

KISITLAMALI MİNİMUMLAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Hakan ULAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2006
ANKARA**

Hakan ULAŞ tarafından hazırlanan KISITLAMALI MİNİMUMLAŞTIRMA PROBLEMLERİ adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Ömer AKIN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN

Üye : Doç. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Tarih : 27 / 04 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan ULAŞ

KISITLAMALI MİNİMUMLAŞTIRMA PROBLEMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hakan ULAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2006

ÖZET

Bu tez çalışmasında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir lineer olmayan bir fonksiyon için çeşitli kısıtlamalar altında minimumlaştırma problemleri üzerinde durulmuştur.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler : Kısıtlama, Aktif kısıtlayıcı, Teğet düzlem, Hessian testi

Sayfa Adedi : 54

Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Ömer AKIN

CONSTRAINED MINIMIZATION CONDITIONS**(M. Sc. Thesis)****Hakan ULAŞ****GAZI UNIVERSTY****INSTITUTU OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****ABSTRACT**

In this thesis, the minimization problems for nonlinear functions with having second continuous derivatives are investigated under some constraints.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Constraint, active constraint, tangent plane,
Hessian's test
Page Number : 54
Adviser : Prof.Dr.Ömer AKIN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren, önerilerde bulunarak değerli zamanını benden esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr.Ömer AKIN' a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	2
2.1. Kısıtlamalar Hakkında Genel Bilgiler	2
2.2. Aktif Kısıtlayıcı	3
2.3. Teğet Düzlem	5
2.4. Birinci Mertebeden Genel Koşullar	10
2.5. Örnekler	13
2.6. Büyük Ölçekli Uygulamalar.....	22
2.7. İkinci Mertebeden Koşullar	23
2.8. İkinci Mertebeden Yeter Koşullar.....	25
3. ALT TEĞET DÜZLEMDE ÖZ DEĞERLER.....	30
3.1. Kısıtlanmış Hessian.....	35
3.2. Kısıtlanmış Hessian Testi.....	38
3.3. Duyarlılık (Sensitivity).....	38
3.4. Duyarlılık Teoremi	39

Sayfa

4. EŞİTSİZLİK KISITLAYICILARI	42
4.1. Birinci Mertebeden Gerek Şartlar	42
4.2. Kuhn - Tucker Şartları	43
4.3. İkinci Mertebeden Şartlar	46
4.4. İkinci Mertebeden Yeter Şartlar.....	47
4.5. Eşitsizlik Kapsayan Problemler için Duyarlılık (Sensitivity)	50
5. SONUÇ	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ.....	54

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Uygulanabilir bölge	4
Şekil 2.2. x^* noktasına ötelenen teğet düzlem örnekleri.....	7
Şekil 2.3. Zincirin denge şekli	20
Şekil 3.1. L_M nin tanımı	31
Şekil 3.2. L_M nin eigen vektörü.....	33

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
η	Eta
H	Hessian Matrisi
L	Lagrange Çarpanı
λ	Lamda
Ω	Omega
$\square$:	Sonsuz
$\sharp$	Toplam

1. GİRİŞ

Giriş kısmı tezin birinci bölümü olarak alınmıştır. Bu tezde Lineer olmayan yüzey üzerinde çeşitli kısıtlamalara sahip fonksiyonların minimumlaştırma problemleri incelenmiştir. Bunun için gerek ve yeter şartlar verilmiş ve bunların dışında Lagrange çarpanları ve Hessian matrisine bağlı olarak problemlerin çözümü incelenmiştir. Kısıtlamalara sahip minimumlaştırma problemleri ile ilgili olarak eğrisel yüzey, kısıtlamalar, teğet düzlem, birinci mertebeden koşullar ve ikinci mertebeden koşullar üzerinde durulmuştur. Kısıtlamalara sahip minimumlaştırma problemleri çeşitli örneklerle anlatılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde minimumlaştırma problemleri incelenirken kullanılan kısıtlamalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Burada kullanılan teğet düzlem hakkında bilgi verilip birinci ve ikinci mertebeden koşullar incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde alt teğet düzlemde öz (eigen) değerler için kısıtlanmış Hessian testi üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise eşitlik kısıtlayıcıları üzerinde durulmuş ve bunun için birinci ve ikinci mertebeden şartlardan bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Kısıtlamalar Hakkında Genel Bilgi

Bu tezde;

“ $f(x)$, fonksiyonunu

$$h_1(x) = 0 \quad g_1(x) \leq 0$$

$$h_2(x) = 0 \quad g_2(x) \leq 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$h_m(x) = 0 \quad g_p(x) \leq 0 ,$$

(2.1)

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

kısıtlamalarına bağlı olarak minimumlaştırınız. “

biçiminde verilen lineer olmayan programlama problemleri incelenecektir.

Burada ;

$$m \leq n \quad \text{ve}$$

$$f, h_i \text{ ve } g_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p$$

fonksiyonları ikinci mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar sınıfındandır.

Basit olarak ifade edersek, vektör değerli fonksiyonları ;

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= (h_1, h_2, \dots, h_m) \\ &, \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (g_1, g_2, \dots, g_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayacağız ve Eş. 2.1 deki problemi aşağıdaki biçimde ifade edeceğiz.

“ $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

kısıtlamaları altında minimumlaştırınız. “

şeklinde ifade edeceğiz.

Buradaki $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ ve $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ kısıtlayıcıları fonksiyonel kısıtlayıcı, $\mathbf{x} \in \Omega$ kısıtlayıcısı ise belirli kısıtlayıcısı olarak adlandırılır. Çoğu durumda Ω , ya bütün $\mathbb{R}^n$ uzayıdır ya da Eş. 2.2 nin çözümünün Ω nın içinde olduğu kabul edilen bir bölgedir. Bütün fonksiyonel kısıtlamaları sağlayan $\mathbf{x} \in \Omega$ noktasına uygulanabilir denir.

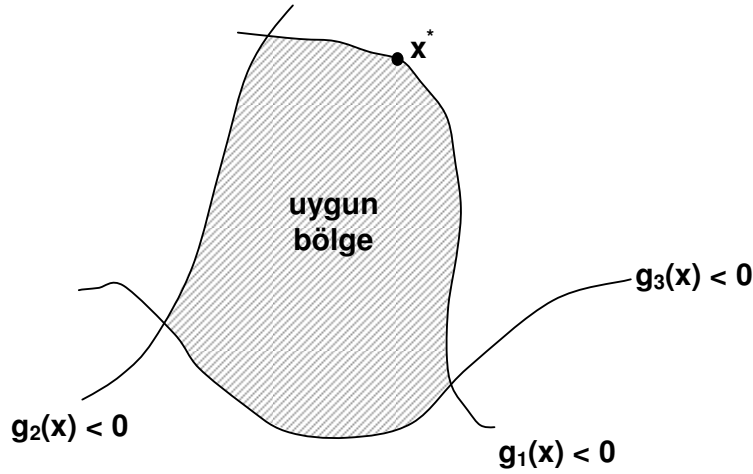
2.2. Aktif Kısıtlayıcı

Aktif kısıtlayıcı incelenecek problem için temel bir kavramdır. Bu kavram gerekli teorik anlatımları basitleştirdiği kadar, problemin iyi anlaşılmasında da büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Eşitsizlik kısıtlayıcısı olan $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ kısıtlaması, uygulanabilir $\mathbf{x}$ noktasında $g_i(\mathbf{x}) = 0$ olması koşulunda aktif, $g_i(\mathbf{x}) < 0$ olması durumunda aktif değildir. Genel olarak herhangi bir eşitlik kısıtlayıcısı olan $h_i(\mathbf{x}) = 0$ herhangi bir

uygulanabilir noktada aktiftir. Aktif olmayan kısıtlayıcıların herhangi bir $\mathbf{x}$, komşuluğunda etkileri yoktur.

Yerel minimum noktanın özellikleri incelenirken Şekil 2.1 de gösterildiği gibi aktif kısıtlayıcılara dikkat edilmesi gerekir. $\mathbf{x}^*$ çözümünde elde edilen genel özellikler, g_2 ve g_3 aktif olmayan kısıtlayıcılarına bağlı değildir.



Şekil 2.1. Uygulanabilir bölge

Eğer hangi kısıtlayıcının çözüm Eş. 2.1 de aktif olduğu önceden bilinirse çözüm, problemin yerel minimum noktasında olur. Bu durumda problem, aktif olmayan kısıtlayıcıların ihmal edilmesinden ve aktif kısıtlayıcıların eşitlik kısıtlayıcılar olarak işlev görmesiyle tanımlanabilir. Sonuçta yerel çözüme göre problem sadece eşitlik kısıtlayıcıları göz önüne alınarak çözülebilir. Eş.2.1 de uygulanabilir teori ve anlayış sadece eşitlik kısıtlayıcıları göz önüne alınarak çıkarılmıştır. Sonraki eklemeler aktif kısıtlayıcıların seçimini anlaşılır kılmaktadır.

