

KUANTUM MATRİS GRUPLARI VE q -OSİLATÖRLERİ

DOKTORA TEZİ

Salih ÇELİK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Mayıs 1992

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Temmuz 1992

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Metin ARIK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Ali ULGER

Prof.Dr. Kadir AHRE

TEMMUZ 1992

ÖNSÖZ

Tez konusunu bana veren ve çalışmalarım esnasında, gerekli uyarılarda bulunan ve beni yönlendiren, sayın hocam Prof. Dr. Metin ARIK'a ve çalışmalarımı düzenlerken bana yardımcı olan eşim Arş.Gör.Sultan ÇELİK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	(iv)
SUMMARY	(v)
BÖLÜM 1. GİRİŞ	(1)
BÖLÜM 2. KLASİK MATRİS GRUPLARI	
2.1. Temel Kavramlar	(3)
2.2. Klasik Matris Grupları	(5)
BÖLÜM 3. KUANTUM MATRİS GRUPLARI	
3.1. Manin Yapısı	(8)
3.2. $\mathcal{R}$ -Matris Yaklaşımı	(12)
3.3. $GL_q(3, \mathbb{C})$ Grubunun Analizi	(19)
BÖLÜM 4. KUATERNİYONİK KUANTUM GRUPLARI	
4.1. Giriş	(30)
4.2. Normal Kuaternionlar	(32)
4.3. q Kuaternionlar ve Kuaterniyonik Kuantum Grupları	(37)
BÖLÜM 5. KUANTUM GRUBU KOSETLERİ VE q -OSİLATÖRLERİ	
5.1. Giriş	(46)
5.2. Üniter Kuantum Grupları ve q -Osilatörleri	(49)
5.3. Kuantum Grubu Kosetleri ve Kovaryant q -Osilatörleri	(56)
SONUÇ	(70)
KAYNAKLAR	(71)
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu çalışmada, $GL(3, \mathbb{C})$ genel lineer grubunun kuantum özellikleri incelendi. Bir $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin matris elemanları ile bu elemanların kuantum kofaktörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları elde edildi. $GL_q(3, \mathbb{C})$ grubuna ait iki matrisin çarpımının da (elemanlarının komutatif olması halinde) aynı özelliklere sahip olduğu gösterildi. $GL_q(3, \mathbb{C})$ grubuna ait matrislerin başka bir matris ile üstel formda ifade edilemeyeceği ispatlandı.

Kuaternion cebirinin kuantum deformasyonu yapıldı ve kuaternionik matris grubunun kuantum yapısı oluşturuldu.

Son olarak, $SU_q(2)$ ve $SU_q(3)$ gruplarının kuantum kosetleri elde edildi ve gösterildi ki bu kosetlerlerin elemanları q -osilatördür. Bu durum, $SU_q(n)$ grubu için genelleştirildi ve genel formülasyonlar çıkarıldı.

THE QUANTUM MATRIX GROUPS AND q -OSCILLATORS

SUMMARY

Quantum groups were introduced by V. DRINFELD[1]. They appear as the underlying mathematical structure in several contexts: Quantum inverse scattering methods, rational conformal field theory and the theory of braids. These constructs may be viewed as matrix groups with non-commutative elements obeying sets of bilinear product relations[2,3]. The sufficient condition for the associativity of the algebras turns out to be the Yang-Baxter equation[4], the analogue for the Jacobi identity for quantum groups[5].

A characteristic property of the quantum groups is that the generators, which are the mapping from the group to the basic matrix representation in the limit $q \rightarrow 1$, are not commuting. In the viewpoint considered by Manin [6] a quantum group is identified with the endomorphisms acting on spaces whose elements are non-commuting coordinates. In the matrix representations of the endomorphisms [7-9], the commutation relations for the space coordinates generate the commutation relations the matrix elements have to satisfy. The minimal sets of relations imposed by Manin's construction turn out to be same as that of bilinear relations specified by an $\mathcal{R}$ -matrix satisfying the Yang-Baxter relation[4].

Other properties of quantum 2×2 -matrices have been investigated by Vokos et al [8]. They show that the n -th power of the matrix A corresponds to the n -th power of the deformation parameter q and that it is possible to express a quantum 2×2 -matrix A as an exponential of another matrix M whose entries obey very simple, q -independent commutation relations. One of these was also proven by Corrigan et al[9].

The discovery of q -deformations of Lie groups and Lie algebras [1-3] has led to renewed interest in q -oscillators[10-21] which are the q -deformations of the quantum harmonic oscillator algebra. The n -dimensional ordinary harmonic oscillator algebra is closely related to both the unitary group $U(n)$ and to the corresponding Lie algebra $u(n)$. The elements of the Lie algebra $u(n)$ can be represented in terms of the n -dimensional oscillator whereas the n -dimensional oscillator itself

is invariant under the unitary group $U(n)$. On the one hand the elements of the quantum algebra $u_q(n)$ can be constructed in terms of q -oscillators[10,11]. On the other hand there exist covariant q -oscillators which are invariant under the action of the quantum group $U_q(n)$ [12]. Although the q -oscillators used in these developments are not the same, they are related[13] and in the limit $q \rightarrow 1$, they both reduce to the ordinary oscillator.

In this work we study the quantum group $GL_q(3, \mathbb{C})$, i.e. the quantum group of 3×3 -matrices $A = (a_{ij})$, whose elements obey certain q -dependent commutation relations. We show that the quantum 3×3 -matrices (naturally $n \times n$ -matrices) can not be expressed as an exponential of a matrix whose elements obey q -independent commutation relations. Contrary to 2×2 -quantum matrices the n -th power of a quantum 3×3 -matrix A does not correspond to the n -th power of the deformation parameter q . We obtain the relations satisfied between the matrix elements of a quantum matrix A and the quantum cofactor of the matrix elements of A . For example,

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) = q \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} \quad , \quad i=1 \text{ and } j \neq k \quad ,$$

and

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) - q \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} = -q(q - q^{-1}) \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij}$$

for $i = 2$ and $i \geq k$, $j \neq k$, $i < j$ and $j > 1$, and

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) = q^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} \quad , \quad i=3 \text{ and } j \neq k$$

where $\mathcal{D}_q(A_{ij})$ denotes the quantum cofactor of the matrix element a_{ij} of quantum 3×3 -matrix A . Using these relations, we obtain a new form giving the quantum determinant of a quantum $n \times n$ -matrix A .

Next, we considered another quantum 3×3 -matrix $B = (b_{ij})$ whose elements commute with the elements of the

quantum 3×3 -matrix $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij}b_{kl} = b_{kl}a_{ij}, \quad \forall i,j,k,l.$$

We study properties of the product matrix

$$C = AB = (c_{ij})$$

and show that its matrix elements satisfy the same q commutation relations that the elements of the quantum matrix A satisfy.

For each quaternion $h \in \mathbb{H}$, written as

$$h = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

define $\phi(h) = Q \in M_2(\mathbb{C})$ by

$$Q = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -a_2 + a_3 i & a_0 - a_1 i \end{pmatrix}, \quad i \longleftrightarrow e_1$$

where, for $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$a_\alpha e_\beta = e_\beta a_\alpha$$

and

$$e_\alpha^2 = -1.$$

We introduce the deformation of the quaternion algebra $\mathbb{H}$ using the quantum matrix theory and we interpret as q -quaternions. Using q -quaternions we construct quaternionic quantum groups as $q \rightarrow 1$ reduce to ordinary quaternionic matrix groups.

Next, we discuss the parametrization of quantum groups in terms of independent operators. We find that this consideration leads to the parametrization of $SU_q(2)$ in terms of a q -oscillator plus a commuting

phase. Indeed, if

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_q(2)$$

we can write, using relations

$$A^* A^T = I, \quad \mathcal{D}_q(A) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix}$$

and

$$aa^* + q^2 bb^* = 1 = a^*a + bb^*$$

and so

$$aa^* - q^2 a^*a = 1 - q^2.$$

Thus a rescaling of creation operator a^* and of the annihilation operator a by

$$a \longrightarrow (1 - q^2)^{1/2} a.$$

$$a^* \longrightarrow (1 - q^2)^{1/2} a^*$$

will give

$$aa^* - q^2 a^*a = 1.$$

This is the one dimensional q -oscillator. The commuting phase is naturally identified with the subgroup $U(1)$ and the remaining quantum coset $SU_q(2)/U(1)$ consists of a q -oscillator.

For special unitary quantum groups $SU_q(3)$, the analogous construction results in the quantum coset $SU_q(3)/U_q(2)$ being identified with the 2-dimensional q -oscillator. Generally, we will show that the unitary quantum group $U_q(n)$ can itself be constructed in terms of $n(n-1)/2$ q -oscillators and n commuting phases corresponding to the $(U(1))^n$ subgroup of $U_q(n)$. We will show that the quantum group cosets $SU_q(n)/U_q(n-1)$ can be identified with $(n-1)$ q -oscillators, provided that the normalization of the oscillators are chosen such that in the $q \rightarrow 1$ limit the oscillator creation and annihilation operators commute and give a c -number. So the unitary quantum group $U_q(n)$ in this limit reduces to the classical unitary group $U(n)$ of $n \times n$ -matrices of c -numbers.

BÖLÜM 1

Giriş

Kuantum grubu terimi, ilk kez V.DRINFELD tarafından kullanılmıştır [1]. Kuantum grupları, konformal alan teorisi, lineer olmayan integre edilebilir modeller ve düğüm teorisi gibi konularda uygulama alanı bulmuştur. Bu yapılar, elemanları komutatif olmayan ve belirli komutasyon bağıntılarını sağlayan matris grupları olarak düşünülebilir [2,3]. Yang-Baxter bağıntısı [4], cebirin asosyatifliği için yeterli şarttır. Bu, Kuantum grupları için Jacobi özdeşliğine benzerdir[5].

Kuantum grupları teorisi, bir Lie grubu veya karşılık gelen Lie cebirinin deformasyonu ile ilgilidir. Bir yaklaşım, klasik grupların temel temsili kullanılarak yapılır [6-9]. Matrislerin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları deformasyon parametresine bağlıdır. Komutasyon bağıntılarına bağlı olarak verilen parametre ve matris elemanlarının çarpım kuralları, bir cebir yapısı oluşturur.

$GL(n, \mathbb{C})$ genel lineer grubunun deformasyonu $GL_q(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. $GL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubunun özellikleri Vokos ve diğerleri[8] tarafından incelenmiştir. Onlar ve Corrigan ve diğerleri[9] göstermişlerdir ki $A \in GL_q(2, \mathbb{C})$ matrisinin n -inci kuvvetine tekabül eden deformasyon

parametresi q^n dir.

Bu çalışma, aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Bölüm 2 de temel kavramlardan bahsedilmiş ve klasik matris grupları hakkında özet bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3 de, klasik matris gruplarının deformasyonunun nasıl yapıldığına kısaca değinilmiş ve bir $A \in GL_q(2, \mathbb{C})$ matrisinin bazı kuantum özellikleri, yeni yorumlarla anlatılmıştır. Daha sonra, bir $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisi gözönüne alınarak bu matrisin matris elemanları ile bu elemanların kuantum kofaktörleri arasında sağlanan bağıntılar elde edilmiş ve $A \in GL_q(n, \mathbb{C})$ matrisinin kuantum determinantı için yeni bir formül verilmiştir. Ayrıca, elemanları komutatatif olan, 3×3 -tipindeki iki matrisin çarpımı gözönüne alınıp, bu çarpım matrisinin sağladığı komutasyon bağıntıları elde edilmiştir.

Bölüm 4 de önce, normal kuaternionlar tanıtılmış ve $\mathbb{H}$ kuaternion cebirinin kuantum deformasyonu, kuantum matris teori kullanılarak yapılmıştır. Sonra da bir $h \in \mathbb{H}_q$ kuantum kuaternionu 2×2 -tipinde bir matris olarak ifade edilerek, bu matrislerin q -deforme yapısı oluşturulmuş ve bu yapıdan faydalanılarak kuaternionik kuantum grubu elde edilmiştir.

Bölüm 5 de, $SU_q(2)$ ve $SU_q(3)$ kuantum gruplarının kuantum kosetleri elde edilmiş ve bu kosetlerin bir q -osilatörü olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bu durum $SU_q(n)$ grubuna genelleştirilmiştir.

BÖLÜM 2

KLASİK MATRİS GRUPLARI

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan temel kavramlardan bahsedilecek[22,23].

2.1.Temel Kavramlar

Tanım

K , bir cisim olsun. $\mathcal{A}$, bir vektör uzayı ve $\mathcal{A}$ daki bir çarpma

$$x, y \longrightarrow xy$$

ile verilsin. Eğer, her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için

$$\mathcal{L}_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \text{ ve } R_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

tasvirleri lineer yani, her $x, y \in \mathcal{A}$ ve $k \in K$ için

$$a(x+y) = ax+ay \quad ; \quad (x+y)a = xa+ya$$

$$k(ax) = a(kx) \quad ; \quad k(xa) = (kx)a$$

ise, $\mathcal{A}$ vektör uzayına(K cismi üzerinde) bir cebir denir.

Çarpımı asosyatif olan bir cebire de asosyatif cebir denir.

Eğer bir $\mathcal{A}$ asosyatif cebiri, her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $ae = ea = a$ olacak şekilde bir e birim elemanına sahip ise, bu $\mathcal{A}$ cebirine unital cebir denir.

$M_n(K)$ ile elemanları K cisiminden alınan $n \times n$ -tipindeki matrislerin cümlesini gösterelim. Aşıkarak $M_n(K)$,

bir vektör uzayıdır. Üstelik, her $A \in M_n(K)$ elemanı için

$$\mathcal{L}_A : M_n(K) \longrightarrow M_n(K) \text{ ve } R_A : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$$

tasvirleri lineer olduğundan, $M_n(K)$, bir cebir ve çarpımı asosyatif olduğundan da bir asosyatif cebirdir.

Üstelik, $n \times n$ -tipindeki I_n birim matrisi de $M_n(K)$ cebirine ait olduğundan $M_n(K)$, bir unital cebirdir.

Lemma:

Eğer $\mathcal{A}$, asosyatif çarpma ile bir cebir ve $U \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ cebirindeki invertibil elemanların cümlesi ise U , çarpma altında bir gruptur.

2.2. Klasik Matris Grupları

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ ile, sırasıyla, reel ve kompleks sayıların cümlesini gösterelim.

Tanım 1.

$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ olmak üzere $M_n(K)$ cebirindeki invertibil matrislerin genel lineer grubunu $GL(n, K)$ ile gösterelim.

Bu takdirde $GL(n, K)$ genel lineer grubu, $M_n(K)$ uzayının bir alt cümlesidir.

