ve $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ için yansız ise, $\mathbf{d}_1 = 0$ ve $d_{11} = d_{12} = 0$ 'dır. Bundan dolayı, $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) > (\geq) 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d_{22} < (\leq) 1$ olmasıdır.

2. Koşul: $D \geq 0$

Bu koşul altında, iki yanlı tahmin edicinin MSE matrislerinin karşılaştırmaları, temelde $A - \mathbf{a}\mathbf{a}'$ matrisinin $A \geq 0$ olduğu durum ile açıklanabilir.

Teorem 1.23 (Baksalary ve Kala, 1983)

A , $n \times n$ tipinde n.n.d. bir matris ve $\mathbf{a}$, bir n -vektör olsun. A^- matrisi A 'nın g-ters matrisi olmak üzere $(AA^-A = A)$, $A - \mathbf{a}\mathbf{a}' \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\mathbf{a} \in \mathcal{R}(A)$ ve $\mathbf{a}'A^-\mathbf{a} \leq 1$ olmasıdır.

Not: $\mathbf{a} \in \mathcal{R}(A)$ ise herhangi bir $\mathbf{c}$ vektörü için, $\mathbf{a} = A\mathbf{c}$ 'dir. Bundan dolayı, $\mathbf{a}'A^-\mathbf{a} = \mathbf{c}'AA^-A\mathbf{c} = \mathbf{c}'A\mathbf{c}$ olur ve $\mathbf{a}'A^-\mathbf{a}$, A 'nın seçilen herhangi bir g-tersine göre değişmez.

Teorem 1.24

$\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$ tahmin edicilerinin varyans-kovaryans matrisleri farkı $D = D(\mathbf{t}_1) - D(\mathbf{t}_2)$ n.n.d. olsun. $\mathbf{d}_i = \text{bias}(\mathbf{t}_i)$ ($i = 1, 2$) ve $(D + \mathbf{d}_1\mathbf{d}_1')^-$; $D + \mathbf{d}_1\mathbf{d}_1'$ için bir g-ters olmak üzere, $\mathbf{t}_2$ 'nin $\mathbf{t}_1$ 'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul;

$$\text{i. } \mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')$$

$$\text{ii. } \mathbf{d}_2' (D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')^- \mathbf{d}_2 \leq 1$$

olmasıdır.

$D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1'$ 'nün g-tersini hesaplayabilmek için iki durum göz önünde bulundurulabilir;

$$\text{i. } \mathbf{d}_1 \in \mathfrak{R}(D) \text{ Durumu:}$$

$\mathbf{d}_1 \in \mathfrak{R}(D)$ ise, $\mathbf{f}_1$ uygun vektör olmak üzere, Teorem 1.13'den,

$$(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')^- = D^- - \frac{D^- \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' D^-}{1 + \mathbf{d}_1' D^- \mathbf{d}_1}$$

dir. $\mathbf{d}_1 \in \mathfrak{R}(D)$ olduğundan $\mathbf{d}_1 = D \mathbf{f}_1$ olacak şekilde bir $\mathbf{f}_1$ vektörü vardır. $D \geq 0$ kabul edildiğinden $\mathbf{d}_1' D^- \mathbf{d}_1 = \mathbf{f}_1' D^- \mathbf{f}_1 \geq 0$ ve $1 + \mathbf{d}_1' D^- \mathbf{d}_1 > 0$ olur. $D \geq 0$ ve $\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1') &= \mathfrak{R}(D) + \mathfrak{R}(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1') \\ &= \mathfrak{R}(D) + \mathfrak{R}(\mathbf{d}_1) \end{aligned}$$

olur ve Teorem 1.20'den $\mathfrak{R}(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1') = \mathfrak{R}(D)$ 'dir.

Teorem 1.24'den aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 1.

$\mathbf{d}_1 \in \mathfrak{R}(D)$, $\mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1') = \mathfrak{R}(D)$ olsun ve D^- , D 'nin bir g-tersi olmak üzere $d_{ij} = \mathbf{d}_i' D^- \mathbf{d}_j$ ($i, j = 1, 2$) kabul edilsin. $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul. $(1 + d_{11})(d_{22} - 1) \leq d_{12}^2$ olmasıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki durumların her biri $\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ olması için yeterlidir;

$$(a) (1 + d_{11})d_{22} \leq 1,$$

$$(b) d_{22} \leq 1.$$

Sonuç 2.

Sonuç1 geçerli ve $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ lineer bağımlı olsun. $d_{22} - d_{11} \leq 1 \Leftrightarrow \Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ 'dır.

Sonuç 3.

$\mathbf{t}_1$ yansız ($\mathbf{d}_1 = 0$) ve $\mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D)$ olsun. $d_{22} \leq 1 \Leftrightarrow \Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ 'dır.

ii. $\mathbf{d}_1 \notin \mathfrak{R}(D)$ Durumu:

Teorem 1.23(ii)'den görüldüğü gibi $(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')$ matrisinin g-tersinin bulunması gerekir. Teorem 1.19'un uygulanması ile aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.

$\mathbf{d}_1 \notin \mathfrak{R}(D)$ ve $\mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1')$ olsun.

$\mathbf{u} = (I - DD^+) \mathbf{d}_1$, $\mathbf{v} = D^+ \mathbf{d}_1$, $\gamma = 1 + \mathbf{d}_1' D^+ \mathbf{d}_1$, $\phi = (\mathbf{u}' \mathbf{u})^{-1}$ notasyonları ile,

$\Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$\mathbf{d}_2' D^+ \mathbf{d}_2 - 2\phi(\mathbf{d}_2' \mathbf{v})(\mathbf{d}_2' \mathbf{u}) + \gamma \phi^2 (\mathbf{d}_2' \mathbf{u})^2 \leq 1$ olmasıdır.

$\mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D)$ ve D simetrik matris ise $(DD^+)' = D^+ D$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2' \mathbf{u} &= \mathbf{f}_2' D (I - DD^+) \mathbf{d}_1 = \mathbf{f}_2' (D - DDD^+) \mathbf{d}_1 \\ &= \mathbf{f}_2' (D - DD^+ D) \mathbf{d}_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir.

Sonuç 5.

$\mathbf{d}_1 \notin \mathfrak{R}(D)$ ve $\mathbf{d}_2 \in \mathfrak{R}(D)$ olsun. $\mathbf{d}_2' D^+ \mathbf{d}_2 \leq 1 \Leftrightarrow \Delta(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \geq 0$ olmasıdır.

Standart regresyon modeli $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2 I)$ ve $\text{rank}(X) = K$ olduğu göz önüne alınarak, $C_i : K \times T$, $\mathbf{c}_i : K \times 1$ stokastik olmayan matrisler olmak üzere;

$$\mathbf{b}_i = C_i \mathbf{y} + \mathbf{c}_i \quad (i = 1, 2)$$

iki heterojen lineer tahmin edici karşılaştırılsın.

$$V(\mathbf{b}_i) = \sigma^2 C_i C_i',$$

$$\mathbf{d}_i = \text{bias}(\mathbf{b}_i, \boldsymbol{\beta}) = (C_i X - I) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}_i,$$

$$M(\mathbf{b}_i, \boldsymbol{\beta}) = \sigma^2 C_i C_i' + \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i' \quad (i=1,2),$$

$\mathbf{b}_1$ ve $\mathbf{b}_2$ 'nin varyans-kovaryans matrisleri farkı olan simetrik D matrisi ;

$$D = \sigma^2 (C_1 C_1' - C_2 C_2')$$

dir. Tanım 1.2'den, $\mathbf{b}_2$ 'nin $\mathbf{b}_1$ üzerindeki MSE üstünlüğü için,

$$\Delta(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = D + \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' - \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2' \geq 0$$

olması gerektiği ve bu durumda D matrisinin etkisinin olduğu bilinir. Burada D matrisinin p.d. veya n.n.d. olması ile ilgilenilecektir.

Teorem 1.25 (Baksalary, Liski ve Trenkler, 1989)

D matrisinin n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul,

$\Re(C_2) \subset \Re(C_1)$ ve $\lambda_{\max}(C_2'(C_1 C_1')^{-1} C_2) \leq 1$ olmasıdır. Burada $\lambda(\cdot)$, parantez içindeki matrisin maksimum özdeğerini gösterir. Bu özdeğer tercih edilen $(C_1 C_1')^{-1}$ g- ters matrisi için sabittir.

Teorem 1.26

$D > 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$C_1 C_1' > 0 \tag{1.3}$$

ve

$$\lambda_{\max}(C_2'(C_1 C_1')^{-1} C_2) < 1$$

olmasıdır.

Teorem 1.27

$p \times p$ tipinde olan her simetrik A matrisi,

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma' = \sum \lambda_i \gamma_{(i)} \gamma_{(i)}'$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan diagonal matris ve $\Gamma = (\gamma_{(1)}, \dots, \gamma_{(p)})$, standartlaştırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal matristir.

Teorem 1.28

A simetrik matris ve $A = \Gamma \Lambda \Gamma'$ olsun.

- i. A ve Λ aynı özdeğerlere sahiptir.
- ii. $A = \Gamma \Lambda \Gamma'$ olduğundan $\Lambda = \Gamma' A \Gamma$ olur.
- iii. A , $p \times p$ tipinde bir simetrik matris ise, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, $A^n = \Gamma \Lambda^n \Gamma'$ ve $\Lambda^n = \text{diag}(\lambda_i^n)$ yazılabilir. A matrisinin özdeğerleri pozitif ise $s > 0$ ve r tamsayılar olmak üzere, $A^{\frac{r}{s}} = \Gamma \Lambda^{\frac{r}{s}} \Gamma'$ ve $\Lambda^{\frac{r}{s}} = \text{diag}(\lambda_i^{\frac{r}{s}})$ tanımlanabilir.
- iv. A herhangi bir kare matris ise, A matrisinin rankı, sıfır olmayan özdeğerlerinin sayısına eşittir.

2. TAM VE STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR

Klasik regresyon modeli olan; $y = X\beta + \varepsilon$ modelinde, β için yansız tahmin ediciler sınıfı içinde en optimal tahmin edici olan en küçük kareler tahmin edicisi (LSE);

$$b = (X'X)^{-1} X'y$$

dir. İstatistiksel araştırmalarda daha iyi tahmin ediciler sağlamak için birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri de tam veya stokastik kısıtlamaların önceki bilgilerle birleştirilmesi yolu ile bir tahmin edici bulma çalışmasıdır (Chipman ve Rao, 1964, Toutenburg, 1973, Yancey ve ark., 1973, 1974).

Klasik regresyon modeli üzerinde yoğunlaşan bu çalışmalarda X , $rank(X) = K$ olan $T \times K$ matris kabul edilmiştir.

Regresyon katsayıları üzerinde sahip olunan yardımcı bilgiler, aşağıdaki lineer denklem formunda yazılabiliyor olsun. r bir $J \times 1$ vektör ve R bir $J \times K$ matris olmak üzere;

$$r = R\beta$$

$$rank(R) = J$$

olsun.

2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler (RLS) Tahmin Edicisi

Örneklem ve yardımcı bilgiler kullanılarak, hataların kareleri toplamı $s(\beta)$, $r = R\beta$ lineer kısıtlaması altında minimize edilecektir. Yani,

$$S(\beta, \lambda) = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r)$$

minimize edilecektir. Burada λ , $K \times 1$ vektör olan Lagrange çarpanıdır.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -X'\mathbf{y} + X'X\boldsymbol{\beta} - R'\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = R\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r} = 0 \quad (2.2)$$

olmak üzere, problemin çözümü $\mathbf{b}(R)$ kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (RLSE); (2.1)'den;

$$\mathbf{b}(R) = (X'X)^{-1} X'\mathbf{y} + (X'X)^{-1} R'\boldsymbol{\lambda}$$

dır ve (2.2)'den;

$$R\mathbf{b}(R) = \mathbf{r} = R\mathbf{b} + R(X'X)^{-1} R'\boldsymbol{\lambda}$$

olduğu görülür. $R(X'X)^{-1} R' > 0$ olduğu kullanılırsa, optimal $\boldsymbol{\lambda}$ 'dan gelen,

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left(R(X'X)^{-1} R' \right)^{-1} (\mathbf{r} - R\mathbf{b})$$

bulunur. $S = X'X$ olmak üzere;

$$\mathbf{b}(R) = \mathbf{b} + S^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} (\mathbf{r} - R\mathbf{b})$$

şeklinde yazılabilir. $R\mathbf{b}(R)$, $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta}$ kısıtlamasını sağlar. Yani,

$$\begin{aligned} R\mathbf{b}(R) &= R\mathbf{b} + (RS^{-1} R') (RS^{-1} R')^{-1} (\mathbf{r} - R\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{r} \end{aligned}$$

dir.

$\mathbf{b}(R)$ 'nin beklenen değeri: $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}(R)) &= \boldsymbol{\beta} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{b}(R)$, $\boldsymbol{\beta}$ için yansız tahmin edicidir.

$\mathbf{b}(R)$ 'nin varyansı;

$$V(\mathbf{b}(R)) = \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$$

dir. Görüldüğü gibi, $\mathbf{b}(R)$ 'nin kovaryans matrisi sadece R 'ye bağlıdır. Bu, $\mathbf{b}(R)$ tahmin edicisinin, $\mathbf{b}$ ile karşılaştırıldığında her zaman daha küçük varyansa sahip olduğunu gösterir.

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R)) = \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \geq 0 \quad (2.3)$$

dır. Dolayısıyla regresyon modeli üzerinde lineer kısıtların kullanılmasının yeteri kadar etkili olduğu söylenebilir.

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R)) \geq 0 \text{ olması, } \mathbf{b}(R) \text{ 'nin, } \boldsymbol{\beta} \text{ 'nin } \left\{ \hat{\boldsymbol{\beta}} = C\mathbf{y} + D\mathbf{r} = (C, D) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \right\}$$

lineer tahmin edicileri sınıfı arasında en iyi yansız tahmin edici olduğunu gösterir.

2.2. RLS Tahmin Edicisi ile Kısıtlı Ridge Tahmin Edicisi'nin Karşılaştırması

Bu bölümde, lineer regresyon modelinin parametreler vektörü üzerinde, lineer kısıtlamalar olması durumunda, ridge tahmin edicisi ele alınacaktır ve yeni tahmin edicinin, kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (RLSE) ile karşılaştırılması incelenecektir. Bu tahmin edici, bilinen RLSE'nin genelleştirilmiş halidir ve Sarkar (1992) tarafından tanımlanan kısıtlı ridge tahmin edicisinden farklıdır.

$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ lineer regresyon modelinde $R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtlaması ele alınsın.

Burada, $R\beta = \mathbf{r}$ kısıtlamasının çözümlü olabilmesi için, $rank(R) = J$ olmalıdır. Her $\mathbf{y}_{T \times 1}$ için $R\tilde{\beta}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}$ ise $\tilde{\beta}(\mathbf{y})$ 'ye, β 'nın kısıtlı tahmin edicisi denir.