Gösterimin ekonomik olması ve kısıtlama problemlerinin daha kolay ortaya konması nedeniyle, bu bölümde sadece eşitlik kısıtlayıcılarına sahip problemler üzerinde durulacak, ardından bu sonuçlar daha genel durumlara uyarlanacaktır.

2.3. Teğet Düzlem

E^n üzerinde tanımlı

$$h_1(x) = 0$$

$$h_2(x) = 0$$

.

.

.

(2.3)

$$h_m(x) = 0$$

eşitlik kısıtlayıcıların kümesi, E^n nin bir alt kümesini tanımlar. Bu alt küme hiperyüzey olarak isimlendirilebilir. Eğer, bütün kısıtlayıcılar aşağıdaki anlamda regüler ise bu hiperyüzeyin boyutu $n - m$ olacaktır.

Eğer bu bölümde kabul edilen ;

$$h_i \ (i = 1, 2, \dots, m)$$

fonksiyonları birinci mertebeden türeve sahipse bu yüzey regüler yüzey olarak adlandırılır.

Teğet düzlem regüler yüzey üzerindeki bir nokta yardımıyla belirlenir. Bu nokta teğet düzlemin yüzeye teğet olduğu noktadır. Teğet düzlem iki veya üç boyutta verildiğinde daha açık şekilde görülebilir. Bir S yüzeyi üzerindeki bir t eğrisi $a \leq t \leq b$ için sürekli olarak parametrize edilen $x(t) \in S$ noktalarının bir ailesidir. Burada S yüzeyi üzerindeki bir eğri, t parametresinin sürekli bir fonksiyonudur.

Eğer ;

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} x(t)$$

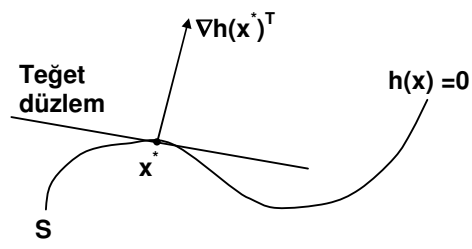
ise bu durumda t eğrisine diferensiyellenebilir eğri denir. Eğer $\mathbf{x}$ ifadesi varsa t eğrisine iki defa diferensiyellenebilir eğri denir. Herhangi bir t^* sayısı için $a \leq t^* \leq b$ ve $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t^*)$ oluyorsa $\mathbf{x}(t)$ eğrisi $\mathbf{x}^*$ noktasından geçer. Eğrinin $\mathbf{x}^*$ türevi $\mathbf{x}'(t^*)$ olarak tanımlanır. Bu aynı zamanda E^n de bir vektördür.

S yüzeyi üzerindeki $\mathbf{x}^*$ noktasından geçen tüm diferensiyellenebilir eğriler için bu eğrilerin $\mathbf{x}^*$ daki türevleri, $\mathbf{x}^*$ daki teğet düzlem olarak tanımlanır. Teğet düzlem E^n nin alt uzayıdır. Eş. 2.3 ifadesindeki gibi eşitlik kısıtlayıcılarının tanımladığı yüzeyler için teğet düzlemi belirleme temel bir problemdir. İdeal olarak teğet düzlem, yüzeyi tanımlayan h_i fonksiyonlarının türevleri biçiminde gösterilebilir. M alt uzayı ;

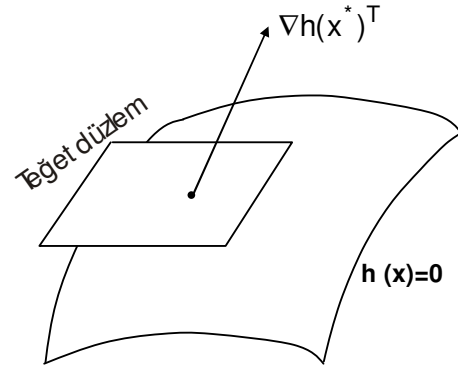
$$M = \{y; \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) y = 0\}$$

şeklinde tanımlansın.

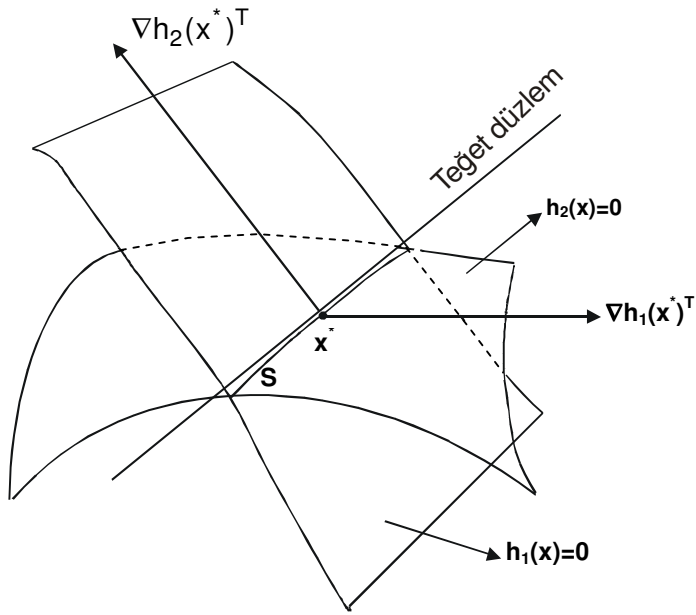
Şimdi M nin hangi koşullarda $\mathbf{x}^*$ noktasındaki teğet düzleme eşit olması incelenecektir. Burada regüler nokta anahtar kavramdır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.2. x^* noktasına ötelene teğet düzlem örnekleri (a) Eğrinin x^* noktasına ötelene teğet düzlemi (b) Yüzeyin x^* noktasına ötelene teğet düzlemi (c) Kesişen yüzey eğrisinin x^* noktasına ötelene teğet düzlemi

2.1. Tanım

$\nabla f_1(x^*), \nabla f_2(x^*), \dots, \nabla f_m(x^*)$ gradiyent vektörleri lineer bağımsız ise $h(x^*)=0$ kısıtlamasını sağlayan x^* noktasına regüler nokta denir.

Regüler noktalarda teğet düzlemi, kısıtlayıcı fonksiyonların gradiyentleri cinsinden karakterize etmek mümkündür.

$$\nabla f_1(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx_1} \\ \frac{dh_1}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{dh_1}{dx_n} \end{bmatrix}_{x=x^*} \quad \nabla f_2(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{dh_2}{dx_1} \\ \frac{dh_2}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{dh_2}{dx_n} \end{bmatrix}_{x=x^*} \quad \nabla f_m(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{dh_m}{dx_1} \\ \frac{dh_m}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{dh_m}{dx_n} \end{bmatrix}_{x=x^*}$$

$$\Delta h(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx_1} & \frac{dh_2}{dx_1} \Lambda & \frac{dh_m}{dx_1} \\ \frac{dh_1}{dx_2} & \frac{dh_2}{dx_2} \Lambda & \frac{dh_m}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dh_1}{dx_n} & \frac{dh_2}{dx_n} \Lambda & \frac{dh_m}{dx_n} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

2.2. Tanım

$$a_1 \nabla f_1 + a_2 \nabla f_2 + \Lambda + a_n \nabla f_m = 0$$

eşitliği ancak ve ancak

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

iken sağlanıyorsa $\nabla h(x^*)$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir.

2.1. Teorem

$h(x) = 0$ kısıtlaması ile tanımlanan S yüzeyindeki x^* regüler noktasından geçen teğet düzlem;

$$M = \{y : \nabla h(x^*)^T y = 0\}$$

dir.

İspat

T , x^* noktasındaki teğet düzlem olsun. x^* noktasından geçen $x(t)$ eğrisi için, $t=t^*$ noktasındaki türev $\dot{x}(t^*)$ olsun.

Böylece

$$\nabla h(x^*)^T \dot{x}(t^*) = 0,$$

ifadesi S yüzeyi üzerinde geçerli olmayacaktır. Buradan açıkça görülüyor ki x^* düzenli regüler nokta olsa da olmasa da $T \neq M$ olacaktır.

$M \neq T$ olduğunu göstermek için öncelikle $y \in M$ koşuluyla x^* noktasından geçen ve S yüzeyi üzerinde bulunan y türevine sahip eğrinin gösterilmesi gerekir.