K cismindeki bir 1×1 - matrisi, K nın bir elemanı ve böyle iki elemanın matris çarpımı, K daki çarpma gibidir. Dolayısı ile, bütün sıfırdan farklı elemanlar invertibil olduğundan,

$$GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$$

olduklarını gösteririz [22].

$GL(2, \mathbb{R})$, 4-boyutlu $M_2(\mathbb{R})$ vektör uzayındaki invertibil elemanların cümlesidir. O halde,

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc \neq 0 \right\}$$

olur. Sonuç olarak, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ için, sırasıyla, $M_n(\mathbb{R})$ ve $M_n(\mathbb{C})$ üzerinde tanımlanan determinantlar alınır ve

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{Det } A \neq 0 \right\}$$

$$GL(n, \mathbb{C}) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{Det } A \neq 0 \right\}$$

yazılabilir.

Tanım 2.

$GL(n, K)$ grubundaki determinantı 1 olan matrislerin grubuna özel lineer grup denir ve $SL(n, K)$ ile gösterilir:

$$SL(n, K) = \left\{ A \in GL(n, K) : \text{Det } A = 1 \right\}.$$

$A \in GL(n, \mathbb{C})$ olmak üzere

$$AA^+ = I = A^+A, \quad A^+ = (A^*)^T$$

şartını sağlayan matrislere uniter matris denir ve uniter (invertibil) matrislerin grubu $U(n)$ ile gösterilir.

$U(n)$ grubundaki determinantı 1 olan matrisler, bir alt grup formunda olup, bu gruba özel uniter grup denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

BÖLÜM 3

KUANTUM MATRİS GRUPLARI

Bu bölümde, $GL(3, \mathbb{C})$ genel lineer grubunun kuantum özellikleri incelenmiştir.

$GL(n, \mathbb{C})$ $n \times n$ -kompleks matrislerin grubu, matris elemanlarının keyfi bir $q \in \mathbb{C}$ parametresine bağlı olarak verilen komutasyon bağıntılarını sağladığı kabul edilerek deforme edilir. Klasik grubun bu deformasyonunu $GL_q(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. $GL_q(n, \mathbb{C})$ grubundaki bir A matrisinin deformasyonu, $\mathcal{R}$ -matris yaklaşımı [4] ve Manin yapısı [6] kullanılarak yapılmıştır.

3.1. Manin Yapısı

Manin [6] , bir vektör uzayının deformasyonunu ve dualini, aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

Bir vektör uzayının kuantum deformasyonuna kuantum vektör uzayı denir ve $\mathbb{R}_q[n,0]$ ile gösterilir öyle ki; T, adi transpozeyi göstermek ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ olmak üzere, eğer $X \in \mathbb{R}_q[n,0]$ ise X vektörünün bileşenleri

$$x_i x_j - q x_j x_i = 0, i < j \quad (3.1.1)$$

çarpım bağıntılarını sağlar.

Bu kuantum vektör uzayının, dual kuantum vektör uzayı da $\mathbb{R}_q[0,n]$ ile gösterilir ve $Y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ olmak üzere $Y \in \mathbb{R}_q[0,n]$ ise, Y vektörünün koordinatları

$$\xi_i^2 = 0 \quad (3.1.2a)$$

$$\xi_i \xi_j + q \xi_j \xi_i = 0, i > j \quad (3.1.2b)$$

bağıntılarını sağlar.

Buna göre, bir $A = (a_{ij}) \in GL_q(n, \mathbb{C})$ matrisinin kuantum deformasyonu yapılırken,

$$X' = AX \quad \text{ve} \quad Y' = AY \quad (3.1.3a,b)$$

olmak üzere,

$$X' \in \mathbb{R}_q[n,0] \quad \text{ve} \quad Y' \in \mathbb{R}_q[0,n]$$

oldukları ve her i, j, k için

$$a_{ij} x_k = x_k a_{ij} \quad \text{ve} \quad a_{ij} \xi_k = \xi_k a_{ij} \quad (3.1.4a,b)$$

bağıntılarının sağlandığı kabul edilir.

Şimdi, bir $A \in GL_q(2, \mathbb{C})$ matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları, (3.1-4)

bağıntıları kullanılarak kolayca elde edilebilir[8,9] .
Eğer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_q(2, \mathbb{C})$$

ise,

$$r = q - q^{-1}$$

olmak üzere

$$ab = q ba \quad ; \quad ac = q ca, \quad (3.1.5.a,b)$$

$$bd = q db \quad ; \quad cd = q dc, \quad (3.1.5.c,d)$$

$$bc = cb \quad ; \quad ad - da = r bc \quad (3.1.5.e,f)$$

olduklarını buluruz.

Ayrıca,

$$X' = AX \in \mathbb{R}_q[2,0] ,$$

$$X' = A^T X \in \mathbb{R}_q[2,0] ,$$

$$Y' = AY \in \mathbb{R}_q[0,2] ,$$

$$Y' = A^T Y \in \mathbb{R}_q[0,2] ,$$

$$X' = A^T X \in \mathbb{R}_q[2,0] ,$$

$$Y' = A^T Y \in \mathbb{R}_q[0,2]$$

bağıntı-çiftlerinin de (3.1.5a-f) bağıntılarına denk olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi, elemanları (3.1.5a-f) bağıntılarını sağlayan A

kuantum matrisinin kuantum determinantını tarif edelim. Eğer A nın a elemanı invertibil ise, bu A matrisinin bir ayrışımı Crout redaksiyonu kullanılarak,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, ikinci matrisin determinantı 1 olduğundan, A kuantum matrisinin determinantı; (3.1.5a-f) bağıntıları yardımıyla,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q(A) &= a(d - ca^{-1}b) \\ &= ad - q \, cb \end{aligned} \quad (3.1.6a)$$

$$= da - q^{-1}cb \quad (3.1.6b)$$

şeklinde bulunur.

Tanım :

Sabit q -parametresi ile (3.1.5a-f) şeklindeki q -komutasyon bağıntılarını sağlayan ve kuantum determinantı sıfırdan farklı olan bütün A matrislerinin oluşturduğu $GL_q(2, \mathbb{C})$ grubuna kuantum grubu ve A matrisine de q parametrelili (kuantum) matrisi denir.

Not olarak, her $i, j = 1, 2$ için

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A) = \mathcal{D}_q(A) a_{ij} \quad (3.1.7)$$

dir yani $\mathcal{D}_q(A)$, $A = (a_{ij}) \in GL_q(2, \mathbb{C})$ matrisinin bütün elemanları ile komutatiftir. Bu, (3.1.5.a-f) bağıntıları kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Eğer $A \in GL_q(2, \mathbb{C})$ ise, A matrisinin kuantum inversi,

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

eşitlikleri ve (3.1.7) bağıntıları kullanılarak,

$$A^{-1} = [\mathcal{D}_q(A)]^{-1} \begin{bmatrix} d & -q^{-1}b \\ -q c & a \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

şeklinde bulunur. O halde, A^{-1} invers matrisinin deformasyon parametresi q^{-1} olup, $A^{-1} \in GL_{1/q}(2, \mathbb{C})$ dir. Dolayısıyla, $GL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubu, bilinen manada grup değildir.

$\mathcal{D}_q(A)$, (3.1.7) bağıntılarını sağladığından, bir sayı olarak düşünülebilir. $GL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubu, $\mathcal{D}_q(A) = 1$ seçmekle ($GL(2, \mathbb{C})$ grubunun, özel lineer $SL(2, \mathbb{C})$ grubuna klasik kısıtlanmasına benzer şekilde) $SL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubuna kısıtlanabilir.

3.2. $\mathcal{R}$ -Matris Yaklaşımı

Matris çarpımı altındaki q -komutasyon bağıntıları, Yang-Baxter denkleminde (YBE), kapalı olarak bağlıdır. Bu kesimde, bu yaklaşım, ana hatları ile verilmiştir. İnceleme, 2×2 -tipindeki matrisler için yapılacaktır.

Tanım :

Bir G grubu ve bir U cümlesi verildiğinde, eğer bir

$$\Psi : G \times U \longrightarrow U$$

tasviri

(1) e , G grubunun birim elemanı ve u , U cümlesinin herhangi bir elemanı olmak üzere

$$\Psi(e, u) = u,$$

(2) $g_1, g_2 \in G$ ve her $u \in U$ için

$$\Psi(g_1, \Psi(g_2, u)) = \Psi(g_1 g_2, u)$$

şartlarını sağlarsa, G grubunun U cümlesi üzerine (sol taraftan) etki ettiği söylenir.

Bu tarife göre, $GL(2, \mathbb{C})$ grubunun $\mathbb{C}$ vektör uzayı üzerine etki ettiğini söyleyebiliriz ve

$$\Psi : GL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tasviri

$$\Psi(A, c) = \left[\sum_{j=1}^2 a_{ij} c_j \right], \quad i=1,2$$

şeklinde ifade edilebilir.

Dolayısı ile $GL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubunun elemanlarının 2-boyutlu kuantum vektör uzayı olan $\mathbb{R}_q[2,0]$ düzlemi üzerine etki ettiği düşünülebilir. Buna göre,

$$T_1 = A \otimes I$$

$$= \begin{pmatrix} a.I & b.I \\ c.I & d.I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad (3.2.1a)$$

$$T_2 = I \otimes A$$

$$= \begin{pmatrix} 1.A & 0.A \\ 0.A & 1.A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \quad (3.2.1b)$$

tensör çarpımları $\mathbb{R}_q[2,0] \otimes \mathbb{R}_q[2,0]$ çarpım vektör uzayı üzerine etki eder.

Şimdi, (3.1.5a-f) cebiri çarpma altında asosyatiftir ve Jimbo [4] tarafından verilen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) = & (q^{-1} - xq) \sum_{\alpha} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + (1 - x) \sum_{\alpha \neq \beta} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} + \\ & + (q^{-1} - q) \left(\sum_{\alpha < \beta} + x \sum_{\beta < \alpha} \right) E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

matrisi ile (3.1.5a-f) bağıntıları, $n=2$ için,

$$\mathcal{R}T_1T_2 = T_2T_1\mathcal{R} \quad (3.2.3)$$

şeklinde bir tensör çarpım ile ifade edilebilir. Bu denkleme kuantum grup denklemi denir. Burada $E_{\alpha\beta}$ matrisi,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere, elemanları

$$(E_{\alpha\beta})_{ij} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \quad (3.2.4)$$

ile verilen matristir.

Daha açık olarak, $n=2$ için, (3.2.3) bağıntısını sağlayan $\mathcal{R}$ -matrisi, (3.2.2) denkleminde $x=0$ koymakla,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad r = q - q^{-1} \quad (3.2.5)$$

şeklinde bulunur. Buna göre,

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 T_1 = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ab & b^2 \\ ca & da & cb & db \\ ac & bc & ad & bd \\ c^2 & dc & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

olduklarından,

$$\mathcal{R} T_1 T_2 = \begin{pmatrix} q^{-1} a^2 & q^{-1} ab & q^{-1} ba & q^{-1} b^2 \\ ac-rca & ad-rcb & bc-rda & bd-rdb \\ ca & cb & da & db \\ q^{-1} c^2 & q^{-1} cd & q^{-1} dc & q^{-1} d^2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 T_1 \mathcal{R} = \begin{pmatrix} q^{-1} a^2 & ba & ab-rba & q^{-1} b^2 \\ q^{-1} ca & da & cb-rda & q^{-1} db \\ q^{-1} ac & bc & ad-rbc & q^{-1} bd \\ q^{-1} c^2 & dc & cd-rdc & q^{-1} d^2 \end{pmatrix}$$

olup, (3.2.3) bağıntısından, (3.1.5a-f) bağıntılarının sağlandığı hemen görülebilir.

Şimdi A' , elemanları A kuantum matrisinin elemanları ile komutatif olan başka bir kuantum matrisi olsun. Bu takdirde, AA' çarpım matrisi de bir kuantum matrisidir. Diğer bir deyimle, AA' çarpım matrisinin elemanları da (3.1.5a-f) şeklindeki q -komutasyon bağıntılarını sağlar.

Üstelik,

$$\mathcal{D}_q(AA') = \mathcal{D}_q(A)\mathcal{D}_q(A') = \mathcal{D}_q(A')\mathcal{D}_q(A)$$

dir.

Matris elemanları komutatif olan bu A ve A' kuantum matrislerinden T_1 ve T_2 matrislerini teşkil edelim:

$$\begin{aligned} T'_1 &= AA' \otimes I \\ &= (A \otimes I)(A' \otimes I) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} T'_2 &= (I \otimes AA') \\ &= (I \otimes A)(I \otimes A'). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Bu takdirde,

$$(A' \otimes I)(I \otimes A) = (I \otimes A)(A' \otimes I) \quad (3.2.8)$$

olup, (3.2.3) bağıntısına göre,

$$\mathcal{R}(A' \otimes I)(I \otimes A') = (I \otimes A')(A' \otimes I)\mathcal{R} \quad (3.2.9)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}T'_1T'_2 &= \mathcal{R}(AA' \otimes I)(I \otimes AA') \\ &= \mathcal{R}(A \otimes I)(A' \otimes I)(I \otimes A)(I \otimes A') \\ &= \mathcal{R}(A \otimes I)(I \otimes A)(A' \otimes I)(I \otimes A') \\ &= (I \otimes A)(A \otimes I)\mathcal{R}(A' \otimes I)(I \otimes A') \\ &= (I \otimes A)(A \otimes I)(I \otimes A')(A' \otimes I)\mathcal{R} \\ &= (A \otimes A)(A' \otimes A')\mathcal{R} \\ &= (AA' \otimes AA')\mathcal{R} \\ &= (I \otimes AA')(AA' \otimes I)\mathcal{R} \\ &= T'_2T'_1\mathcal{R} \end{aligned}$$

yani,

$$\mathcal{R}T'_1T'_2 = T'_2T'_1\mathcal{R} \quad (3.2.10)$$

olduğunu buluyoruz. Buna göre,

$$\begin{aligned} T'_1T'_2 &= (AA' \otimes I)(I \otimes A) \\ &= (AA' \otimes A) \\ &= (I \otimes A)(AA' \otimes I) \\ &= T'_2T'_1, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 T_1 T'_2 &= (A \otimes I)(I \otimes AA') \\
 &= (A \otimes AA') \\
 &= (I \otimes AA')(A \otimes I) \\
 &= T'_2 T_1
 \end{aligned}$$

olduklarından,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} T_1 T'_1 T_2 T'_2 &= \mathcal{R} T_1 T_2 T'_1 T'_2 \\
 &= T_2 T_1 \mathcal{R} T'_1 T'_2 \\
 &= T_2 T_1 T'_2 T'_1 \mathcal{R}
 \end{aligned}$$

ifadesinden,

$$\mathcal{R} T_1 T'_1 T_2 T'_2 = T_2 T'_2 T_1 T'_1 \mathcal{R} \quad (3.2.11)$$

buluruz. O halde, matris çarpımı altında (3.1.5a-f) ile verilen bağıntılar korunur.