Bilinen kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi;

$$\mathbf{b}(R) = \mathbf{b} + (X'X)^{-1} R' \left(R(X'X)^{-1} R' \right)^{-1} (\mathbf{r} - R\mathbf{b})$$

dir. Sarkar (1992) tarafından tanımlanan yeni tahmin edici $\hat{\beta}^*(k)$,

$$\hat{\beta}^*(k) = T_k \mathbf{b}(R)$$

dır. Burada $k \geq 0$ olmak üzere $T_k = (I_K + k(X'X)^{-1})^{-1}$, $\hat{\beta}^*(0) = \mathbf{b}(R)$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}^*(k) = 0$ dir. Sarkar'ın amacı, aynı T_k matrisini, $\mathbf{b}(R)$ 'de kullanarak, varyansı küçültmektir. T_k matrisini, $\mathbf{b}$ 'ye uygulayarak bilinen ridge tahmin edicisi $\hat{\beta}(k)$ elde edilir.

$$\hat{\beta}(k) = T_k \mathbf{b} = (X'X + kI_K)^{-1} X'y$$

$\hat{\beta}(k)$ ile benzerliğinden dolayı, $\hat{\beta}^*(k)$ “kısıtlı ridge tahmin edici” olarak adlandırılır. Bununla birlikte, $\hat{\beta}^*(k)$ 'nın $R\hat{\beta}^*(k) = \mathbf{r}$ kısıtını her $\mathbf{y}$ için sağlamadığı görülür. Dolayısıyla, $\hat{\beta}^*(k)$, $R\beta = \mathbf{r}$ kısıtına göre kısıtlı tahmin edici değildir.

Sarkar (1992), $\mathbf{b}(R)$ kullanıldığında, $R\beta = \mathbf{r}$ kısıtının daima doğru olduğunu kabul etmediği için, $\hat{\beta}^*(k)$ 'nın $R\beta = \mathbf{r}$ ile gerilen alt uzayın dışında değer aldığı kabul edilebilir. Burada, β için ridge tahmin edicisine benzer ve $R\beta = \mathbf{r}$ kısıtına göre kısıtlı yeni bir tahmin edici verilecektir. Swindel (1976) tarafından tanımlanan bu tahmin edici;

$$\hat{\beta}(k, \mathbf{b}_0) = (X'X + kI_K)^{-1} (X'y + k\mathbf{b}_0), \quad k \geq 0$$

dir. Burada $\mathbf{b}_0$, parametre hakkında bir ön bilgidir. Bu tahmin edici, $K \times 1$ tipindeki $\mathbf{b}_0$ vektörüne yaklaşır, yani; $\hat{\boldsymbol{\beta}}(0, \mathbf{b}_0) = \mathbf{b}$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b}_0) = \mathbf{b}_0$ 'dir. Eğer $\mathbf{b}_0$ hakkında bir ön bilgi yoksa, $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b}_0)$ tahmin edicisi, $\mathbf{b}_0 = 0$ 'a daraltılabilir. Buradan da alışılmış ridge tahmin edicisi olan $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)$ elde edilir. İzlenen bu prosedür, en küçük kareler tahmininden daha küçük uzunluğa sahip bir tahmin ortaya çıkarır. Yani; $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)\| \leq \|\mathbf{b}\|$ olur. Ayrıca bu, $\|\mathbf{b}\|$ çok uzun olduğunda, çoklu iç ilişki için bir çözüm gibi de düşünülebilir.

$R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtlarının doğruluğu kabul ediliyorsa, $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b}_0)$ 'yi sıfır vektörüne daraltmak uygun değildir. Bunun yerine kısıtlamaları sağlayan ve en küçük uzunlukta olan $\boldsymbol{\beta}_0$ 'a daraltılabilir. ($R\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{r}$ ve $\|\boldsymbol{\beta}_0\|$ en küçüktür.)

$$\boldsymbol{\beta}_0 = R'(RR')^{-1} \mathbf{r} \text{ alınırsa;}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \boldsymbol{\beta}_0) = (X'X + kI_K)^{-1} (X'\mathbf{y} + kR'(RR')^{-1} \mathbf{r}), \quad k \geq 0$$

olur. Bu tahmin edici de, $R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtını sağlamadığı için, kısıtlı tahmin edici değildir. $S_k = X'X + kI_K$ alınırsa; yeni tahmin edici $\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k)$;

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k) = \hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \boldsymbol{\beta}_0) - S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1} [R\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \boldsymbol{\beta}_0) - \mathbf{r}], \quad k \geq 0$$

olur ve bu tahmin edicinin $R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtını sağladığı görülür. Ayrıca, $k = 0$ için $\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(0) = \mathbf{b}(R)$ olduğu açıktır. Fakat k büyüdüğü zaman, bu tahmin edicinin $\boldsymbol{\beta}_0 = R'(RR')^{-1} \mathbf{r}$ 'ye yaklaşıp yaklaşmadığı doğrudan görülemez. Bu aşağıdaki teorem ile açıklanır.

Lemma 2.1

$$M_k = S_k^{-1} - S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1}RS_k^{-1}$$

matrisi, Q ; $(K - J)$ tane sıfırdan farklı özdeğeri olan, $Q = I_K - R'(RR')^{-1}R$ matrisi olmak üzere,

$$M_k = (QS_kQ)^+ = V \begin{pmatrix} (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'$$

formunda yazılabilir. Burada Λ ; $QX'XQ$ matrisinin diagonalinin üzerinde $(K - J)$ tane sıfır olmayan özdeğerini içeren diagonal matris ve V ; ortogonal matristir ($VV' = I$).

İspat.

Birinci özdeşlik, $M_k = (QS_kQ)^+$ Baksalary ve ark. (1990)'nın özel durumudur.

İkinci özdeşlik için,

$$QS_kQ = QX'XQ + kQ$$

matrisi göz önünde bulundurulmalıdır. $QX'XQ$ ve Q matrisleri, aynı kolon uzayına sahip simetrik değişmeli ve $(K - J)$ ranklı matrisler olduğundan aynı ortogonal matrisler tarafından aşağıdaki gibi diagonalleştirilebilirler;

$$QX'XQ = V \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'$$

$$Q = V \begin{pmatrix} I_{K-J} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'$$

Λ matrisinin diagonal elemanları; $QX'XQ$ matrisinin $(K - J)$ tane pozitif özdeğeridir. Buradan ikinci özdeşlik de sağlanır.

Teorem 2.1

$\hat{\beta}_r(k)$, lineer regresyon modeli için bir tahmin edici olsun. $\beta_0 = R'(RR')^{-1}r$ olmak üzere; $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_r(k) = \beta_0$ 'dır.

İspat.

$\hat{\beta}_r(k)$ tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_r(k) = M_k X' \mathbf{y} + \beta_0 - M_k X' X \beta_0$$

formunda yazılabilir. $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ olduğunda, $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_r(k) = \beta_0$ olur.

Yeni tahmin edici $\hat{\beta}_r(k)$ 'nin, $R\hat{\beta}_r(k) = \mathbf{r}$ kısıtına uygun olduğu görüldü.

Burada, $\mathbf{b}(R)$ RLS tahmin edicisi, k 'ya bağlı olarak β_0 'a yaklaşır ki bu da kısıta uygun en kısa vektördür.

Yeni Tahmin Edicinin MSE Matrisi:

β için $\tilde{\beta}(\mathbf{y})$ tahmin edicisinin MSE matrisi;

$$MSE[\beta, \tilde{\beta}(\mathbf{y})] = E \left[(\tilde{\beta}(\mathbf{y}) - \beta)(\tilde{\beta}(\mathbf{y}) - \beta)' \right]$$

dir.

Teorem 2.2

$R\beta = \mathbf{r}$ kısıtlaması doğru olduğunda, lineer regresyon modelinde β 'nin tahmin edicisi $\hat{\beta}_r(k)$ olsun.

$$MSE[\beta, \hat{\beta}_r(k)] = \sigma^2 M_k X' X M_k + k^2 M_k \beta \beta' M_k$$

dır. Burada, $M_k = S_k^{-1} - S_k^{-1} R' (R S_k^{-1} R')^{-1} R S_k^{-1}$ 'dir.

İspat

Teorem 2.1'den,

$$\hat{\beta}_r(k) = M_k X' \mathbf{y} + \beta_0 - M_k X' X \beta_0$$

dır. $Cov(\hat{\beta}_r(k)) = \sigma^2 M_k X' X M_k$ ve $E(\hat{\beta}_r(k)) - \beta = (M_k X' X - I_K)(\beta - \beta_0)$ 'dır.

Burada, $X' X = S_k - k I_K$ 'dır. $M_k S_k (\beta - \beta_0) = (\beta - \beta_0)$ olduğundan, $R\beta = r$ ve $M_k \beta_0 = 0$ ise;

$$E(\hat{\beta}_r(k)) - \beta = -k M_k \beta$$

dır. Buradan;

$$MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k)) = \sigma^2 M_k X' X M_k + k^2 M_k \beta \beta' M_k$$

olur.

$R\beta = r$ kısıtı için, $b(R)$ 'nin (Teorem 2.2'den) bilinen MSE matrisi, $k = 0$ olduğunda, $S = X' X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} MSE(\beta, b(R)) &= Cov(b(R)) = \sigma^2 M_0 X' X M_0 \\ &= \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1} R' (R S^{-1} R')^{-1} R S^{-1} \end{aligned}$$

olur. Yeni tahmin edici $\hat{\beta}_r(k)$ 'nın MSE matrisinin, $b(R)$ 'nin MSE matrisinden hangi koşulda daha küçük olduğunu bulmak için,

$$\Delta = MSE(\beta, b(R)) - MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k))$$

farkı incelenmelidir:

Teorem 2.3

$R\beta = r$ kısıtı altında, $\hat{\beta}_r(k)$ tahmin edicisi verilsin. $k > 0$ ise MSE matrisleri farkı Δ 'nın n.n.d. ($\Delta \geq 0$) olması için gerek ve yeter koşul; $Q = I_K - R' (R R')^{-1} R$ olmak üzere,

$$\beta' \left[\frac{2}{k} Q + (Q X' X Q)^+ \right]^+ \beta \leq \sigma^2$$

olmasıdır. Ayrıca $k > 0$ ve $K > J + 1$ ise Δ sıfır olmayan matristir.

İspat.

Teorem 2.2'den, $\Delta = MSE(\beta, \mathbf{b}(R)) - MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k))$ matris farkı,

$$\Delta = \sigma^2 D - k^2 M_k \beta \beta' M_k$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $R\beta = \mathbf{r}$ doğru kabul edildiğinde,

$$D = M_0 X' X M_0 - M_k X' X M_k$$

dır. Lemma 2.1'in uygulanması ve $(QX'XQ)^+ = (QX'XQ)^+ Q = Q(QX'XQ)^+$ eşitliğinin kullanılmasıyla, $M_0 X' X M_0 = M_0$ yazılabilir. $X'X = S_k - kI_K$ olduğundan,

$$M_k X' X M_k = M_k - kM_k^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla D matrisi;

$$D = M_0 - M_k + kM_k^2$$

olarak yazılabilir. Lemma 2.1'in tekrar uygulanmasıyla,

$$D = V \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'$$

olur. Burada, $\Gamma = \Lambda^{-1} - (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} + k(\Lambda + kI_{K-J})^{-2}$ 'dir. Γ matrisinin diagonal elemanları γ_i olmak üzere;

$$\gamma_i = \frac{2\lambda_i k + k^2}{\lambda_i (\lambda_i + k)^2}$$

dir. $i = 1, 2, \dots, K - J$ olmak üzere, $\lambda_i > 0$, Λ matrisinin diagonal elemanlarıdır.

Dolayısıyla; $k > 0$ için D matrisi, n.n.d.'dir ve $rank(D) = K - J$ 'dir.

$$\delta = kM_k \beta = V \begin{pmatrix} k(\Lambda + kI_{K-J})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V' \beta$$

alınırsa, farklar matrisi Δ ;

$$\Delta = \sigma^2 D - \delta \delta'$$

olur. Burada, D , simetrik n.n.d. matris ve δ , D 'nin kolon uzayındadır. Teorem 1.23'ün sonucu uygulanırsa, Δ 'nın n.n.d. olması için gerek ve yeter koşulun $\delta'D^+ \delta \leq \sigma^2$ olması gerektiği bulunur.

$$k^2 (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} \Gamma^{-1} (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} = ((2/k)I_{K-J} + \Lambda^{-1})^{-1}$$

olduğundan,

$$\delta'D^+ \delta = \beta' V \begin{pmatrix} k^2 (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} \Gamma^{-1} (\Lambda + kI_{K-J})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V' \beta$$

olur. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} \delta'D^+ \delta &= \beta' \left(V \begin{pmatrix} (2/k)I_{K-J} + \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V' \right)^+ \beta \\ &= \beta' \left[\frac{2}{k} Q + (QX'XQ)^+ \right]^+ \beta \end{aligned}$$

olur. Bu teoremin ilk kısmını ispat eder. Ek olarak, $\sigma^2 D = \delta \delta'$ olduğunda $\Delta = 0$ olabilir. $\sigma^2 D$ matrisinin rankı $K - J$, $\delta \delta'$ matrisinin rankı en fazla 1'dir. $K > J + 1$ olması durumunda bu eşitlik, hiçbir zaman gerçekleşmez.

Eğer hiçbir kısıt yoksa, Q matrisi için doğal seçim; $Q = I_K$ olur. Bu durumda Teorem 2.3'den gerek ve yeter koşul,

$$\beta' \left[\frac{2}{k} I_K + (X'X)^{-1} \right]^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

şekline indirgenir. Bu da $MSE(\beta, \mathbf{b}) - MSE(\beta, \hat{\beta}(k))$ 'nın n.n.d olması için gerek ve yeter koşul olur. Aşağıdaki teorem, Δ 'nın n.n.d. olması için yeterli koşulu verir.

Teorem 2.4

$R\beta = \mathbf{r}$ kısıtı altında, $\hat{\beta}_r(k)$ tahmin edicisi verilsin ve $\beta \neq \beta_0$ olsun.

$$0 < k \leq \frac{2\sigma^2}{\beta' Q \beta}$$

ise MSE matrisleri farkı Δ n.n.d.'dir. Ayrıca,

$$0 < k \leq \frac{2\sigma^2}{\beta' Q \beta} \text{ ve } K > J + 1 \text{ ise,}$$

$$\text{tr} \left[MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k)) \right] < \text{tr} \left[MSE(\beta, \mathbf{b}(R)) \right]$$

dir.

İspat.

Teorem 2.3'den,

$$\Delta = MSE(\beta, \mathbf{b}(R)) - MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k))$$

fark matrisinin n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul, $k > 0$ için, $\beta' H^+ \beta \leq \sigma^2$ olmasıdır. $H = (2/k)Q + (QX'XQ)^+$ simetrik ve n.n.d.'dir. Ayrıca, Q ile aynı kolon uzayına sahiptir. Dolayısıyla;

$$\beta' Q H^+ Q \beta \leq \sigma^2$$

yazılabilir, burada, $Q\beta$, H matrisinin kolon uzayındadır. Bu eşitsizlik ancak ve ancak, $\sigma^2 H - Q\beta\beta'Q$ n.n.d. olduğunda sağlanır. Bu matrisin n.n.d. olmaması için yeterli şart,

$$\sigma^2 (2/k)Q - Q\beta\beta'Q$$

matrisinin n.n.d. olmasıdır. Burada, $\beta'(k/2)Q\beta \leq \sigma^2$ eşitsizliği, $k \leq 2\sigma^2 / \beta'Q\beta$ eşitsizliğine dönüştürülebilir. Ek olarak, $\beta'Q\beta$ matrisinin sıfır olmayan matris olması için gerek ve yeter koşul, $Q\beta \neq 0$ olmasıdır. Burada, $\beta \neq \beta_0$, $R\beta = r$ kısıtını sağlar.