Böyle bir eğriyi göstermemiz için şu eşitlik ele alınmalıdır.

$$h(x^* + ty + \nabla h(x^*)^T \mu(t)) = 0 \quad (2.4)$$

Burada sabit t için $u(t) \in E^n$ bilinmeyendir. Bu, m denklem ve m bilinmeyenli sürekli t parametrelili doğrusal olmayan bir sistemdir.

$t = 0$ olması durumunda $u(0) = 0$ çözümü vardır. Sistemin $t = 0$ da U ya göre Jakobiyen matrisi $m \times m$ boyutludur.

$$\nabla h(x^*) \nabla h(x^*)^T$$

İfadesi singüler değildir. Çünkü x^* regüler nokta ise $\nabla h(x^*)$ bir tam dizidir. $u(t)$ bazı kısımlarda $-a \leq t \leq b$ aralığındadır.

Bu yüzden $x(t) = x^* - ty + u(t)$ eğrisi, S yüzeyinde bir eğridir. Eş. 2.4 ifadesi, $t=0$ ifadesine bağlı olarak

$$0 = \left. \frac{d}{dt} h(x(t))^T \right|_{t=0} = \nabla h(x^*) y + \nabla h(x^*)^T \dot{u}(0)$$

biçiminde gösterilebilir.

Buradan regülerlik, kısıtlamalı yüzeyin kendisi üstünde bir durum olmaktan ziyade h ifadesinin bir temsildir. Teğet düzlem temsilden bağımsız olarak tanımlanırken, M tanımlanamaz.

2.4. Birinci Mertebeden Genel Koşullar

Burada; verilen bir noktanın, eşitlik kısıtlamaları altında bir yerel minimum noktası için birinci mertebeden gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

2.1. Lemma

x^* noktası $h(x) = 0$ kısıtlayıcılarına bağlı bir regüler nokta ve f nin yerel

ekstremum noktası ise $\forall y \in E^n$ için;

$$\nabla h(x^*)y = 0$$

ve

$$\nabla f(x^*)y = 0$$

olmalıdır.

İspat

y ; teğet düzleminde bulunan x^* noktasındaki herhangi bir vektör $x(t)$, x^* noktasından geçen ve x^* da y türevine sahip olan kısıtlayıcı yüzey üzerinde bulunan bir düzgün eğri olsun. Yani;

$$x(0) = x^*, x'(0) = y \text{ ve } a > 0 \text{ olmak üzere } a \leq t \leq a \text{ için}$$

$$h(x(t)) = 0$$

elde edilir. x^* noktası regüler nokta olduğundan, teğet düzlem $\nabla h(x^*)y = 0$ eşitliğini sağlayan y lerin kümesine eşittir.

Bu durumda x^* , f 'nin kısıtlanmış bir yerel ekstremum noktası olduğu için

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=0} = 0 \text{ -- veya } \nabla f(x^*)y = 0 \text{ -- } \nabla f(x^*)y \neq 0$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma, $\nabla f(x^*)$ ın teğet düzleme dik olduğunu gösterir. $\nabla f(x^*)$ ın teğet düzleme dik olması, $\nabla f(x^*)$ ın h kısıtlamasının x^* noktasındaki gradientlerin lineer birleşimi olduğunu gösterir. Bu aynı zamanda Lagrange çarpanlarına giriş yapmak anlamında gelir.

2.2. Teorem

x^* , $h(x) = 0$ eşitlik kısıtlamalarına göre f nin bir yerel ekstremum noktası ve bu kısıtlamaların regüler noktası olsun. Bu durumda;

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0$$

olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vardır.

İspat

Lemmadan yola çıkarak lineer programın değerinin sıfır olduğunu söylenebilir. Yani;

$$\nabla f(x^*)^T y = 0$$

ifadesinin

$$\nabla h(x^*)^T y = 0$$

kısıtlamaları altında maksimumunu bulunuz. “

ifadesinden lineer programının değeri sıfırdır.

Özellikle;

$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0$ olacak şekilde $\lambda \in E^m$ vardır.

Şuna dikkat edilmelidir ki I. mertebeden gerekli olan

$$\lambda^T \nabla h(x^*) = 0 \text{ koşulu}$$

$$h(x^*) = 0$$

kısıtlamaları ile birlikte x^* ın, λ 'yı kapsayan $n+m$ değişkenli $n+m$ tane denklem verir.

Böylece bu şartlar yeterlidir. Çünkü bunları kısıtlamakla bir tek çözüm, hiç olmazsa yerel olarak elde edilir

Şimdi;

$$\lambda^T \nabla \lambda(x, \lambda) = 0$$

$$\lambda^T \nabla h(x, \lambda) = 0$$

kısıtlamaları altında

$$\lambda(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$$

şeklinde Lagrangianı tanımlamak uygun olur. İkinci kısıtlama birincinin yeniden düzenlenmiş şeklidir.

2.5. Örnekler

Burada bazı kısıtlı optimizasyon problemlerine göz atılıp kısaca üzerinde durulacak ve geniş bir uygulama alanını tartışmaya açacak olan üç basit

örnek sunulacaktır.

2.1. Örnek

$f(x^*) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ fonksiyonunu

$$h(x^*) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

kısıtlaması altında minimumlaştırınız.

“ $\exists x^* \in E, \lambda^T \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0$ olacak şekilde $\lambda^T \in E^m$ vardır.” teoremi kullanılarak;

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_1 \end{bmatrix}, \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \lambda \in E$$

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla h(x) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + \lambda \\ x_1 + x_3 + \lambda \\ x_2 + x_1 + \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_2 + x_1 + \lambda = 0 \end{array} \right\} \text{ ve } x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \quad \text{ifadesinden}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad \text{ve} \quad \lambda = -2$$

elde edilir. Buradan ;

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ biçiminde denklemin çözümü bulunur.}$$

2.2. Örnek (Maksimum Hacim)

Yüzey alanı sabit olan mukavva kartondan maksimum hacimli bir kutu yapmaya çalışılacaktır.

Kutunun boyutları x, y ve z olsun. Problem şu şekilde ifade edilebilir.

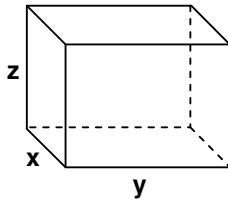
“ $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunu

$$h(x, y, z) = xy + yz + xz - \frac{c}{2} = 0$$

kısıtlaması altında maksimize ediniz. “

c mukavvanın alanı ve $c > 0$ dır.

“



Hacim, xyz

Yüzey alanı $2xy + 2yz + 2xz = C$

elde edilir.

“

Lagrange çarpanı tanımlanırsa, kısıtlayıcı ile beraber 1. mertebeden koşullar

$$yz + \lambda(y + z) = 0$$

$$xz + \lambda(x + z) = 0$$

$$xy + \lambda(x + y) = 0$$

(2.5)

şeklinde elde edilir.

$$\nabla\lambda + \lambda\nabla h = 0$$

$$\begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ y+x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} yz + \lambda(y+z) \\ xz + \lambda(x+z) \\ xy + \lambda(y+x) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} yz + \lambda(y+z) &= 0 \\ \Rightarrow xz + \lambda(x+z) &= 0 \\ xy + \lambda(y+x) &= 0 \end{aligned}$$

Eş. 2.5 denklem sisteminden $\lambda \neq 0$ ve x, y, z uzunluk olduğundan sıfırdan büyüktür.

Şimdi Eş. 2.5 denklem sisteminde 1. denklem x , 2. denklem y ile çarpılır ve birbirinden çıkartılırsa

$$\begin{aligned} xyz + \lambda x(y+z) &= 0 \\ xyz + \lambda y(x+z) &= 0 \\ \hline \lambda(x-y)z &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir.

Eş. 2.5 denklem sisteminde 2. denklem y ve 3. denklem z ile çarpılır ve birbirinden çıkartılırsa

$$\begin{aligned} xyz + \lambda y(x+z) &= 0 \\ xyz + \lambda z(z+y) &= 0 \\ \hline \lambda(y-z)x &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Eş. 2.6 ve Eş. 2.7 denklem sistemlerinde

$$\lambda z(x - y) = 0$$

$$\lambda x(y - z) = 0$$

$$\lambda \neq 0 \quad x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$$

olduğundan dolayı

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$y - z = 0 \Rightarrow y = z$$

olur.

Buradan ;

$$x = y = z$$

elde edilir.

$x=y=z$, $h(x,y,z)$ de yerine yazılırsa

$$xy + yz + xz - \frac{c}{2} = 0$$

$$x^2 + x^2 + x^2 = \frac{c}{2}$$

$$3x^2 = \frac{c}{2}$$

$$x^2 = \frac{c}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{6}}$$

o halde $x = y = z = \sqrt{\frac{c}{6}}$ elde edilir.