Bu işlem, üçlü tensör çarpım uzayı üzerine kuantum grubunun etki ettiği düşünülerek ilerletilir.

$$T_1 = A \otimes I \otimes I, \quad T_2 = I \otimes A \otimes I, \quad T_3 = I \otimes I \otimes A$$

tensör çarpımları, $\mathbb{R}_q[2,0] \otimes \mathbb{R}_q[2,0] \otimes \mathbb{R}_q[2,0]$ çarpım uzayına etki eder.

Yukarıdaki notasyonu genelleştirmekle,

$$R_{12} = \mathcal{R} \otimes I \quad (3.2.12a)$$

$$R_{23} = I \otimes \mathcal{R} \quad (3.2.12b)$$

ve R_{13} , tensör çarpımdaki birinci ve üçüncü uzaylara $\mathcal{R}$ ile etki etmek üzere

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12} \quad (3.2.13a)$$

$$R_{13} T_1 T_3 = T_3 T_1 R_{13} \quad (3.2.13b)$$

$$R_{23} T_2 T_3 = T_3 T_2 R_{23} \quad (3.2.13c)$$

elde ederiz.

Aşağıdaki diyagramı düşünelim.

$$T_1 T_2 T_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \xrightarrow{R_{23}} T_1 T_3 T_2 \xrightarrow{R_{13}} T_3 T_1 T_2 \xrightarrow{R_{12}} \\ \xleftarrow{R_{12}} T_2 T_1 T_3 \xleftarrow{R_{13}} T_2 T_3 T_1 \xleftarrow{R_{23}} \end{array} \right] \longrightarrow T_3 T_2 T_1$$

Bu takdirde, $T_1 T_2 T_3$ den $T_3 T_2 T_1$ 'e ulaşmak için iki yol vardır:

$$R_{12} R_{13} R_{23} T_1 T_2 T_3 = T_3 T_2 T_1 R_{12} R_{13} R_{23},$$

$$R_{23} R_{13} R_{12} T_1 T_2 T_3 = T_3 T_2 T_1 R_{23} R_{13} R_{12}.$$

Buradan,

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (3.2.14)$$

çıkar. Bu, Yang-Baxter denklemidir.

3.3. $GL_q(3, \mathbb{C})$ Grubunun Analizi

Burada, 3×3 -kompleks bir $A = (a_{ij})$ matrisinin kuantum deformasyonu yapılmış ve kuantum özelliklerini incelenmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

olsun.

$n=3$ için $X \in \mathbb{R}_q[3,0]$ ve $Y \in \mathbb{R}_q[0,3]$ vektörlerinin bileşenleri

$$X = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad Y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$$

olmak üzere, (3.1.1-4) bağıntıları gereğince,

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= q x_2 x_1; & x_1 x_3 &= q x_3 x_1, \\ x_2 x_3 &= q x_3 x_2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \xi_2^2 = \xi_3^2 = 0, \\ \xi_1 \xi_2 &= -q^{-1} \xi_2 \xi_1; & \xi_1 \xi_3 &= -q^{-1} \xi_3 \xi_1, \\ \xi_2 \xi_3 &= -q^{-1} \xi_3 \xi_2 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

bağıntılarını sağlarlar. Buna göre,

$$X' = AX \in \mathbb{R}_q[3,0] \quad (3.3.4a)$$

$$Y' = AY \in \mathbb{R}_q[0,3] \quad (3.3.4b)$$

olmalıdır. Buna göre, gerekli hesaplamaları yaptığımızda

$$r = q - q^{-1}$$

olmak üzere,

$$a_{ij}a_{ik} = qa_{ik}a_{ij} , j < k \quad (3.3.5a)$$

$$a_{ji}a_{ki} = qa_{ki}a_{ji} , j < k \quad (3.3.5b)$$

$$a_{ik}a_{lj} = a_{lj}a_{ik} , i < l \text{ ve } j > k \quad (3.3.5c)$$

$$a_{ij}a_{lk} - a_{lk}a_{ij} = ra_{ik}a_{lj} , i < l \text{ ve } j < k \quad (3.3.5d)$$

elde ederiz. Not olarak, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin 2×2 alt matrislerini

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{pmatrix} , \begin{matrix} m \neq i < l \\ n \neq j < k \end{matrix}$$

ile gösterirsek, $A_{mn} \in GL_q(2, \mathbb{C})$ olduğunda, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin matris elemanlarının sağladığı bütün komutasyon bağıntıları elde edilmiş olur.

$\mathcal{D}_q(A_{ij})$ ile $A = (a_{ij})$ kuantum matrisinin a_{ij} elemanının kuantum minörünü gösterelim ve

$$X_{ij} = (-1)^{i+j} \mathcal{D}_q(A_{ij}) \quad (3.3.6)$$

yazalım. Yani, X_{ij} , A matrisinin a_{ij} elemanının kuantum kofaktörü olsun. Bu takdirde, A matrisinin kuantum determinantı

$$\mathcal{D}_q(A) = \sum_{j=1}^3 q^{j-1} a_{ij} X_{ij} , i=1,2,3 \quad (3.3.7a)$$

veya

$$\mathcal{D}_q(A) = \sum_{i=1}^3 q^{j-1} X_{ij} a_{ij} , j=1,2,3 \quad (3.3.7b)$$

ifadelerinden biri ile verilebilir. Buna göre, eğer A

matrisi $GL_q(n, \mathbb{C})$ grubuna ait ise, A matrisinin kuantum determinanı

$$\mathcal{D}_q(A) = \sum_{i=1}^n q^{j-i} x_{ij} a_{ij} \quad , \quad j=1,2,3,\dots,n$$

şeklindedir.

Ayrıca,

$$\sum_{k=1}^3 q^{k-1} a_{ik} x_{jk} = 0 \quad , i \neq j \quad (3.3.8a)$$

$$\sum_{k=1}^3 q^{1-k} x_{ki} a_{kj} = 0 \quad , i \neq j \quad (3.3.8b)$$

olduklarını göstermek kolaydır.

$\mathcal{D}_q(A)$, A matrisinin bütün elemanları ile komutatiftir:

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A) = \mathcal{D}_q(A) a_{ij} \quad , \quad \forall i,j \text{ için.}$$

Özel olarak,

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ji}) = \mathcal{D}_q(A_{ji}) a_{ij} \quad , \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.3.9)$$

dır.

Ayrıca, 3×3 -tipindeki $A = (a_{ij})$ kuantum matrisinin her elemanı, A matrisinin diğer elemanlarının kuantum minörleri ile aşağıdaki komutasyon bağıntılarını sağlar:

(a) $i=1$ için $j,k = 1,2,3$ ve $j \neq k$ olmak üzere

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) = q \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} \quad (3.3.10a)$$

$$a_{ji} \mathcal{D}_q(A_{ki}) = q \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji} \quad (3.3.10b)$$

eşitliği vardır.

(b) $i=2$ için

$$r = q - q^{-1}$$

olmak üzere

$i \geq k$, $j \neq k$, $i < j$ ve $i > 1$ için

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) - q \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} = -qr \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{lj} \quad (3.3.11a)$$

$$a_{ji} \mathcal{D}_q(A_{ki}) - q \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji} = -qr \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{jl} \quad (3.3.11b)$$

ve

$i \geq k$, $j \neq k$, $i < j$ ve $i < 1$ için

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) - q^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} = -rq^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{lj} \quad (3.3.11c)$$

$$a_{ji} \mathcal{D}_q(A_{ki}) - q^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji} = -rq^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{jl} \quad (3.3.11d)$$

olur.

(c) $i=3$ için $j, k=1, 2, 3$ ve $j \neq k$ olmak üzere

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) = q^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} \quad (3.3.12a)$$

$$a_{ji} \mathcal{D}_q(A_{ki}) = q^{-1} \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji} \quad (3.3.12b)$$

(a-c) de verilen 6 bağıntı aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i=1 \text{ veya } i=3 \\ 0, & i=2 \end{cases}$$

olmak üzere

$i \neq 1$, $j \neq k$ ve $i = j \longrightarrow k \neq 1$ için

$$a_{ij} \mathcal{D}_q(A_{ik}) - q^{1-i} \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij} = \varepsilon_i (1 - q^{2(1-i)}) \mathcal{D}_q(A_{ik}) a_{ij}$$

$$a_{ji} \mathcal{D}_q(A_{ki}) - q^{1-i} \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji} = \varepsilon_i (1 - q^{2(1-i)}) \mathcal{D}_q(A_{ki}) a_{ji}$$

Burada sağlanan bağıntı sayısı 36 tanedir.

Şimdi, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin kuantum inversi ;

gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_q(A)} \begin{pmatrix} X_{11} & q^{-1}X_{21} & q^{-2}X_{31} \\ qX_{12} & X_{22} & q^{-1}X_{32} \\ q^2X_{13} & qX_{23} & X_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.13)$$

şeklinde bulunur. Bu A^{-1} invers matrisinin elemanları $r = q - q^{-1}$ olmak üzere

$$X_{ij}X_{kj} = q^{-1}X_{kj}X_{ij}, i < k \quad (3.3.14a)$$

$$X_{ij}X_{il} = q^{-1}X_{il}X_{ij}, j < l \quad (3.3.14b)$$

$$X_{ij}X_{kl} = X_{kl}X_{ij}, i > k \text{ ve } j < l \quad (3.3.14c)$$

$$X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = -rX_{kj}X_{il}, i < k \text{ ve } j < l \quad (3.3.14d)$$

şeklinde olup, $A^{-1} \in GL_{1/q}(3, \mathbb{C})$ dir. Yani A^{-1} kuantum matrisinin deformasyon parametresi q^{-1} olur.

Şimdi, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin karesinin parametresine bakalım. A^2 matrisinin elemanları

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}a_{kj}, \quad i, j=1, 2, 3$$

olmak üzere,

$$A^2 = (u_{ij})$$

şeklinde alınabilir. Buna göre, bir takım hesaplamalar sonunda, örneğin,

$$u_{11}u_{12} = q^2 u_{12}u_{11} + q(1-q)u_{12}a_{13}a_{31}$$

$$u_{11}u_{21} = q^2 u_{21}u_{11} + (1-q)a_{13}a_{31}u_{21}$$

olduklarını buluruz. Sonuç olarak, A^2 matrisinin parametresinin q^2 olduğunu söyleyemeyiz. O halde, A^2 matrisi, bir kuantum matrisi değildir ve başka bir matris ile üstel formda yazılamaz.

Şimdi, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin elemanlarının çarpımının kompleks eşleniğini

$$(a_{ij}a_{ik})^* = a_{ik}^* a_{ij}^*$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde,

$$A \in SL_q(3, \mathbb{R}),$$

$$a_{ij}^* = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

olması

$$\begin{aligned} (a_{ij}a_{ik})^* &= a_{ik}^* a_{ij}^* = a_{ik}a_{ij} = q^{-1}a_{ij}a_{ik} \\ &= \bar{q} (a_{ik}a_{ij})^* = \bar{q} a_{ij}^* a_{ik}^* = \bar{q} a_{ij}a_{ik} \\ q^{-1} a_{ij}a_{ik} &= \bar{q} a_{ij}a_{ik} \end{aligned}$$

bağıntısından, $|q| = 1$ verir.

Eğer, $A \in SU_q(3, \mathbb{C})$ alınırsa, A matrisinin eşleniği, A^* olmak üzere

$$A^* A^T = I = A^T A^* \quad ; \quad \mathcal{D}_q(A) = 1 \quad (3.3.15)$$

eşitliklerinden,

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik}^* a_{jk} = \delta_{ij} \quad , \quad i, j=1, 2, 3 \quad (3.3.16)$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ki} a_{kj}^* = \delta_{ij} \quad , \quad i, j=1,2,3 \quad (3.3.17)$$

$$\sum_{k=1}^3 q^{j-i} a_{ij} X_{ij} = 1 \quad , \quad i, j=1,2,3 \quad (3.3.18)$$

$$\sum_{k=1}^3 q^{j-i} X_{ij} a_{ij} = 1 \quad , \quad i, j=1,2,3 \quad (3.3.19)$$

$$\sum_{k=1}^3 q^{k-1} a_{ik} X_{jk} = 0 \quad , \quad i, j=1,2,3 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^3 q^{1-k} X_{ki} a_{kj} = 0 \quad , \quad i, j=1,2,3 \quad (i \neq j)$$

elde ederiz.

$A = (a_{ij}) \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin kuantum transpozu,

$$V_q = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A^T_q = V_q A^T V_q^{-1}$$

ile verilir.

Not olarak,

$$\mathcal{D}_q(A) = \mathcal{D}_q(A^T_q)$$

dir.

Şimdi, 3x3-tipindeki q-parametrelili iki matrisin, elemanlarının komutatatif olduğu durumlarda bu matrislerin çarpımının taşıdığı kuantum özelliklerini inceleyelim.

$$A \in GL_q(3, \mathbb{C}) \quad \text{ve} \quad B \in GL_q(3, \mathbb{C})$$

$$A = (a_{ij}) \quad ; \quad B = (b_{ij})$$

olmak üzere

$$a_{ij}b_{kl} = b_{kl}a_{ij} \quad , \quad \forall i, j, k, l \text{ için}$$

komutasyon bağıntılarının sağlandığını kabul edelim.

$$C = AB \quad , \quad C = (c_{ij})$$

alalım. Bu takdirde,

(1) C çarpım matrisinin parametresi de q olur. Gerçekten , C matrisinin elemanları (iki kare matrisin çarpım kuralından)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{kj} \quad , \quad i, j=1, 2, 3 \quad (3.3.20)$$

şeklinde olup, C çarpım matrisinin 2x2-tipindeki alt matrislerini

$$C_{mn} = \begin{bmatrix} c_{ij} & c_{ik} \\ c_{lj} & c_{lk} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} m \neq i < l \\ n \neq j < k \end{matrix} \quad (3.3.21)$$

şeklinde yazarsak, $r = q - q^{-1}$ olmak üzere

$$c_{ij}c_{ik} = q c_{ik}c_{ij} \quad , \quad j < k \quad (3.3.22a)$$

$$c_{ji}c_{ki} = q c_{ki}c_{ji} \quad , \quad j < k \quad (3.3.22b)$$

$$c_{ik}c_{lj} = c_{lj}c_{ik} \quad , \quad i < l \text{ ve } j > k \quad (3.3.22c)$$

$$c_{ij}c_{lk} - c_{lk}c_{ij} = rc_{ik}c_{lj} \quad , \quad i < l \text{ ve } j < k \quad (3.3.22d)$$

olduklarını görürüz. Dolayısı ile, $C_{mn} \in GL_q(2, \mathbb{C})$ ve

buradan, C matrisi $GL_q(3, \mathbb{C})$ grubunun bir elemanı olur.