Yanlılık Parametresi k 'nın Seçimi:

$Q = I_K - R'(RR')^{-1}R$ olmak üzere, $\sigma^{-2}Cov(\mathbf{b}(R)) = \sigma^2 (QX'XQ)^+$ olduğu biliniyor. Burada, $QX'XQ = Q$ 'dur (Lemma 2.1). Bu kabul ile aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.5

$\beta \neq \beta_0$ olmak üzere, $\hat{\beta}_r(k)$, $R\beta = r$ kısıtını sağlasın. $QX'XQ = Q$ olmak üzere,

$$k_{\min} = \frac{(K-J)\sigma^2}{\beta'Q\beta}$$

dir.

İspat.

$QX'XQ = Q$ ise, Lemma 2.1'den, $M_k = (1+k)^{-1}Q$ ve $M_k X' X M_k = (1+k)^{-2}Q$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla Teorem 2.1'den,

$$tr \left[MSE(\beta, \hat{\beta}_r(k)) \right] = \frac{\sigma^2}{(1+k)^2} tr(Q) + \frac{k^2}{(1+k)^2} \beta'Q\beta$$

olur, burada, $tr(Q) = K - J$ ve $\beta \neq \beta_0$ olduğunda, $\beta'Q\beta \neq 0$ 'dır.

Bu fonksiyon da, minimum değerini $k_{\min} = \frac{(K-J)\sigma^2}{\beta'Q\beta}$ noktasında alır.

$k_{\min}$ 'deki bilinmeyenler yerine, uygun tahmin ediciler kullanılırsa, k 'nın tahmini;

$$\hat{k} = \frac{(K-J)\hat{\sigma}_r^2}{\mathbf{b}(R)Q\mathbf{b}(R)}, \quad \hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-(K-J)}(\mathbf{y} - X\mathbf{b}(R))'(\mathbf{y} - X\mathbf{b}(R))$$

olur. Eğer parametreler üzerinde hiçbir kısıt yoksa, Hoerl ve ark. (1975) tarafından,

$$\hat{k} = \frac{K\hat{\sigma}^2}{\mathbf{b}'\mathbf{b}}, \quad \hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-K}(\mathbf{y} - X\mathbf{b})'(\mathbf{y} - X\mathbf{b})$$

tahmin edicileri önerilmiştir.

Bu bölümde yeni kısıtlı ridge tahmin edicisi $\hat{\beta}_r(k)$ ile, bilinen RLS tahmin edicisi $\mathbf{b}(R)$ karşılaştırılmıştır. Bunun için, kısıtların doğru olduğu kabul edilmiş ve iki tahmin edici de kısıtlayıcıların alt uzayı ile sınırlandırılmıştır. Kısıtlamaların her zaman geçerli olmadığı durumlarda $\mathbf{b}(R)$ kullanılmıştır. Teorem 2.2 ve Teorem 2.3'ün ispatlarından,

$$Cov(\mathbf{b}(R)) - Cov(\hat{\beta}_r(k))$$

matrisinin $R\beta = \mathbf{r}$ doğru olsa da olmasa da, daima n.n.d. olduğu görülmüş, dolayısıyla $\hat{\beta}_r(k)$ tahmin edicisi, $\mathbf{b}(R)$ için dikkate değer bir alternatif olarak görülmüştür.

2.3. Tam Lineer Kısıtlayıcıların Kademeli Olarak Eklenmesi

Bu bölümde iki lineer bağımlı veya lineer bağımsız, kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi arasındaki ilişki incelenecektir.

$R\beta = \mathbf{r}$ lineer kısıtlaması $J < K$ tane lineer kısıta sahiptir.

$$\mathbf{r}_j = R_j'\beta \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ lineer bağımsız kısıtlar olsun.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = R\boldsymbol{\beta}$$

$rank(R_1) = J_1$, $rank(R_2) = J_2$ ve $rank(R) = J_1 + J_2 = J$ 'dir. $\mathbf{b}(R_1)$, $\mathbf{b}(R_2)$, $\mathbf{b}(R)$; kısıt matrisleri R_1 , R_2 ve R olan kısıtlı en küçük kareler tahmin ediciler ise,

$$V(\mathbf{b}(R)) \leq V(\mathbf{b}(R_i)) \leq V(\mathbf{b}) \quad i = 1, 2$$

dir. $V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R_i)) \geq 0$ ve $V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R)) \geq 0$ olduğu bilindiğinden,

$$V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R)) \geq 0$$

eşitsizliği kontrol edilecektir.

$$\mathbf{b}(R) = \mathbf{b} + S^{-1} \begin{pmatrix} R_1' & R_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 S^{-1} R_1' & R_1 S^{-1} R_2' \\ R_2 S^{-1} R_1' & R_2 S^{-1} R_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 - R_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{r}_2 - R_2 \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$E = R_1 S^{-1} R_1', \quad F = R_1 S^{-1} R_2', \quad G = R_2 S^{-1} R_2', \quad H = G - F' E^{-1} F$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$A = R S^{-1} R' = \begin{pmatrix} E & F \\ F' & G \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-2} V(\mathbf{b}(R)) = S^{-1} - S^{-1} \begin{pmatrix} R_1' & R_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{-1} + E^{-1} F H^{-1} F' E^{-1} & -E^{-1} F H^{-1} \\ -H^{-1} F' E^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$Cov(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R)) = E \left[(\mathbf{b}(R_1) - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}(R) - \boldsymbol{\beta})' \right]$$

olur.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(R_1) - \boldsymbol{\beta} &= S^{-1} \left(I - R_1' E^{-1} R_1 S^{-1} \right) X' \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{b}(R) - \boldsymbol{\beta} &= S^{-1} \left(I - (R_1', R_2') A^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right) X' \boldsymbol{\varepsilon} \\ (I, E^{-1} F) A^{-1} &= (E^{-1}, 0) \\ R_1' (I, E^{-1} F) A^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} &= R_1' E^{-1} R_1\end{aligned}$$

kullanılırsa;

$$Cov(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R)) = V(\mathbf{b}(R))$$

elde edilir. $(\mathbf{b}(R_1) - \mathbf{b}(R))(\mathbf{b}(R_1) - \mathbf{b}(R))' \geq 0$ olduğu bilindiğinden (Teorem 1.4),

$$\begin{aligned}& E \left[\mathbf{b}(R_1) - \boldsymbol{\beta} - (\mathbf{b}(R) - \boldsymbol{\beta}) \right] \left[\mathbf{b}(R_1) - \boldsymbol{\beta} - (\mathbf{b}(R) - \boldsymbol{\beta}) \right]' \\ &= V(\mathbf{b}(R_1)) + V(\mathbf{b}(R)) - 2Cov(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R)) \\ &= V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R)) \geq 0\end{aligned}$$

olur ve aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.6

$\mathbf{r}_1 = R_1 \boldsymbol{\beta}$, $rank(R_1) = J_1$ olarak tanımlanmış tam lineer kısıtların bir kümesi olsun.

Eğer başka bir bağımsız kısıt kümesi; $\mathbf{r}_2 = R_2 \boldsymbol{\beta}$, $rank(R_2) = J_2$ ve

$rank(R) = J = J_1 + J_2$ ise kısıtlı en küçük kareler tahmin edicileri $\mathbf{b}(R_1)$ ve $\mathbf{b}(R)$

yansızdır ve

$$V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R)) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla bağımsız kısıtlayıcıların sonuçlarına ek olarak, tam kısıtlayıcıları kademeli olarak eklemenin, varyansı kademeli olarak azalttığı söylenebilir.

Not: R_1 ve R aşağıdaki lineer dönüşüme sahip ise;

$$R_1 = PR, \quad P = (I, 0)$$

$A = RS^{-1}R'$ matrisi kullanılarak aşağıdaki gibi farklı bir kovaryans matrisi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sigma^{-2} [V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R))] &= S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} - S^{-1}R'_1(R_1S^{-1}R'_1)^{-1}R_1S^{-1} \\ &= S^{-1}R'(A^{-1} - P'(PAP')^{-1}P)RS^{-1} \end{aligned}$$

$rank(R) = J$ kabul edildiğinden, bu farkın n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul,

$A^{-1} - P'(PAP')^{-1}P \geq 0$ veya Teorem 1.18'den,

$$\Re(P'PA^{-1}) \subset \Re(A^{-1})$$

olmasıdır.

$\mathbf{b}(R_1)$ ile $\mathbf{b}(R_2)$ 'nin karşılaştırılması;

$$\mathbf{r}_j = R_j\boldsymbol{\beta}, \quad rank(R_j) = J_j \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{b}(R_j) = \mathbf{b} + S^{-1}R'_j(R_jS^{-1}R'_j)^{-1}(\mathbf{r}_j - R_j\mathbf{b})$$

$$A_j = R_jS^{-1}R'_j$$

$$G_j = S^{-1}R'_jA_j^{-1}R_jS^{-1}$$

kısıltmaları kullanılarak;

$$V(\mathbf{b}(R_j)) = \sigma^2 (S^{-1} - G_j)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} C &= V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2)) \\ &= \sigma^2 (G_2 - G_1) \\ &= \sigma^2 S^{-1} (R_2' A_2^{-1} R_2 - R_1' A_1^{-1} R_1) S^{-1} \geq 0 \end{aligned}$$

ise veya $R_2' A_2^{-1} R_2 - R_1' A_1^{-1} R_1 \geq 0$ ise kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi $\mathbf{b}(R_2)$,

$\mathbf{b}(R_1)$ tahmin edicisinden daha iyi bir tahmin edicidir.

Teorem 2.7 (Trenkler, 1987)

(2.4) kabulü altında,

$$R_2' A_2^{-1} R_2 - R_1' A_1^{-1} R_1 \geq 0 \quad (2.5)$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$R_1 = P R_2$$

olacak şekilde $J_1 \times J_2$ tipinde bir P matrisi olmasıdır.

İspat.

Teorem 1.9 ve $M = R_2' A_2^{-1/2}$, $N = R_1' A_1^{-1/2}$ tanımlamaları kullanılarak;

i. (2.5) ve Teorem 1.9'dan dolayı $N = MH$ olacak şekilde bir H matrisi vardır.

Dolayısıyla $R_1' A_1^{-1/2} = R_2' A_2^{-1/2} H$ veya denk olarak $R_1 = A_1^{1/2} H' A_2^{-1/2} R_2 = P R_2$

elde edilir. Burada $P = A_1^{1/2} H' A_2^{-1/2}$, $J_1 \times J_2$ tipinde bir matristir.

ii. $R_1 = P R_2$ olsun.

$$F = A_2^{1/2} P' (P A_2 P')^{-1} P A_2^{1/2} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanan, simetrik ve idempotent F matrisi kullanılarak (2.5) aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$R_2' A_2^{-1/2} (I - F) A_2^{-1/2} R_2 \quad (2.7)$$

Burada F simetrik ve idempotent matris olduğundan $(I - F)$ de simetrik ve idempotent matristir. $B = R_2' A_2^{-1/2} (I - F) A_2^{-1/2} R_2$ kısaltması kullanılarak (2.7) farkı $BB' \geq 0$ olur (Teorem 1.4).

Teorem 2.7 için aşağıdaki sonuçlar verilebilir;

Sonuç 1.

$R_1 = PR_2$ ve $\text{rank}(R_1) = J_1$ ise, bu $J_1 \leq J_2$ ve $\text{rank}(P) = J_1$ olmasını gerektirir.

Ayrıca $\mathbf{r}_1 = P\mathbf{r}_2$ olur.

İspat.

Teorem 1.3 (iv)'den $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$ olduğu bilinmektedir. Bu, probleme uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \text{rank}(PR_2) &\leq \min(\text{rank}(P), \text{rank}(R_2)) \\ &= \min(\text{rank}(P), J_2) \\ J_1 &= \text{rank}(P) \end{aligned}$$

bulunur.

Burada; $\text{rank}(R_1) = \text{rank}(PR_2) = J_1 \Rightarrow J_1 \leq J_2$ 'dir. $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$ ve $R_1 = PR_2$ kullanılırsa,

$$\mathbf{r}_1 = PR_2\boldsymbol{\beta} = P\mathbf{r}_2$$

bulunur.

Not: $J_1 = J_2$ durumunda, $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$ ve $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ kısıtları ile bu kısıtlara ait tahmin ediciler birbirine eşit olacağından sadece $J_1 < J_2$ durumu incelenebilir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$rank(P) = J_1 = J_2$ için $R_1 = PR_2$ olduğundan P^{-1} vardır, dolayısıyla $R_2 = P^{-1}R_1$ ve $\mathbf{r}_2 = P^{-1}\mathbf{r}_1$ sağlanır. Bu sebeple $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ kısıtı $P^{-1}(\mathbf{r}_1 - R_1\boldsymbol{\beta}) = 0$ olur. $R_1 = PR_2$ ($P: J_1 \times J_1$ ve $rank(P) = J_1 = J_2$) için, tahmin edicilerin eşitliği kontrol edilirse;

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(R_2) &= \mathbf{b} + S^{-1}R_1'P^{-1}\left(P^{-1}R_1S^{-1}R_1'P^{-1}\right)^{-1}\left(P^{-1}\mathbf{r}_1 - P^{-1}R_1\mathbf{b}\right) \\ &= \mathbf{b}(R_1)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$J_1 < J_2$ Durumu;

$C: J_2 \times J_2$ tipinde tekil olmayan matris olmak üzere, $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ ve $C\mathbf{r}_2 = CR_2\boldsymbol{\beta}$ koşulları birbirine eşittir. $rank(P) = J_1$ olmak üzere $J_1 \times J_2$ tipinde bir P matrisi için $R_1 = PR_2$ olsun. $rank(C') = J_2$ olmak üzere $C' = (Q', P')$ olacak şekilde, $(J_2 - J_1) \times J_2$ tipinde ve $rank(Q) = J_2 - J_1$ olan bir Q matrisi seçilsin. Bu Q matrisi P matrisini tamamlayan matris olarak adlandırılır. $Q\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$ ve $QR_2 = R_3$ olsun,

$$C\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} Q\mathbf{r}_2 \\ P\mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \end{pmatrix} \text{ ve } CR_2 = \begin{pmatrix} QR_2 \\ PR_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

olur. $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$ ve $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ kısıtları $R_1 = PR_2$ lineer dönüşümü ile bağlanırsa, $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$ kısıtının $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$ kısıtını içerdiği kabul edilebilir. Genelliği bozmaksızın $P = (I, 0)$ seçilebilir.

Sonuç 2.

$\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}_2 = R_2\boldsymbol{\beta}$, $R_1 = PR_2$, $\mathbf{r}_1 = P\mathbf{r}_2$, $rank(P) = J_1 < J_2$ kısıt kümesi, $\mathbf{r}_3 = Q\mathbf{r}_2$,

$R_3 = QR_2$ olmak üzere $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{\beta} = R_2\boldsymbol{\beta}$ ve Q matrisinin P 'yi

tamamlayan matris olması koşulları birbirine denktir.