2.3. Örnek (Entropy)

Optimizasyon problemleri bazen doğal olayları tanımlamaya çalışır. Bunlardan biri de maksimum yararlılık (entropy) dağılım örneğidir.

Özel bir örnek olarak farklı olma olasılığındaki yoğunlukları incelenecektir. Farklı olma olasılığındaki yoğunluklar ölçülmüş bir değeri de kapsamaktadır. Bu $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerinden birisi olabilir. x_i ile ilgili olasılık P_i olsun.

$$P_i \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad \text{ifadelerini} \quad P_i$$

sağlamaktadır.

Böyle bir yoğunluğun entropisi ;

$$-\epsilon = - \sum_{i=1}^n P_i \log(P_i) \quad \text{ile verilen} \quad \epsilon \quad \text{dır} "$$

Yoğunluğun ortalama değeri ise $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ dir.

Eğer fiziksel durumlarda ortalama değeri m olarak alırsak yoğunluğun maksimum entropisi aşağıdaki problemin çözümünde ortaya çıkar.

$$- \sum_{i=1}^n P_i \log(P_i)$$

toplamını

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_i p_i = m, \quad P_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

kısıtlamalarına bağılı olarak minimumlaştırınız.”

Bu problemin çözümüne, negatif olmayan kısıtlamaların aktif olmadığı düşünüldüğünden, negatif kısıtlamalar ihmal edilerek başlanacaktır.

Lagrange çarpanı λ , η olarak tanımlanırsa

$$\lambda = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^n \{ -P_i \log P_i + \lambda P_i + \eta x_i p_i \} - \lambda - \eta \text{ olur.}$$

Gerekli koşullar muhtemelen şöyle olur :

$$- \log P_i - 1 + \lambda + \eta x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Buradan

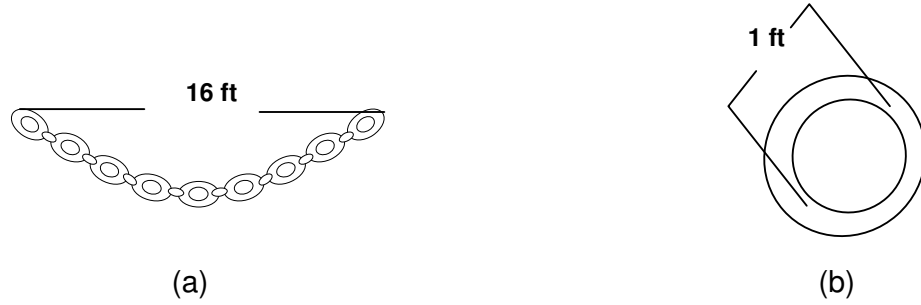
$$P_i = \exp\{(\lambda - 1) + \eta x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

dir.

$P_i > 0$ olduğuna dikkat edilirse, negatif olmayan kısıtlamalar aktif değildir. Sonuç Eş. 2.8 deki üstel yoğunluk olarak bilinir. Lagrange çarpanları λ ve η parametreleridir. Bunlar öyle seçilmelidir ki her iki eşitlik kısıtlamasını sağlamalıdır.

2.4. Örnek (Asılı Zincir)

Yatay bir düzlem üzerinde, 16 feet mesafe aralığında, bir zincir iki ucundan tutturulmuştur. Zincir 20 adet çelik halkadan oluşmaktadır. Her bir halka bir feet uzunluğundadır. (içten ölçülmüştür) Burada zincirin denge şeklini hesaplama problemi formülleştirilmeye çalışılacaktır.



Şekil 2.3. Zincirin denge şekli (a) 20 halkadan oluşan zincir (b) Halka

Zincirin potansiyel enerjisini minimumlaştırmayla çözüm bulunabilir. Öncelikle zincir 1 den 20 ye kadar numaralandırılır. Sonra x_i uzunluğu x , y_i uzunluğu y olarak alınır.

$x_i^2 + y_i^2 = 1$ Bir halkanın potansiyel enerjisi kendi ağırlığının herhangi bir başlangıç noktasındaki dikey uzunluğu ile çarpımına eşittir. Zincirin potansiyel enerjisi ise halkanın potansiyel enerjisinin toplamına eşittir. Zincirin üst sınır çizgisini başlangıç olarak alabiliriz. Her bir halkanın ağırlığının kendi merkezlerinde toplandığını kabil edeceğiz. Ayrıca ağırlıklarının 1 birim olduğunu kabul ediyoruz. Potansiyel enerjisi şöyle olur.

$$\frac{1}{2}y_1 + (y_1 + \frac{1}{2}y_2) + (y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3) + \dots + (y_1 + y_2 + \dots y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n (n - i + \frac{1}{2})y_i$$

olur. Burada $n = 20$ dir.

Zincir iki kısıtlayıcıya bağlıdır. Toplam y yer değiştirme 0 ve toplam x yer değiştirme ise 16 dır. Böylece denge şekli aşağıdaki ifadenin çözümüdür.

$$\sum_{i=1}^n (n-i + \frac{1}{2}) y_i \quad \text{ifadesini}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1-y_i^2} = 16$$

kısıtlamalarına bağlı olarak minimumlaştırınız.

Birinci mertebeden gerek koşullar

$$(n-i + \frac{1}{2}) + \lambda - \frac{\eta y_i}{\sqrt{1-y_i^2}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dir.

Buradan

$$y_i = - \frac{n-i + \frac{1}{2} + \lambda}{\eta^2 + (n-i + \frac{1}{2} + \lambda)^2}$$

elde edilir.

Örnek 2.2 de olduğu gibi çözümler lagrange çarpanlarının bilinmesiyle hesaplanmıştır. Bu çarpanlar öyle seçilmelidir ki iki kısıtlayıcıyı da sağlamalıdır.

Bu tipteki problemler lokal minimum noktalarına sahip olabilirler.

2.6. Büyük Ölçekli Uygulamalar

Bu kısımda tanıtılan yöntemler, temel bir yoğunlaşma isteyen problemler için yukarıdaki örneklerde verilen problemlerden bazı yönlerden farklıdır. Kapsamlı, çok karışık, lineer olmayan programlama problemleri çok sayıdaki disiplin ile analizin modern uygulamalarında ortaya çıkar.

Kapsamlı, lineer olmayan problemler, köprülerin optimal biçimlendirilmelerinde makaslı çelik yapılarda v.b. mekanik yapılarda ortaya çıkar. Geçmişte bazı mekanik problemler diferensiyel denklemler aracılığı ile çözülürken şimdi ise sık sık optimizasyon problemlerinin çözümü ile bulunmaktadır. İki uçtan asılı zincir problemine benzeyen örneğe bakılırsa, bu örnek iki noktaya bağlanmış ve bir yük bindirilmiş esnek bir kablonun şeklinin hesaplanmasıdır.

Genelde büyük ölçekli optimizasyon problemleri, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için, varolan metotlara benzer bir yolla çözülür. Sürekli değişkenlerin iki veya üç boyutta tanımlandığı durumlarda sürekli bölge bir ızgara ile değiştirilmiştir.

Burada ızgara birkaç bin noktayı içermektedir. Kısmi diferensiyel denklemlere uygun farklı yaklaşım eşdeğer optimizasyon problemini formülize ederek dolaysız çözmektedir. Bu yaklaşım ısı denklemlerinde, akışkan mekaniğinde, atom fiziğinde ve bunun yanı sıra hemen hemen bütün fizik bilimlerinde de kullanılmaktadır.

Optimal kontrol problemleri büyük ölçekli lineer olmayan programlama problemlerine yol açmaktadır. Bu problemlerde dinamik sistem (genelde sıradan diferensiyel denklemlerle belirtilmektedir) sistemin yörünge (yol) kontrol değişkenleri ile ilgilidir. Bu diferensiyel denklem (veya bunun farklı değerdeki eşdeğeri) bir grup kısıtlayıcı tanımlar. Yani problem kontrol değişkenlerini seçme problemidir. Şöyle ki ; sonuçtaki yol denklemi bazı ilave kısıtlayıcıları sağlamalı ve bazı kriterleri minimumlaştırmalıdır. Nümerik

çözümüne sahip bir örnek olarak Ay'a giden bir roketin minimum yakıt tüketimi ile yol denkleminin hesaplanması verilebilir.

Endüstriyel uygulamalarda ve iş alanındaki karar aşamalarında çok sayıda lineer olmayan programlama problemleri vardır. Lineer olmama, üretim fonksiyonlarında, maliyet hesaplama eğrilerinde ve hemen hemen bütün formülleştirme problemlerinde karşımıza çıkar.