(2) $C = AB$ çarpım matrisinin kuantum determinantı:

$\mathcal{D}_q(C_{ij})$, C matrisinin c_{ij} elemanının kuantum minörünü göstermek üzere $i = 1, 2, 3$ için

$$\mathcal{D}_q(C) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} q^{j-1} c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ij}) \quad (3.3.23)$$

şeklindedir. Diğer taraftan, $\mathcal{D}_q(A_{ij})$, $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin a_{ij} elemanının kuantum minörü ve $\mathcal{D}_q(B_{ij})$ de $B \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin b_{ij} elemanının kuantum minörü olduğuna göre, $i, j = 1, 2, 3$ için

$$\mathcal{D}_q(C) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{D}_q(A_{ik}) \mathcal{D}_q(B_{kj}), \quad (3.3.24)$$

yazılabilir. Buna göre, (3.3.8a) bağıntısı kullanılarak gerekli hesaplar yapıldığında

$$\mathcal{D}_q(C) = \mathcal{D}_q(A) \mathcal{D}_q(B).$$

olduğu görülür.

$C = AB$ matrisi için de

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C) = \mathcal{D}_q(C) c_{ij}, \quad \forall i, j \text{ için}$$

bağıntıları sağlanır.

(3) $C = (c_{ij})$ matrisinin her elemanı, C matrisinin diğer elemanlarının kuantum minörleri ile aşağıdaki komutasyon bağıntılarını sağlar:

(a) $i=1$ için $j, k = 1, 2, 3$ ve $j \neq k$ olmak üzere

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ik}) = q \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij} \quad (3.3.25a)$$

$$c_{ji} \mathcal{D}_q(C_{ki}) = q \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji} \quad (3.3.25b)$$

eşitliği vardır.

(b) $i=2$ için

$$r = q - q^{-1}$$

olmak üzere

$i \geq k$, $j \neq k$, $i < j$ ve $i > 1$ için

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ik}) - q \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij} = -qr \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{lj} \quad (3.3.26a)$$

$$c_{ji} \mathcal{D}_q(C_{ki}) - q \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji} = -qr \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{jl} \quad (3.3.26b)$$

ve

$i \geq k$, $j \neq k$, $i < j$ ve $i < 1$ için

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ik}) - q^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij} = -rq^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{lj} \quad (3.3.26c)$$

$$c_{ji} \mathcal{D}_q(C_{ki}) - q^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji} = -rq^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{jl} \quad (3.3.26d)$$

olur.

(c) $i=3$ için $j, k=1, 2, 3$ ve $j \neq k$ olmak üzere

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ik}) = q^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij} \quad (3.3.27a)$$

$$c_{ji} \mathcal{D}_q(C_{ki}) = q^{-1} \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji} \quad (3.3.27b)$$

(a-c) de verilen 6 bağıntı aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i=1 \text{ veya } i=3 \\ 0, & i=2 \end{cases}$$

olmak üzere

$i \neq 1$, $j \neq 1$ ve $i = j \rightarrow k \neq 1$ için

$$c_{ij} \mathcal{D}_q(C_{ik}) - q^{1-i} \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij} = \varepsilon_i \left(1 - q^{2(1-i)}\right) \mathcal{D}_q(C_{ik}) c_{ij}$$

$$c_{ji} \mathcal{D}_q(C_{ki}) - q^{1-i} \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji} = \varepsilon_i \left(1 - q^{2(1-i)}\right) \mathcal{D}_q(C_{ki}) c_{ji}$$

Burada sağlanan bağıntı sayısı 36 tanedir.

Şimdi, $C \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin kuantum inversi; gerekli hesaplamalar yapıldığında, $\mathcal{D}_q(C_{ij})$, C kuantum matrisinin c_{ij} elemanının kuantum minörü ve

$$Z_{ij} = (-1)^{1+j} \mathcal{D}_q(C_{ij})$$

olmak üzere

$$C^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_q(C)} \begin{pmatrix} Z_{11} & q^{-1} Z_{21} & q^{-2} Z_{31} \\ q Z_{12} & Z_{22} & q^{-1} Z_{32} \\ q^2 Z_{13} & q Z_{23} & Z_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.28)$$

şeklinde bulunur. Bu C^{-1} invers matrisinin elemanları

$r = q - q^{-1}$ olmak üzere

$$Z_{ij} Z_{kj} = q^{-1} Z_{kj} Z_{ij}, \quad i < k \quad (3.3.29a)$$

$$Z_{ij} Z_{il} = q^{-1} Z_{il} Z_{ij}, \quad j < l \quad (3.3.29b)$$

$$Z_{il} Z_{kj} = Z_{kj} Z_{il}, \quad i > k \text{ ve } j > l \quad (3.3.29c)$$

$$Z_{ij} Z_{kl} - Z_{kl} Z_{ij} = -r Z_{ik} Z_{jl}, \quad i < k \text{ ve } j > l \quad (3.3.29d)$$

şeklinde olup, $C^{-1} \in GL_{1/q}(3, \mathbb{C})$ dir. Yani C^{-1} kuantum matrisinin deformasyon parametresi q^{-1} olur. Dolayısıyla $C^{-1} \in GL_{1/q}(3, \mathbb{C})$ elde ederiz.

BÖLÜM 4

KUATERNİONİK KUANTUM GRUPLARI

4.1.Giriş

Kompleks sayılardan kuaternionların oluşturulması, reel sayılardan kompleks sayıların oluşturulmasına benzer şekilde yapılır.

$\mathcal{A}$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde(sonlu-boyutlu) bir eşlenik işlemine sahip, asosyatif bir cebir olsun.

$a, b \in \mathcal{A}$ olmak üzere (a, b) şeklindeki çiftlerden ibaret bir $\mathcal{A}^2$ vektör uzayını gözönüne alalım. $\mathcal{A}^2$ uzayındaki çarpmayı

$$(a, b)(u, v) = (au - b\bar{v}, av + b\bar{u})$$

şeklinde tarif edersek, $n = \dim(\mathcal{A})$ olmak üzere $\mathcal{A}^2$, $2n$ boyutlu bir cebir olur. $\mathcal{A}^2$ cebirine $\mathcal{A}$ cebirinin katlı cebiri diyoruz.

Not olarak, $a \longrightarrow (a, 0)$ tekabülü, $\mathcal{A}$ cebirinden $\mathcal{A}^2$ cebirine bir monomorfizmdir. a elemanını $(a, 0)$ çifti ile özdeşleştirirsek $\mathcal{A}$ cebirinin, $\mathcal{A}^2$ katlı cebirinin bir alt cebiri olduğunu düşünebiliriz. Eğer $\mathcal{A}$, bir birim cebiri(yani elemanları invertibil olan bir cebir) ise, $1=(1, 0)$ elemanı, $\mathcal{A}^2$ de bir özdeşlik elemanı olur.

$e=(0, 1)$ olsun. Bu takdirde,

$$be = (0, b)$$

olup, herhangi $a, b \in \mathcal{A}$ elmanları için

$$(a, b) = a + be$$

olur. O halde, $\mathcal{A}^2$ cebirinin her elemanı $a+be$ olarak yazılabilir. Özel olarak, $e^2 = -1$ dir.

$\mathbb{R}$ cisminin $\mathbb{R}^2$ katlı cismi, kompleks sayıların $\mathbb{C}$ cebiridir ve $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{C}^2$ katlısı kuaternionların $\mathbb{H}$ cebiridir.

4.2. Normal Kuaternionlar

Kuaternionların $\mathbb{H}$ cümlesi, a_i ($i = 0,1,2,3$) ler reel sayılar ve e_i ($i = 0,1,2,3$) ler lineer bağımsız taban elemanları olmak üzere ($e_0 = 1$)

$$h = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i e_i, \quad h \in \mathbb{H} \quad (4.2.1)$$

kombinasyonlarından ibarettir.

e_i ($i = 1,2,3$) taban elemanları arasındaki çarpma,

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), \quad i,j,k=1,2,3 \quad (4.2.2)$$

olmak üzere

$$e_i^2 = -1, \quad i=1,2,3 \quad (4.2.3)$$

$$e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad i \neq j \neq k$$

şeklindedir.

e_i ($i=1,2,3$) kuaternionlarının a_i ($i=1,2,3$) reel sayıları ile komutatif, yani

$$a_i e_i = e_i a_i, \quad \forall i \text{ için} \quad (4.2.4)$$

olduğunu kabul ediyoruz.

e_i ($i=1,2,3$) taban elemanları arasındaki çarpma için verilen tanıma göre $\mathbb{H}$, reel sayılar üzerinde bir asosyatif cebir olur.

$\mathbb{H}$ cebirindeki eşlenik işlemi

$$h^* = a_0 - \sum_{i=1}^3 a_i e_i, \quad h \in \mathbb{H} \quad (4.2.5)$$

ile tanımlanır.

Bir h kuaternionunun (Euclidean) normu

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(h) &= |h|^2 = hh^* \\ &= \sum_{i=0}^3 a_i^2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

olarak tarif edilir.

0 halde, eğer $h \neq 0$ ise,

$$h \frac{h^*}{\mathcal{N}(h)} = 1$$

olup,

$$h^{-1} = \frac{h^*}{\mathcal{N}(h)} \quad (4.2.7)$$

elde ederiz.

Lemma 1

Kuaternionların $\mathbb{H}$ cebiri, bir bölüm cebiridir, yani her $h \neq 0$ kuaternionu için bir h^{-1} invers kuaternionu mevcuttur:

$$hh^{-1} = 1 = h^{-1}h \quad (4.2.8)$$

Aşağıdaki lemma, $\mathbb{H}$ cebirinin, $M_2(\mathbb{C})$ matris cebirinin bir alt cebirine izomorfik olduğunu ifade eder.

Lemma 2.

Her bir $h \in \mathbb{H}$ kuaternionu için, $\phi(h) \in M_2(\mathbb{C})$ elemanı

$$\phi(h) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -a_2 + a_3 i & a_0 - a_1 i \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} i &\leftrightarrow e_1 \\ i^2 &= -1 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ile tanımlıdır. Dolayısı ile

$$h \longrightarrow \phi(h)$$

tasviri, bire-birdir ve

$$\phi(h_1 h_2) = \phi(h_1) \phi(h_2) \quad (4.2.10)$$

olduğundan, bu tasvir, bir cebir monomorfizmidir. Çünkü ϕ , lineerdir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \det[\phi(h)] &= \sum_{i=0}^3 a_i^2 \\ &= \mathcal{N}(h) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

yazılır.

Şimdi, bir

$$\Psi : GL(n, \mathbb{H}) \longrightarrow GL(2n, \mathbb{C}) \quad (4.2.12)$$

bire-bir homomorfizmini oluşturacağız ve böylece, $GL(n, \mathbb{H})$ grubundaki bir h elemanı için $\Psi(h)$ nin determinantını, h nin determinantına bağlayacağız.

Önce, aşağıdaki tekabülü yapalım:

$$e_1 \longleftrightarrow i, \quad e_2 \longleftrightarrow j, \quad e_3 \longleftrightarrow k. \quad (4.2.13)$$

Bu takdirde, x ve y , kompleks olarak düşünülebilen iki eleman ve

$$x = a_0 + a_1 i, \quad y = a_2 + a_3 i \quad (4.2.14)$$

olmak üzere, bir $h = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaternionu

$$\begin{aligned} h &= x + yj \\ &= x + j\bar{y} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şekildeki iki kuaternionun çarpımı

$$\begin{aligned} hh' &= (x + yj)(u + j\bar{v}) \\ &= (xu - y\bar{v}) + (xv + y\bar{u})j \end{aligned} \quad (4.2.16a)$$

ve

$$h'h = (ux - v\bar{y}) + (v\bar{x} + uy)j \quad (4.2.16b)$$

şeklindedir.

Şimdi,

$$\phi : \mathbb{H} \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \quad (4.2.17)$$

tasviri, (4.2.14) bağıntılarına göre, $h \in \mathbb{H}$ elemanı için

$$\phi(h) = \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix} = Q \quad (4.2.18)$$

matrisini verir.

$h \in M_n(\mathbb{H})$ için $\Psi(h) = \phi(h_{ij})$ seçelim. Yani $\Psi(h)$, ij -durumundaki 2×2 -bloku $\phi(h_{ij})$ olan $2n \times 2n$ -kompleks matris olsun.

Lemma 3.

$$\Psi(hh') = \Psi(h)\Psi(h') \quad (4.2.19)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, $h \in GL(n, \mathbb{H})$ olsun. Bu takdirde, $hh^{-1} = I = h^{-1}h$ ile $h^{-1} \in GL(n, \mathbb{H})$ invers elemanı mevcuttur. Dolayısıyla,

$$I = \Psi(hh^{-1}) = \Psi(h)\Psi(h^{-1})$$

eşitliğinden,

$$\Psi(h^{-1}) = (\Psi(h))^{-1} \quad (4.2.20)$$

çıkar. O halde $\Psi(h)$, singüler değildir ve $\det \Psi(h) \neq 0$ olur.

Tersine olarak, $\det \Psi(h) \neq 0$ olduğunu kabul edersek, $(\Psi(h))^{-1}$ inversi mevcuttur ve $\Psi(GL(n, \mathbb{H})) \subset GL(2n, \mathbb{C})$

grubunun alt grubu olduğundan, $(\Psi(h))^{-1} \in \Psi(GL(n, \mathbb{H}))$ olur. O halde, $\Psi(h^{-1}) = (\Psi(h))^{-1}$ olacak şekilde bir $h^{-1} \in GL(n, \mathbb{H})$ elemanı vardır. Buna göre, $I = \Psi(hh^{-1})$ olup Ψ , bire-bir olduğundan, $hh^{-1} = I$ olur. Buradan, h nın non-singüler olduğu çıkar.

Şimdi, $n = 1$ halini gözönüne alalım ve $\mathcal{N}(h) = 1$ olsun. Bu takdirde, normu 1 olan kuaternionların cümlesi, çarpmaya göre bir grup formundadır. Bu grubu $Sp(1)$ ile gösterelim. Bu durumda, $hh^* = 1$ olup,

$$h^{-1} = h^* \quad (4.2.21)$$

elde edilir.

Bir grup olarak $Sp(1)$, $SU(2)$ grubuna izomorfiktir: $SU(2)$, $AA^+ = I$ ve $\text{Det} A = 1$ şartlarını sağlayan bütün 2×2 -kompleks matrislerin cümlesi idi. $Sp(1)$ grubundaki işlem, kuaternionların çarpımı ve $SU(2)$ grubundaki işlem, matris çarpımıdır.

Tanım:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

olmak üzere

$$A^T J A = J \quad (4.2.23)$$

bağıntısını sağlayan matrislere simplektik matris denir.