Teorem 2.7'den, iki tam lineer kısıtlayıcının, uygun iki kısıtlı tahmin edicilerinin karşılaştırılabilmesi için gerek ve yeter koşul $R_1 = PR_2$ ve $\text{rank}(P) = J_1 < J_2$

olmasıdır. $P = (I, 0)$ özel durumu $R_2 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix}$ kısıtlarını tanımlar.

3. YANLI LİNEER KISITLAMALAR VE MSE KRİTERİNE GÖRE LSE İLE KARŞILAŞTIRMALAR

$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta}$ lineer kısıtlamasının modele eklenmesi durumunda, bu kısıtlamanın $H_0: R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ hipotezi ve F-testi yardımı ile kontrol edilmesi gerekir. Bu hipotezin reddi, ya

$$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta} \neq 0 \quad (3.1)$$

ya da

$$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi} \sim (0, \sigma^2 V)$$

olmasından kaynaklanabilir. Burada $\boldsymbol{\delta}$, stokastik olmayan yanlılık ve $\boldsymbol{\Phi}$ stokastik etkidir.

Eğer kısıtlamada $\boldsymbol{\delta} \neq 0$ yanlılık vektörü varsa, $\mathbf{b}(R)$ yanlı olur. Ayrıca, $\mathbf{b}(R)$ 'nin kovaryans matrisi $\boldsymbol{\delta}$ 'dan etkilenmez ve her durumda $\mathbf{b}(R)$, $\mathbf{b}$ 'den daha küçük varyansa sahip olmaya devam eder ((2.3)). Bu nedenle, MSE kullanılarak $\boldsymbol{\delta}$ 'nın $\mathbf{b}(R)$ üzerindeki etkisinin araştırılması gerekir. (3.1) kabulü altında,

$$E(\mathbf{b}(R)) = \boldsymbol{\beta} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}\boldsymbol{\delta}$$

olur.

$$\begin{aligned} A &= RS^{-1}R' = A^{1/2}A^{1/2} \\ H &= S^{-1}R'A^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}(R)) &= \boldsymbol{\beta} + H\boldsymbol{\delta} \\ \text{bias}(\mathbf{b}(R), \boldsymbol{\beta}) &= H\boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$V(\mathbf{b}(R)) = V(\mathbf{b}) - \sigma^2 HAH'$$

$$M(\mathbf{b}(R), \boldsymbol{\beta}) = V(\mathbf{b}) - \sigma^2 HAH' + H\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}'H'$$

elde edilir.

3.1. $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}(R)$ 'nin MSE Karşılaştırması

MSE karşılaştırmaları aşağıdaki kriterlere göre yapılır:

Tanım 3.1 (MSE-I Kriteri)

$$\Delta(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R)) = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R)) - (\text{bias}(\mathbf{b}(R)), \boldsymbol{\beta})(\text{bias}(\mathbf{b}(R)), \boldsymbol{\beta})'$$

$$= \sigma^2 H(A - \sigma^2 \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}')H' \geq 0$$

olması için gerek ve yeter koşul, $\text{rank}(R) = J$ olduğundan,

$$A - \sigma^2 \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}' \geq 0 \quad (3.4)$$

olmasıdır. Bu durumda $\mathbf{b}(R)$ tahmin edicisinin, MSE-I kriterine göre yansız tahmin edici $\mathbf{b}$ 'den daha iyi olduğu söylenir. Teorem 1.8 ve Teorem 1.21'in kullanılmasıyla (3.4)'ün,

$$\lambda = \sigma^{-2} \boldsymbol{\delta}' A^{-1} \boldsymbol{\delta} = \sigma^{-2} \boldsymbol{\delta}' (RS^{-1}R')^{-1} \boldsymbol{\delta} \leq 1 \quad (3.5)$$

koşuluna denk olduğu görülür.

Tanım 3.2 (MSE-II Kriteri)

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ iki tahmin edici olsun.

$$E\left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta})'\right) - E\left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta})'\right) = \text{tr}\left\{\Delta(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2)\right\} \geq 0$$

ise $\hat{\beta}_2$ tahmin edicisi MSE-II kriterine göre $\hat{\beta}_1$ 'den daha iyidir denir. Eğer $\hat{\beta}_2$, MSE-I kriterine göre $\hat{\beta}_1$ 'den daha iyi ise MSE-II kriterine göre de $\hat{\beta}_1$ 'den daha iyidir. Çünkü $\Delta \geq 0$ olması, $tr\{\Delta\} \geq 0$ olmasını gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Dolayısıyla MSE-II kriteri MSE-I'den daha zayıf bir kriterdir.

3.2. $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}(R)$ 'nin Karşılaştırılması için MSE-II Kriterinin Uygulanması

MSE-II kriterini kullanarak, $\mathbf{b}(R)$ ve $\mathbf{b}$ karşılaştırılsın. Buradan,
 $tr\{\Delta(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R))\} = \sigma^2 tr\{HAH'\} - \delta'H'H\delta \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşulun,

$$\delta'H'H\delta \leq \sigma^2 tr\{HAH'\} = tr\{V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R))\} \quad (3.6)$$

olduğu elde edilir.

$X'X = S$ kısaltması ile, $H'SH = A^{-1}$ olur, dolayısıyla (3.5)'deki λ ile,

$$\delta'H'SH\delta = \delta'A^{-1}\delta = \sigma^2 \lambda$$

elde edilir. Teorem 1.7'nin kullanılmasıyla ve $\delta \neq 0$ varsayımı ile

$$d_k \leq \frac{\delta'H'SH\delta}{\delta'H'H\delta} \leq d_1$$

elde edilir. Burada, $d_1 \geq d_2 \geq \dots d_k > 0$, $S > 0$ 'ın özdeğerleridir. Bu durumda (3.6)'nın sol tarafı için,

$$\delta'H'H\delta \leq d_k^{-1} \delta'A^{-1}\delta = d_k^{-1} \sigma^2 \lambda$$

üst sınırı elde edilir. Dolayısıyla (3.6) formülünün sağlanması için yeterli koşul;

$$\begin{aligned}\lambda &\leq d_K tr \{ HAH' \} \\ &= d_K tr \left\{ S^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1} \right\} \\ &= \lambda_0\end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.3 (MSE-III Kriteri)

$$\begin{aligned}&E \left[\left(X\hat{\beta}_1 - X\beta \right)' \left(X\hat{\beta}_1 - X\beta \right) \right] - E \left[\left(X\hat{\beta}_2 - X\beta \right)' \left(X\hat{\beta}_2 - X\beta \right) \right] \\ &= E \left[\left(\hat{\beta}_1 - \beta \right)' S \left(\hat{\beta}_1 - \beta \right) \right] - E \left[\left(\hat{\beta}_2 - \beta \right)' S \left(\hat{\beta}_2 - \beta \right) \right] \\ &= tr \left\{ S \Delta \left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \right) \right\} \geq 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

ise $\hat{\beta}_2$, MSE-III kriterine göre $\hat{\beta}_1$ 'den daha iyidir denir. MSE-III kriteri $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}(R)$ için uygulandığında, $\mathbf{b}(R)$ 'nin $\mathbf{b}$ 'den daha iyi olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\begin{aligned}tr \left\{ S \Delta \left(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R) \right) \right\} &= \sigma^2 tr \left\{ SS^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1} \right\} - \delta' A^{-1} \delta \\ &= \sigma^2 \left(tr \{ I_J \} - \lambda \right) \\ &= \sigma^2 (J - \lambda) \geq 0.\end{aligned}$$

$\lambda \leq J$ ise $\mathbf{b}(R)$, $\mathbf{b}$ 'ye tercih edilir. $J \geq 2$ ise MSE-III kriteri, MSE-I'den daha zayıftır. $J = 1$ ise iki kriter birbirine eşittir.

Teorem 3.1

$\mathbf{r} - R\beta = \delta$ bir yanlı lineer kısıtlama olsun. Bu durumda yanlı RLSE $\mathbf{b}(R)$ 'nin, yansız olan $\mathbf{b}$ 'den MSE kriterlerine göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki gibi verilebilir:

- i. MSE-I kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda \leq 1$ olmasıdır.
- ii. MSE-II kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda \leq \lambda_0$ olmasıdır.

iii. MSE-III kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda = \sigma^{-2} (\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})' (RS^{-1}R')^{-1} (\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta}) \text{ için } \lambda \leq J \text{ olmasıdır.}$$

$\lambda \leq 1$, $\lambda \leq \lambda_0$ veya $\lambda \leq J$ koşullarını test etmek için, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$ kabul edilir ve test istatistiği olarak;

$$F = \frac{1}{Js^2} (\mathbf{r} - R\mathbf{b})' (RS^{-1}R')^{-1} (\mathbf{r} - R\mathbf{b})$$

kullanılır. Burada F merkezi olmayan $F_{J,T-K}(\lambda)$ dağılımından gelmektedir.

$$H_0 : \lambda \leq 1 \text{ (veya } \lambda \leq \lambda_0 \text{ veya } \lambda \leq J)$$

$$H_1 : \lambda > 1 \text{ (veya } \lambda > \lambda_0 \text{ veya } \lambda > J)$$

hipotezleri test edildiğinde; $F \leq F_{J,T-K,1-\alpha}(1)$, $F \leq F_{J,T-K,1-\alpha}(\lambda_0)$ veya $F \leq F_{J,T-K,1-\alpha}(J)$ ise H_0 kabul edilir. Aksi halde H_0 reddedilir.

4. İKİ YANLI KISITLI TAHMİN EDİCİNİN MSE KARŞILAŞTIRMASI

β üzerindeki iki kısıtlama;

$$\mathbf{r}_i = R_i \beta + \delta_i \quad i = 1, 2$$

olsun. Burada R_i , $J_i \times K$ tipinde J_i tam satır ranklı bir matristir. Bu kısıta en uygun lineer RLSE;

$$\mathbf{b}(R_i) = \mathbf{b} + S^{-1} R_i' (R_i S^{-1} R_i')^{-1} (\mathbf{r}_i - R_i \mathbf{b})$$

şeklinde verilir. $S^{-1/2}$, S^{-1} matrisinin p.d. kökü ve $\text{rank}(R_i) = J_i$ olduğu varsayılırsa, $R_i S^{-1/2}$ matrisinin $J_i \times K$ tipinde ve $\text{rank}(R_i S^{-1/2}) = J_i$ olduğu görülür. Bu matrisin Moore-Penrose ters matrisi; (Teorem 1.12)

$$(R_i S^{-1/2})^+ = S^{-1/2} R_i' (R_i S^{-1} R_i')^{-1} \quad i = 1, 2$$

dir. $i = 1, 2$ için,

$$P_i = (R_i S^{-1/2})^+ R_i S^{-1/2} \quad (4.1)$$

matrisinin $J_i < K$ ranklı idempotent matris ve $\Re(S^{-1/2} R_i')$ kolon uzayı üzerinde ortogonal projektör (izdüşüm) olduğu göz önüne alınırsa, (3.3)'den

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &= \text{bias}(\mathbf{b}(R_i), \beta) = S^{-1} R_i' (R_i S^{-1} R_i')^{-1} \delta_i \\ &= S^{-1/2} (R_i S^{-1/2})^+ \delta_i \end{aligned}$$

$$V(\mathbf{b}(R_i)) = \sigma^2 S^{-1/2} (I - P_i) S^{-1/2}$$

elde edilir. Burada, $\delta_i = R_i \beta - \mathbf{r}_i \quad i = 1, 2$ 'dir. $P_{21} = P_2 - P_1$ gösterimi kullanılırsa dağılım matrisleri farkı;

$$\begin{aligned} D &= V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2)) \\ &= \sigma^2 S^{-1/2} P_{21} S^{-1/2} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $D \geq 0 \Leftrightarrow P_{21} \geq 0$ 'dır.

Not: $\mathbf{c}_i = S^{1/2} \mathbf{d}_i = (R_i S^{-1/2})^+ \boldsymbol{\delta}_i$ olmak üzere;

$$\Delta(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R_2)) = S^{-1/2} (\sigma^2 P_{21} + \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1' - \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2') S^{-1/2} \geq 0$$

ise veya denk olarak $P_{21} + \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1' - \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2' \geq 0$ ise $\mathbf{b}(R_2)$ 'nin MSE-I kriterine göre $\mathbf{b}(R_1)$ 'den daha iyi olduğu söylenebilir. Teorem 1.26'ya göre, $P_2 = S^{-1/2} R_2' (R_2 S^{-1} R_2')^{-1} R_2 S^{-1/2}$ matrisi $J_2 < K$ ranklı olduğundan, $K \times K$ tipindeki simetrik P_2 matrisi p.d. olamaz ve böylece P_2 matrisi tekil (singüler) olur. Dolayısıyla (1.3) koşulu sağlanmaz.

Teorem 4.1

(4.1) formülü ile verilen P_1 ve P_2 için $P_{21} = P_2 - P_1$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

- I. $P_{21} \geq 0$;
- II. $\Re(S^{-1/2} R_1') \subset \Re(S^{-1/2} R_2')$;
- III. $R_1 = F R_2$ olacak şekilde bir F matrisi vardır;
- IV. $P_2 P_1 = P_1$;
- V. $P_1 P_2 = P_1$;
- VI. P_{21} ortogonal izdüşümdür.

Teorem 4.2

$\mathbf{r}_1 = R_1 \boldsymbol{\beta}$ ve $\mathbf{r}_2 = R_2 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}_2$ verilsin ve $D = V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2)) \geq 0$ olsun. Yanlı $\mathbf{b}(R_2)$ tahmin edicisinin MSE kriterine göre yansız $\mathbf{b}(R_1)$ tahmin edicisinden daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\sigma^{-2} \delta_2' (R_2 S^{-1} R_2')^{-1} \delta_2 \leq 1 \quad (4.2)$$

olmasıdır.

Teorem 4.3

$\delta_i = \mathbf{r}_i - R_i \boldsymbol{\beta} \neq 0$ olsun. O zaman $\Delta(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R_2)) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul; $\text{bias}(\mathbf{b}(R_1), \boldsymbol{\beta}) = \text{bias}(\mathbf{b}(R_2), \boldsymbol{\beta})$ olmasıdır.

Özet olarak, $\mathbf{r}_i = R_i \boldsymbol{\beta} + \delta_i \quad i=1,2$ lineer kısıtlamaları ve $\mathbf{b}(R_1)$ ve $\mathbf{b}(R_2)$ uygun RLS tahmin edicilerini gösterebilir. Bu tahmin edicilerin varyans-kovaryans matrisleri farkının n.n.d. olduğu kabul edilirse,

i. $\delta_1 = 0$ veya

ii. $\text{bias}(\mathbf{b}(R_1), \boldsymbol{\beta}) = \text{bias}(\mathbf{b}(R_2), \boldsymbol{\beta})$

ise bu lineer kısıtlamalar MSE-I kriterine göre karşılaştırılabilir. (ii) koşulu sağlanıyorsa bu tahmin edicilerin MSE matrislerinin farkı, $\Delta(\mathbf{b}(R_1), \mathbf{b}(R_2)) = V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2))$ varyans-kovaryans matrislerinin farkına indirgenir.