Model yapılandırma ve analizlerinin bir çok alanında optimizasyon formülleştirmeleri, sistem denklemlerinin direkt formülleştirmelerinin yerini almaya başlamıştır. Kararlılık problemleri yararlılığının maksimumlaştırılması ile formülleştirilir. Lineer olmayan programlama çözüm yöntemleri gelişmekte ve bu gelişim devam etmektedir.

2.7. İkinci Mertebeden Koşullar

Burada kısıtlanmış problemler için ikinci mertebeden uygun koşullar oluşturulacak ve bundan sonra $f, h \in C^2$ olan fonksiyonlar kullanılacaktır. $h(x)=0$ kısıtlaması altında x^* , f in bir yerel minimumu ve bu kısıtlamaların bir regüler noktası olsun. O zaman

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0$$

olacak şekilde bir $\lambda \in E^m$ vardır. Teğet düzlem;

$$M = \{ y : \nabla h(x^*)y = 0 \}$$

olduğundan;

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*)$$

matrisi M üzerinde pozitif yarı tanımlıdır.

Yani ; $\forall y \in M$ için

$$y^T \cdot L(x^*)y \geq 0$$

dır.

İspat

x^* boyunca kısıtlayıcı S yüzeyi üzerinde iki defa türevlenebilir eğri için

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right|_{t=0} \geq 0 \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir.

Tanımdan dolayı

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right|_{t=0} = \dot{x}(0)^T F(x^*) \dot{x}(0) + \lambda^T \nabla h(x^*) \ddot{x}(0) \quad (2.10)$$

dır.

Ayrıca;

$$\lambda^T \cdot h(x(t)) = 0$$

ifadesinin iki defa türevi alınırsa

$$\dot{x}(0)^T \lambda^T H(x^*) \dot{x}(0) + \lambda^T \nabla h(x^*) \ddot{x}(0) \quad (2.11)$$

ifadesi elde edilir.

Eş. 2.11 ifadesi Eş. 2.10 ifadesine eklenir ve Eş. 2.9 ifadesi de dikkate alınır;

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right|_{t=0} = \dot{x}(0)^T L(x^*) \dot{x}(x^*) ; \dot{x}(0) \neq 0$$

elde edilir.

$\dot{x}(0)$, M de keyfi olduğundan dolayı

$$L = F + \lambda^T H$$

İfadesine sahip olunur.

2.8. İkinci Mertebeden Yeter Koşullar

x^* , $h(x^*) = 0$ kısıtlamasını sağlayan nokta ve $\lambda \in E^m$ olsun. Bu durumda

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0 \quad (2.12)$$

dır.

Aynı zamanda;

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*)$$

matrisinin,

$$M = \{ y : \nabla h(x^*)y = 0 \}$$

üzerinde pozitif tanımlı olsun.

$$y^T \cdot L(x^*) y > 0$$

dır.

x^* , f fonksiyonunun $h(x) = 0$ kısıtlamasına bağlı kesin yerel minimumudur.

İspat

Eğer, x^* kesin yerel minimum nokta değilse, $\square$ k için

$$f(y) \leq f(x^*)$$

olacak şekilde x^* a yakınsayan uygun $\{y_k\}$ noktalar dizisi vardır.

$$\square y_k \text{ için } y_k = x^* + \delta_k s_k, \quad s_k \in E^n$$

biçiminde yazalım.

$$\square k \text{ için } |s_k| = 1 \text{ ve } \delta_k > 0$$

dır.

Burada; $\delta_k \rightarrow 0$ ve $|s_k| = 1$ olduğundan dolayı $\{s_k\}$ dizisi sınırlıdır. Bu nedenle $\{s_k\}$ dizisi bir s^* a yakınsar.

Aynı zamanda

$$h(y_k) - h(x^*) = 0$$

dır.

Bu ifade δ_k ile bölünür ve $k \rightarrow \infty$ alınırsa

$$\nabla h(x^*) s^* = 0$$

olur.

Taylor teoreminden j için;

$$0 = h_j(y_k) = h_j(x^*) + \delta_k \nabla h_j(x^*) s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T h_j(\eta_j) s_k \quad (2.13)$$

ve

$$0 \leq f(y_k) - f(x^*) = \delta_k \nabla f(x^*) s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T f(\eta_0) s_k \quad (2.14)$$

η_j , x^* ve y_k yı birbirine bağlayan doğru parçası üzerinde bir noktadır. Eş.2.13 ifadesini λ_j ile çarpılır ve Eş. 2.14 ifadesine eklenir ve Eş. 2.12 ifadesi de dikkate alınır

$$0 \leq \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T \left\{ \nabla f(\eta_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\eta_i) \right\} s_k \quad (2.15)$$

elde edilir.

Eş. 2.15 ifadesinin pozitif tanımlı olması için sağ tarafının sıfırdan büyük olması gerekir. Bu $k \rightarrow \infty$ iken çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

2.5. Örnek

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

fonksiyonunu

$$h(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

kısıtlaması altında minimumlaştırınız.

$$L(x) = F(x) + \lambda H(x)$$

matrisinden ;

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$M = \{ y : \nabla h(x^*)y = 0 \}$$

İfadesi dikkate alınırsa

$$\nabla h(x^*)y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$M = \{ y : y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$$

elde edilir. Pozitif yarı tanımlılık ifadesinden ;

$$\begin{aligned}
 y^T L y &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} y_2 + y_3 & y_1 + y_3 & y_1 + y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
 &= y_1(y_2 + y_3) + y_2(y_1 + y_3) + y_3(y_1 + y_2) \\
 &= -(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)
 \end{aligned}$$

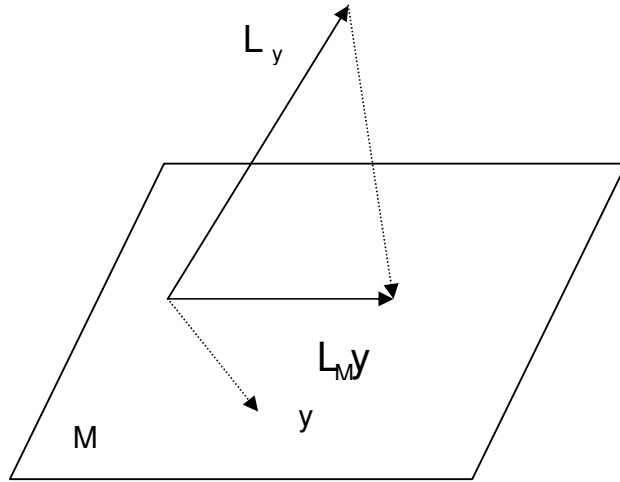
elde edilir.

3. ALT TEĞET DÜZLEMDE ÖZ DEĞERLER

Önceki bölümde, kısıtlayıcı yüzeye teğet olan M alt uzayında sınırlı L matrisinin, ikinci mertebeden şartlarda ve kısıtlanmış haldeki Hessian matrisinde benzer bir rol oynadığı görüldü.

Burada M ye kısıtlanmış L nin eigen değerlerinin neyi temsil ettiğini anlamak önemlidir. Burada L nin M ye kısıtlanması L_M olarak adlandırılacak ve L_M operatörünün eigen değerleri tanımlanarak bunların nasıl hesaplanacağı gösterilmeye çalışılacaktır.

y M düzleminde, $L y$ ise E^n de bir vektör olsun. $L y$ vektörü M nin içinde olmak zorunda değildir. Şekil 3.1 de görüldüğü gibi $L y$ nin M üzerindeki izdüşümü alınır. Bu bize L nin M ye kısıtlanmış olduğu görülür.



Şekil 3.1. L_M nin tanımı

Bu yolla M den M ye bir lineer dönüşüm elde edilebilir. Kesin bir matris ifadesine sahip olmamasına rağmen bu dönüşüm kapalı olarak hesaplanabilir. $y \in M$ vektörü, L_M nin eigen vektörüdür. L_M nin eigen değerine karşılık gelen

$$L_M y = \lambda y$$

olacak biçimde uygun bir λ sayısı varsa, bu standart tanımla bağdaşır. Ly ifadesi λy nin toplamı şeklinde yazılıyorsa ve bir vektör M ye dikse, y nin; L_M nin eigen vektörü olduğu Şekil 3.2 deki gibi görülür. L_M den bir matris ifadesi elde etmek için, M alt uzayında;

$$e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$$

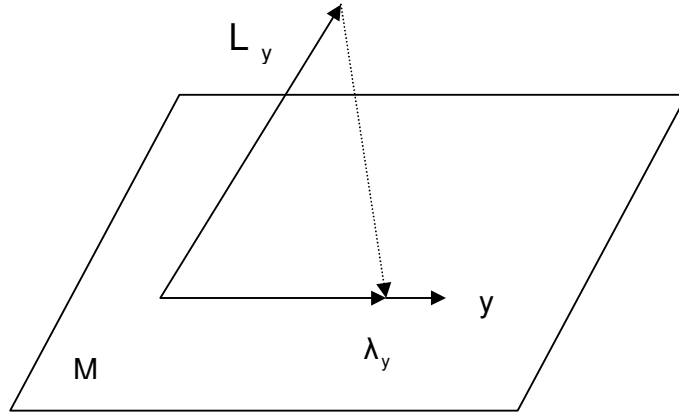
biçiminde ortonormal bir baz vermek uygun olur.