Bütün simplektik matrislerin grubu $Sp(n)$ ile gösterilir:

$$Sp(n) = \left\{ h \in M_n(\mathbb{H}) : h^+ = h^{-1} \right\}. \quad (4.2.24)$$

4.3. q-Kuaternionlar ve Kuaternionik Matris Grupları

$\mathbb{H}$ kuaternion cebirinin kuantum deformasyonunu, kuantum matris teori ve non-komutatifliği kullanarak yapabiliriz.

$\mathbb{H}$ kuaternion cebirinin q-deforme cebirini $\mathbb{H}_q$ ile gösterelim. Bu takdirde, bir

$$h = a + bi + cj + dk$$

kuaternionu, $\mathbb{H}_q$ kuaternion cebirine ait ise, h nın bileşenleri üzerine

$$(a + bi)c = qc(a + bi) \quad (4.3.1a)$$

$$(a + bi)d = qd(a + bi) \quad (4.3.1b)$$

$$cd = dc \quad (4.3.1c)$$

$$(a - bi)c = q^{-1}c(a - bi) \quad (4.3.1d)$$

$$(a - bi)d = q^{-1}d(a - bi) \quad (4.3.1e)$$

$$ab - ba = \frac{1}{2} (q^{-1} - q)(c^2 + d^2) \quad (4.3.1f)$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntılarını yükleriz.

Şimdi, $\mathbb{H}_q$ kuaternionik kuantum cebirindeki $*$ -işlemi, aşağıdaki şekilde tarif edilebilir: Bunun için (4.2.10) ile verilen Q matrisinin

$$Q^+Q = I$$

şeklindeki bağıntıyı sağlamasından faydalanırız. Gerekli işlemleri yaptığımızda $h \in \mathbb{H}_q$ kuantum kuaternionunun bileşenleri için

$$a^* = a \quad ; \quad b^* = b \quad (4.3.2a,b)$$

$$c^* = -\frac{1}{2} \left[(q + q^{-1})c - i(q - q^{-1})d \right] \quad (4.3.2c)$$

$$d^* = -\frac{1}{2} \left[i(q - q^{-1})c + (q + q^{-1})d \right] \quad (4.3.2d)$$

olduklarını görürüz. Not olarak, j ve k taban elemanları ile c^* ve d^* jeneratörleri komutatatif değildir ve

$$c^*j + d^*k = -\frac{1}{q}(c + di)j \quad (4.3.3a)$$

bağıntısı sağlanır. Şimdi, (4.3.2c,d) bağıntılarına göre

$$cc^* + dd^* = -\frac{1}{2}(q + q^{-1})(c^2 + d^2) \quad (4.3.3b)$$

$$i(dc^* - cd^*) = -\frac{1}{2}(q - q^{-1})(c^2 + d^2) \quad (4.3.3c)$$

olur. Ayrıca,

$$(a + bi)(c^*j + d^*k) = -\frac{1}{q}(c + di)(a + bi)j \quad (4.3.3d)$$

$$(cj + dk)(a - bi) = (c + di)(a + bi)j \quad (4.3.3e)$$

olduklarından, h kuantum kuaternionunun kuantum normunu

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_q(h) &= hh^* = h^*h \\ &= a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(q + q^{-1})(c^2 + d^2) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

şeklinde buluruz. $\mathcal{N}_q(h)$ nin, $\mathcal{H}_q$ kuantum kuaternion

cebiri için merkezi eleman olduğu yani h nın bileşenlerinin hepsi ile komutatatif olduğu (4.2.4) ve (4.3.1) bağıntıları kullanılarak gösterilebilir.

Şimdi, $h \in H_q$ kuaternionu için; $-$ notasyonu adi kompleks sayıların eşleniğini göstermek üzere

$$x = a + bi, \quad y = c + di$$

şeklinde alırsak,

$$\bar{x} = a - bi, \quad \bar{y} = (c - di)$$

yazarız. Buna göre, Q matrisi

$$Q = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

şeklini alır ve (4.3.1a-f) bağıntılarından

$$xy = q yx \quad (4.3.6a)$$

$$x\bar{y} = q \bar{y} x \quad (4.3.6b)$$

$$y\bar{y} = \bar{y} y \quad (4.3.6c)$$

$$x\bar{x} - \bar{x} x = (q^{-1} - q) y\bar{y} \quad (4.3.6f)$$

şeklindeki q -komutasyon bağıntıları çıkar. Eğer Q matrisinin matris elemanları için

$$\overline{(ab)} = \bar{b} \bar{a}$$

eşitliğini tanımlarsak, $q \in \mathbb{R}$ olmak şartıyla,

$$y\bar{x} = q \bar{x} y \quad (4.3.6d)$$

$$\bar{y} \bar{x} = q \bar{x} \bar{y} \quad (4.3.6e)$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu şekildeki Q matrislerinin oluşturduğu kuantum(kuaternionik) grubunu $\mathbb{H}_q(2)$ ile gösterelim.

Şimdi $Q \in \mathbb{H}_q(2)$ matrisinin kuantum determinanti

$$\mathcal{D}_q(Q) = x\bar{x} + q y\bar{y} \quad (4.3.7a)$$

$$= \bar{x} x + q^{-1} y\bar{y} \quad (4.3.7b)$$

şeklindedir.

Yukarıda, $Q \in \mathbb{H}_q(2)$ matrisinin elemanları arasında tanımlanan q -komutasyon bağıntıları yardımıyla $\mathcal{D}_q(Q)$ nun Q matrisinin bütün elemanları ile komutatatif olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $\mathcal{D}_q(Q)$, bir sayı olarak düşünülebilir.

Eğer, kesim 4.2 de (4.2.22) ile verilen J matrisi için

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

alırsak,

$$Q^T J_q Q = \mathcal{D}_q(Q) J_q \quad (4.3.9a)$$

$$Q J_q Q^T = \mathcal{D}_q(Q) J_q \quad (4.3.9b)$$

bağıntıları, (4.3.6a-f) bağıntılarına denk olur.

$Q \in \mathbb{H}_q(2)$ matrisinin kuantum inversi

$$Q^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_q(Q)} \begin{pmatrix} \bar{x} & -q^{-1}y \\ q\bar{y} & x \end{pmatrix} \quad (4.3.10)$$

şeklinde olup, $Q^{-1} \in \mathbb{H}_{1/q}(2)$ olur.

$h \in \mathbb{H}_q$ kuaternionunun kuantum normu,

$$\mathcal{N}_q(h) = x\bar{x} + q y\bar{y} \quad (4.3.11)$$

şeklinde olduğundan,

$$\mathcal{D}_q(Q) = \mathcal{N}_q(h) \quad (4.3.12)$$

olur. Şimdi,

$$P = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

matrisi de $\mathbb{H}_q(2)$ ye ait olsun. Bu takdirde, Q matrisinin elemanları, $P \in \mathbb{H}_q(2)$ matrisinin elemanları ile komutatatif ise,

$$QP \in \mathbb{H}_q(2) \quad \text{ve} \quad PQ \in \mathbb{H}_q(2)$$

olur. Üstelik,

$$\mathcal{D}_q(QP) = \mathcal{D}_q(Q)\mathcal{D}_q(P) = \mathcal{D}_q(P)\mathcal{D}_q(Q)$$

yazılır.

$Q_{ij} \in \mathbb{H}_q(2)$ ve $P_{ij} \in \mathbb{H}_q(2)$ matrislerini $i, j = 1, 2$ için

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} & y_{ij} \\ -\bar{y}_{ij} & \bar{x}_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.3.14)$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} z_{ij} & w_{ij} \\ -\bar{w}_{ij} & \bar{z}_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.3.15)$$

şeklinde alalım. Ayrıca,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ve

$$E_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \delta_{1\alpha} & \delta_{j\beta} \end{bmatrix}$$

yani $E_{\alpha\beta}$ matrisinin elemanları

$$(E_{\alpha\beta})_{ij} = \delta_{1\alpha} \delta_{j\beta}$$

şeklinde olmak üzere M_1 ve M_2 matrislerini

$$M_1 = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} \otimes Q_{ij} \quad (4.3.16a)$$

$$M_2 = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} \otimes P_{ij} \quad (4.3.16b)$$

şeklinde alalım ve $GL(2, \mathbb{H}_q(2))$ ile, elemanları (4.3.6a-f) ile verilen bağıntıları sağlayan, 4x4-tipindeki kuaternionik matrislerin grubunu gösterelim. Not olarak, M_1 matrisi $GL(2, \mathbb{H}_q(2))$ grubuna ait olduğunda bu M_1 matrisinin matris elemanları olan 2x2-tipindeki Q_{ij} ($i, j=1, 2$) kuaternionik matrisleri üzerine komutasyon bağıntısı yüklemiyoruz.

Şu halde, $GL(2, \mathbb{H}_q(2))$ grubu, $GL_q(4, \mathbb{C})$ kuantum grubunun alt grubudur. Şimdi,

$$A = \sum_{i=1}^2 Q_{ik} P_{kj} \quad , \quad i, j=1, 2 \quad (4.3.17)$$

olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (A_{ij})$$

alalım. Eğer

$$a_{ij}^k = x_{ik} z_{kj} - y_{ik} \bar{w}_{kj} \quad (4.3.18a)$$

$$b_{ij}^k = x_{ik} w_{kj} + y_{ik} \bar{z}_{kj} \quad (4.3.18b)$$

yazarsak,

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ij}^k \quad (4.3.19a)$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^2 b_{ij}^k \quad (4.3.19b)$$

eşitlikleri ile

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} \\ -\bar{\beta}_{ij} & \bar{\alpha}_{ij} \end{bmatrix}, \quad i,j=1,2 \quad (4.3.20)$$

elde ederiz. Şimdi,

$$Q_{ij} \in H_q(2) \quad \text{ve} \quad P_{ij} \in H_q(2)$$

olduklarından, (4.3.6a-f) bağıntıları yardımıyla, Q_{ij} ve P_{ij} ($i,j=1,2$) matrislerinin matris elemanlarının komutatatif olduklarını gözönüne alarak, $i,j,k=1,2$ için

$$a_{ij}^k b_{ij}^k = q b_{ij}^k a_{ij}^k \quad (4.3.21a)$$

$$a_{ij}^k (\overline{b_{ij}^k}) = q (\overline{b_{ij}^k}) a_{ij}^k \quad (4.3.21b)$$

$$(\overline{a_{ij}^k}) b_{ij}^k = q^{-1} b_{ij}^k (\overline{a_{ij}^k}) \quad (4.3.21c)$$

$$(\overline{a_{ij}^k}) (\overline{b_{ij}^k}) = q^{-1} (\overline{b_{ij}^k}) (\overline{a_{ij}^k}) \quad (4.3.21d)$$

bağıntılarını buluruz. Ayrıca, $i=1,2$ için $M_i \in GL(2, H_q(2))$ olduklarından da,

$$a_{ij}^1 a_{ij}^2 = q^2 a_{ij}^2 a_{ij}^1 \quad (4.3.22a)$$

$$\overline{(a_{ij}^1)} \overline{(a_{ij}^2)} = q^2 \overline{(a_{ij}^2)} \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.22b)$$

$$\overline{(a_{ij}^1)} a_{ij}^2 = a_{ij}^2 \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.22c)$$

$$a_{ij}^1 \overline{(a_{ij}^2)} - \overline{(a_{ij}^2)} a_{ij}^1 = r b_{ij}^1 \overline{(b_{ij}^2)} + b_{ij}^2 \overline{(b_{ij}^1)} \quad (4.3.22d)$$

$$a_{ij}^1 b_{ij}^2 = q b_{ij}^2 a_{ij}^1 - q r a_{ij}^2 b_{ij}^1 \quad (4.3.23a)$$

$$a_{ij}^1 \overline{(b_{ij}^2)} = q \overline{(b_{ij}^2)} a_{ij}^1 - q r a_{ij}^2 \overline{(b_{ij}^1)} \quad (4.3.23b)$$

$$\overline{(a_{ij}^1)} b_{ij}^2 = q b_{ij}^2 \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.23c)$$

$$\overline{(a_{ij}^1)} \overline{(b_{ij}^2)} = q \overline{(b_{ij}^2)} \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.23d)$$

$$b_{ij}^1 a_{ij}^2 = q a_{ij}^2 b_{ij}^1 \quad (4.3.24a)$$

$$\overline{(b_{ij}^1)} a_{ij}^2 = q a_{ij}^2 \overline{(b_{ij}^1)} \quad (4.3.24b)$$

$$b_{ij}^1 \overline{(a_{ij}^2)} = q \overline{(a_{ij}^2)} b_{ij}^1 - q r b_{ij}^2 \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.24c)$$

$$\overline{(b_{ij}^1)} \overline{(a_{ij}^2)} = q \overline{(a_{ij}^2)} \overline{(b_{ij}^1)} - q r \overline{(b_{ij}^2)} \overline{(a_{ij}^1)} \quad (4.3.24d)$$

$$b_{ij}^1 b_{ij}^2 = q^2 b_{ij}^2 b_{ij}^1 \quad (4.3.25a)$$

$$\overline{(b_{ij}^1)} \overline{(b_{ij}^2)} = q^2 \overline{(b_{ij}^2)} \overline{(b_{ij}^1)} \quad (4.3.25b)$$

$$b_{ij}^1 \overline{(b_{ij}^2)} = \overline{(b_{ij}^2)} b_{ij}^1 + r \overline{(a_{ij}^1)} a_{ij}^2 \quad (4.3.25c)$$

$$(\overline{b_{ij}^1}) b_{ij}^2 = b_{ij}^2 (\overline{b_{ij}^1}) + r(\overline{a_{ij}^1}) a_{ij}^2 \quad (4.3.25d)$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu (4.3.21 -25) bağıntıları kullanılarak, aşağıdaki bağıntıları elde ederiz: $i,j=1,2$

$$\alpha_{ij} \beta_{ij} = q \beta_{ij} \alpha_{ij} \quad (4.3.26a)$$

$$\alpha_{ij} \bar{\beta}_{ij} = q \bar{\beta}_{ij} \alpha_{ij} \quad (4.3.26b)$$

$$\beta_{ij} \bar{\beta}_{ij} = \bar{\beta}_{ij} \beta_{ij} \quad (4.3.26c)$$

$$\beta_{ij} \bar{\alpha}_{ij} = q \bar{\alpha}_{ij} \beta_{ij} \quad (4.3.26d)$$

$$\bar{\beta}_{ij} \bar{\alpha}_{ij} = q \bar{\alpha}_{ij} \bar{\beta}_{ij} \quad (4.3.26e)$$

$$\alpha_{ij} \bar{\alpha}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \alpha_{ij} = (q^{-1} - q) \beta_{ij} \bar{\beta}_{ij} \quad (4.3.26e)$$

O halde, her $i,j=1,2$ için A_{ij} matrisleri $\mathbb{H}_q(2)$ ye aittir. Yani $A_{ij} \in \mathbb{H}_q(2)$ olur. Buna göre, $A \in GL(2, \mathbb{H}_q(2))$ yazılır.

Not olarak, (4.3.21-25) bağıntıları hesaplanırken, (4.3.16a-b) deki matrisler, 4×4 -tipinde matrisler olarak gözönüne alınmıştır. Bu hal ile M_1 ve M_2 matrislerinin matris elemanlarının alışılmış q -komutasyon bağıntılarını sağladığını biliyoruz.

BÖLÜM 5

KUANTUM GRUBU KOSETLERİ VE q -OSİLATÖRLERİ

5.1.Giriş

Burada, kısaca, osilatörlerden bahsedilecek. a ve a^* , bir C^* - cebirinin elemanları olsunlar ve

$$aa^* - a^*a = 1 \quad (5.1.1)$$

bağıntısını sağlasınlar. a ve a^* , bir osilatörün, sırasıyla, yoketme ve yaratma operatörleri olarak adlandırılır. a ve a^* operatörlerinin bir Hilbert uzayında temsillerini arayalım.

$$H = a^*a \quad (5.1.2)$$

alalım. λ , H nın bir özdeğeri ve x de λ ya tekabül eden özvektör olsun. Bu takdirde,

$$Hx = \lambda x \quad (5.1.3)$$

özdeğer denklemini yazarız. Bu denkleme sağdan a^* operatörünü uygularsak, (5.1.1) bağıntısını kullanarak,

$$(Ha^*)x = (1 + \lambda)a^*x \quad (5.1.4)$$

olduğunu buluruz. Şimdi de (5.1.3) denklemine sağdan a operatörünü uygularsak,

$$(Ha)x = (\lambda - 1)ax \quad (5.1.5)$$

ve ikinci adımda,

$$(Ha^2)x = (\lambda - 2)a^2x$$

elde ederiz. Bu şekilde devam ettiğimizde açıkça

şeklini alır. Böylece, n-inci durum için

$$(a^*a)x_n = nx_n \quad (5.1.7)$$

olur. O halde, N, özdeğerleri 0,1,2,... olan sayı operatörü ve $N = N^*$ olmak üzere

$$a^*a = N \quad (5.1.8)$$

bulunur. Buradan, (5.1.1) bağıntısı ile

$$aa^* = N + 1 \quad (5.1.9)$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, a , a^* ve N operatörleri arasındaki komutasyon bağıntıları, (5.1.1) , (5.1.8) ve (5.1.9) bağıntıları kullanılarak

$$aN - Na = a \quad (5.1.10a)$$

$$a^*N - Na^* = -a^* \quad (5.1.10b)$$

şeklinde bulunur.

5.2. Uniter Kuantum Grupları ve q-Osilatörleri

İlk olarak, $SU_q(2)$ uniter kuantum grubunu gözönüne alalım. Eğer $A \in SU_q(2)$ ise A^* , A matrisinin matris eşleniği olmak üzere

$$A^* A^T = I \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_q(A) = 1 \quad (5.2.1)$$

bağıntıları sağlansın.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* \\ a_3^* & a_4^* \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$A^* = (A^T)^{-1}$$

bağıntısıyla,

$$A^* = \begin{bmatrix} a_4 & -q^{-1}a_3 \\ -qa_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -qa_2^* & a_1^* \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

alabiliriz. Dolayısı ile, $A \in SU_q(2)$ için

$$(ab)^* = b^* a^*$$

ve $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a_1 a_2 = q a_2 a_1 \quad (5.2.3a)$$

$$a_1 a_2^* = q a_2^* a_1 \quad (5.2.3b)$$

$$a_2 a_2^* = a_2^* a_2 \quad (5.2.3c)$$

$$a_1 a_1^* + q^2 a_2 a_2^* = 1 = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 \quad (5.2.3d,e)$$

bağıntılarını yazarız. Böylece, (5.2.3d,e) bağıntıları yardımıyla,

$$a_1 a_1^* - q^2 a_1^* a_1 = 1 - q^2 \quad (5.2.4)$$

elde ederiz. Buna göre de

$$a_2^* a_2 = 1 - a_1^* a_1 \quad (5.2.5a)$$

$$= q^{-2} (1 - a_1 a_1^*) \quad (5.2.5b)$$

buluruz. Şimdi,

$$H = a_1^* a_1 \quad (5.2.6)$$

alalım. Bu takdirde, $H^* = H$ olup, H operatörü Hermityendir.

λ , H operatörünün özdeğeri ve x de λ özdeğerine tekabül eden özvektör olsun. Bu takdirde,

$$Hx = \lambda x \quad (5.2.7)$$

şeklindeki özdeğer denklemini yazarız.

Diğer taraftan, H operatörünün özdeğeri negatif değildir. Gerçekten,

$$\langle Hx, Hx \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle$$

$$\langle a_1 x, a_1 x \rangle \geq 0$$

olduklarından,

$$\langle a_1 x, a_1 x \rangle = \langle x, a_1^* a_1 x \rangle$$

$$= \langle x, Hx \rangle$$

$$= \lambda \langle x, x \rangle$$

olur. O halde x , λ özdeğerine tekabül eden sıfırdan farklı bir özvektör olduğundan,

$$\langle x, x \rangle > 0$$

olur. Buradan, $\lambda \geq 0$ çıkar.

Şimdi, $a_1 x$ vektörünün hangi özdeğere tekabül ettiğine bakalım. Bunun için H , a_1 operatörüne uygulanacak.

$$Ha_1 = a_1^* a_1 a_1 = (q^{-2} a_1 a_1^* + 1 - q^{-2}) a_1$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} Ha_1 &= q^{-2} a_1 a_1^* a_1 + (1 - q^{-2}) a_1 \\ &= q^{-2} a_1 H + (1 - q^{-2}) a_1 \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} (Ha_1)x &= \left[q^{-2} a_1 H + (1 - q^{-2}) a_1 \right] x \\ &= q^{-2} a_1 Hx + (1 - q^{-2}) a_1 x \\ &= (1 - q^{-2} + q^{-2} \lambda) a_1 x \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, $a_1 x$,

$$\lambda_1 = (1 - q^{-2} + q^{-2} \lambda)$$

özdeğerine tekabül eden özvektördür. Benzer şekilde, $a_1^2 x$, λ_2 özdeğerine tekabül ediyorsa,

$$\lambda_2 = (1 - q^{-2} + q^{-2} \lambda_1)$$

ve böylece devamla, $a_1^{n+1} x$, λ_{n+1} özdeğerine tekabül eden özvektör ise,

$$\lambda_{n+1} = (1 - q^{-2} + q^{-2} \lambda_n)$$

olur. Buradan,

$$\lambda_{n+1} - q^{-2} \lambda_n = 1 - q^{-2} \quad (5.2.8)$$

şeklindeki fark denklemini elde ederiz. Bu fark denkleminin karakteristikleri

$$\alpha - q^{-2} = 0$$

olup, $\alpha = q^{-2}$ ile homojen çözüm,

$$(\lambda_n)_h = K (q^{-2})^n$$

şeklinde bulunur. Burada K , bir sabittir.

Özel çözümün, K' bir sabit olmak üzere

$$(\lambda_n)_p = K' (1 - q^{-2})$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$(\lambda_{n+1})_p - q^{-2}(\lambda_n)_p = 1 - q^{-2}$$

olacaktır. Buradan, gerekli hesaplamalarla,

$$K' = \frac{q^2}{q^2 - 1}$$

bulunur. Buna göre,

$$(\lambda_n)_p = 1$$

olur.

Dolayısıyla, genel çözüm,

$$\lambda_n = 1 + K q^{-2n} \quad (5.2.9)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, $1 + K q^{-2n}$ özdeğerine tekabül eden özvektör $a_1^n x$ dir.

Şimdi,

$$0 < q < 1 \text{ ve } K \neq 0 \quad (5.2.10)$$

olduklarını kabul edelim. Bu takdirde, (5.2.3e)

denklemine göre, $a_1^* a_1$ operatörünün özdeğerleri 1 den büyük olamaz. O halde, $K < 0$ olmalıdır.

Ayrıca, $a_1^* a_1$ operatörünün özdeğerleri negatif olmadığından da $\lambda_n > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\lambda_n = 1 - |K| q^{-2n}$$

alabiliriz. Yine, $a_1^* a_1$ operatörünün özdeğerleri negatif olmadığından, $a_1^* a_1$ operatörünün özdeğerleri sıfır olacak şekilde bir n' sayısı bulunabilir. Diğer bir ifadeyle

$$a_1^* a_1 (a_1^{n'} x) = 0$$

olacak şekilde bir n' sayısı vardır. Buna göre,

$$1 - |K| q^{-2n'} = 0$$

olup,

$$|K| = q^{2n'}$$

bulunur. O halde,

$$\lambda_n = 1 - q^{2(n' - n)} \quad (5.2.11)$$

olup,

$$n = n', n' - 1, n' - 2, \dots$$

ve

$$n' - n = k$$

için, özdeğerler, $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\lambda_k = 1 - q^{2k} \quad (5.2.12)$$

olur.

Sonuç olarak, gösterdik ki N , özdeğerleri $0, 1, 2, \dots$ olan sayı operatörü olmak üzere

$$a_1^* a_1 = 1 - q^{2N} \quad (5.2.13)$$

dir. Buna göre de (5.2.3d) bağıntısından,

$$a_1 a_1^* = 1 - q^{2(N+1)} \quad (5.2.14)$$

elde ederiz.

Şimdi, $a_2 a_2^*$ operatörünün durumuna bakalım.

$$a_2^* a_2 = 1 - a_1^* a_1 = q^{-2} (1 - a_1 a_1^*)$$

olduğundan, (5.2.13) bağıntısından, hemen

$$a_2 a_2^* = q^{2N} \quad (5.2.15)$$

bulunur. Buna göre α , $\alpha^* = \alpha$ özelliğini sağlayan (yani Hermityen olan) bir operatör ve $\epsilon^2 = -1$ olmak üzere a_2 operatörünü ,

$$a_2 = e^{i\alpha} q^N \quad (5.2.16)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan, $N^* = N$ olmak üzere

$$a_2^* = q^N e^{-i\alpha} \quad (5.2.17)$$

elde edilir. Böylece, (5.2.15) bağıntısı ile,

$$e^{i\alpha} q^N = q^N e^{i\alpha} \quad (5.2.18a)$$

$$e^{-i\alpha} q^N = q^N e^{-i\alpha} \quad (5.2.18b)$$

olduklarını buluruz. Ayrıca, (5.2.13) bağıntısından,

$$q^N = \left[1 - a_1^* a_1 \right]^{1/2} \quad (5.2.19)$$

elde ederiz. Buna göre, (5.2.3a) ve (5.2.18) bağıntılarından da

$$e^{i\alpha} a_1 = a_1 e^{i\alpha} \quad (5.2.20a)$$

olduğu çıkar. Benzer şekilde,

$$e^{i\alpha} a_1^* = a_1^* e^{i\alpha} \quad (5.2.20b)$$

$$e^{-i\alpha} a_1 = a_1 e^{-i\alpha} \quad (5.2.21a)$$

$$e^{-i\alpha} a_1^* = a_1^* e^{-i\alpha} \quad (5.2.21b)$$

olur. Ayrıca, (5.2.20a) bağıntısından, (5.2.3a) ile

$$a_1 q^N = q^{N+1} a_1 \quad (5.2.22a)$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$a_1^* q^N = q^{N-1} a_1^* \quad (5.2.22b)$$

bulunur. Şimdi, τ , negatif bir sayı olmak üzere

$$q = e^\tau$$

alalım. Bu takdirde, (5.2.22a) bağıntısından,

$$a_1 e^{\tau N} = e^{\tau(N+1)} a_1$$

olup, e^x in Mac-Laurin serisi

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

olduğundan,

$$a_1 e^{\tau N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} a_1 N^m$$

$$e^{\tau(N+1)} a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} (N+1)^m a_1$$

olduklarını görürüz. Bu iki eşitlikten,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} a_1 N^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} (N+1)^m a_1$$

olup, bu toplamları açar ve τ ların katsayılarını özdeşleştirirsek,

$$a_1 N = (N+1) a_1, \dots \quad (5.2.23)$$

elde ederiz. Buradan, hemen,

$$N a_1^* = a_1^* (N+1) \quad (5.2.24)$$

çıkar.

Sonuç olarak, ispat ettik ki; $SU_q(2)$ üniter kuantum grubundaki matrislerin matris elemanları, q -osilatörüdür ve

$$a a^* - q^2 a^* a = 1 - q^2 \quad (5.2.25a)$$

$$a N - N a = a \quad (5.2.25b)$$

$$a^* N - N a^* = -a^* \quad (5.2.25c)$$

şeklindeki komutasyon bağıntılarını sağlarlar.

5.3. Kuantum Grubu Kosetleri ve Kovaryant q-Osilatörleri

Bu kesimde, kuantum gruplarının parametrizasyonu, bağımsız operatörler cinsinden incelenmiştir. Önce $SU_q(2)$ üniter kuantum grubu gözönüne alınmış ve bu kuantum grubunu tanımlayan 2×2 -matrislerin q-sayı elemanlarının; $SU_q(2)/U(1)$ koseti ile özdeşleştirilebilen, her şeyle komutatif bir faz ile birlikte bir q-osilatörü verdiği ispatlanmıştır. İnceleme, $SU_q(3)$ kuantum grubu için de gerçekleştirildi ve bu durum, $SU_q(n)$ kuantum grubu için genelleştirildi.

İlk olarak, $SU_q(2)$ grubunu gözönüne alalım. Bir defa, (5.2.19) bağıntısını (5.2.16) bağıntısında kullanarak, a_2 matris elemanını

$$a_2 = e^{i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} \quad (5.3.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece, (5.3.2) ile verilen $A \in SU_q(2)$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & e^{i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} \\ -q e^{-i\alpha} (1 - a_1^* a_1)^{1/2} & a_1^* \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

şeklini alır. Şimdi, a_1 operatörünü

$$a_1 = e^{i\alpha} a \quad (5.3.3)$$

şeklinde tarif edelim. Bu takdirde,

$$a^* = a_1^* e^{-i\alpha}$$

olup,

$$aa^* = a_1 a_1^*$$

bulunur. Buna göre, (5.3.2) deki matris

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} a & e^{i\alpha} (1-a^* a)^{1/2} \\ -q e^{-i\alpha} (1-a^* a)^{1/2} & e^{-i\alpha} a^* \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan,

$$a' = (1 - a^* a)^{1/2} \quad (5.3.4)$$

olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' \\ -q a' & a^* \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

elde ederiz. Burada,

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

şeklindeki elemanlar, $SU_q(2)$ grubunun bir $U(1)$ altgrubunu oluşturur. O halde,

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ -q a' & a^* \end{pmatrix}$$

matrisi, $SU_q(2)/U(1)$ kosetinin bir temsilcisi olarak alınabilir. O halde, koset üyeleri ile q -osilatörleri arasında bir bire-bir tekabül vardır. Sonuç olarak, aşağıdaki teoremi ispat ettik: $SU_q(2)/U(1)$ koseti, q -osilatördür ve

$$A(a) = \begin{bmatrix} a & a' \\ -qa' & a^* \end{bmatrix} \quad (5.3.6)$$

matrisinin matris elemanları arasında

$$aa^* - q^2 a^* a = 1 - q^2 \quad (5.3.7)$$

şeklindeki osilatör bağıntısı sağlanır ve gerekli hesaplamalar yapıldığında, $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$a(a^*)^n = (1 - q^{2n})a^{*(n-1)} + q^{2n}(a^*)^n a \quad (5.3.8a)$$

$$a^n a^* = (1 - q^{2n})a^{n-1} + q^{2n}a^* a^n \quad (5.3.8b)$$

oldukları görülür.

Şimdi, aşağıdaki matrisi gözönüne alalım.

$$X(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

Bu takdirde,

$$X(\alpha, \beta) = X\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) X\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right) \quad (5.3.10)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$A(a)X(\alpha, \alpha) = X(\alpha, \alpha) A(a) \quad (5.3.11a)$$

$$A(a)X(\alpha, -\alpha) = X(-\alpha, \alpha) A(e^{2i\alpha} a) \quad (5.3.11b)$$

olduklarını görürüz. Ayrıca,

$$A(a)X(\alpha, \beta) = X(\beta, \alpha) A(e^{i(\alpha-\beta)} a) \quad (5.3.12)$$

olur. Eğer

$$X_1(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_2(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix} \quad (5.3.13)$$

alırsak,

$$X_{12}(\alpha, \beta) = X_1(\alpha)X_2(\beta) \quad (5.3.14)$$

olur. Buradan,

$$A(a)X_1(\alpha) = X_2(\alpha)A(e^{i\alpha}a) \quad (5.3.15a)$$

$$A(a)X_2(\alpha) = X_1(\alpha)A(e^{-i\alpha}a) \quad (5.3.15b)$$

şeklindeki komutasyon bağıntılarının sağlandığı görülür.

Şimdi,

$$A_{12}(a_i) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.16)$$

matrisini gözönüne alalım. İlk olarak, $A_{12}(a_i)$ matrisinin $SL_q(2, \mathbb{C})$ kuantum grubuna ait olduğunu kabul edersek, (3.1.5a-e) bağıntılarına ilave olarak

$$a_1a_4 - qa_2a_3 = 1 = a_4a_1 - q^{-1}a_2a_3 \quad (5.3.17a,b)$$

bağıntıları sağlanır.

Benzer şekilde,

$$A_{23}(b_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad (5.3.18)$$

matrisi de $SL_q(2, \mathbb{C})$ grubuna ait ise, farklı matrislerin matris elemanları birbirleriyle komutatatif olmak şartıyla $SL_q(3, \mathbb{C})$ grubundaki keyfi bir matris

$$M = A_{12}(a_i)A_{23}(b_i)A_{12}(c_i) \quad (5.3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Gerçekten, M matrisinin açık şekli

$$M = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2b_1c_3 & a_1c_2 + a_2b_1c_4 & a_2b_2 \\ a_3c_1 + a_4b_1c_3 & a_3c_2 + a_4b_1c_4 & a_4b_2 \\ b_3c_3 & b_3c_4 & b_4 \end{pmatrix} \quad (5.3.20)$$

olup, gerekli hesaplamalar yapıldığında $M = (m_{ij})$ olmak üzere $r = q - q^{-1}$ ile

$$m_{ij}m_{ik} = qm_{ik}m_{ij} \quad , \quad j < k$$

$$m_{ji}m_{ki} = qm_{ji}m_{ki} \quad , \quad j < k$$

$$m_{ij}m_{kl} = m_{kl}m_{ij} \quad , \quad i < k \text{ ve } j > l$$

$$m_{ij}m_{kl} - m_{kl}m_{ij} = rm_{ik}m_{jl} \quad , \quad i < k \text{ ve } j < l$$

elde edilir. O halde, $M \in GL_q(3, \mathbb{C})$ dir. Üstelik

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q(M) &= \mathcal{D}_q[A_{12}(a)A_{23}(b)A_{12}(c)] \\ &= \mathcal{D}_q[A_{12}(a)]\mathcal{D}_q[A_{23}(b)]\mathcal{D}_q[A_{12}(c)] \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. O halde, $M \in SL_q(3, \mathbb{C})$ olur.

Şimdi, $A_{12}(a_i)$, $A_{23}(b_i)$ ve $A_{12}(c_i)$ kuantum matrislerinin matris elemanlarını, M matrisinin m_{ij} elemanları (ve bu elemanların kuantum kofaktörleri) cinsinden çözebiliriz. Eğer b_2 ve b_3 elemanları invertibil ise, her bir $A_{ij}(x_k)$ matrisi $SL_q(2, \mathbb{C})$ grubuna ait olduğundan

$$a_1 = c_4m_{11} - q^{-1}c_3m_{12} \quad , \quad a_2 = b_2^{-1}m_{13}$$

$$a_3 = c_4m_{21} - q^{-1}c_3m_{22} \quad , \quad a_4 = b_2^{-1}m_{23}$$

$$b_1 = a_1m_{21} - qa_3m_{11} \quad , \quad b_2 = b_2$$

$$b_3 = b_3 \quad , \quad b_4 = m_{33}$$

$$c_1 = a_4m_{11} - q^{-1}a_2m_{21} \quad , \quad c_3 = b_3^{-1}m_{31}$$

$$c_2 = a_4m_{12} - q^{-1}a_2m_{22} \quad , \quad c_4 = b_3^{-1}m_{32}$$

olduklarını buluruz. Şimdi, $M = (m_{ij})$ matrisinin m_{ij} elemanının kuantum kofaktörünü M_{ij} ile gösterirsek, gerekli hesaplamaları yaptığımızda

$$a_1 = b_3^{-1} M_{23} \quad , \quad a_2 = b_2^{-1} m_{13} \quad (5.3.21)$$

$$a_3 = b_3^{-1} M_{13} \quad , \quad a_4 = b_2^{-1} m_{23}$$

$$b_1 = M_{33} \quad , \quad b_4 = m_{33} \quad (5.3.22)$$

$$c_1 = b_2^{-1} M_{32} \quad , \quad c_2 = b_2^{-1} m_{31} \quad (5.3.23)$$

$$c_3 = b_3^{-1} M_{31} \quad , \quad c_4 = b_3^{-1} m_{32}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$b_1 b_4 - q b_2 b_3 = 1$$

bağıntısından,

$$b_2 b_3 = q(m_{33} M_{33} - 1) \quad (5.3.24)$$

bulunur. Bu denklemden, b_2 ve b_3 elemanlarından biri serbest bırakılırsa, diğeri tam olarak belirlenebilir.

Sonuç olarak, (5.3.19) daki gibi ifade edilebilen bir $M \in SL_q(3, \mathbb{C})$ matrisi için $A_{ij}(x_k)$ matrislerinin, b_2 (veya b_3) hariç, diğeri bütün elemanların M matrisinin m_{ij} elemanları cinsinden çözülebileceğini göstermiş olduk.

Eğer $A_{23}(b_i)$ matrisini, M matrisinin matris elemanları ve bu elemanların kuantum kofaktörleri cinsinden yazarsak,

$$A_{23}(b_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{33} & b_2 \\ 0 & b_3 & m_{33} \end{pmatrix} \quad (5.3.25)$$

elde ederiz. Böylece, $A_{23}(b_i)$ matrisi $SU_q(2)$ grubuna ait

olduğunda, bu matrisin b_2 elemanını

$$b_2 = e^{i\beta} q^N$$

şeklinde parametrize ederiz. Buna göre,

$$b_3 = -e^{-i\beta} q^{N+1}$$

olur ve $A_{23}(b_1)$ matrisi

$$\begin{aligned} A_{23}(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{33} & e^{i\beta} q^N \\ 0 & -e^{-i\beta} q^{N+1} & m_{33} \end{pmatrix} \\ &= X_2(\beta) X_3(-\beta) A_{23}(b) \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu matrisin determinanı 1 olduğundan,

$$M_{33} m_{33} + q^{2(N+1)} = 1$$

veya

$$M_{33} m_{33} = 1 - q^{2(N+1)}$$

çıkar. Bu ise, ikinci determinant ifadesi ile birlikte

$$M_{33} m_{33} - q^2 m_{33} M_{33} = 1 - q^2 \quad (5.3.26)$$

bağıntısını verir. Aynı işlemler, $A_{12}(a_i)$ ve $A_{12}(c_i)$

matrisleri için de tekrarlandığında, (5.3.26)

bağıntısının elde edileceği 3x3-kuantum matrisleri için

(3.3.7) ile verilen kuantum determinant ifadesinden

görülebilir.

Şimdi, $A_{12}(a_i)$ matrisinin $SU_q(2)$ grubuna ait olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $A_{12}(a_i)$ matrisi

$$A_{12}(a_i) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ -q a_2^* & a_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce yapılan işlemler tekrar

edilerek de,

$$X_1(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.28a)$$

$$X_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.28b)$$

$$X_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (5.3.28c)$$

alırsak, $i = 1, 2$ için

$$X_{ij}(\alpha, \beta) = X_i(\alpha)X_j(\beta), \quad i < j \quad (5.3.29)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_{12}(a_1) &= X_{12}(\alpha, -\alpha)A_{12}(a) \\ &= X_1(\alpha)X_2(-\alpha)A_{12}(a) \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

olduğunu görüyoruz. Burada $A_{12}(a)$ matrisi, $a' = (1 - a^*a)^{1/2}$ olmak üzere

$$A_{12}(a) = \begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ -qa' & a^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3.31)$$

şeklindedir.

Ayrıca, $A_{12}(a)$ ve $X_{ij}(\alpha, \beta)$ matrisleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları, $i^2 = -1$ olmak üzere

$$A_{12}(a)X_1(\alpha) = X_2(\alpha) A_{12}(e^{i\alpha}a) \quad (5.3.32a)$$

$$A_{12}(a)X_2(\alpha) = X_1(\alpha) A_{12}(e^{-i\alpha}a) \quad (5.3.32b)$$

$$A_{12}(a)X_3(\alpha) = X_3(\alpha) A_{12}(a) \quad (5.3.32c)$$

şeklindedir.

Benzer düşüncelerle, (5.3.18) ile verilen $A_{23}(b_i)$ matrisi $SU_q(2)$ grubuna ait ise, bu matrisi

$$A_{23}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & b' \\ 0 & -qb' & b^* \end{pmatrix} \quad (5.3.33)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A_{23}(b_i) &= X_{23}(\beta, -\beta) A_{23}(b) \\ &= X_2(\beta) X_3(-\beta) A_{23}(b) \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

şeklinde ifade edebiliriz. $A_{23}(b)$ matrisi ile $X_{ij}(\alpha, \beta)$ matrisleri arasında aşağıdaki komutasyon bağıntıları sağlanır:

$$A_{23}(b)X_1(\beta) = X_1(\beta) A_{23}(b) \quad (5.3.35a)$$

$$A_{23}(b)X_2(\beta) = X_3(\beta) A_{23}(e^{i\beta}b) \quad (5.3.35b)$$

$$A_{23}(b)X_3(\beta) = X_2(\beta) A_{23}(e^{-i\beta}b) \quad (5.3.35c)$$

Bu yapılanlara göre, (5.3.19) daki M matrisi $SU_q(3)$ grubuna ait olduğunda, bu M matrisi, $SU_q(2)$ grubuna ait A_{ij} matrisleri ve bu matrislerin X_{ij} fazları cinsinden

$$M = X_{12}(\alpha, -\alpha) A_{12}(a) X_{23}(\beta, -\beta) A_{23}(b) X_{12}(\gamma, -\gamma) A_{12}(c) \quad (5.3.36)$$

şeklinde ifade edilebilir. Fakat, A_{ij} matrisleri ve X_{ij} fazları arasında

$$A_{12}(a)X_{12}(\gamma, -\gamma) = X_{12}(\gamma, -\gamma)A_{12}(e^{i\gamma}a) \quad (5.3.37a)$$

$$A_{12}(a)X_{23}(\beta, -\beta) = X_{13}(\beta, -\beta)A_{12}(e^{-i\beta}a) \quad (5.3.37b)$$

$$A_{12}(e^{-i\beta}a)X_{13}(\gamma, -\gamma) = X_{23}(\gamma, -\gamma)A_{12}(e^{i(\gamma-\beta)}a) \quad (5.3.37c)$$

$$A_{23}(b)X_{12}(\gamma, -\gamma) = X_{13}(\gamma, -\gamma)A_{23}(e^{-i\gamma}b) \quad (5.3.37d)$$

şeklindeki komutasyon bağıntıları sağlandığından, (5.3.36) daki M matrisi,

$$M = X_1(\alpha+\beta)X_2(-\alpha+\gamma)X_3(-\beta-\gamma)A_{12}(e^{i(\gamma-\beta)}a)A_{23}(e^{-i\gamma}b)A_{12}(c) \quad (5.3.38)$$

şekline gelir.

Sonuç olarak, aşağıdaki teoremi ispat ettik:

Eğer $A_{ij}(x_k)$ matrisleri, yukarıda tarif edildikleri gibi seçilmiş, $SU_q(2)$ grubuna ait üç temsil ise $M \in SU_q(3)$ matrisi (5.3.38) de olduğu gibi ifade edilebilir.

Tersine olarak, eğer $M \in SU_q(3)$ ise, $A_{ij}(x_k)$ matrislerinin elemanları M kuantum matrisinin elemanları cinsinden çözülebilir ve her bir $A_{ij}(x_k)$ matrisi $SU_q(2)$ grubuna ait olur.

Şimdi, $SU_q(3)$ kuantum grubunun bir elemanını (5.3.38) ile verilen ifadeyi kullanarak, a, b ve c osilatörlerinin ve α, β ve γ fazlarının yeniden tanımlanması ile

$$M = X_{23}(\beta, -\beta)X_{12}(\alpha, -\alpha)A_{12}(a)A_{23}(b)A_{12}(c) \quad (5.3.39)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadedeki X_{ij} matrisleri, (5.3.32,35) bağıntıları gereğince osilatörlerin yeniden tanımlanmasıyla istenilen yere yazılabilir:

$$M = A_{12}(a)A_{23}(b)A_{12}(c)X_{12}(\alpha, -\alpha)X_{23}(\beta, -\beta) \quad (5.3.40)$$

Bu ifadedeki $A_{12}(c)X_{12}(\alpha, -\alpha)$ matrisi $SU_q(2)$ alt grubunun bir elemanıdır. $X_{23}(\beta, -\beta)$ matrisi de $U(1)$ alt grubunu

oluşturur. Dolayısıyla, $A_{12}(c)X_{12}(\alpha, -\alpha)X_{23}(\beta, -\beta)$ matrisi $SU_q(3)$ kuantum grubunun $U_q(2) \cong SU_q(2) \times U(1)$ şeklindeki kuantum alt grubunu oluşturur. O halde a ve b komutatatif q-osilatörleri olmak üzere, $A_{12}(a)A_{23}(b)$ matrisi, $SU_q(3)/U_q(2)$ kuantum koset uzayının bir temsilcisi olarak alınabilir.

Şimdi, buraya kadar yapılanları $SU_q(n)$ grubu için genelleştirelim ve son olarak $SU_q(4)$ grubu için açıklama yapalım.

1) Her bir $A_{ij}(x_k)$ matrisi, fazları ve osilatör matrisleri ile birlikte

$$\begin{aligned} A_{ij}(x_k) &= X_{ij}(\theta, -\theta)A_{ij}(x) , \quad j = i + 1 \\ &= X_i(\theta)X_j(-\theta)A_{ij}(x) \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2) $A_{ij}(x)$ osilatör matrisleri ve $X_{ij}(\theta, -\theta)$ matrisleri arasındaki komutasyon bağıntıları; $k = j + 1$ ve $l = k + 1$ olmak üzere

$$A_{jk}(x)X_{jk}(\theta, -\theta) = X_{jk}(-\theta, \theta)A_{jk}(e^{2i\theta}x) \quad (5.3.42a)$$

$$A_{jk}(x)X_{kl}(\theta, -\theta) = X_{jl}(\theta, -\theta)A_{jk}(e^{-i\theta}x) \quad (5.3.42b)$$

$$A_{kl}(x)X_{jk}(\theta, -\theta) = X_{jl}(\theta, -\theta)A_{kl}(e^{-i\theta}x) \quad (5.3.42c)$$

şeklindedir.

Ayrıca, $A_{ij}(x)$ osilatör matrisleri ve $X_i(\theta)$ matrisleri arasındaki komutasyon bağıntıları da aşağıdaki gibi genelleştirilebilir: $i < j$, $k \neq i$ ve $k \neq j$ olmak üzere

$$A_{ij}(x)X_i(\theta) = X_j(\theta)A_{ij}(e^{i\theta}x) \quad (5.3.43a)$$

$$A_{ij}(x)X_j(\theta) = X_i(\theta)A_{ij}(e^{-i\theta}x) \quad (5.3.43b)$$

$$A_{ij}(x)X_k(\theta) = X_k(\theta)A_{ij}(x) \quad (5.3.43c)$$

şeklindedir.

3) $SU_q(n)$ üniter kuantum grubuna ait bir M matrisi de

$$M = \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-i} A_{j,j+1}(x_{ji}) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} X_{i,i+1}(\theta_i, -\theta_i) \right\} \quad (5.3.44)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada her bir $A_{i,i+1}(x)$ matrisi,

$$x' = (1 - x^* x)^{1/2} \quad (5.3.45)$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ -qx' & x^* \end{pmatrix} \quad (5.3.46)$$

şeklindeki, 2×2 -köşegen bloku $i, i+1$ pozisyonuna tekabül eden bir 2×2 q -osilatör matrisini ihtiva eder. Kalan köşegen elemanlar 1 dir ve diğer bütün elemanlar sıfırdır. Her bir $X_{i,i+1}(\theta)$ matrisi ise, köşegendir ve i -inci köşegen eleman olarak $e^{i\theta}$ yı, $(i+1)$ -inci köşegen eleman olarak $e^{-i\theta}$ yı ve kalan köşegen elemanlar olarak 1'i ihtiva ederler.

Şimdi, $n = 4$ için bazı açıklamalarda bulunalım.

$M \in SU_q(4)$ matrisi, (5.3.44) gereğince,

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^{4-i} A_{j,j+1}(x_{ji}) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^3 X_{i,i+1}(\theta_i, -\theta_i) \right\} = \\ &= \prod_{j=1}^3 A_{j,j+1}(x_{j1}) \prod_{j=1}^2 A_{j,j+1}(x_{j2}) A_{12}(x_{13}) \prod_{i=1}^3 X_{i,i+1}(\theta_i, -\theta_i) \end{aligned}$$

$$M = A_{12}(x_{11})A_{23}(x_{21})A_{34}(x_{31})A_{12}(x_{12})A_{23}(x_{22})A_{12}(x_{13}) \cdot \\ \cdot X_{12}(\theta_1, -\theta_1)X_{23}(\theta_2, -\theta_2)X_{34}(\theta_3, -\theta_3)$$

şeklinde olup, buradaki

$A_{12}(x_{12})A_{23}(x_{22})A_{12}(x_{13})X_{12}(\theta_1, -\theta_1)X_{23}(\theta_2, -\theta_2)X_{34}(\theta_3, -\theta_3)$ matrisi, $SU_q(4)$ grubunun $U_q(3) \cong SU_q(3) \times U(1)$ şeklindeki alt grubunun bir temsilcisidir. Dolayısıyla,

$$A_{12}(x_{11})A_{23}(x_{21})A_{34}(x_{31})$$

matrisi, $SU_q(4)/U_q(3)$ kuantum kosetinin bir temsilcisi olarak düşünülebilir. Bu şekilde devamla,

$$\prod_{i=1}^{n-1} A_{i,i+1}(a_i) \quad (5.3.47)$$

matrisi, $SU_q(n)/U_q(n-1)$ grubunun koset temsilleri ile özdeşleştirilebilir.

(5.3.44) ile verilen ifadedeki her bir x_{ij} matris elemanı, bir q -osilatörüdür ve

$$x_{ij}x_{ij}^* - q^2 x_{ij}^*x_{ij} = 1 - q^2 \quad (5.3.48)$$

bağıntılarını sağlarlar ve farklı x_{ij} ler komutatiftir:

$$x_{ij}x_{kl} = x_{kl}x_{ij}, \quad k \neq i \text{ ve/veya } l \neq j.$$

Şimdi, son bir durumu daha işaret edelim. (5.3.47)

ile verilen matristeki bağımsız $(n-1)$ -tane a_i elemanı yerine bağımsız elemanlar olarak, ilk satırın ilk $(n-1)$ elemanı alınabilir. Bu elemanlar,

$$a \longrightarrow (1 - q^2)^{1/2} a \\ a^* \longrightarrow (1 - q^2)^{1/2} a^*$$

tekabülü altında, Pusz-Woronowicz [12] osilatörlerinin yoketme operatörleridir. Bunu, $n = 3$ için gösterelim.

Bu takdirde, (5.3.47) den

$$A_{12}(a)A_{23}(b) = \begin{bmatrix} a & a'b & a'b' \\ -qa' & a^*b & a^*b' \\ 0 & -qb' & b^* \end{bmatrix} \quad (5.3.49)$$

olup, bağımsız operatörler a ve b dir. Diğer bir ifade ile, bu matrisin bütün elemanları a ve b operatörleri cinsinden çözülebilir. Bu operatörler yerine bağımsız operatörler olarak, matrisin ilk sırasındaki a ve $a'b$ operatörleri alınabilir.

$$x = a \quad \text{ve} \quad y = a'b$$

seçelim. Bu takdirde, x ve y operatörleri, x^* ve y^* operatörleri ile birlikte, kovaryant Pusz-Woronowicz[12] operatörlerini oluşturur. $x^* = a^*$ ve $y^* = a'b^*$ olup,

$$xx^* - q^2 x^* x = 1 - q^2,$$

$$yy^* - q^2 y^* y = (1 - q^2)(1 - x^* x)$$

bağıntıları sağlar. Ayrıca,

$$xy = qyx,$$

$$xy^* = qy^* x,$$

$$x^* y = \frac{1}{q} yx^*,$$

$$x^* y^* = \frac{1}{q} y^* x^*$$

bağıntılarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Genel olarak, $x_i (i=1,2,\dots,n-1)$; (5.3.47) ile verilen matristeki ilk satırın ilk $(n-1)$ elemanı ise,

$$x_i y_j = q y_j x_i, \quad i < j \quad (5.3.50a)$$

$$x_i y_j^* = q y_j^* x_i, \quad i < j \quad (5.3.50b)$$

$$x_i^* y_j = \frac{1}{q} y_j x_i^*, \quad i < j \quad (5.3.50c)$$

$$x_i^* y_j^* = \frac{1}{q} y_j^* x_i^*, \quad i < j \quad (5.3.50d)$$

bağıntıları sağlar.

SONUÇ

Elemanları, 3×3 -tipindeki kompleks matrisler olan $GL(3, \mathbb{C})$ klasik grubunun kuantum deformasyonu yapıldı ve bir $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisinin matris elemanları ile bu elemanların kuantum kofaktörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları elde edildi. $GL_q(2, \mathbb{C})$ grubuna ait kuantum matrislerinin tersine, bir 3×3 -kuantum A matrisinin n -inci kuvvetine, q deformasyon parametresinin n -inci kuvvetinin tekabül etmediği ve dolayısıyla, başka bir matris ile üstel formda yazılamayacağı gösterildi. Ayrıca, $GL_q(3, \mathbb{C})$ grubuna ait, elemanları komutatif iki matrisin çarpımının da $A \in GL_q(3, \mathbb{C})$ matrisi ile aynı özellikleri taşıdığı açıkça ortaya kondu.

$\mathbb{H}$ kuaternion cebirinin kuantum deformasyonu yapıldı ve bir $h \in \mathbb{H}_q$ kuantum kuaternionu 2×2 -tipinde bir matris olarak ifade edildi. Bu yapıdan faydalanılarak da kuantum kuaternionik matris grubu oluşturuldu.

Uniter kuantum grupları gözönüne alınarak, bu gruba ait matrislerin matris elemanlarının q -osilatörü olduğu ispatlandı. Ayrıca, uniter kuantum gruplarının kuantum kosetleri elde edildi ve koset elemanlarının sırf q osilatörü olduğu ispatlandı.

KAYNAKLAR

- [1] DRINFELD, V.G., Quantum Groups, ICM Berkeley 1986.
- [2] FADDEEV, L., RESHETIKHIN, N.Y., and TAKHTAYAN, L.A.,
Quantization of Lie Groups and Lie Algebras,
Preprint LOMI, 1987.
- [3] WORONOWICZ, S.L., Compact matrix pseudogroups,
Commun. Math. Phys. 111, 613-665 (1987).
- [4] JIMBO, M., Quantum $\mathcal{R}$ Matrix for the Generalized Toda
System, Commun. Math. Phys. 102, 537-547 (1986).
- [5] CHAICHIAN, M. and KULISH, P. and LUKIERSKI, J.,
 q -Deformed Jacobi Identity, q -Oscillators and
 q -Deformed Infinite-Dimensional Algebras, Preprint
HU-TFT-90-5.
- [6] MANIN, Y.I., Quantum Groups and Non-commutative
Geometry, Montreal Uni. Preprint, CRM-1561, 1988.
- [7] MANIN, Y.I., Multiparametric Quantum Deformation of
the General Linear Supergroup, Commun. Math. Phys.
123, 163-175 (1989).
- [8] VOKOS, S.P., ZUMINO, B., and WESS, J., Analysis of the
Basic Matrix Representation of $GL_q(2, \mathbb{C})$, Z. Phys. C
Particles and Fields, 48, 65-74 (1990).

- [9] CORRIGAN, E., FAIRLIE, D. B., FLETCHER, P., and SASAKI, R.,
Some Aspects of Quantum Groups and Supergroups,
J. Math. Phys. 31(4), 776-780 (1990).
- [10] BIEDENHARN, L. C., J. Phys. A: Math. Gen. 22, L873 (1989).
- [11] MACFARLANE, A. J., J. Phys. A: Math. Gen. 22, 4581 (1989).
- [12] PUSZ, W. and WORONOWICZ, S. L., Twisted Second
Quantization, Rep. Math. Phys. 27, 231-257 (1989).
- [13] ARIK, M., The q -difference Operator, the Quantum
Hyperplane, Hilbert Spaces of Analytic Functions and
 q -oscillators, Z. Phys. C 51, 627-632 (1991).
- [14] ARIK, M., DEMİRCAN, E., EKİNCİ, L., MÜNGAN, M., TURGUT, T.,
Fibonacci Oscillators, Preprint ITUAM 91-05,
(Z. Phys. C. de yayınlanacak).
- [15] ARIK, M., MÜNGAN, M., q -Oscillators and Relativistic
Position Operators, Preprint ITUAM 91-03, (Phys.
Lett. B de yayınlanacak).
- [16] CHAICHIAN, M. and KULISH, P., Quantum Super Algebras,
 q -oscillator and Applications, Preprint CERN-TH.
5969/90.
- [17] CHAICHIAN, M. and KULISH, P. and LUKIERSKI, J.
Supercovariant Systems of q -oscillators and
 q -supersymmetric Hamiltonians, Phys. Lett. B1 262,
43-49 (1991).

- [18] HADJIIVANOV, L.K., PAUNOV, R.R., and TODOROV, I.T.
 U_q Covariant Oscillators and Vertex Operators,
Preprint SISSA/ISAS-1/91/FM, IPNO/TH 91-25.
- [19] JING, S., and JUN, X.J., Comment on the q -deformed
Fermionic Oscillator, J.Phys.A: Math.Gen. 24 L891-
L894 (1991).
- [20] KULISH, P.P. and DAMASKINSKY, E.V., On the q -oscillator
and the Quantum Algebra $su_q(1,1)$, J.Phys.A: Math.Gen.
23, L415-L419 (1990).
- [21] WESS, J. and ZUMINO, B., Covariant Differential
Calculus on the Quantum Hyperplane, Preprint
CERN-TH-5697/90, LAPP-TH-284/90.
- [22] CURTIS, M.L., The Matrix Groups, Springer Verlag New
York Heidelberg Berlin, 1979.
- [23] DUBROVIN, B.A., FOMENKO, A.T., and NOVIKOV, S.P.
Modern Geometry-Methods and Applications, Springer
Verlag New York Inc., 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Salih ÇELİK, 1964 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Kırıkkale'de tamamladıktan sonra, 1982 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve buradan, 1986 yılında mezun oldu. 1987 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak girdi. Aynı yıl, Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve Eylül 1989 da Yüksek Lisansı bitirdi. Aynı yıl Yıldız Üniversitesinde doktora öğrenimine başladı ve buradan İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği doktora programına yatay geçiş yaptı. Halen, Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.