4.1. Kademeli Yanlı Kısıtlamalar (Özel Durum)

İki RLS tahmin edicinin önceki karşılaştırmaları $V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2))$ farkının n.n.d. olması gerekliliğini göstermiştir. Bu koşul $R_1 = P R_2$ olmasına denktir.

Teorem 2.7'nin ikinci sonucuna göre genelliği bozmadan $P = (I, 0)$ kabul edilsin. Dolayısıyla $V(\mathbf{b}(R_1)) - V(\mathbf{b}(R_2)) \geq 0$ kabulü altında aşağıdaki lineer kısıtlamalar verilebilir;

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3 \end{pmatrix}, \quad J_1 + J_3 = J_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= R_1 \boldsymbol{\beta} & \text{rank}\left(\underset{J_1 \times K}{R_1}\right) &= J_1 \\
\mathbf{r}_2 &= R_2 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}_2 & \text{rank}\left(\underset{J_2 \times K}{R_2}\right) &= J_2 \\
\mathbf{r}_3 &= R_3 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}_3 & \text{rank}\left(\underset{J_3 \times K}{R_3}\right) &= J_3
\end{aligned} \tag{4.3}$$

dür. Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'den, $\mathbf{r}_1 - R_1 \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}_1 = 0$ olduğu bilinmektedir. Burada amaç $\mathbf{b} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}(R_2)$ ile $\mathbf{b}(R_1)$ 'in MSE kriterlerine göre karşılaştırılmasıdır ve özellikle,

$$\mathbf{b} = S^{-1} X' \mathbf{y} \text{ (yansız tahmin edici),}$$

$$\mathbf{b}(R_1) = \mathbf{b} + S^{-1} R_1' (R_1 S^{-1} R_1')^{-1} (\mathbf{r}_1 - R_1 \mathbf{b}) \text{ (yansız tahmin edici),}$$

$$\mathbf{b}(R_3) = \mathbf{b} + S^{-1} R_3' (R_3 S^{-1} R_3')^{-1} (\mathbf{r}_3 - R_3 \mathbf{b}) \text{ (}\boldsymbol{\delta}_3 \neq 0 \text{ ise yanlı tahmin edici),}$$

$$\mathbf{b} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + S^{-1} (R_1' R_3') \left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} S^{-1} (R_1' R_3') \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} \mathbf{b} \right) \text{ (}\boldsymbol{\delta}_3 \neq 0 \text{ ise yanlı tahmin edici),}$$

tahmin edicilerinin karşılaştırılması ile ilgilenilecektir.

$A_i = R_i S^{-1} R_i'$, $A_i > 0$ $i = 1, 2, 3$ ve $H_i = S^{-1} R_i' A_i^{-1}$ $i = 1, 2, 3$ notasyonları kullanılırsa,

$$\text{bias } \mathbf{b}(R_i, \boldsymbol{\beta}) = H_i \boldsymbol{\delta}_i \quad i = 1, 2, 3$$

yazılabilir.

a. $\mathbf{b}(R_1)$ ve $\mathbf{b}$ 'nin Karşılaştırılması:

Karşılaştırılan iki tahmin edici de yansızdır ve $\mathbf{b}(R_1)$, MSE kriterlerine göre daima $\mathbf{b}$ 'den daha iyidir. Bunun sebebi;

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R_1)) &= V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R_1)) \\
&= \sigma^2 H_1 A_1 H_1' \\
&= \sigma^2 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} \geq 0
\end{aligned}$$

olmasıdır.

b. $\mathbf{b}(R_3)$ ve $\mathbf{b}$ 'nin Karşılaştırılması:

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R_3)) &= S^{-1/2} \left[\sigma^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} - S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} \delta_3 \delta_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} \right] S^{-1/2}, \\
S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} \delta_3 &= \sigma^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} \left[\sigma^{-2} (R_3 S^{-1/2})^+ \right] \delta_3, \\
\sigma^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} &\geq 0
\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Teorem 1.23'ün uygulanması ile aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\lambda_3 = \sigma^{-2} \delta_3' A_3^{-1} \delta_3 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{b}(R_3)) \geq 0 \quad (4.4)$$

c. $\mathbf{b} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{b}(R_1)$ 'in Karşılaştırılması:

$$R_1 = P R_2, \quad P = (I, 0), \quad R_2 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad \text{ve Teorem 1.2 kullanılarak, (4.2)}$$

formülü aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\begin{aligned}
\sigma^{-2} \delta_2' (R_2 S^{-1} R_2')^{-1} \delta_2 &= \sigma^{-2} (0, \delta_3') \begin{pmatrix} R_1 S^{-1} R_1' & R_1 S^{-1} R_3' \\ R_3 S^{-1} R_1' & R_3 S^{-1} R_3' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \\
&= \sigma^{-2} \delta_3' (A_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} R_3')^{-1} \delta_3 \leq 1.
\end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.4) ve (4.5) koşullarının karşılaştırılmasıyla Teorem 1.21'den,

$$\sigma^{-2} \delta_3' A_3^{-1} \delta_3 \leq \sigma^{-2} \delta_3' (A_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} R_3')^{-1} \delta_3$$

elde edilir.

Teorem 4.4 (Toutenburg, 1989)

(4.3) formülündeki kısıtlamalar sağlanıyorsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

a. Yanlı lineer kısıtlı tahmin edici $\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ 'ün MSE kriterlerine göre RLSE

$\mathbf{b}(R_1)$ 'den daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ tahmin edicisinin MSE kriterlerine göre $\mathbf{b}$ 'den daha iyi olması yani (4.5) formülünün sağlanmasıdır.

b. $\Delta\left(\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}(R_1)\right) \geq 0$ ise $\Delta(\mathbf{b}(R_3), \mathbf{b}) \geq 0$ olmak zorundadır.

4.2. Sonuç

$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ modeline $\mathbf{r}_1 = R_1\boldsymbol{\beta}$ tam kısıtının eklenmesi her durumda modelin etkinliğinin artmasını sağlar. Bir başka kısıt olan $\mathbf{r}_3 - R_3\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}_3$ kısıtının kademeli olarak eklenmesinin, MSE kriterlerine göre modelin etkinliğinin artmasını sağlaması için, (4.5)'in sağlanması gerekir. Bu durumda yanlı tahmin edici $\mathbf{b}(R_3)$, MSE kriterlerine göre $\mathbf{b}$ 'den daha iyidir, bu gerekli koşuldur fakat yeterli koşul değildir.

$\mathbf{b}(R_1)$ ve $\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ tahmin edicilerinin varyans-kovaryans matrisleri farkı n.n.d.'dir.

$P = (I, 0)$ kullanılarak (2.6)'daki F matrisi;

$$\begin{aligned} F &= A_2^{1/2} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \left((I \ 0) A_2 \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} (I \ 0) A_2^{1/2} \\ &= A_2^{1/2} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_2^{1/2} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve aşağıdaki sonuca ulaşılır;

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{b}(R_1)) - V\left(\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) &= \sigma^2 S^{-1} R_2' A_2^{-1/2} (I - F) A_2^{-1/2} R_2 S^{-1} \\
&= \sigma^2 S^{-1} R_2' A_2^{-1} R_2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} \\
&= \left[V(\mathbf{b}) - V\left(\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) \right] - [V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{b}(R_1))].
\end{aligned}$$

Teorem 1.2, parçalı matris A_2 'ye uygulanarak,

$$\begin{aligned}
U &= R_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 \\
&= R_3 S^{-1/2} (I_K - S^{-1/2} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1/2}) S^{1/2}
\end{aligned}$$

notasyonu kullanılsın. $S^{-1/2} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1/2}$ matrisi idempotenttir ve rankı J_1 'dir. Teorem 1.11 (iv)'den $I_K - S^{-1/2} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1/2}$ matrisi de idempotenttir ve rankı $K - J_1$ 'dir. $rank(U) = J_3$ olduğunu göstermek için, $J_3 \leq K - J_1$ yani $J_1 + J_3 \leq K$ olduğunu göstermek gereklidir.

$$Z_{J_3 \times J_3} = A_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} R_3'$$

kısaltması kullanılsın. A_2 matrisinin alt matrisleri aşağıdaki gibi değiştirilir ve yeni matris $\tilde{A}_2$ şeklinde adlandırılarak Teorem 1.14 $\tilde{A}_2$ 'ya uygulanırsa,

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} R_3' S^{-1} R_3 & R_3' S^{-1} R_1 \\ R_1' S^{-1} R_3 & R_1' S^{-1} R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & R_3' S^{-1} R_1 \\ R_1' S^{-1} R_3 & A_1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{A}_2 > 0$ 'ın $Z > 0$ 'a denk olduğu görülür. ((Teorem 1.14 b(ii)))

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{b}(R_1)) - V\left(\mathbf{b}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) &= \sigma^2 S^{-1} U' Z^{-1} U S^{-1} \\
bias \mathbf{b}\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}\right) &= -S^{-1} U' Z^{-1} \boldsymbol{\delta}_3
\end{aligned}$$

bulunur ve aşağıda görüldüğü gibi MSE matrisleri farkı n.n.d. olur.

$$\Delta(\mathbf{b}(R_1)) - V \left(\mathbf{b} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} \right) = S^{-1} U' Z^{-1/2} \left[\sigma^2 I - Z^{-1/2} \boldsymbol{\delta}_3 \boldsymbol{\delta}_3' Z^{-1/2} \right] Z'^{-1/2} U S^{-1} \geq 0.$$

Burada $\text{rank}(U) = J_3$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda = \sigma^{-2} \boldsymbol{\delta}_3' Z^{-1} \boldsymbol{\delta}_3 \leq 1 \quad (4.6)$$

olmasıdır. (Teorem 1.21). Böylece (4.2) için gerekli ve yeterli bir sonuç bulunmuş olur. (4.5) koşulu F istatistiği kullanılarak test edilebilir.

$$F = \frac{(\mathbf{r}_3 - R_3 \mathbf{b})' Z^{-1} (\mathbf{r}_3 - R_3 \mathbf{b})}{J_3 s^2} \square F_{J_3, T-K}(\lambda)$$

Burada λ (4.6)'da tanımlanan parametredir. Hipotez testinin sonucuna aşağıdaki şekilde karar verilir.

$$H_0 : \lambda \leq 1, F \leq F_{J_3, T-K}(1) \text{ ise kabul edilir.}$$

$$H_1 : \lambda \leq 1, F > F_{J_3, T-K}(1) \text{ ise reddedilir.}$$

Not: Bu karar kuralına göre, pretest tahmin edici olarak adlandırılan,

$$\mathbf{b}^* = \begin{cases} \mathbf{b} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, & F \leq F_{J_3, T-K}(\lambda) \text{ ise} \\ \mathbf{b}(R_1), & F > F_{J_3, T-K}(\lambda) \text{ ise} \end{cases}$$

tahmin edici tanımlanabilir. Bu tahmin edicinin MSE matrisi basit bir yapıda değildir. Judge ve Bock (1978) bu tahmin ediciyi detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

5. STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR

5.1. Mixed Tahmin Edici

Pratik uygulamalarda, $(\mathbf{y}, X)$ matrisinin örneklem bilgilerine ek olarak çoğu zaman,

$$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} \sim (0, \sigma^2 V) \quad (5.1)$$

tipinde ifade edilen bir lineer stokastik kısıt bilgisi de bulunur. Burada $\mathbf{r} : J \times 1$ ve $R : J \times K$ tipinde matrisler, $\text{rank}(R) = J$ ' dir. Ayrıca R ve V 'nin bilindiği kabul edilmektedir. $V > 0$ olsun. $\mathbf{r}$ vektörü $E(\mathbf{r}) = R\boldsymbol{\beta}$ beklenen değeri ile bir rasgele değişken olarak yorumlanabilir. Böylece (5.1) kısıtlaması bu anlamda tam olarak sağlanmaz. $\mathbf{r}$ 'nin bilindiği kabul edilirse bütün beklenen değerler $\mathbf{r}$ 'ye bağlı $E(\hat{\boldsymbol{\beta}} | \mathbf{r})$ gibi koşullu beklenen değerler olur. Durbin (1953) örneklem bilgilerini ve yardımcı (ek) bilgiyi aynı anda kullanarak, parametrelerin stepwise (aşamalı, kademeli) tahmin edicisini tanımlayan ilk kişidir. Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) örneklem bilgilerini ve ön bilgiyi,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

ortak modelinde birleştirerek mixed tahmin tekniğini ortaya koymuşlardır. Burada hatalar arasında korelasyon olmadığı kabul edilmelidir. Yani;

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}') = 0 \quad (5.3)$$

dır. Daha önceki varsayımların aksine burada genel regresyon modeli kabul edilir ve $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 W$ olur. (5.3) kullanılarak varyans-kovaryans matrisi;

$$E \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varphi})' \right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Mixed model,

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{X}\boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim (0, \sigma^2 \tilde{W}) \quad (5.4)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} > 0$$

dır. $\text{rank}(\tilde{X}) = \text{rank}(X) = K$ olduğunda (5.4) modeli, genelleştirilmiş lineer model gibi görünür. $S = X'W^{-1}X$ olmak üzere Teorem 1.17'nin uygulanmasıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1

(5.2) mixed modelinde $\boldsymbol{\beta}$ için en iyi lineer yansız tahmin edici;

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}(R) &= (S + R'V^{-1}R)^{-1} (X'W^{-1}\mathbf{y} + R'V^{-1}\mathbf{r}) \\ &= \hat{\boldsymbol{\beta}} + S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1} (\mathbf{r} - R\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned}$$

dir ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ 'nin varyans-kovaryans matrisi;

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)) = \sigma^2 (S + R'V^{-1}R)^{-1} \quad (5.5)$$

dir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ tahmin edicisi $\boldsymbol{\beta}$ 'nin mixed tahmin edicisi olarak adlandırılır.

İspat.

Teorem 1.17, (5.4) modeline doğrudan uygulanırsa, $\boldsymbol{\beta}$ için GLSE;

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\tilde{X}'\tilde{W}^{-1}\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\tilde{W}^{-1}\tilde{y} \\ &= (X'W^{-1}X + R'V^{-1}R)^{-1} (X'W^{-1}y + R'V^{-1}r)\end{aligned}$$

olur. Teorem 1.1 (iii) uygulanırsa,

$$(S + R'V^{-1}R)^{-1} = S^{-1} - S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \quad (5.6)$$

elde edilir. Bu sonuç $\hat{\beta}(R)$ 'de kullanılarak ispat tamamlanır.

$\hat{\beta}(R)$ ile GLSE' nin Karşılaştırılması:

Mixed tahmin edicisi yansızdır ve GLSE den daha küçük bir varyans-kovaryans matrisine sahiptir, yani

$$V(\hat{\beta}) - V(\hat{\beta}(R)) = \sigma^2 S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \geq 0$$

dır. Mixed tahmin edicisinin daha küçük varyansa sahip olması $E(r) = R\beta$ denkleminin sağlanıp sağlanmamasından bağımsızdır.