E matrisi, sütunları e_i vektörlerinden oluşan $n \times (n-m)$ tipinde bir matris olarak tanımlansın. O zaman, M deki herhangi bir vektör

$$y = Ez, \quad z \in E^{n-m}$$

biçiminde yazılabilir. Burada Ez ifadesi L nin vektörler üzerindeki hareketini gösterir. Bu sonucu M içinde yazmak ve sonucu $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}\}$ bazı cinsinden ifade etmek için sadece E^T ile çarpılır. Bu yüzden $E^T L E \cdot z$ bir vektördür. Bu vektör, bileşen gösterimi bazın terimleri cinsinden olan ve karşılık olarak $E^T L E$ $(n-m) \times (n-m)$ tipinden matris olmak üzere L nin M de sınırlandırılmış matris gösterimidir.

M ye kısıtlı L nin eigen değerleri, $E^T L E$ nin öz değerlerinin hesaplanması ile bulunabilir. Bu öz değerler ortonormal E bazından bağımsızdır.



Şekil 3.2. L_M nin eigen vektörü

3.1. Örnek

2. bölüm, Örnek 2.5 te $M = \{ y : y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$ a kısıtlanan

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ifadesi incelenmişti.

M ifadesi üzerinde tanımlı bir matris temsili elde etmek için ortonormal bir baz tanımlansın :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

Bu bize

$$E^T L E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

açılımını verir. Bu nedenle M ye kısıtlanmış L birim matrisin negatifi gibi hareket eder.

3.2. Örnek

$$x_1 + x_2 + x_2 x_3 + 2x_3^2$$

fonksiyonunu

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$$

kısıtlamasına göre ekstremumlaştırınız.

Birinci mertebeden gerekli koşullar

$$1 + \lambda \cdot x_1 = 0$$

$$2 \cdot x_2 + x_3 + \lambda \cdot x_2 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 + \lambda \cdot x_3 = 0$$

Bu sistemin bir çözümünün

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \text{ve} \quad \lambda = -1$$

olduğu kolayca görülür. Bu çözüm noktasında ikinci mertebeden koşullara bakıldığında, Lagrange matrisi

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ve karşılık gelen M alt uzayı

$$M = \{ y : y_1 = 0 \}$$

ile verilir.

Bu durumda M, E^3 uzayı içinde iki baz vektörü olan

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tarafından gerilen bir alt uzaydır. Dolayısıyla L nin M ye kısıtlanması, L nin karşılık gelen alt matrisinin alınması ile bulunabilir.

Bu durumda

$$E^T L E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu

$$\det = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ (1-\lambda) & (3-\lambda) \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

biçimindedir ve L_M nin eigen değerleri;

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$$

şeklindedir. Burada L_M pozitif tanımlıdır.

L matrisinin pozitif tanımlı olmasından dolayı bulunan nokta yerel minimum noktadır.

Bu örnek genel olarak ; L nin M ye kısıtlanmısının, L nin bir alt matrisi olarak düşünülebileceğini gösterir.

3.1. Kısıtlanmış Hessian

M düzlemine dik izdüşümü alınmış olan L nin eigen değerlerinin hesaplanması için kullanılan yaklaşım oldukça basittir. Ancak başka bir yaklaşım daha vardır. Bu yaklaşım faydalı ve basit uygulamalarda uygunluk göstermektedir. Bu yaklaşım $n-m$ den ziyade $n+m$ mertebeden determinantlar ve matrislerin oluşturulması temeline dayanmaktadır. Dolayısıyla, boyut artırılmıştır.

Öncelikle bütün vektörler M düzlemine dik olacak şekilde tanımlansın. M düzlemi, $\nabla h x = 0$ eşitliğini sağlayan x noktalarının cümlesidir. M düzlemindeki

x noktaları için, $z^T x = 0$ ifadesi varsa z vektörü M ye diktir. Bir $w \in E^m$ için $z = \nabla h^T w$ ise z nin M ye dik olduğu basit olarak

$$z^T x = w^T \nabla h x = 0$$

biçiminde gösterilebilir.

Şimdi tam olarak L_M nin eigen vektörleri karakterize edilebilir. Eğer x vektörü şu iki koşulu sağlıyorsa x vektörü bir eigen vektördür.

- 1) x , M nin bir elemanıdır ve
- 2) z , M ye dik olmak üzere $Lx = \lambda x + z$

z nin karakterize edilmesi açısından bu koşullar

- 1) $\nabla h x = 0$
- 2) $Lx = \lambda x + \nabla h^T w$

ifadelerine eşdeğerdir.

Bu denklemlere w ve x bilinmeyenli $n-m$ doğrusal denklemlili homogen bir sistem olarak bakılabilir. Sistemin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Bu determinant $P(\lambda)$ ile gösterilirse

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \nabla h^T \\ -\nabla h^T & L - \lambda I \end{bmatrix} = P(\lambda) = 0$$

şartı elde edilir. Burada $P(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre $(n-m)$. dereceden bir polinomdur. Bu, L_M nin karakteristik polinomudur.

3.3. Örnek

Örnek 3.2 ye bu yolla yaklaşarak

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(1+\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (3-\lambda) \end{bmatrix}$$

İfadesi elde edilir.

Laplace açılımı kullanılarak birinci sütuna göre determinanti açılırsa

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1$$

bulunur. Bu önceden bulunan sonuçla aynıdır.

Burada çıkış işlemleri belirtilmeden önce klasik kriter sunulacaktır. Bu, sınırlanmış Hessian matris cinsinden

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \nabla h^T \\ \nabla h & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada ∇h^T nin önünde bulunan $-$ işareti simetriklik için silinmiştir. Dolayısı ile B simetrik bir duruma gelmektedir. Bu da sadece sonuçta işaret değişikliğini gerektirmektedir.

3.2. Kısıtlanmış Hessian Testi

L matrisinin

$$M = \{ x : \nabla h x = 0 \}$$

alt uzayında pozitif tanımlı olması ancak ve ancak B matrisinin son n-m temel minörünün $(-1)^m$ işaretine sahip olmasıyla mümkündür.

Yukarıdaki örnek için şu düzenleme yapılabilir.

$$B = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Son iki temel minör ve determinanta bakıldığında temel minörler -1 ve -2 dir. Her ikisi de (-1) işaretine sahiptir. Dolayısı ile kriter sağlanmış olur.

3.3. Duyarlılık (Sensitivity)

Kısıtlanmalı minimumlaştırma problemleri ile ilgili Lagrange çarpanları, lineer programlamadaki kısıtlayıcılarla benzerlik gösterir. Lineer olmayan durumda çarpanlar özel çözüm noktası ile ilgilidir. Ayrıca çarpanlar artırımlı veya marjinal değerlere yani kısıtlayıcı gerektirmelerindeki küçük değişimlerle ilgili değerlere uygunluk gösterirler.

“

$f(x)$, fonksiyonunu

$$h(x) = 0$$

kısıtlamasına bağılı olarak minimumlaştırınız. “

problemi gözönüne alınsın

Bu problemin x^* noktasında çözümü vardır. Burada x^* kısıtlamaların regüler noktasıdır. λ uygun bir Lagrange çarpanı olsun. Problemin bütününe bakıldığında

“

$f(x)$, fonksiyonunu

$$h(x) = c$$

kısıtlamasına bağılı olarak minimumlaştırınız. “

elde edilir.

Burada $c \in E^m$ dir. Sıfır vektörüne yakın ve yeterince küçük bir c için, problemin $x(0) = x^*$ ifadesine yakın $x(c)$ çözüm noktası alınacaktır. Bu çözümlerin her biri için uygun bir $f(x(c))$ değeri vardır. Bu değere c ye bağılı bir fonksiyon olarak bakılabilir. Bu fonksiyonun gradiyent bileşenleri, kısıtlayıcı gerektirmelerindeki değişim artırım oranının birimsel değişme oranı olarak yorumlanabilir. Dolayısı ile bunlar nesnenin biriminde ölçülen kısıtlayıcı gerektirmelerinin artırımsal değerleridir.

Aşağıda $c = 0$ a sahip problemlerin Lagrange çarpanları ile bunlar arasında nasıl bir ilişki olduğu gösterilecektir.