5.2. Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar

(5.1) modelinde, $E(\phi\phi') = \sigma^2 V$ kabul edilmiştir. Pratikte bu gösterim yeterli olmayabilir. Dolayısıyla, bazen $E(\phi\phi') = V$ gösterimi daha gerçekçi olabilir. Bunun bir sonucu olarak bilinmeyen σ^2 'yi içeren mixed tahmin edici,

$$\hat{\beta}(R, \sigma^2) = (\sigma^{-2}S + R'V^{-1}R)^{-1} (\sigma^{-2}X'W^{-1}y + R'V^{-1}r)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu problemin giderilmesi için çeşitli metotlar önerilmiştir.

i. $\hat{\beta}(R, \sigma^2)$ 'deki σ^2 'yi Tahmin Etmek için, Örneklem Varyansı s^2 'nin Kullanılması;

s^2 'nin σ^2 'yi tahmin etmek için kullanılması Theil (1963) tarafından önerilmiştir. Genelde $\hat{\beta}(R, s^2)$ tahmin edicisi yansız değildir. Belirli koşullar sağlanırsa $\hat{\beta}(R, s^2)$ asimptotik olarak yansız ve asimptotik olarak $\hat{\beta}(R, \sigma^2)$ ile aynı varyans-kovaryans matrisine sahiptir. Bu tahmin edicinin özelliklerini inceleyenler arasında, Giles ve Srivastava (1991), Kakwani (1968, 1974), Mehta ve Swamy (1970), Nagar ve Kakwani (1964), Srivastava ve Chandra (1985), Srivastava ve Upadhyaya (1975), Swamy ve Mehta (1969) gösterilebilir.

ii. Bir Sabit Kullanılması;

Theil (1963), Teräsvirta ve Toutenburg (1980) ve Toutenburg (1982) $\hat{\beta}(R, c)$ tahmin edicisini incelemişlerdir. Burada c , yansız tahmin edici $\hat{\beta}(R, c)$ GLSE tahmin edicisinden daha küçük varyans-kovaryans matrisine sahip olacak şekilde seçilebilen stokastik olmayan bir sabittir.

$M_c = cS + R'V^{-1}R$ notasyonu ile,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(R, c) &= M_c^{-1} (cX'W^{-1}\mathbf{y} + R'V^{-1}\mathbf{r}) \\ V(\hat{\beta}(R, c)) &= M_c^{-1} (c^2\sigma^2S + R'V^{-1}R)M_c^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$B(c, \sigma^2) = \sigma^2S^{-1} + (2c\sigma^2 - 1)(R'V^{-1}R)^{-1}$$

matrisi tanımlanırsa, varyans-kovaryans matrislerinin farkı olan,

$$\begin{aligned}\Delta(c) &= V(\hat{\beta}) - V(\hat{\beta}(R, c)) \\ &= M_c^{-1} (R'V^{-1}R) B(c, \sigma^2) (R'V^{-1}R) M_c^{-1}\end{aligned}\tag{5.7}$$

matrisi n.n.d. olur. Yani $\Delta(c) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M_c^{-1} > 0$ ve $(R'V^{-1}R) > 0$ iken $B(c, \sigma^2) \geq 0$ olmasıdır.

Burada incelenmesi gereken iki durum ortaya çıkmaktadır;

a. $B(0, \sigma^2) = \sigma^2 S^{-1} - (R'V^{-1}R)^{-1} < 0$ (n.d.), $B(\sigma^{-2}/2, \sigma^2) = \sigma^2 S^{-1}$ (p.d.) ve $\mathbf{a}'B(c, \sigma^2)\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq 0$ sabit K -vektör) c 'nin sürekli bir fonksiyonu iken,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'B(c_o(a), \sigma^2)\mathbf{a} &= 0, & 0 < c_o(a) < \frac{1}{2}\sigma^{-2} \text{ için} \\ \mathbf{a}'B(c, \sigma^2)\mathbf{a} &> 0, & c > c_o(a) \text{ için} \end{aligned}$$

olacak şekilde $c_o(a)$ kritik noktası vardır. $\mathbf{a}'B(c_o(a), \sigma^2)\mathbf{a} = 0$ denklemi $c_o(a)$ için çözümlerse, kritik değer,

$$c_o(a) = (2\sigma^2)^{-1} - \frac{\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}}{2\mathbf{a}'(R'V^{-1}R)^{-1}\mathbf{a}} \quad (5.8)$$

olarak bulunur. Açıkça bu σ^2 'nin bilinmeyen bir fonksiyonudur. σ^2 hakkında ön bilginin kullanılması bu zorluğun ortadan kalkmasına yardımcı olur.

Teorem 5.2

σ^2 için alt ve üst sınırların;

i. $0 < \sigma_1^2 < \sigma^2 < \sigma_2^2 < \infty$ ve

ii. $B(0, \sigma_2^2) < 0$

şeklinde verildiği varsayılınsın. Bu durumda $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R, c)$ tahmin ediciler ailesi

$F_c = \{\hat{\boldsymbol{\beta}}(R, c) : c \geq \sigma_1^{-2}\}$ şeklinde özelleştirilmiş GLSE'den daha küçük varyans-kovaryans matrisine sahiptir.

İspat.

$B(0, \sigma_2^2) < 0$ olduğundan $B(0, \sigma^2) < 0$ bulunur. $\sigma_1^{-2} > \frac{1}{2}\sigma^{-2}$ 'dir ve böylece

$\sigma_1^{-2} > c_0(a)$ olduğundan $c \geq \sigma_1^{-2}$ için $\Delta(c) \geq 0$ olur.

b. $B(0, \sigma^2)$ n.n.d.'dir. Bu durumda $B(c, \sigma^2) \geq 0$ ve dolayısıyla her $c > 0$ için $\Delta(c) \geq 0$ 'dır.

$B(0, \sigma^2) \geq 0$ koşulunu incelemek için, $B(0, \sigma_1^2) \geq 0$ ile $0 < \sigma_1^2 < \sigma^2$ alt sınırının olduğu varsayılır. Dolayısıyla tahmin ediciler için uygun aile $F_c = \{\hat{\beta}(R, c) : c \geq 0\}$ 'dir.

Özetle, σ^2 için $\sigma_1^2 < \sigma^2 < \sigma_2^2$ şeklindeki ön bilgi, $\hat{\beta}(R, c)$ tahmin edicisi, $\hat{\beta}$ 'dan daha küçük bir varyansa ($\Delta(c) \geq 0$) sahip olacak şekilde bir c sabitinin bulunmasının mümkün olacağını ifade eder.

5.3. Yanlı Stokastik Kısıtlamalar

Bölüm 3'dekine benzer şekilde $E(\mathbf{r}) - R\beta = \delta$, $\delta \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda (5.1) stokastik kısıtlaması,

$$\mathbf{r} = R\beta + \delta + \varphi, \quad \varphi \sim (0, \sigma^2 V)$$

olur ve bu varsayımın sağlandığı durumda mixed tahmin edicisi yanlı olur.

$$E(\hat{\beta}(R)) = \beta + S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1} \delta.$$

5.3.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$ 'nin $\hat{\beta}$ Üzerine Üstünlüğü

D ; varyans-kovaryans matrislerinin farkı olmak üzere,

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) - V(\hat{\beta}(R)) &= D \\ &= \sigma^2 S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(R), \boldsymbol{\beta}) &= S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1} \boldsymbol{\delta} \\ &= D\mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.10)$$

dir. Burada, $R^+ = R'(RR')^{-1}$ olmak üzere, $\mathbf{d} = SR^+\boldsymbol{\delta}\sigma^{-2}$, dir. Bu nedenle, $\text{bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(R), \boldsymbol{\beta}) \in \Re(D)$ 'dir ve Teorem 1.23 uygulanabilir.

Teorem 5.3

Yanlı tahmin edici'nin MSE-I kriterine göre GLSE $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 'dan daha üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\lambda = \sigma^{-2}\boldsymbol{\delta}'(V + RS^{-1}R')^{-1} \boldsymbol{\delta} \leq 1 \quad (5.11)$$

olmasıdır. $\boldsymbol{\varepsilon}$ ve $\boldsymbol{\varphi}$ bağımsız olarak normal dağılıma sahiplerse λ ,

$$F = \frac{1}{Js^2}(\mathbf{r} - R\mathbf{b})'(V + RS^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\mathbf{b}) \quad (5.12)$$

istatistiğinin merkezi olmama parametresidir. Burada merkezi olmayan $F_{J, T-K}(\lambda)$ dağılımı $H_0 : \lambda \leq 1$ hipotezi altında bulunur.

Not: (5.11) ve (3.5) koşulları karşılaştırıldığında, mixed tahmin edici $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ ve RLSE $\mathbf{b}(R)$ 'nin MSE-I kriterine göre LSE $\mathbf{b}$ 'ye olan üstünlüğü,

$$(RS^{-1}R')^{-1} - (V + RS^{-1}R')^{-1} \geq 0.$$

ile görülür ki (5.11) koşulu, (3.5) koşulundan daha zayıftır. Dolayısıyla, $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta}$ kısıtına stokastik $\boldsymbol{\varphi}$ teriminin eklenmesi, parametre bölgesinin genişlemesine neden olarak yardımcı bilgiye dayalı tahmin edicinin, LSE $\mathbf{b}$ 'den daha iyi olmasını kesinleştirir.

5.3.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}$ 'nin $\hat{\beta}(R)$ Üzerine Üstünlüğü

MSE matrisleri farkının n.n.d. yani,

$$\begin{aligned}\Delta(\hat{\beta}(R), \hat{\beta}) &= M(\hat{\beta}(R), \hat{\beta}) - V(\hat{\beta}) \\ &= -\sigma^2 S^{-1} R' (V + RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1} \\ &\quad + \text{bias}(\hat{\beta}(R), \hat{\beta}) \text{bias}(\hat{\beta}(R), \hat{\beta})' \geq 0\end{aligned}$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$-I_J + (V + RS^{-1} R')^{-1/2} \delta \delta' (V + RS^{-1} R')^{-1/2} \geq 0 \quad (5.13)$$

(Teorem 1.6) olmasıdır. Teorem 1.10'a göre; $J \geq 2$ için bu matris hiçbir zaman n.n.d. olamaz. $J = 1$ için kısıt,

$$r = R'_{1,1} \beta + \delta_{1,K} + \phi_{1,1} \quad \phi \sim \left(0, \sigma^2 v_{1,1}\right)$$

olur. Buradan (5.13) matrisinde $-1 + \delta^2 (v + R'S^{-1}R)^{-1} \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda = \frac{\delta^2}{(v + R'S^{-1}R)} \geq 1$$

olmasıdır. Aşağıdaki teorem bu bulguları özetler.

Teorem 5.4

Yanlı tahmin edici $\hat{\beta}(R)$ 'nin MSE-I kriterine göre, $\hat{\beta}$ tahmin edicisinden üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lambda = \sigma^{-2} \delta' (V + RS^{-1} R')^{-1} \delta \leq 1$$

olmasıdır. Tersine,

- i. $J = 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 1$,
- ii. $J \geq 2$ için hiçbir durumda.

koşulları için $\hat{\beta}$ tahmin edicisi MSE-I'e göre $\hat{\beta}(R)$ 'den daha iyidir.

$J = 1$ kabul edilsin. λ parametrelerinin bölgesi, $\{\lambda < 1\}$ ve $\{\lambda > 1\}$ ayrık alt bölgelerine ayrılır, bu bölgeler sırasıyla $\hat{\beta}(R)$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin birbirlerine üstünlük sağladıkları alt bölgelerdir.

$\lambda = 1$ için, her iki tahmin edici birbirine denk olur.

$J \geq 2$ için, $\hat{\beta}(R)$ 'nin $\hat{\beta}$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu bir bölge ($\lambda \leq 1$) vardır fakat $\hat{\beta}$ 'nin $\hat{\beta}(R)$ 'den daha iyi olduğu bir parametre bölgesi yoktur.

5.3.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$ 'nin $\hat{\beta}$ Üzerine Üstünlüğü

Tanım 3.2'ye göre, mixed tahmin edici $\hat{\beta}(R)$,

$$tr\left\{\Delta\left(\hat{\beta}, \hat{\beta}(R)\right)\right\} = tr\left\{V\left(\hat{\beta}\right) - V\left(\hat{\beta}(R)\right)\right\} - bias\left(\hat{\beta}(R), \beta\right)' bias\left(\hat{\beta}(R), \beta\right) \geq 0 \quad (5.14)$$

ise MSE-II kriterine göre GLSE $\hat{\beta}$ 'dan daha iyidir. (5.9) ile (5.10) formüllerinin uygulanması ve $A = V + RS^{-1}R'$ notasyonunun kullanılmasıyla (5.14),

$$Q(\delta) = \sigma^{-2} \delta' A^{-1} R S^{-1} S^{-1} R' A^{-1} \delta \leq tr\left(S^{-1} R' A^{-1} R S^{-1}\right) \quad (5.15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu koşul, $Q(\delta)$ merkezi olmama parametrelili bir istatistik yoksa test edilemez. Bu eşitliğin sağlanması için yeter koşul, Wallace'ın (1972) düşüncesine dayalı olarak aranır.

$$\sigma^{-2} \delta' A^{-1} R S^{-1} G S^{-1} R' A^{-1} \delta = \sigma^{-2} \delta' A^{-1} \delta = \lambda$$

olacak şekilde $K \times K$ tipinde bir G simetrik matrisi olduğu kabul edilsin. $R^+ = R'(RR')^{-1}$ (Teorem 1.12 (vi)) için, $G = S + SR^+VR^{+'}S'$ 'dir. Buradan da $RS^{-1}GS^{-1}R' = A$ olur. Teorem 1.5'den;

$$\lambda_{\min}(G) \leq \frac{\sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} R S^{-1} G S^{-1} R' A^{-1} \mathbf{\delta}}{Q(\mathbf{\delta})} = \frac{\lambda}{Q(\mathbf{\delta})}$$

veya denk olarak,

$$Q(\mathbf{\delta}) \leq \frac{\lambda}{\lambda_{\min}(G)}$$

dir. Böylece,

$$\lambda \leq \lambda_{\min}(G) \operatorname{tr} \left(S^{-1} R' (V + R S^{-1} R')^{-1} R S^{-1} \right) = \lambda_2 \quad (5.16)$$

koşulunun, (5.15) formülünün sağlanması için yeterli koşul olduğu söylenebilir. Ayrıca koşul (5.16) test edilebilir. F ((5.12)) istatistiği, $H_0: \lambda \leq \lambda_2$ hipotezi altında $F_{J, T-K}(\lambda_2)$ dağılımına sahiptir.

Not: Tam lineer kısıtlayıcılar için, $V = 0$ ve dolayısıyla $G = S$ 'dir. $W = I$ için (5.16) koşulu, $\mathbf{b}(R)$ 'nin MSE-II kriterine göre $\mathbf{b}$ 'den daha iyi olma koşuluna denk olur.

5.3.4. $\hat{\beta}(R)$ ve $\hat{\beta}$ için MSE-III Karşılaştırması

MSE-III kriteri tanımına göre, $A = V + R S^{-1} R'$ olmak üzere,

$$\operatorname{tr} \left\{ S \Delta \left(\hat{\beta}, \hat{\beta}(R) \right) \right\} = \sigma^2 \operatorname{tr} \left\{ A^{-1} R S^{-1} R' \right\} - \mathbf{\delta}' A^{-1} R S^{-1} R' A^{-1} \mathbf{\delta} \geq 0 \quad (5.17)$$

ise veya denk olarak $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_J > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} R S^{-1} R' A^{-1} \mathbf{\delta} &\leq J - \text{tr}(A^{-1} V) \\
&= J - \sum_{j=1}^J (1 + \lambda_j)^{-1} \\
&= \sum_{j=1}^J \lambda_j (1 + \lambda_j)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

ise $\hat{\mathbf{\beta}}(R)$ tahmin edicisi MSE-III kriterine göre $\hat{\mathbf{\beta}}$ 'dan daha iyidir. Burada λ_j 'ler $V^{-1/2} R S^{-1} R' V^{-1/2}$ matrisinin özdeğerleridir. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A^{-1} V) &= \text{tr}(V^{1/2} A^{-1} V^{1/2}) = \text{tr}\left((V^{-1/2} A V^{-1/2})^{-1}\right) \\
&= \text{tr}\left\{\left(I + V^{-1/2} R S^{-1} R' V^{-1/2}\right)^{-1}\right\} = \text{tr}\left\{\left(I + \Lambda\right)^{-1}\right\} = \sum_{j=1}^J (1 + \lambda_j)^{-1}.
\end{aligned}$$

(5.18) denkleminin sol yanı, (5.11)'de tanımlanan λ ile aşağıdaki şekilde sınırlanır;

$$\begin{aligned}
&\sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} (R S^{-1} R' + V - V) A^{-1} \mathbf{\delta} \\
&= \sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} \mathbf{\delta} - \sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} V A^{-1} \mathbf{\delta} \\
&\leq \sigma^{-2} \mathbf{\delta}' A^{-1} \mathbf{\delta} = \lambda. \\
\lambda &\leq \sum_{j=1}^J \lambda_j (1 + \lambda_j)^{-1} = \lambda_3
\end{aligned} \tag{5.19}$$

koşulu, örneğin (5.17) formülünün sağlanması için yeterlidir. $H_0 : \lambda \leq \lambda_3$ hipotezi altında F istatistiğinin dağılımı $F_{J, T-K}(\lambda_3)$ olduğu için (5.19) koşulu, (5.12)'deki F istatistiği kullanılarak test edilebilir.

Not: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_J > 0$ olduğundan,

$$J \frac{\lambda_J}{1 + \lambda_J} \leq \sum_{j=1}^J \frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j} \leq J \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

olur. $\lambda_j > (J-1)^{-1}$ ve $J \geq 2$ olsun, buradan $\lambda_3 > 1$ ve MSE-III kriterinin MSE-I'e göre daha zayıf bir kriter olduğu sonuçlarına varılır. $J=1$ için $\lambda_3 = \lambda_1 / (1 + \lambda_1) < 1$ elde edilir.

Yanlı iki mixed tahmin edicinin MSE-I karşılaştırmaları ve yanıli stokastik kısıtlamaların uyarlanması için stepwise (kademeli) ekleme prosedürlerinin uygulanması problemleri Freund ve Trenkler (1986), Teräsvirta (1979a,1981,1982,1986) ve Toutenburg (1989a, b) tarafından incelenmiştir.

6. ZAYIFLATILMIŞ LİNEER KISITLAMALAR

6.1. Zayıf $(R, \mathbf{r})$ -Yansızlık

Bir lineer ilişkinin modellenmesinde ve test edilmesinde bazı yardımcı bilgiler mevcut olabilir; örneğin, ön tahminler, parametreler üzerindeki doğal kısıtlamalar ($\beta_i < 0$ vb.) ya da uzman tahminleri.

Yaygın bir kullanım şekli, bu yardımcı bilgileri aşağıdaki şekilde lineer stokastik kısıtlayıcı formunda birleştirmektir. $\mathbf{r} : J \times 1$ ve $R : J \times K$ olmak üzere,

$$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varphi} \quad \boldsymbol{\varphi} \in (0, V)$$

dir. Ancak bu bilgiler ağırlıklı olarak $\boldsymbol{\varphi}$ 'nin varyans-kovaryans matrisi olan V matrisi hakkında sahip olunan bilgilere bağlıdır. İstatistiksel uygulamalarda V matrisi genellikle bilinmediğinden $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ 'ler hesaplanamaz. Yine de $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varphi}$ kısıtındaki uygulanabilir bilgiler kullanılmalıdır. Bu kısıtdaki yardımcı bilgilerin kullanılması düşüncesi ile $E(\mathbf{r}) = R\boldsymbol{\beta}$ olur ve $\boldsymbol{\beta}$ 'nin, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahminlerini oluştururken, $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varphi}$ kısıtındaki bilgileri dikkate almak için

$$E(R\hat{\boldsymbol{\beta}}/\mathbf{r}) = \mathbf{r}$$

denkleminde ihtiyaç duyulur.

Tanım 6.1

$E(R\hat{\boldsymbol{\beta}}/\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ ise $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varphi}$ stokastik lineer kısıtına göre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahminlerine $\boldsymbol{\beta}$ 'nin zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansız tahmin edicisi denir. Bu tanım ilk defa Toutenburg, Trenkler ve Liski (1992) tarafından verilmiştir.

6.2. Optimal Zayıf $(R, \mathbf{r})$ -Yansız Tahmin Ediciler

- Heterojen tahmin edici;

Öncelikle tahmin edici için lineer heterojen bir form yani,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = C\mathbf{y} + \mathbf{d}$$

seçilir. Bu durumda, zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansızlığı gereksinimi,

$$E(R\hat{\boldsymbol{\beta}}) = RCX\boldsymbol{\beta} + R\mathbf{d} = \mathbf{r}$$

ifadesine denk olur. $R_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}, A) = E\left[\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)' A \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)\right]$, ($A > 0$) kuadratik risk fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki optimizasyon problemi ele alınmalıdır:

$$\min_{C, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}} \left\{ R_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}, A) - 2\boldsymbol{\lambda}'(RCX\boldsymbol{\beta} + R\mathbf{d} - \mathbf{r}) \right\} = \min_{C, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}} g(C, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (6.1)$$

Burada $\boldsymbol{\lambda}$, Lagrange çarpanlarının bir J -vektörüdür. En uygun sonuç için $g(C, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda})$ fonksiyonunun C , $\mathbf{d}$ ve $\boldsymbol{\lambda}$ 'ya göre türevlerinin alınması ile (Teorem 1.15 ve Teorem 1.16), aşağıdaki birinci dereceden denklemler elde edilir:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{d}} = A\mathbf{d} + A(CX - I)\boldsymbol{\beta} - R'\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial C} &= ACX\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}X' - A\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'X' + A\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}'X' \\ &\quad + \sigma^2 ACW - R'\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}'X' = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = RCX\boldsymbol{\beta} + R\mathbf{d} - \mathbf{r} = 0. \quad (6.4)$$

$A\mathbf{d}$ için (6.2) denklemi çözülürse,

$$A\mathbf{d} = -A(CX - I)\boldsymbol{\beta} + R'\boldsymbol{\lambda}$$

elde edilir ve bu sonuç (6.3) denkleminde kullanılırsa,

$$\sigma^2 ACW = 0$$

olur. A ve W pozitif tanımlı olduğundan $C = 0$ 'dır. (6.2) denklemi tekrar kullanılarak,

$$\hat{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\beta} + A^{-1}R'\boldsymbol{\lambda} \quad (6.5)$$

bulunur. (6.5) denklemi R ile çarpılırsa,

$$R\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{r} = R\boldsymbol{\beta} + (RA^{-1}R')\boldsymbol{\lambda}$$

olur, buradan $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})$ ve $\hat{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\beta} + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})$ elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.1

$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ regresyon modelinde, $\boldsymbol{\beta}$ için heterojen R_1 -optimal zayıf $(R, \mathbf{r})$ - yansız tahmin edicisi;

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1(\boldsymbol{\beta}, A) = \boldsymbol{\beta} + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})$$

ile verilebilir ve $\mathbf{r}$ 'ye bağlı risk fonksiyonu;

$$R_1[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1(\boldsymbol{\beta}, A), \boldsymbol{\beta}, A] = (\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})'(RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta})$$

dır.

Not:

- i. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1(\boldsymbol{\beta}, A)$; R_1 optimal heterojen tahmin edici $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \boldsymbol{\beta}$ 'ların toplamıdır ve zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansızlığını gidermek için düzeltme terimi;

$$E[R\hat{\boldsymbol{\beta}}_1(\boldsymbol{\beta}, A)] = R\boldsymbol{\beta} + (RA^{-1}R')(RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{r}$$

dir.

- ii. $\hat{\beta}_1(\beta, A)$ bilinmeyen parametre vektörü β 'ya bağlıdır ve bu doğrudan kullanılamaz. Ancak eğer β yerine β 'nın yansız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ kullanılırsa elde edilen $\hat{\beta}(\tilde{\beta}, A)$ uygulanabilir tahmin edicisi zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansız hale gelir.

$$E[R\hat{\beta}_1(\tilde{\beta}, A)] = RE(\tilde{\beta}) + (RA^{-1}R')(RA^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - RE(\tilde{\beta})) = \mathbf{r}$$

$\hat{\beta}_1(\beta, A)$ bilinmeyen β 'yı içermesine rağmen bu ifade kullanılabilir tahmin edicinin zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansız olmasını sağlayan yapıyı belirler ve bu tür tahmin edicilerin daha iyi istatistiksel özelliklere sahip olabileceğini gösterir.

- iii. $R_1(\hat{\beta}, \beta, A)$, C 'nin konveks fonksiyonu olduğu için, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\beta}_1(\beta, A)$ çözümü minimum değerdir.
- iv. Minimum risk için verilen $R_1[\hat{\beta}_1(\beta, A), \beta, A]$, quadratik risk fonksiyonu $R_1(\hat{\beta}, \beta, A)$ ve $\hat{\beta}_1(\beta, A)$ 'nin basit bir sonucudur.
- v. $\hat{\beta}_1(\beta, A)$; A ağırlık matrisine bağlı olduğundan A 'ya bağlı bir varyasyon yeni bir tahmin edici sınıfı tanımlar. Bu nedenle A matrisi ek parametre olarak tanımlanabilir. Örneğin, $\mathbf{b} = (X'X)^{-1}X'y$ LSE tahmin edicisi β yerine kullanılsın. Bu durumda $A = X'X = S$ seçerek $\mathbf{b}(R)$ RLSE

$$\hat{\beta}_1(\mathbf{b}, S) = \mathbf{b} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(\mathbf{r} - R\mathbf{b})$$

elde edilir.

- Homojen Tahmin Edici;

$\hat{\beta} = C\mathbf{y}$ ise zayıf $(R, \mathbf{r})$ yansızlığı için,

$$RCX\beta = r$$

olmalıdır. (6.1) denkleminde $d=0$ alınıp, C ve λ 'ya göre türevler incelenirse (heterojen tahmin edicilerde $C=0$ alınmıştı), $B = X\beta\beta'X' + \sigma^2W$ ile tanımlı olmak üzere,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial C} = ACB - A\beta\beta'X' - R\lambda'\beta'X' = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = RCX\beta - r = 0 \quad (6.7)$$

denklemleri elde edilir. B pozitif tanımlıdır ve tersi,

$$B^{-1} = \sigma^{-2} \left(W^{-1} - \frac{W^{-1}X\beta\beta'X'W^{-1}}{\sigma^2 + \beta'X'W^{-1}X\beta} \right)$$

dir (Teorem 1.1 (iv)). (6.6) denklemini C için çözülürse,

$$C = \beta\beta'XB^{-1} + A^{-1}R'\lambda'\beta'XB^{-1} \quad (6.8)$$

bulunur. Bu ifade (6.7) denkleminde kullanılarak,

$$RCX\beta = r = \left[R\beta + (RA^{-1}R')\lambda' \right] \alpha(\beta)$$

elde edilir ve buradan,

$$\alpha(\beta) = \frac{\beta'S\beta}{\sigma^2 + \beta'S\beta}$$

ile tanımlanan $\alpha(\beta)$ için optimal λ ,

$$\hat{\lambda}' = (RA^{-1}R')^{-1} \left(\frac{r}{\alpha(\beta)} - R\beta \right)$$

olarak bulunur. $\hat{\lambda}$ (6.8) denkleminde kullanılırsa, C için aşağıdaki çözüm elde edilir;

$$\hat{C} = \beta\beta'XB^{-1} + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1} \left([\alpha(\beta)]^{-1} \mathbf{r} - R\beta \right) \beta'XB^{-1}.$$

Sonuç olarak, $\hat{C}_2 = \beta\beta'X'(X\beta\beta'X' + \sigma^2W)^{-1}$ ve

$$(X\beta\beta'X' + \sigma^2W)^{-1} = \sigma^{-2}W^{-1} - \frac{\sigma^{-4}W^{-1}X\beta\beta'X'W^{-1}}{1 + \sigma^{-2}\beta'XW^{-1}X\beta}$$

ifadelerinin kısaltılmış formu $\alpha(\mathbf{y}) = \beta'XB^{-1}\mathbf{y} = \frac{\beta'XW^{-1}\mathbf{y}}{\sigma^2 + \beta'S\beta}$ olmak üzere R_1 -optimal homojen zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansız tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_2(\beta, A) = \beta\alpha(\mathbf{y}) + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1} \left(\frac{r}{\alpha(\beta)} - R\beta \right) \alpha(\mathbf{y})$$

olarak ifade edilir. $\hat{\beta}_2 = \beta\alpha(\mathbf{y})$ 'nin β için R_1 -optimal homojen tahmin edici olduğu gerçeği göz önünde bulundurulmalıdır. Burada,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \beta \left[\sigma^{-2}\beta'XW^{-1}\mathbf{y} - \frac{\sigma^{-4}\beta'S\beta\beta'XW^{-1}\mathbf{y}}{1 + \sigma^{-2}\beta'S\beta} \right] \\ &= \beta \left[\sigma^{-2} - \frac{\sigma^{-4}\beta'S\beta}{1 + \sigma^{-2}\beta'S\beta} \right] \beta'XW^{-1}\mathbf{y} \\ &= \beta \left[\frac{\beta'XW^{-1}\mathbf{y}}{\sigma^2 + \beta'S\beta} \right] \end{aligned}$$

dır. $E(\alpha(\mathbf{y})) = \alpha(\beta)$ olduğundan $\hat{\beta}_2(\beta, A)$ zayıf $(R, \mathbf{r})$ -yansızdır. Yani;

$$E \left[R\hat{\beta}_2(\beta, A) \right] = R\beta\alpha(\beta) + \frac{r}{\alpha(\beta)} \alpha(\beta) - R\beta\alpha(\beta) = \mathbf{r}$$

dir. Bu tahmin edici, β 'ya göre yanlıdır. Yanlılık ise,

$$z = A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}\left(\frac{r}{\alpha(\beta)} - R\beta\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$\text{bias}\left[\hat{\beta}_2(\beta, A), \beta\right] = \beta(\alpha(\beta) - 1) + z\alpha(\beta)$$

dir. Ayrıca varyans-kovaryans matrisi;

$$V\left(\hat{\beta}_2(\beta, A)\right) = V\left(\hat{\beta}_2\right) + zz' \frac{\sigma^2 \alpha(\beta)}{\sigma^2 + \beta'S\beta} + 2z'\beta \frac{\sigma^2 \alpha(\beta)}{\sigma^2 + \beta'S\beta}$$

olur ki burada

$$V\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma^2 \beta \beta' \frac{\beta'S\beta}{(\sigma^2 + \beta'S\beta)^2}$$

dir. Buradan $\hat{\beta}_2(\beta, A)$ 'nın MSE matrisi;

$$M\left(\hat{\beta}_2(\beta, A), \beta\right) = M\left(\hat{\beta}_2, \beta\right) + zz' \alpha(\beta)$$

dir. Burada,

$$M\left(\hat{\beta}_2, \beta\right) = \frac{\sigma^2 \beta \beta'}{\sigma^2 + \beta'S\beta}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\Delta\left(\hat{\beta}_2(\beta, A), \hat{\beta}_2\right) = zz' \alpha(\beta) \geq 0$$

olduğu görülür.