3.4. Duyarlılık Teoremi

$f, h \in C^2$ olmak üzere

$$f(x), \quad \text{fonksiyonunu} \quad (3.1)$$

$$h(x) = c$$

kısıtlamasına bağlı problemler ailesini inceleyelim.

$c = 0$ için yerel bir x^* çözümü olduğu kabul edilir. Burada x^* regüler nokta, ayrıca Lagrange vektör çarpanı λ ile beraber kesin yerel minimum için ikinci dereceden yeterli koşulları sağlar. $c \in E^m$ için sıfırı kapsayan bir bölgede $x(c)$ çözümü vardır. $x(c)$, c nin bütün değerlerinde sürekli ve c ye bağlıdır.

Yani

$x(0) = x^*$ ile $x(c)$, Eş. 3.1 kısıtlamalı probleminin yerel minimumudur.

Üstelik

$$\left. \frac{d}{dc} f(x(c)) \right|_{c=0} = -\lambda^T$$

dır.

İspat

$$\nabla f(x) + \lambda^m \nabla h(x) = 0 \quad (3.2)$$

$$h(x) = c \quad (3.3)$$

denklem sistemi göz önüne alınsın.

$c = 0$ olduğunda x^* ın, λ çözümü vardır. Bu çözümde sistemin Jakobiye matrisi

$$\begin{bmatrix} L(x) & -\mathcal{H}(x^*) \\ -\mathcal{H}(x^*) & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

M üzerinde x^* ın regüler nokta ve $L(x^*)$ ın pozitif tanımlı olduğu kabul edildiğinden bu matris singüler değildir

Dolayısı ile Kapalı Fonksiyon Teoremi uyarınca sistemin $x(c)$ ve $\lambda(c)$ çözümleri vardır ve bu çözüm sürekli ve türevlenebilirdir.

Zincir kuralına göre

$$\mathcal{H}f(x(c)) \Big|_{c=0} = \mathcal{H}f(x^*) - \mathcal{H}x(0)$$

ve

$$\mathcal{H}h(x(c)) \Big|_{c=0} = \mathcal{H}h(x^*) - \mathcal{H}x(0)$$

dir.

Eş. 3.3 ifadesine göre $h(x) = c$ ifadesi göz önüne alınırsa, ikinci eşitliğin E üzerinde birim matrise eşit olduğu görülür. Eş. 3.2 ifadesi göz önüne alınırsa birinci eşitlik :

$$\mathcal{H}h(x(c)) \Big|_{c=0} = -\lambda^T$$

biçiminde olur.

4. EŞİTSİZLİK KISITLAYICILARI

Şimdi;

$f(x)$, fonksiyonunu

$$h(x) = 0 \quad (4.1)$$

$$g(x) \leq 0$$

kısıtlamalarına bağlı olarak minimumlaştırma problemi incelenecektir.

Burada daha önce kabul edildiği gibi fonksiyon f , eşitlik kısıtlayıcısı h , g , p boyutlu bir fonksiyon ve başlangıçta $f, g, h \in C^1$ olduğu kabul edilecektir.

4.1. Birinci Mertebeden Gerek Şartlar

Önceki tanımlamalarla beraber eşitlik kısıtlayıcılar için gerek koşulları belirlemek mümkün olmaktadır.

4.1. Tanım

$$h(x^*) = 0 \quad (4.2)$$

$$g(x^*) \leq 0$$

kısıtlamalarını sağlayan nokta x^* olsun. J , $g(x^*) = 0$ için j indislerinin cümlesi olsun. Eğer :

$$\nabla h_i(x^*), \quad \nabla g_j(x^*) \quad 1 \leq i \leq m, \quad j \in J$$

gradiyent vektörleri lineer bağımsız ise x^* a Eş. 4.2 ifadesine kısıtlamaların bir regüler noktasıdır denir.

Şuna dikkat edilmesi gerekir. Tezin ikinci bölümünde verilen aktif kısıtlayıcıların gradiyentleri lineer olarak bağımsız ise x^* noktası regüler noktadır veya eşdeğer olarak aktif kısıtlayıcılara uygulanan eşitlik kısıtlayıcıları için yapılan önceki tanımlamalara göre x^* ın regüler nokta olması koşulu altında, x^* kısıtlayıcıları için regülerdir.

4.2. Kuhn – Tucker Şartları

x^* , noktası

$f(x)$, fonksiyonu

$$h(x) = 0$$

(4.3)

$$g(x) \leq 0$$

problemi için herhangi bir yerel minimum nokta ve kabul edelim ki x^* , kısıtlayıcılar için bir regüler nokta olsun. Bu takdirde,

$\lambda \in E^m$ ve $\eta \in E^p$, $\eta \geq 0$, vektörleri için

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \eta^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (4.4)$$

$$\eta^T g(x^*) = 0 \quad (4.5)$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat

Öncelikle $\eta \geq 0$ ve $g(x^*) \leq 0$ olduğundan dolayı Eş. 4.5 denklemi, karşılık gelen şartın aktif olması koşuluyla, η nın bir bileşeninin sıfırdan farklı olması durumuna eşittir.

x^* , kısıtlayıcı cümle üzerinde bir yerel minimum nokta olduğundan dolayı, aynı zamanda aktif kısıtlayıcıyı sıfıra eşitlemekle tanımlanan bir alt cümle üzerinde herhangi bir minimum noktadır. Dolayısı ile x^* komşuluğunda tanımlanan eşitlik kısıtlamalı problemler için Lagrange çarpanları vardır.

Dolayısı ile şu söylenebilir ;

Eğer,

$g_j(x^*) \leq 0$ ile beraber $\eta_j = 0$ ise Eş. 4.4 geçerlidir. Dolayısıyla, Eş. 4.5 ifadesi de geçerlidir.

$\eta \geq 0$ gösterimin de bazı $k \in J$ ler için $\eta_k < 0$ ayrıca S ve M sırasıyla yüzey ve teğet düzlemleri olsun. Bunlar aktif kısıtlayıcıların x^* daki tanımlanması ile oluşturulmuşlardır. Regülerlik kabulü gereğince $y \in M$ ve $\nabla g_k(x^*)y < 0$ olacak biçimde bir y değeri vardır. $x(t)$, S üzerinde bir eğri olsun. S , x^* noktasından geçmekte $\dot{x}(0) = y$ olmaktadır. Küçük $t \geq 0$ değerleri için $x(t)$ uygundur ve Eş. 4.4 gereğince

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0} = \nabla f(x^*)y < 0$$

olur.

Bu ise x^* ın minimalliği ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1. Örnek

$$2x_1 + 2x_1x_2 + x_2 - 10x_1 - 10x_2$$

ifadesini

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

kısıtlamasına bağlı minimumlaştırma problemi ele alınsın. Kısıtlayıcılara ek olarak birinci dereceden gerekli koşullar aşağıdaki gibidir :

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\eta_1x_1 + 3\eta_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\eta_1x_2 + \eta_2 = 0$$

$$\eta_1 \geq 0, \quad \eta_2 \geq 0$$

$$\eta_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$$

$$\eta_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0$$

Bu problemin çözümünü bulmak için aktif kısıtlayıcıların değişik kombinasyonlarını tanımlanacak, ayrıca Lagrange çarpanlarının işaretleri kontrol edilecektir. Bu problemde bir veya iki aktif kısıtlayıcı kurmaya çalışılabilir. Birinci kısıtlayıcı aktif, ikinci kısıtlayıcı aktif olmayan olarak kabul edilir. Dolayısı ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\eta_1 x_1 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\eta_2 x_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

Bu denklemlerin çözümleri

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad \eta_1 = 1$$

dir. Buradan

$$3x_1 + x_2 = 5$$

elde edilir.

Dolayısı ile ikinci kısıtlayıcı sağlanmış olur. Buradan ile $\eta_1 > 0$ ve bu çözümün birinci dereceden gerekli koşulları sağladığı sonucu söylenebilir.

4.3. İkinci Mertebeden Şartlar

Eşitsizlik kısıtlayıcıları ile ilgili problemler için ikinci mertebeden gerek ve yeter koşullar, aktif kısıtlayıcılar tarafından ifade edilen kısıtlamalı eşitlik problemlerin göz önünde tutulması ile elde edilir. Bu problemler için uygun teğet düzlemi aktif kısıtlayıcılara teğet olan düzlemdir.