Teorem 6.2

β için R_1 -optimal homojen zayıf (R, r) -yansız tahmin edicisi $\hat{\beta}_2(\beta, A)$ olarak verilir. Bu tahmin edici için R_1 -riski;

$$R_1(\hat{\beta}_2(\beta, A), \beta, A) = R_1(\hat{\beta}_2, \beta, A) + \alpha(\beta) \left(\frac{r}{\alpha(\beta)} - R\beta \right)' (RA^{-1}R')^{-1} \left(\frac{r}{\alpha(\beta)} - R\beta \right)$$

dir. Burada $R_1(\hat{\beta}_2, \beta, A) = tr(AM(\hat{\beta}_2, \beta))$ $\hat{\beta}_2$ 'nın, R_1 -riskidir.

6.3. Uygulanabilir Tahmin Ediciler- $\hat{\beta}_1(\beta, A)$ Tahmin Edicisinde β 'nın En Uygun Seçimi

β 'nın herhangi bir yansız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ 'nın kullanılması $\hat{\beta}_1(\beta, A)$ 'yı zayıf (R, r) -yansız yapar (Bölüm 6.2). Kuadratik riske göre, $\hat{\beta}_1(\tilde{\beta}, A)$ 'nın uygulanabilir ve en uygun formunu oluşturan $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi belirlenirken, bu tahmin edicilerin iyi tanımlı kümeleri ile sınırlama yapılır. Bu, lineer homojen tahmin edicilerin $\{\tilde{\beta} = \tilde{C}y : \tilde{C}X = I\}$ sınıfı için gösterilebilir;

$$\tilde{A} = A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}$$

notasyonunun kullanılması ile,

$$\hat{\beta}_1(\tilde{C}y, A) = \tilde{C}y + \tilde{A}(r - \tilde{C}y)$$

elde edilir. Bu ifade β için yansızdır, yani;

$$E(\hat{\beta}_1(\tilde{C}y, A)) = \tilde{C}X\beta + \tilde{A}(r - R\tilde{C}X\beta) = \beta$$

ve varyans-kovaryans matrisi,

$$V(\hat{\beta}_1(\tilde{C}y, A)) = \sigma^2 (I - \tilde{A}R)\tilde{C}W\tilde{C}'(I - \tilde{A}R)'$$

olur. Ayrıca, $Q = I - A^{-\frac{1}{2}} R' (R A^{-1} R')^{-1} R A^{-\frac{1}{2}}$ matrisi, $K - J$ ranklı, idempotent bir matristir ve

$$(I - R' \tilde{A}') A (I - \tilde{A} R) = A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}}$$

olduğu kolayca görülür. Lagrange çarpanları olan λ_i vektörlerinin $K \times K$ matrisi, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ olsun. $\hat{\beta}(\tilde{\beta}, A)$ tahmin edicisinin yansız R_1 -optimal $\hat{\beta} = \tilde{C}y$ ifadesi aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümüdür;

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{C}, \Lambda} \left\{ tr \left[AV \left(\hat{\beta}_1(\tilde{C}y, A) \right) \right] - 2 \sum_{i=1}^K \lambda'_i (\tilde{C}X - I)_{(i)} \right\} \\ &= \min_{\tilde{C}, \Lambda} \left\{ \sigma^2 tr \left[A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} \tilde{C} W \tilde{C}' \right] - 2 \sum_{i=1}^K \lambda'_i (\tilde{C}X - I)_{(i)} \right\} \\ &= \min_{\tilde{C}, \Lambda} g(\tilde{C}, \Lambda). \end{aligned}$$

$\tilde{C}$ ve Λ 'ya göre türev alınırsa minimumluk için gerek koşullar;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g(\tilde{C}, \Lambda)}{\partial \tilde{C}} &= A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} \tilde{C} W - \Lambda X' = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g(\tilde{C}, \Lambda)}{\partial \Lambda} &= \tilde{C}X - I = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\tilde{C}$ 'ya göre türev, $W^{-1}X$ ile çarpılarak, Λ 'ya göre türev formülünde kullanılırsa,

$$\hat{\Lambda} = A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} S^{-1}$$

olur ve sonuç olarak $\tilde{C}$ 'ya göre türev formülünden,

$$A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} [\tilde{C} - S^{-1} X W^{-1}] = 0$$

elde edilir ve bu ifadenin çözümü, $\tilde{\beta}$ 'ya karşılık gelen $\hat{\beta}$ GLSE ve

$$\hat{\beta}_1(\tilde{C}_*y, A) = \hat{\beta} + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta})$$

ile

$$\tilde{C}_* = S^{-1}XW^{-1}$$

olarak verilir.

6.4. Mixed Tahmin Edici Yerine RLS Tahmin Edicisinin Kullanılması

V varyans-kovaryans matrisi biliniyorsa, $r = R\beta + \varphi$, $\varphi \in (0, V)$ ön bilgisi kullanılabilir.

V matrisinin bilinmediği durumlarda, 5.2 bölümünde anlatılan V 'yi tahmin etme yöntemi kullanılır. Alternatif çözüm ise RLSE $b(R)$ 'nin kullanılmasıdır. Bu durum V yerine hatalı olarak, $V_m = 0$ varyans-kovaryans matrisi kullanılarak elde edilen eksik belirlenmiş mixed tahmin edici olarak tanımlanabilir. Bunu daha fazla açıklamak için,

$$b(R) = b(R, V_M) = b + S^{-1}R'(RS^{-1}R' + V_M)^{-1}(r - Rb)$$

notasyonu kullanılır. $r = R\beta + \varphi$, $\varphi \in (0, V)$ stokastik kısıtlamasının doğru olarak tanımlanması ile $b(R, V_M)$, β için yansız tahmin edici olur yani,

$$E(b(R, V_M)) = \beta$$

dır. Fakat $V(b(R))$ RLSE'nin kovaryans matrisi olmak üzere, $b(R, V_M)$ 'nin kovaryans matrisi;

$$V(b(R, V_M)) = V(b(R)) + \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}V(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$$

dir. Karşılaştırılan $\mathbf{b}(R, V_M)$ ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ tahmin edicilerinin yansızlığından dolayı MSE karşılaştırmaları yerine varyans-kovaryans matrisleri karşılaştırılabilir.

$$A = S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}V^{1/2}$$

olmak üzere varyans-kovaryans matrislerinin farkı;

$$\Delta(\mathbf{b}(R, V_M), \hat{\boldsymbol{\beta}}(R)) = \sigma^2 A \left[I - \left(I + V^{1/2} (RS^{-1}R')^{-1} V^{1/2} \right)^{-1} \right] A'$$

olarak elde edilir. Mixed tahmin edici $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ 'nin optimal olmasına bağlı olarak $\mathbf{b}(R, V_M)$ tahmin edicisi daha az etkin olmalıdır. Yani her durumda,

$$\Delta(\mathbf{b}(R, V_M), \hat{\boldsymbol{\beta}}(R)) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. V bilinmediği için etkinlikteki bu kaybın büyüklüğü tahmin edilemez. $\mathbf{b}(R, V_M)$ ve GLSE $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ karşılaştırılırsa,

$$\Delta(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{b}(R, V_M)) = \sigma^2 A \left[V^{-1/2} RS^{-1} R' V^{-1/2} - I \right] A' \geq 0$$

ise veya denk olarak,

$$\lambda_{\min} \left(V^{-1/2} RS^{-1} R' V^{-1/2} \right) \geq 0$$

ise hatalı olarak tanımlanan $\mathbf{b}(R, V_M)$ tahmin edicisi, MSE kriterine göre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 'dan daha üstündür denir. Fakat bu koşul V bilinmediğinden kullanılabilir değildir.

KAYNAKLAR

- AITKEN, A.C., 1935. On least squares and linear combinations of observations. Proc. R. Soc. Edinburg, 55:42-48.
- ALBERT, A., 1972. Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. Academic Press, New York.
- BAKSALARY, J.K. AND KALA, R., 1983. Partial orderings between matrices one of which is of rank one. Bulletin of the Polish Academy of Science, Math., 31:5-7.
- BAKSALARY, J.K., KALA, R., KLACZYNSKI, K., 1983. The matrix inequality $M \geq B^*MB$. Linear Algebra and Its Applications, 54:86, 1983.
- BAKSALARY, J.K., LISKI E.P., AND TRENKLER, G., 1989. Mean square error matrix improvements and admissibility of linear estimators. J. Statist. Planning and Inference, 23:312-325.
- BAKSALARY, J.K., PUNTANEN, S., AND STYAN, G.P.H., 1990. A property of the dispersion matrix of the best linear unbiased estimator in the general Gauss-Markov model. Sankhyā Ser. A 52, 279-296.
- CHIPMAN, J.S., AND RAO, M.M., 1964. The treatment of linear restrictions in regression analysis. Econometrica, 32:198-209.
- DURBIN, J., 1953. A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients. J. Amer. Statist. Assoc., 48:799-808.
- FAREBROTHER, R.W., 1976. Further results on the mean square error of ridge regression. J. Royal Statist. Soc. B, 38:248-250.
- FREUND, E., AND TRENKLER, G., 1986. Mean square error matrix comparisons between mixed estimators. Statistica XLVI, pages 493-501.
- GILES, D.E.A, AND SRIVASTAVA, V.K., 1991. An unbiased estimator of the covariance matrix of the mixed regression estimator. J. Amer. Statist. Assoc., 86:441-444.
- GROB, J., 2003. Restricted Ridge Estimation. Statistics and Probability Letters, 65:57-64

- HOERL, A.E., KENNARD, R.W., AND BALDWIN, K.F., 1975. Ridge regression: some simulations. *Comm. Statist. Theory Methods* 4, 105-123.
- JUDGE G.G., AND BOCK, M.E., 1978. The statistical implications of pre-test and Stein-rule estimators in econometrics. North-Holland, Amsterdam.
- KAKWANI, N.C., 1968. Note on the unbiasedness of mixed regression estimation. *Econometrics*, 36:610-611.
- KAKWANI, N.C., 1974. A note on Nagar-Kakwani approximation to variance of mixed regression estimator. *The Indian Economic Journal*, 22:105-107.
- MEHTA, J.S., AND SWAMY, P.A.V.B., 1970. The finite sample distribution of Theil's mixed regression estimator and a related problem. *Rev. Int. Statist. Inst.*, 38:202-209.
- NAGAR, L., AND KAKWANI, N.C., 1964. The bias and moment matrix of a mixed regression estimator. *Econometrica*, 32:174-182.
- RAO, C. R. AND TOUTENBURG H., 1995. *Linear Models, Least Squares and Alternatives*. Edwards Brothers Printing. USA. 351p.
- SARKAR, N., 1992. a new estimator combining the ridge regression and the restricted least squares methods of estimation. *Comm. Statist. Theory Methods* 21, 1987-2000.
- SRIVASTAVA, V.K., AND CHANDRA, R., 1985. Properties of the mixed regression estimator when disturbances are not necessarily normal. *J. Statist. Planning and Inference*. 11:11-15.
- SRIVASTAVA, V.K., AND UPADHYAYA, S., 1975. Small-disturbance and large sample approximation in mixed regression estimation. *Eastern Economic J.*, 2:261-265.
- SWAMY, P.A.V.B., AND MEHTA, J.S., 1969. On Theil's mixed regression estimator. *J. Amer. Statists. Assoc.*, 66:273-276.
- SWINDEL, B.F., 1976. Good estimators based on prior information. *Comm. Statist. Theory Methods* 5, 1065-1075.
- TERÄSVIRTA, T., 1979. Some results on improving the least squares estimation of linear models by a mixed estimation. Discussion Paper 7914, Louvain, CORE.

- TERÄSVIRTA, T., 1981. Some results on improving the least squares estimation of linear models by mixed estimation. *Scand. J. of Statistics*, 8:33-38.
- TERÄSVIRTA, T., 1982. Superiority comparisons of homogeneous linear estimators. *Comm. Statist. A*, 11:1595-1601.
- TERÄSVIRTA, T., 1986. Superiority comparisons of heterogeneous linear estimators. *Comm. Statist.*, 15:1319-1336.
- TERÄSVIRTA, T., AND TOUTENBURG, H., 1980. A note on the limits of a modified Theil estimator. *Biometrical J.*, 22:561-562.
- THEIL, H., 1963. On the use of incomplete prior information in regression analysis. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58:401-414.
- THEIL, H., AND GOLDBERGER, A.S., 1961. On pure and mixed estimation in econometrics. *Intl. Economic Rev.*, 2:65-78.
- TOUTENBURG, H., 1973. Lineare Restriktionen und Modellwahl im allgemeinen linearen Regressionsmodell. *Biometrische Zeitschrift*, 15:325-342.
- TOUTENBURG, H., 1982. *Prior information in linear models*. Wiley, New York.
- TOUTENBURG, H., 1989. Mean-square-error-comparisons between restricted least squares, mixed and weighted mixed estimators. Universität Dortmund, Fachbereich Statistik, Forschungsbericht, 89/12.
- TOUTENBURG, H., TRENKLER, G., AND LISKI, E., 1992. Optimal estimation methods under weakened linear restrictions in regression. *Computational Statistics and Data Analysis*, 14:527-536.
- TRENKLER, G., 1987. Mean square error matrix comparisons among restricted least squares estimators. *Sankhya A*, 49:96-104.
- WALLACE, T.D., 1972. Weaker criteria and tests for linear restrictions in regression. *Econometrica*, 40:689-698.
- YANCEY, T.A., JUDGE, G.G., AND BOCK, M.E., 1973. Wallace's weak mean square error criterion for testing linear restrictions in regression: A tighter bound. *Econometrica*, 41:1203-1206.
- YANCEY, T.A., JUDGE, G.G., AND BOCK, M.E., 1974. A mean square error test when stochastic restrictions are used in regression. *Comm. Statist.*, 3:755-768.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Adana'nın Seyhan ilçesinde doğdum. İlkokulu Ahmet Karabucak İlköğretim Okulu ve ortaokulu Gazi İlköğretim Okulu'nda okudum. Lise öğrenimimi ise Çağrıbey Lisesi'nde tamamladım. 1997 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 2001 yılında bu bölümden mezun oldum. 2002 yılında Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimime başladım. Şu anda İsmet İnönü İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım ve halen Ç.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü yüksek lisans öğrencisi olarak eğitimime devam etmekteyim.