$f, g, h \in C^2$ ve x^* ın Eş. 4.1 kısıtlayıcıların regüler noktası olduğu kabul edilsin. Eğer x^* eşitlik kısıtlayıcıları için bir yerel minimum noktası ise, o zaman Eş. 4. 4, Eş. 4.5 ve Kuhn-Tucker şartlarından dolayı

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*) + \eta^T G(x^*) \quad (4.6)$$

ifadesi, x^* daki aktif kısıtlayıcıların bir teğet alt uzayı üzerinde pozitif yarı tanımlı olacak şekilde

$$\lambda \in E^m, \quad \eta \in E^p, \quad \eta \geq 0$$

vardır.

İspat

Eğer x^* , $h(x) = 0$ ve $g(x) \leq 0$ kısıtlayıcıları üzerinde bir yerel minimum nokta ise aynı zamanda x^* eşitlik kısıtlayıcıları olarak alınan aktif kısıtlayıcılarla birliktaki problemler için de bir yerel minimum noktadır. Buradan ikinci mertebeden yeterli koşullar teoremi elde edilir. Şu hipotez söylenebilir; $L(x^*)$, M teğet düzlemi üzerinde pozitif belirlidir. Bu birçok yeterlilik sağlar. Ancak, eşitsizlik aktif kısıtlayıcılarının sıfır olması durumu Lagrange çarpanları ile ilişkilendirildiğinde $L(x^*)$ ın, M alt uzayında büyük bir alt uzay üzerinde pozitif belirlili olması gerekmektedir.

4.4. İkinci Mertebeden Yeter Şartlar

$f, g, h \in C^2$ olsun. Eş. 4.3 ifadesini sağlayan x^* noktasının Eş. 4.4 probleminin bir kesin yerel minimum noktası olabilmesi için yeter şartlar

$$\lambda \in E^m, \quad \eta \in E^p \text{ olmak üzere}$$

$$\eta \geq 0$$

$$\eta^T g(x^*) = 0$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \eta^T \nabla g(x^*) = 0$$

ve

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*) + \eta^T G(x^*)$$

Hessian matrisi

$$M = \{ y : \nabla h(x^*)y = 0, \quad \nabla g_j(x^*)y = 0 \quad \text{her } j \in J \text{ için} \}$$

alt uzayı üzerinde pozitif tanımlı olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^p$ olmasıdır.

Burada ,

$$J = \{ j : g_j(x^*) = 0, \eta_j > 0 \}$$

ile verilmiştir.

İspat

Burada da Eş. 4.4 ifadesindeki eşitlik kısıtlayıcıları için verilen teoremdaki gibi x^* 'ın bir kesin yerel minimum nokta olmadığı kabul edilsin. x^* a yaklaşan uygun noktaların bir dizisi $\{ y_k \}$ olsun. Öyleki

$$f(y_k) \leq f(x^*) \text{ ve her bir } y_k, |s_k| = 1 \quad \delta_k > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$y_k = x^* + \delta_k s_k$$

formunda yazılır.

Ayrıca $\delta_k \rightarrow 0$ ve $s_k \rightarrow s^*$ kabul edilir. $0 \neq s^* \in \mathbb{R}^n$ ve her bir $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\nabla h_i(x^*)s^* = 0$$

sonucu geçerlidir.

Aynı zamanda her bir aktif g_j kısıtlayıcısı için

$$g_j(y_k) - g_j(x^*) \leq 0$$

ifadesi ve dolayısı ile

$$\nabla g_j(x^*)s^* \leq 0$$

sonucu vardır.

Eğer, her bir $j \in J$ için

$\nabla g_j(x^*)s^* = 0$ ise ispat Eş. 4.4 ifadesindeki gibi devam eder.

Eğer, en az bir $j \in J$ için

$$\nabla g_j(x^*)s^* < 0$$

ise, o zaman

$$0 \geq \nabla f(x^*)s^* = -\lambda^T \nabla h(x^*)s^* - \eta^T \nabla g(x^*)s^* > 0$$

olur.

Bu ise bir çelişkidir. Böylece gereken ispat yapılmış olur.

Özellikle şuna dikkat edilmelidir; eğer bütün aktif eşitsizlik kısıtlayıcıları kesin pozitif Lagrange çarpanlarına sahipse, J cümlesi bütün aktif eşitsizlikleri içerir. Bu durumda, Lagrange'ın M üzerinde pozitif tanımlı olması için yeter şart M nin aktif kısıtlayıcılarının teğet düzlem olmasıdır.

4.5. Eşitsizlik Kapsayan Problemler için Duyarlılık (Sensitivity)

Eşitsizlik problemleri için duyarlılık sonucu eşitlikler için sonucun basit olarak yeniden ifade edilmesidir. Bu durumda, dejenere olmayan bir kabul etme tanımlanır. Kısıtlayıcıları değiştirildiği zaman Lagrange çarpanlarında oluşan küçük değişiklikler, pozitif gerektirmelere zarar vermeyecektir.

$f, g, h \in C^2$ olsun.

$f(x)$, fonksiyonunun

$$h(x) = c \quad (4.7)$$

$$g(x) \leq d$$

kısıtlamasına bağlı minimumlaştırma problem grubu ele alınsın.

$c=0$ ve $d=0$ için regüler nokta olan ve $\lambda, \eta \geq 0$ birleştirilmiş Lagrange çarpanlarıyla birlikte kesin yerel minimum için II. mertebeden yeterli şartları sağlayan yerel çözüm x^* olsun. Ayrıca hiçbir aktif eşitsizlik kısıtlayıcısı dejenere olmasın. O halde her $(c,d) \in E^{m+p}$ için $(0,0)$ ı kapsayan bir bölgede sürekli olarak (c,d) üzerinde olan, öyle ki $x(0,0) = x^*$ ve $x(c,d)$; Eş. 4.4 ün bir yerel minimum noktası olmak üzere $x(c,d)$ çözümü vardır.

Bunun dışında

$$\nabla_c f(x(c,d)) \Big|_{(0,0)} = -\lambda^T$$

$$\nabla_d f(x(c,d)) \Big|_{(0,0)} = -\eta^T$$

dir.

5. SONUÇ

Bütün fonksiyonların regüler olduğu bir durumda eşitlik kısıtlayıcılarına bağlı verilen bir minimumlaştırma probleminde minimum bir noktayı sağlayan gerek koşul hedef fonksiyonun gradiyentinin kısıtlayıcı yüzeyin teğet düzlemine dik olmasıdır. Eğer minimum nokta regüler ise, teğet düzlem kısıtlayıcı fonksiyonların gradiyentlerinin basit bir temsidir. Bu koşullar Lagrange çarpanları biçiminde ifade edilebilir.

Eğer fonksiyonlar sürekli ikinci türeve sahip ve Lagrange çarpanları bulunuyorsa ardından teğet düzleme doğru kısıtlanmış Lagrange ın Hessian matrisi ikinci dereceden koşullar için de bir role sahiptir. Özellikle kısıtlanmış Hessian, yerel minimum noktada pozitif yarı tanımlı olmalıdır. Karşıt olarak eğer birinci mertebeden koşulları sağlayan noktada pozitif tanımlı ise bu nokta tam yerel minimum noktadır.

Eşitsizlikler, aktif eşitsizliklerin bir çözümde hesaplanması ile işlenmiştir. Lagrange çarpanları ile ilişkilenen aktif eşitsizlikler hiçbir zaman negatif olmazlar. Çarpanların duyarlılığının yorumlanması bu durumun bir nedenidir. Aktif eşitsizlikler bu özellikleri dışında bir eşitlik gibidir.

KAYNAKLAR

1. Akın Ö., “Matematik Analiz ve Analitik Geometri”, **Palme Yayıncılık**, Ankara, (2001).
2. Akın, Ö., “Nümerik Analiz”, **Ankara Üniversitesi Basımevi**, Ankara, (1998).
3. Akın, Ö., “Uygulamalı Lineer Cebir”,**Palme Yayıncılık**, Ankara, (2002).
4. Luenberger, David G., “Linear And Nonlinear Programming”, **Addison-Wesley Publishing Company**, 295-321(1987).
5. Kuhn, H.W., and Tucker, A.W., “Nonlinear Programming, in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability”, J.Neyman (editor), **Universty of California Press**, Los Angeles, 481-492 (1961).
6. McCormck, G.P., “Optimality Criteria in Nonlinear Programming” **SIAM-AMS Proceedings**, IX:27-38 (1976).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : ULAŞ, Hakan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 08.10.1971 Kangal
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 368 62 01
e-mail : hakan717@hotmail.com.

Eğitim**Derece****Eğitim Birimi****Mezuniyet tarihi**

Yüksek lisans

Gazi Üniversitesi
Matematik Bölümü

2006

Lisans

Cumhuriyet Üniversitesi
Matematik Bölümü

2001

Lise

Sivas Lisesi

1990

İş Deneyimi**Yıl**

2003-2006

Yer

Milli Eğitim Bakanlığı

Görev

Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce