

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUATERNİYONİK NURBS EĞRİLER
VE TENSÖR ÇARPIMI YÜZEY YAMALARI**



DOKTORA TEZİ

Hakan GÜNDÜZ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

AĞUSTOS 2023

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUATERNİYONİK NURBS EĞRİLER
VE TENSÖR ÇARPIMI YÜZEY YAMALARI**



DOKTORA TEZİ

**Hakan GÜNDÜZ
(23616140003)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

AĞUSTOS 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Doktora tezimin tüm aşamalarında engin bilgi ve birikimlerini sonuna kadar bana sunan ve bu uzun süreçte her türlü desteğini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez yazım süresince yardımlarını hiç esirgemeyen sayın Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e sonsuz teşekkür ederim.

Bu zorlu çalışma sürecimde hep desteğini yanımda hissettiğim, bu günlere gelmemde hayatımın tüm evrelerinde hep fedakarlıklarını gördüğüm canım aileme teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Kuaterniyonik NURBS Eğriler Ve Tensör Çarpımı Yüzey Yamaları ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hakan GÜNDÜZ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri ve yüzeyleri	4
2.1.1 Hermit eğrileri	4
2.1.2 Bezier eğrileri	5
2.1.3 B-Spline eğrileri ve yüzeyleri	9
2.1.4 NURBS eğrisi ve yüzeyleri	12
2.2 Dönel yüzeyler ve Tensör Çarpımı yüzey yamaları	13
2.3 Kuaterniyon geometrisi	14
2.3.1 Kuaterniyonik Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri.....	17
3. EĞRİLERİN DÖNEL YÜZEYLERİ VE TENSÖR ÇARPIMI YÜZEY YAMA- LARI.....	26
3.1 Kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzeyler	26
3.1.1 Kübik Hermit eğriler tarafından dönel yüzeylerin inşası	26
3.1.1.1 Kübik Hermit eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizas- yonları	27
3.1.2 Kübik Bezier eğriler tarafından dönel yüzeylerin inşası	34
3.1.2.1 Kübik Bezier eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizas- yonları	35
3.2 Fergüson bi-kübik yüzey yamaları	40
3.2.1 Fergüson bi-kübik Bezier yüzey yamaları.....	41
3.3 Genel tipte trigonometrik baz fonksiyonlarının eğri ve yüzey üzerine uygulamaları ..	43
3.3.1 Genel tipte trigonometrik baz fonksiyonu	43
3.3.2 Genel tipte Bezier eğrisinin inşası	46
3.3.2.1 Genel tipte trigonometrik Bezier eğrisinin sürekliliği	47
3.3.3 Kübik trigonometrik Bezier eğriler tarafından dönel yüzeylerin inşası	49
3.3.3.1 Kübik trigonometrik Bezier eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizasyonları.....	51
3.3.3.2 Genel tipte trigonometrik Bezier tensör çarpım yüzey yamaları.....	61
3.3.4 Genel tipte trigonometrik B-Spline eğrisi	63
3.3.4.1 Genel tipte trigonometrik B-Spline tensör çarpımı yüzey yamaları	64
3.3.5 Genel tipte trigonometrik NURBS eğrisi	66
3.3.5.1 Genel tipte trigonometrik NURBS tensör çarpımı yüzeyleri	68

3.3.6 Genelleştirilmiş kübik yapıda trigonometrik Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ve yüzeyleri	70
3.3.6.1 GT-Kübik Bezier eğrileri	70
3.3.6.2 GT-Kübik Bezier yüzeyleri.....	72
3.3.6.3 GT-Kübik B-Spline baz fonksiyonları ve B-Spline eğrisi	74
3.3.6.4 Kübik GT-B-Spline yüzey yamaları	75
3.3.6.5 Kübik GT-Nurbs eğrileri.....	76
3.3.6.6 Kübik GT-Nurbs yüzey yamaları.....	77
4. GENEL TİPTE KUATERNİYONİK TRİGONOMETRİK EĞRİLER.....	78
4.1 Kuaterniyonik GT-kuadratik Bezier eğrileri ve özellikleri.....	81
4.1.1 GT-Kuaterniyonik kübik Bezier eğrileri ve yüzey tasarımları	84
4.1.2 GT-Kuaterniyonik kübik B-Spline eğrileri ve yüzey tasarımları.....	88
4.1.3 GT-Kuaterniyonik kübik NURBS eğrileri ve yüzey tasarımları	90
KAYNAKLAR.....	93
ÖZGEÇMİŞ	95

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 : B-spline eğrilerinin farklı düğüm vektörlerine göre gösterimi.....	10
Şekil 2.2 : NURBS yüzeyi	13
Şekil 2.3 : q_i nin parçalı küresel lineer interpolasyonu.....	17
Şekil 2.4 : Hermit kuaterniyon eğrileri	23
Şekil 2.5 : B-Spline kuaterniyon eğrisi.....	24
Şekil 3.1 : Hermit eğrisi için tüp deformasyonu gösterimi.....	27
Şekil 3.2 : Farklı yarıçaplar için dönel yüzeyler	28
Şekil 3.3 : Hermit eğrisi ve dönel yüzeyin gösterimi	29
Şekil 3.4 : Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu	31
Şekil 3.5 : Hermit eğrisi ve dönel yüzey	32
Şekil 3.6 : Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu	33
Şekil 3.7 : Bezier eğrisi için tüp deformasyonunun gösterimi.....	35
Şekil 3.8 : (3.1.16) denkleminde farklı yarıçaplar için dönel yüzeyler	36
Şekil 3.9 : (3.1.16) denkleminin Bezier eğrisi ve dönel yüzeyi.....	38
Şekil 3.10: (3.1.16) denkleminin Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri ve yüzey üzerindeki varyasyonları	39
Şekil 3.11: Fergüson yüzey yaması ile oluşturulmuş GT-Trigonometrik Bi-Kübik yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği.....	43
Şekil 3.12: T-Bezier eğrisi	51
Şekil 3.13: Aynı şekil parametresine göre T-Bezier yüzeyin varyasyonları	52
Şekil 3.14: Aynı şekil parametresine göre farklı perspektiflerden dönel yüzeylerin değişimi	53
Şekil 3.15: Farklı parametreler için T-Bezier yüzeyin varyasyonları	54
Şekil 3.16: Farklı parametreler için T-Bezier yüzeyin varyasyonları	57
Şekil 3.17: Farklı şekil parametreleriyle GT-trigonometrik Bezier tensör çarpım yüzey yamaları.....	62
Şekil 3.18: Farklı şekil parametreleri ile B-Spline tensör çarpımı yüzey yamalarının davranışı	66
Şekil 3.19: Trigonometrik bi-kuadratik NURBS tensör çarpım yüzey yamaları.....	69
Şekil 3.20: Değişik şekil parametrelerinin GT-kübik Bezier eğrisine etkisi	73
Şekil 3.21: GT-kübik Bezier yüzey yamaları.....	73
Şekil 3.22: Kübik GT-B-Spline eğrilerine şekil parametrelerinin etkisi.....	75
Şekil 3.23: Şekil parametrelerinin GT-B-Spline yüzeylerine etkisi.....	76
Şekil 4.1 : Farklı şekil parametreleriyle kuaterniyonik bi-kübik Bezier tensör çarpımı yüzey yamaları	88
Şekil 4.2 : Kuaterniyonik bi-kübik NURBS tensör çarpımı yüzey yamalarına ağırlık fonksiyonlarının etkisi	92

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

- $\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi,
 w : Açısal hız,
 w_i : Ağırlık vektörü,
 K : Gauss eğriliği,
 H : Ortalama eğrilik



ÖZET

Doktora Tezi

KUATERNİYONİK NURBS EĞRİLER VE TENSÖR ÇARPIMI YÜZEY YAMALARI

HAKAN GÜNDÜZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

95+viii sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

Kuaterniyonik NURBS Eğriler ve Tensör Çarpımı Yüzey Yamaları isimli bu tez çalışmasının ilk bölümünde Hermit, Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ve kuaterniyon geometrisi ile ilgili literatür özeti verilmiştir. Ayrıca uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri ve yüzeylerinin özelliklerine ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca kuaterniyon geometrisi ile beraber dönel yüzeyler ve tensör çarpımı yüzey yamalarına ilişkin bazı önemli özelliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ise kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri ile dönel yüzeyler oluşturulmuş ve bazı karakterizasyonlardan bahsedilmiştir. Buna ek olarak genel tipte trigonometrik baz fonksiyonlarının belirli mertebelerdeki Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ile tensör çarpımı yüzey tasarımları ve yüksek mertebeden eğriler tarafından oluşturulan yüzeyler arasında karşılaştırma yapılmıştır.

Dördüncü ve son bölümde kuaterniyonik yapıda genel tipte trigonometrik baz fonksiyonları kullanılarak kuaterniyonik Bezier, B-Spline, NURBS eğriler ve yüzey yamaları elde edilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerle alakalı gerekli şartlar araştırılmış ve örneklemeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hermit eğrileri, Trigonometrik baz fonksiyonları, B-Spline eğriler, NURBS eğriler, Kuaterniyon geometrisi, Dönel yüzeyler, Tensör çarpımı yüzey yaması

ABSTRACT

Phd. Thesis

QUATERNIONIC NURBS CURVES AND TENSOR PRODUCT SURFACE PATCHES

Hakan GÜNDÜZ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

95+viii pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ

In the first chapter of this study titled as Quaternionic NURBS Curves and Tensor Product Surface Patches, a summary of the literature on Hermite, Bezier, B-Spline and NURBS curves and quaternion geometry is given. In addition, application areas are mentioned.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to the properties of Hermite, Bezier, B-Spline, NURBS curves and surfaces used in the thesis are given. In addition, some important properties of quaternion geometry, rotational surfaces and tensor product surface patches are mentioned.

In the third chapter, rotational surfaces are generated with cubic Hermite and cubic Bezier curves and some characterizations are mentioned. In addition, tensor product surface designs of general type trigonometric basis functions with Bezier, B-Spline, NURBS curves of certain orders are created. Afterwards, a comparison is made between the surfaces formed by the higher order curves.

In the fourth and last chapter, quaternionic Bezier, B-Spline, NURBS curves and surface patches are obtained by using general type trigonometric basis functions in quaternionic structure. In addition, the necessary conditions related to these surfaces are investigated and samples are made.

Keywords: Hermite curves, Trigonometric basis functions, B-Spline curves, NURBS curves, Quaternion geometry, Rotational surfaces, Tensor product surface patch

1. GİRİŞ

Özellikle matematiğin yeni bir uygulaması ve mühendislik biliminin önemli bir konusu olan bilgisayar destekli geometrik tasarımlar tasarımcı için önemli avantajları olmasıyla beraber uygulamalarda sıkıntı oluşturan bazı konularda kolaylık sağlamaktadır. [1] Bu bilgisayar destekli geometrik tasarımda yapılan en önemli çalışmalardan bazıları Citroen şirketinde çalışan Casteljau ve aynı dönemde Renault şirketinde çalışan Pierre Bezier tarafından sağlanmıştır ve bu kişinin adını alan Bezier eğrileri oluşturulmuştur. Bu eğriler parametrik eğriler olup eğriyi oluşturan kontrol noktaları sayısı bu eğrinin derecesini vermektedir. [2] Bu eğrilerde derece sayısı eğrileri oluşturmak için kullanacağımız kontrol nokta sayısının bir eksiği kadardır. Bu gün özellikle Bezier eğri ve yüzeyleri denilen bu kavramlar Renault şirketinin kullandığı UNISURF için temel oluşturmuştur. Bezier eğrileri ile ilgili farklı çalışmalar yapılmış ve geometrik anlamda büyük katkı sağlamıştır. [3,4]

Bezier eğrileri ile ilgili analizler zenginleştirilmiş, oluşturulan baz fonksiyonları trigonometrik, eksponansiyel v.b. formlarda farklı şekil parametreleriyle oluşturularak çalışmalar farklı boyutlar kazanmıştır. [5-7]

Bu eğrilerin yanı sıra B-Spline ve düzgün yapıda olmayan rasyonel B-Spline eğrileri (NURBS eğrileri) de oluşturulmuştur. [8] Bir B-Spline eğri Bezier eğrisinin genelleştirmesidir ve spline baz fonksiyonları tarafından oluşturulur. Eğrinin tamamı bu spline baz fonksiyonları için verilen tekrarlı bağıntıların uygulanmasından üretilir. 1946 yılında B-Spline kavramını bulan I.J. Schoenberg spline yaklaşımlarının başlamasına öncülük etmiştir. Solomon da bu eğrilerle alakalı çalışmalar yapmış ve literatüre katkıda bulunmuştur. [9]

NURBS eğrileri ise B-Spline eğrilerin özel bir formu olarak ortaya çıkmıştır. NURBS sadece otomobil şirketlerinin tescilli CAD paketlerinde kullanılıyordu. Daha sonra standart bilgisayar grafik paketlerinin bir parçası oldular. NURBS eğrilerinin ve yüzeylerinin gerçek zamanlı, etkileşimli olarak oluşturulması ilk olarak 1989'da Silicon Graphics iş istasyonlarında ticari olarak sağlandı. 1993 yılında, NURBS adı verilen PC'ler için ilk etkileşimli NURBS modelleyicisi, Berlin Teknik Üniversitesi ile işbirliği yapan küçük bir başlangıç şirketi olan CAS Berlin tarafından geliştirildi.

Eğriler ile yapılan yüzey tasarımlarında bir çok teknik kullanılmaktadır. Bu yüzey oluşturma metotları arasında en popüler olanı tensör çarpımı yüzeyi olmuştur. Bu metod ilk olarak C. de Noor tarafından bi-kübik Spline interpolasyonu için tanımlanmıştır. Aynı zaman diliminde

ise Casteljaou dönel yüzey ve üçgensel yüzey yamaları oluşturarak bilgisayar destekli geometrik tasarımlara katkıda bulunmuştur. 1974 yılında General Motors şirketinden Gordon ve Riesenfeld yüzey ve eğrilerin dizaynı için B-Spline'ı kullanmışlardır.

Bu tezin asıl konusu olan kuaterniyon geometrisinin tarihsel sürecine bakarsak Sir William Rowan Hamilton kompleks sayıları düzlem üzerinde noktalar olarak yorumladı. [10] Daha sonra 1843 yılında dört boyutlu olan kuaterniyonları kompleks sayılara göre yorumladı ve bütün hayatını kuaterniyonlar üzerinde çalışarak geçirdi. 20. yüzyılın sonlarından beri hareket geometrisi büyük bir rağbet görmektedir. Shoemake 1985'te kuaterniyonları kullanarak dönme matrislerinden daha pratik olan bir dönme sistemi tanımladı. [11] Kuaterniyonlar özellikle herhangi bir eksen etrafında dönme yaptırdıkları için daha stabil ve kullanışlıdır. Bu yüzden kuaterniyonlar birçok alanda daha fazla tercih edilmektedir. Dönme matrislerinden daha hızlı, kullanışlı ve pratik olan kuaterniyonlar üç boyutlu bilgisayar grafikleri, robotlar, kontrol teorisi, fizik, uzay araçlarının kontrolü, bilgisayar simülasyonları, uygulamalı matematik ve teorik matematik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Dört boyutlu olan kuaterniyonlar özellikle üç boyutlu uzayda modellenen ve oyuncunun dışarıdan dördüncü boyut olarak etki ettiği bilgisayar oyunlarında ne çıkmaktadır. Bir kuaterniyonun vektörel kısmı üç boyutlu klid uzayında bir vektör olduğu için üç boyutlu klid uzayı kuaterniyonların yapısal kısımlarından birini oluşturmaktadır. Kuaterniyonlarla alakalı literatürde az ama zgn çalışmalar bulunmaktadır. [12–16]

Yukarıda verilen eğri ve yüzey tasarım tekniklerinin önemi, eğri veya yüzeyi tamamen değiştirmeden sadece yerel değişiklikler yaparak istenilen eğri veya yüzeyi elde etmemizi olanaklı hale getirmesidir, burada baz fonksiyonları eğriyi oluşturmada etkin bir rol oynar. şekil parametrelili baz fonksiyonlarında şekil parametrelerinin sayısal olarak değişimleri, şekillerin yüzey tasarımları üzerinde etkendir. Dolayısıyla en uygun sayısal verilerle elde edilen yüzey tasarımları mühendislik alanlarında büyük önem taşır. Buna ek olarak B-Spline eğrileri ile oluşturulan yüzey yamalarında seçilen düğüm noktaları, NURBS eğrilerinde seçilen ağırlık vektörleri de oluşan yüzeylerin karakterizasyonunda önemli rol oynar, dolayısıyla bu tez çalışmasında birçok yönden inceleme yapılmıştır. Ek olarak, bu tez çalışmasında, eğri ve yüzeyler kuaterniyonlar ile ifade edildikten sonra parametresel değişimler göz önüne alınarak incelemeler yapılmış, matematik ve mühendislik bilimi adına önemli bir çalışma olmuştur.

Dört bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümünde tezde kullanılan Hermit, Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ve yüzeylerinin özelliklerine ilişkin temel tanım ve teoremlerden

bahsedilecektir. Ayrıca kuaterniyon geometrisi ile beraber dönel yüzeyler ve tensör çarpımı yüzey yamalarına ilişkin bazı önemli özelliklerden bahsedilecektir.    nc  bölümde ise kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri ile dönel yüzeyler oluşturulup bazı karakterizasyonlardan bahsedilecek ve buna ek olarak genel tipte trigonometrik baz fonksiyonlarının belirli mertebelerdeki Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ile tensör çarpımı yüzey tasarımları ve yüksek mertebeden eğriler tarafından oluşturulan yüzeyler arasında karşılaştırma yapılacaktır. Dördüncü ve son bölümde kuaterniyonik yapıda genel tipte trigonometrik baz fonksiyonları kullanılarak kuaterniyonik Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri elde edilecek, kuaterniyonik Bezier, B-Spline ve NURBS yüzey yamaları oluşturulup bu yüzeylerle alakalı gerekli şartlar araştırılacak ve örnekleme yapılacaktır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde en bilinen ve tezimizde önem arz eden Hermit, Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ve yüzeyleri kısaca hatırlatılmaktadır. İkinci altbölümde yüzey tasarımında önemli rol oynayan dönel yüzeyler ve tensör çarpımı yüzey yamalarından bahsedilmekte, son altbölümde ise kuaterniyon geometrisi, özel yapıdaki kuaterniyon eğriler ve bazı önemli kavramları tanıtılmaktadır.

2.1 Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri ve yüzeyleri

2.1.1 Hermit eğrileri

Hermit eğrileri başlangıç ve bitiş noktaları ile beraber, iki teğet noktasından oluşmaktadır. Uç noktaları $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($u = 0$), $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ ($u = 1$), teğet noktaları $T_i(p_i, q_i, r_i)$, $T_{i+1}(p_{i+1}, q_{i+1}, r_{i+1})$ ve c_i , c_{i+1} sabit sayılar olmak üzere $T_i = c_i t_i$ ve $T_{i+1} = c_{i+1} t_{i+1}$ şeklinde yazılabilir.

$$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3 \quad (2.1.1)$$

denkleminde $x(0) = x_i$, $x(1) = x_{i+1}$ ve aynı zamanda $\frac{dx(0)}{du} = x'(0) = p_i$ ve $\frac{dx(1)}{du} = x'(1) = p_{i+1}$ dir.

$$x_i = a_{0x}$$

$$x_{i+1} = a_{0x} + a_{1x} + a_{2x} + a_{3x}$$

$$p_i = a_{1x}(a_{1x} + 2ua_{2x} + 3u^2a_{3x})$$

$$p_{i+1} = a_{1x} + 2a_{2x} + 3a_{3x}$$

denkleminin çözümünden,

$$a_{0x} = x_i,$$

$$a_{1x} = p_i,$$

$$a_{2x} = 3\Delta x_i - 3p_i - \Delta p_i,$$

$$a_{3x} = \Delta p_i - 2\Delta x_i + 2p_i$$

elde edilir. Burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ dir.

(2.1.1) denklemi,

$$\begin{aligned} x(u) &= x_i + p_i u + (3\Delta x_i - 3p_i - \Delta p_i)u^2 + (\Delta p_i - 2\Delta x_i + 2p_i)u^3 \\ &= (1 - 3u^2 + 2u^3)x_i + (3u^2 - 2u^3)x_{i+1} + (u - 2u^2 + u^3)p_i + (-u^2 + u^3)p_{i+1} \\ &= H_0^3(u)x_i + H_1^3(u)x_{i+1} + H_2^3(u)p_i + H_3^3(u)p_{i+1} \end{aligned}$$

$H_i^3(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$, u parametrelili fonksiyonlardır ve Hermit polinomları olarak ifade edilir. Şekil oluşumunda bu fonksiyonlar baz fonksiyonları olarak ele alınır. Yukarıdaki denklem, matris formunda

$$x(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Benzer uygulama $y(u)$ ve $z(u)$ için de yapıldığında,

$r(u) \equiv [x(u), y(u), z(u)]$ eğrisi,

$$r(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} \\ p_i & q_i & r_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & r_{i+1} \end{bmatrix}$$

veya,

$$r(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ T_i \\ T_{i+1} \end{bmatrix} = UMG$$

olarak gösterilir. Burada $U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$ satır matrisi, M , 4×4 lük Hermit kare matrisi ve G , 4×1 lik geometrik matristir. U ve M standart yapıda matrislerdir, fakat G matrisi kontrol ve teğet noktalarına bağlıdır ve değişkenlik gösterir, dahası eğrinin şeklini belirler. [17]

2.1.2 Bezier eğrileri

Tanım 2.1.1. (Bernstein polinomlar) $B_i^n(u) = C_i^n(1-u)^{n-i}u^i$ şeklinde ifade edilen polinomlara Bernstein polinomlar denir. Bezier eğrilerinde Bernstein polinomlarının rolü büyüktür. Öyle ki,

$$\sum_{i=0}^n B_i^n p_i = p_0^n$$

şeklinde ifade edilen Bezier eğrilerinin tanımlanmasında kullanılır. Burada p_i kontrol noktasıdır. [17]

Teorem 2.1.1. Bernstein polinomlarının özelliği aşağıdaki gibidir:

1. *Nonnegatiflik* : $0 \leq u \leq 1$ olmak üzere, B_i^n ler non-negatiftir. $0 \leq u \leq 1$ olduğu için $0 \leq 1 - u \leq 1$ dir, buradan

$$B_i^n(u) = C_i^n(1-u)^{n-i}u^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i \geq 0$$

dir.

2. *Birimin parçalanması* : u nun değerlerine bakılmaksızın, Bernstein polinomların toplamı 1 dir. Yani,

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1.$$

Binom açılımından,

$$\begin{aligned} [(1-u) + u]^n &= (1-u)^n + n(1-u)^{n-1}u + \dots + \frac{n!}{r!(n-r)!}(1-u)^{n-r}u^r + \dots + u^n \\ 1 &= C_0^n(1-u)^n u^0 + C_1^n(1-u)^{n-1}u + C_2^n(1-u)^{n-2}u^2 + \dots + C_n^n(1-u)^0 u^n \end{aligned}$$

elde edilir. Biliyoruz ki, $B_i^n(u) = C_i^n(1-u)^{n-i}u^i$ dolayısıyla,

$$1 = B_0^n(u) + B_1^n(u) + \dots + B_n^n(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u)$$

dir.

3. *Simetri* : $B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$

4. *Yineleme* : Polinomlar yineleme ilişkisi ile hesaplanabilir.

$$B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u)$$

Bernstein polinomunun açılımından,

$$\begin{aligned} (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) &= \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}(1-u)^{n-i}u^i + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i \\ &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-i)!}(1-u)^{n-i}u^i \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-i)!}(1-u)^{n-i}u^i \left(\frac{n}{i(n-i)} \right) \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i = B_i^n(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

5. *Türev* : Bernstein polinomunun u ya göre türevi alınırsa,

$$B_{-1}^{n-1}(u) = B_n^{n-1}(u) = 0$$

olmak üzere,

$$\frac{dB_i^n(u)}{du} = n[B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)]$$

dur.

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i$$

polinomunun u ya göre türevini aldığımızda,

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^n(u)}{du} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}[-(n-i)(1-u)^{n-1-i}u^i + i(1-u)^{n-i}u^{i-1}] \\ &= -\frac{n!}{i!(n-1-i)!}(1-u)^{n-1-i}u^i + \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^{i-1} \\ &= n\left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^{i-1} - \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}(1-u)^{n-1-i}u^i\right] \\ &= n[n^{n-1}C_{i-1}(1-u)^{n-i}u^{i-1} - n^{n-1}C_i(1-u)^{n-1-i}u^i] \\ &= n[B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)] \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Bezier eğrisi Bernstein polinomların ağırlıklı lineer kombinasyonu olarak tanımlanır. [17]

Tanım 2.1.2. (Bezier eğrisi) $(n+1)$ tane p_i veri noktası için, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$

$$r(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u)p_i, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.1.2)$$

dir. Örneğin; kübik Bezier eğrisinin cebirsel formu (2.1.2) denkleminde P_0, P_1, P_2, P_3 kontrol noktaları için,

$$\begin{aligned} r(u) &= (1-u)^3P_0 + 3u(1-u)^2P_1 + 3u^2(1-u)P_2 + u^3P_3 \\ &= (1-3u+3u^2-u^3)P_0 + (3u-6u^2+3u^3)P_1 + (3u^2-3u^3)P_2 + u^3P_3 \\ &= u^3(-P_0+3P_1-3P_2+P_3) + u^2(3P_0-6P_1+3P_2) + u(-3P_0+3P_1) + P_0 \end{aligned}$$

olmaktadır. Bezier eğrisi matris formunda,

$$\begin{aligned} r(u) &= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \\ &= UM_B G \end{aligned}$$

G matrisi kullanıcı tarafından tanımlanır, U ve M_B matrisleri tüm Bezier eğrileri için aynıdır. Eğri P_0 başlangıç noktası, P_3 bitiş noktası olmak üzere P_1 ve P_2 noktalarından asla geçmez. Eğrinin yapısını değiştirmek için kontrol noktaları yeniden tanımlanır. [17]

Teorem 2.1.2. *Bezier eğrilerinin özellikleri :*

n inci dereceden Bezier eğrileri,

1. *Uç noktalar:* Bernstein polinomların non-negatiflik ve birim olma özelliğinden tüm diğer polinomlar $B_i^n(0)$ sıfır iken $u = 0, i = 0$ için $B_0^n(0) = 0$ dır. Dolayısıyla P_0 başlangıç uç noktasıdır. Benzer şekilde diğer Bernstein polinomları katsayıları sıfır iken $u = 1, i = n$ için $B_n^n(1) = 1$ dir. P_n bitiş uç noktasıdır.

2. *Uç teğetler:* Uç teğetler sırasıyla $P_1 - P_0$ ve $P_n - P_{n-1}$ şeklindedir. Dolayısıyla uç teğetlerden bahsediliyorsa, Bezier eğrisinin türevi alınarak hangi koşulda teğet olduğu söylenebilir. $r(u)$ Bezier eğrisi olmak üzere,

$$r'(0) = n(P_1 - P_0), \quad r'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

dir.

3. *Geometrik değişmezlik:* Koordinat eksenine dönme ve öteleme uygulandığında eğrinin şekli değişmez, sadece doğrultusu değişir. Fakat kontrol noktaları değiştiğinde eğrinin yapısı değişir.

4. *Konveks gövde özelliği:* Bezier eğrisi asla kontrol noktasının dışına taşmaz, her zaman içerisinde yer alır.

5. *Simetri:* Bernstein polinomlarının simetri özelliğinden,

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$$

olmaktadır. Kontrol noktalarının sırası tersine çevrilirse ($P_{n-r}^* = P_r$), eğrinin simetri özelliği korunur şöyle ki,

$$\sum_{r=0}^n P_r B_r^n(u) = \sum_{r=0}^n P_{n-r} B_r^n(1-u)$$

dir.

6. *Türev:* Bernstein polinomunun türevinden,

$$\frac{dr(u)}{du} = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u)(P_{i+1} - P_i)$$

dir. Yani Bezier eğrisinin türevinin derecesi $n - 1$ ve kontrol noktaları da $n(P_1 - P_0), n(P_2 - P_1), \dots, n(P_n - P_{n-1})$ dir. Bu türev genellikle orijinal Bezier eğrisinin hodografi olarak anılmaktadır. $n(P_i - P_{i-1})$ ler artık konum vektörleri değil, serbest vektörlerdir.

7. Yüksek mertebeden türevler:

$$\frac{d^k r(u)}{du^k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \sum_{i=0}^{n-k} B_i^{n-k}(u) D_i^k$$

eşitliğinde,

$$D_i^j = D_{i+1}^{j-1} - D_i^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n-j$$

$$D_i^0 = P_i$$

dir. [18]

2.1.3 B-Spline eğrileri ve yüzeyleri

Tanım 2.1.3. $t_i \leq t_{i+1}$ olmak üzere her i için $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ vektörüne düğüm vektörü ve t_i ($i = 0, 1, \dots, m$) değerlerine de düğüm denir.

Düğüm vektörleri, B-Spline eğrisini oluşturan Bezier eğrilerinin parametre aralıklarını belirlemek için kullanılır. $\forall i$ için $t_{i+1} - t_i = \text{sabit}$ ise düğüm vektörleri eşit aralıklı yani uniform yapıdadır. $p+1$ dereceli bir eğrinin,

$$T = \left\{ \underbrace{a, a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{p+1} \right\}$$

düğüm vektörü için $t_{i+1} - t_i \neq \text{sabit}$ ise düğüm vektörü düzgün olmayan yapıdadır. [19]

Tanım 2.1.4. p dereceli bir B-Spline baz fonksiyonu $i = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

$$B_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} B_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} B_{i+1,p-1}(t) \quad (2.1.4)$$

genel denklemi ile tanımlanır. [19]

Teorem 2.1.3. B-Spline baz fonksiyonunun özellikleri:

1. Eğer $t \notin [t_i, t_{i+p+1})$ ise $B_{i,p}(t) = 0$ dir.
2. B-Spline baz fonksiyonları tüm i, p ve t değerleri için $B_{i,p}(t) \geq 0$ koşulunu sağlarlar.
3. $\sum_{i=0}^n B_{i,p}(t) = 1, \quad t \in [t_{p-1}, t_{n+1}]$.

Tanım 2.1.5. p dereceli bir B-Spline eğrisi,

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,p}(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde P_i ler kontrol noktalarıdır. Kontrol noktalarının sayısı $n + 1$ dir. $T = \{a, a, \dots, a, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, b, b, \dots, b\} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ biçiminde ise T düğüm vektörü düzgün olmayan yapıdadır, düğüm noktalarının sayısı ise $m + 1$ dir.

$a = 0, b = 1$ ve $0 \leq t_i \leq 1$ olmak üzere düğüm vektörü,

$$T = \{0, 0, \dots, 0, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, 1, 1, \dots, 1\}$$

olarak ifade edilirse 0 ve 1 düğümlerinin merteye kadar tekrar etmesi, eğrinin başlangıç ve bitiş noktalarının ilk ve son kontrol noktalarına karşılık gelmesini sağlar. [19]

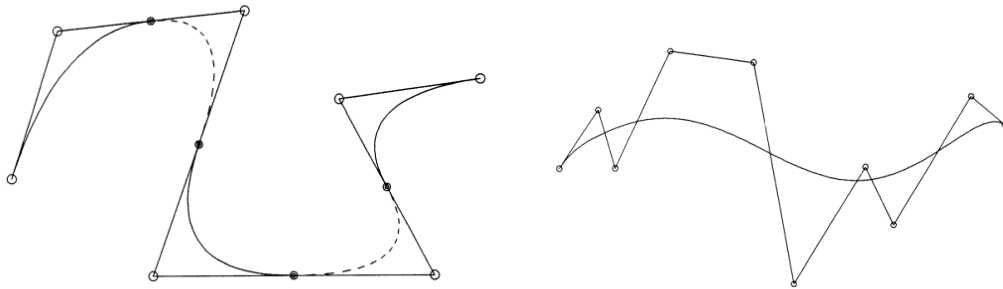
Tanım 2.1.6. B-spline eğrisinde p derece, n kontrol noktaları ve m de düğüm noktalarının sayısı olmak üzere,

$$m = n + p + 1$$

ilişkisi vardır. Burada eğer $n = p$ ve $T = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1\}$ ise $\alpha(t)$ eğrisi bir Bezier eğrisi olur. B-Spline eğrisinin matris gösterimi,

$$\alpha(t) = [t] [M]_{B-Spline} [P_i]$$

şeklindedir. Burada $[t]$ B-Spline eğrilerinin baz fonksiyonlarından oluşan matris formu, $[M]_{B-Spline}$, $\alpha(t)$ eğrisinin katsayılar matrisi, $[P_i]$ kontrol noktalarıdır. [19]



Şekil 2.1 : B-spline eğrilerinin farklı düğüm vektörlerine göre gösterimi

B-Spline eğrilerinin özellikleri şu şekildedir :

1. B-Spline eğrilerine dönme, öteleme, ölçekleme ve benzeri işlemler uygulandığında eğrinin yapısında herhangi bir değişiklik olmaz.

2. Eğrinin uç noktaları $\alpha(0) = P_0$ ve $\alpha(1) = P_n$ dir.

3. B-Spline eğrilerinde yerel kontrolün farklılaşması, herhangi bir P_i değeri değiştiğinde sadece o aralıktaki eğri parçasının etkilenmesi şeklinde gerçekleşir. Bu özellik Bezier eğrileri için mevcut değildir. Düğüm vektörleri ile B-Spline eğrisi Bezier parçalarına ayrılır. Her bir düğüm vektörü aralığı parçalardan oluşur, bu aralıklardaki parçalarda yer alan eğrilerin birleşimi ile B-Spline eğrisi oluşur. Her bir parçaya etki eden kontrol noktalarının sayısı $p + 1$ dir.

Örneğin, derecesi 2 olan bir B-Spline eğrisi için her bir parçaya etki eden kontrol noktaları birinci parça için P_0, P_1, P_2 ; ikinci parça için P_1, P_2, P_3 ; ... şeklindedir.

Tanım 2.1.7. (2.1.5) denkleminde tanımlanan p dereceli bir B-Spline eğrisinin türevi,

$$\alpha'(t) = p \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} B_{i+1,p-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i B_{i+1,p-1}(t), \quad (2.1.6)$$

olup, burada

$$Q_i = p \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+p+1} - t_{i+1}}$$

dir. p dereceli bir B-Spline eğrisinin türevi, $p - 1$ dereceli bir B-Spline eğrisidir. (2.1.6) denkleminde,

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ ise } \alpha'(0) &= Q_0 = \frac{P}{t_{p+1}} (P_1 - P_0) \\ t = 1 \text{ ise } \alpha'(1) &= Q_{n-1} = \frac{P}{1 - t_{m-p-1}} (P_n - P_1) \end{aligned}$$

dir. Burada $\alpha(t)$ eğrisinin düğüm vektörü $T = \{0, 0, \dots, 0, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, 1, 1, \dots, 1\} = \{t_0, \dots, t_m\}$ olmak üzere düğüm noktaları sayısı $m + 1$ tane, $\alpha'(t)$ eğrisinin ise $T' = \{0, 0, \dots, 0, t'_p, t'_{p+1}, \dots, t'_{m-p-2}, 1, 1, \dots, 1\} = \{t_1, t_2, \dots, t_{m-1}\}$ olmak üzere düğüm noktaları sayısı ise $m - 1$ tanedir. [19]

Tanım 2.1.8. (B-Spline Yüzeyleri) B-Spline yüzeyler S ile gösterilirse

$$S(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{i,p}(t) B_{j,q}(s)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} T &= \{0, 0, \dots, 0, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{w-p-1}, 1, 1, \dots, 1\} \\ S &= \{0, 0, \dots, 0, s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_{v-q-1}, 1, 1, \dots, 1\} \end{aligned}$$

düğüm vektörleridir. T düğüm vektörü için düğüm sayısı $w + 1$ iken, S düğüm vektörü için düğüm sayısı $v + 1$ dir. Burada $w = n + p + 1$ ve $v = m + p + 1$ eşitlikleri vardır. Bir $S(t, s)$ B-Spline yüzeyi,

$n = p$, $m = q$ ve düğüm vektörleri $T = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1\}$, $S = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1\}$ biçiminde ise bir Bezier yüzeyi olur. Bir $S(t, s)$ yüzeyi matris formunda

$$S(t, s) = [t] [M]_{B-Spline} [P_{ij}] [M]_{B-Spline}^T [s]$$

şeklinde ifade edilir. $S(t, s)$ yüzeyin köşe noktaları, $S(0, 0) = P_{0,0}$, $S(1, 0) = P_{n,0}$, $S(0, 1) = P_{0,m}$, $S(1, 1) = P_{n,m}$ dir. $S(t, s)$ yüzeyinde $t = 0$, $t = 1$, $s = 0$, $s = 1$ parametrelerine karşılık gelen eğriler yüzeyin sınır eğrileri olarak adlandırılır. [19]

2.1.4 NURBS eğrisi ve yüzeyleri

Tanım 2.1.9. p -dereceli bir $\alpha(t)$ eğrisinin,

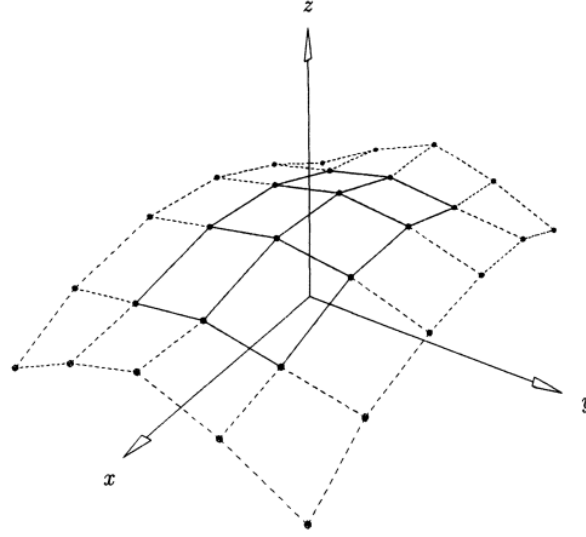
$$\alpha(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i w_i B_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,p}(t)} = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,p}(t)$$

şeklinde yazılmasıyla NURBS eğrisi elde edilir. Burada w_i ağırlık vektörü, $R_{i,p}(t) = \frac{w_i B_{i,p}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,p}(t)}$, $0 \leq t \leq 1$ NURBS eğrisi için bir baz fonksiyonudur ve B-Spline baz fonksiyonunun sahip olduğu tüm özelliklere sahiptir. Eğer tüm ağırlık vektörleri için $w_i = 1$ ise $R_{i,p}(t) = B_{i,p}(t)$ dir. [19]

Tanım 2.1.10. (NURBS yüzeyleri) NURBS yüzeyler S ile gösterilmek üzere,

$$S(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} P_{i,j} B_{i,p}(t) B_{j,q}(s)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} B_{i,p}(t) B_{j,q}(s)}$$

şeklinde tanımlanan, s ve t parametrelerine bağlı NURBS eğrileri tarafından oluşmuş bir tensör çarpımı yüzey yamasıdır. Burada $w_{i,j} \in \mathbb{R}$ ağırlık vektörleridir. [19]



Şekil 2.2 : NURBS yüzeyi

2.2 Dönel yüzeyler ve Tensör Çarpımı yüzey yamaları

Tanım 2.2.1. (Dönel yüzeyler) Döndürme, bir nesnenin dönme eksenini etrafında belli bir açı ile hareket ettirilerek noktasal koordinatlarının yeni konumuna gelmesidir. E^3 koordinat sisteminin üç dönüş eksenini vardır. Önce dönme ekseninin z -ekseni olduğunu varsayalım.

A , 3×3 düzenli matris ve $\xi \in E^3$ ($\xi \neq 0$) vektördür. Eğer A matrisi,

$$i) A\xi = \xi,$$

$$ii) AIA^t = I,$$

$$iii) \det A = 1, I \text{ } 3 \times 3 \text{ birim matris}$$

özellikleri sağlıyorsa, pozitif yönde bir dönme gerçekleşmiştir.

z dönme eksenini olmak üzere dönme matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanan 3×3 matrisler kümesidir :

$$A(v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v \in \mathbb{R}.$$

$\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$ eğrisi z -ekseni etrafında döndürüldüğünde oluşan yüzey parametrik olarak

$$\Psi(u, v) = (\alpha_1(u) \cos v - \alpha_2(u) \sin v, \alpha_1(u) \sin v + \alpha_2(u) \cos v, \alpha_3(u)).$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde x ve y eksenleri etrafında gerçekleşen dönmelerin sonucunda döneel yüzeyler yazılabilir. [20]

Tanım 2.2.2. (Tensör Çarpımı yüzey yamaları) Sonlu sayıda yüzey parçaları u ve v parametrelerine bağlı olarak bir yüzey yaması oluşturabilir. Bir $f(u, v)$ yüzeyi,

$$f(u, v) = [x(u, v) + y(u, v) + z(u, v)], \quad u \in [0, 1], v \in [0, 1]$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca bu ifade kapalı formda $\phi(x, y, z) = 0$ olarak da yazılabilir. Böylece bir yüzey yaması $f(u, 0)$, $f(u, 1)$, $f(0, v)$ ve $f(1, v)$ eğrileri ile sınırlıdır.

Φ ve Ψ , $u \in U$ ve $v \in V$ olmak üzere,

$$\Phi = \{\phi_i(u)\}_{i=0}^m \quad \text{ve} \quad \Psi = \{\psi_j(v)\}_{j=0}^n$$

şeklinde tanımlı iki küme olsun. Bu durumda

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m C_{ij} \phi_i(u) \psi_j(v)$$

şeklinde tanımlı yüzeye tensör çarpım yüzeyi denir. Eğer yüzey $m = n = 2$ ise bi-kuadratik, $m = n = 3$ ise bi-kübik olarak tanımlanır. Tensör çarpım yüzeyi genel formda,

$$[D_i] = \begin{bmatrix} D_{mn} & D_{m(n-1)} & \dots & D_{m0} \\ D_{(m-1)n} & D_{(m-1)(n-1)} & \dots & D_{(m-1)0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{0n} & D_{0(n-1)} & \dots & D_{00} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m D_{ij} u^i v^j = \begin{bmatrix} u^m & u^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} [D_j] \begin{bmatrix} v^n \\ v^{n-1} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. [21]

2.3 Kuaterniyon geometrisi

Bu altbölümde kuaterniyonlar ve özelliklerinden kısaca bahsedeceğiz. Sonrasında standart yapıdaki eğrilerin kuaterniyon eğrilere nasıl dönüştüğü ve mantığı hakkında kısa bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.3.1. Matematikte, dördeyler (ya da kvaterniyon, kuaterniyon, dördübir), karmaşık sayıları bir gerçel, üç sanal boyuta genişleten sayı sistemidir. İlk defa İrlandalı matematikçi

Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve 3 boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmışlardır. $H = \{q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ kümesine göre, $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ birimlerinin çarpımları aşağıdaki gibidir:

	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
1	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	-1	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	-1	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	-1

H nin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir. Dolayısıyla,

$$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

kuaterniyonunun skaler kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere $S_q = a_0$ ve $\vec{V}_q = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ dir. [22]

Tanım 2.3.2.

$$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p)$$

şeklinde tanımlanır. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere skalerle yapılan çarpma işlemi ise

$$\lambda q = (\lambda_{q_0}) 1 + (\lambda_{q_1}) \vec{e}_1 + (\lambda_{q_2}) \vec{e}_2 + (\lambda_{q_3}) \vec{e}_3$$

eşitliği ile tanımlıdır. [22]

Tanım 2.3.3. Reel kuaterniyonların çarpımı;

$$X : H \times H \rightarrow H$$

$$(q, p) \rightarrow q \times p = qp$$

biçiminde bir işlem olup

$$qp = S_q S_p - \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbb{R}^3$ teki iç çarpımı ifade etmek için " $\langle, \rangle$ " ve $\mathbb{R}^3$ teki vektörel çarpımı ifade etmek için " $\wedge$ " sembolleri kullanılır. [22]

Tanım 2.3.4. Bir kuaterniyonun eşleniği $\bar{q}$ ile gösterilir ve

$$() : H \rightarrow H$$

$$q = S_q + \vec{V}_q \rightarrow \bar{q} = S_q - \vec{V}_q$$

olmak üzere q reel kuaterniyonunun eşleniği,

$$\bar{q} = a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3$$

eşitliği ile tanımlanır. [22]

Tanım 2.3.5. Bir reel kuaterniyonun normu

$$\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$$

$$q \rightarrow \|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}$$

olmak üzere $\|q\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dir. Norm 1 e eşitse reel kuaterniyona birim reel kuaterniyon denir. [23]

Tanım 2.3.6. Bir reel kuaterniyonun tersi q^{-1} ile gösterilir.

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

$$q^{-1} = \frac{a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dir. [23]

Tanım 2.3.7. (Kuaterniyon interpolasyonu) Başlangıç ve bitiş noktalarını kullanarak ara değerlerin tahmini hesaplanması olarak kuaterniyon interpolasyon kavramı sayısal analiz yöntemlerinden biridir. Tasarım geometrisinde uzaydaki dönme ve öteleme hareketlerini daha sistematik olarak üretebilmek için bazı interpolasyon çeşitlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Kuaterniyon interpolasyonunda iki önemli interpolasyondan biri lineer interpolasyon (LERP),

diğeri ise küresel interpolasyon (SLERP) dir. $t \in [0, 1]$ interpolasyon parametresi olmak üzere üç boyutlu Öklid uzayında a ve b başlangıç ve bitiş noktaları arasında

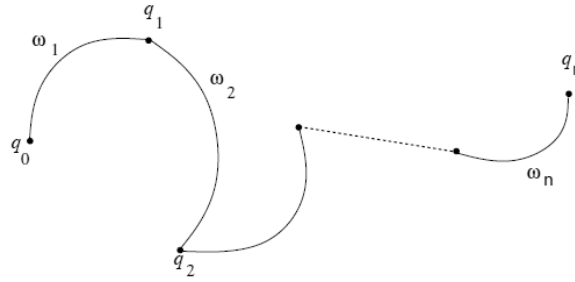
$$LERP(t, a, b) = (1 - t)a + tb$$

oluşan bağıntı lineer interpolasyon (LERP) olur.

Doğrusal interpolasyondan farklı olarak SLERP ler iki birim kuaterniyon arasındaki açının sabit olacağı şekilde küresel bir interpolasyon sağlarlar. SLERP interpolasyonunda oluşan kuaterniyonlar her zaman birim kuaterniyonları vereceği için SLERP interpolasyonunun normalize edilmesi gerekmemektedir. İki birim vektörün küresel lineer interpolasyonu N boyutlu uzayda,

$$SLERP(t, a, b) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} a + \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} b$$

olarak ifade edilir. Burada $\theta = \cos^{-1}(ab)$ dir.



Şekil 2.3 : q_i nin parçalı küresel lineer interpolasyonu

Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri ile kuaterniyonların ilişkilendirme noktasında LERP ve SLERP interpolasyonların etkisi büyüktür. [16]

2.3.1 Kuaterniyonik Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrileri

Bu bölümde öncelikle kuaterniyon yapıda Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrilerinin normal yapıdaki Hermit, Bezier, B-Spline ve NURBS eğrilere sağladığı avantajlardan bahsedeceğiz.

Örneğin, kuaterniyon uzayda bir Bezier eğrisini ele alırsak, sağladığı avantajları şu şekilde özetleyebiliriz:

1. LERP yerine SLERP kullanarak 4D hiper küresi (alanı 4 boyutlu küre) üzerinde Bezier eğrileri oluşturabiliriz, bu bize kapalı bir eğri oluşturmakla beraber aynı zamanda konveks gövde özelliğine sahip bir eğri oluşumu da sağlar.

2. Kuaterniyon yapıdaki eğrilerde hesaplamalar kontrol noktaları eksponansiyel yapıda olduğundan bize işlem kolaylığı sağlar ve daha yüksek mertebeden eğrilerin oluşumunda önemli bir katkıya sahiptir.

3. Daha karmaşık yapıya sahip eğrilerin oluşumunda farklı algoritmaların uygulanabilmesinin yanı sıra eğrinin açısal hız, açısal ivme, smooth yapısının da kontrol edilebilirliğini sağlar.

4. Kuaterniyonlar üç boyutlu uzayda dört boyutlu vektörlerden oluştuğundan hesaplamalarda kuaterniyon çarpımı matris çarpımından daha hızlı bir sonuç verir.

Kuaterniyon eğrilerin Bezier, B-Spline ve benzeri özel eğrilerle ilişkilendirilebilmesini sağlayan LERP ve SLERP interpolasyonların yaratıcısı Ken Shoemake 1985 yılında bu fikri ortaya koymuştur, buna ek olarak Kuipers 1987 yılında da bu fikri geliştirmiş ve avantajlarını da düşünerek interpolasyonları ilk Bezier eğrisi ile ilişkilendirmiştir.

Tanım 2.3.8. (Kümülatif form) $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^3$ noktalar dizisi verilsin. C^0 -sürekli bir $p(t) \in \mathbb{R}^3$ eğrisi her bir p_i noktası için $t = i$ olmak üzere aşağıdaki şekilde interpolate edilir:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 + \alpha_1(t)\Delta p_1 + \alpha_2(t)\Delta p_2 + \dots + \alpha_n(t)\Delta p_n \\ &= p_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\Delta p_i, \end{aligned}$$

burada $\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$ dir.

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 0, & t < i \\ t - i, & i \leq t < i + 1 \\ 1, & t \geq i + 1 \end{cases}$$

Benzer şekilde, $q_0, q_1, \dots, q_n \in S^3$ ve $q(t) \in S^3$ olsun. Her bir q_i kuaterniyonu $t = i$ de,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \exp(w_1 \alpha_1(t)) \exp(w_2 \alpha_2(t)) \dots \exp(w_n \alpha_n(t)) \\ &= q_0 \prod_{i=1}^n \exp(w_i \alpha_i(t)) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir, burada $w_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i)$ dir.

Dönel uzayda SLERP, w birim açısal hızı ile dönmeyi ifade eder. Bu noktada, verilen kontrol noktalar dizisi yardımıyla oluşturulan kümülatif forma sahip C^k -sürekli kuaterniyon eğriler parçalı lineer fonksiyonlar yardımıyla genelleştirilebilir.

$\{\alpha_i\}$ baz fonksiyonları olmak üzere $q(t)$ nin kümülatif formu

$$q_0 \prod_{i=1}^n \exp(w_i \alpha_i)$$

şeklinde dir. $q(t)$ kümülatif forma sahip kuaterniyon eğrilerin avantajları şu şekildedir:

1. Eğri noktalarının hesaplanmasında ve nümerik hataların minimize edilmesinde önemli rol oynayan kapalı forma sahip bir denklemdir.
2. Daha yüksek mertebeden türevlerin hesaplanmasında kolaylık sağlar.
3. C^k —sürekli baz fonksiyonları kullanılarak, C^k —sürekli kuaterniyon eğriler oluşturulabilir.
4. İyi seçilen baz fonksiyonları ile lokal olarak kontrol edilebilir kuaterniyon eğriler oluşturulur.

Tanım 2.3.9. (Kümülatif baz) $\mathbb{R}^3$ öklidyen uzayında iyi bilinen Bezier, B-Spline ve benzeri eğriler katsayılar olarak verilen kontrol noktaları ile baz fonksiyonlarının toplamı olarak ifade edilir. $\{B_i\}$ baz fonksiyonları ve $\{p_i\}$ kontrol noktaları olmak üzere $p(t)$ eğrisinin temel formu

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=0}^n p_i B_i(t) \\ &= p_0 B_0(t) + p_1 B_1(t) + p_2 B_2(t) + \dots + p_n B_n(t) \\ &= p_0 (B_0(t) + \dots + B_n(t)) + (p_1 - p_0) (B_1(t) + \dots + B_n(t)) + \\ &\quad (p_2 - p_1) (B_2(t) + \dots + B_n(t)) + \dots + p_n B_n(t) \end{aligned}$$

dir. [24] Burada $\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$ ve $\tilde{B}_i(t) = \sum_{j=i}^n B_j(t)$ olduğundan, temel form, kuaterniyon eğrinin kümülatif formuna

$$p(t) = p_0 \tilde{B}_0(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{B}_i(t)$$

şeklinde dönüştürülür. $p(t)$ kuaterniyon eğrisinde $q(t) = e^{p(t)}$ dönüşümü yapıldığında,

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{p(t)} = e^{p_0 \tilde{B}_0(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{B}_i(t)} \\ &= e^{p_0 \tilde{B}_0(t) + (p_1 - p_0) \tilde{B}_1(t) + (p_2 - p_1) \tilde{B}_2(t) + \dots + (p_n - p_{n-1}) \tilde{B}_n(t)} \\ &= \underbrace{e^{p_0 \tilde{B}_0(t)}}_{q_0} e^{(p_1 - p_0) \tilde{B}_1(t) + (p_2 - p_1) \tilde{B}_2(t) + \dots + (p_n - p_{n-1}) \tilde{B}_n(t)} \end{aligned}$$

$w_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i)$, $e^{p_i - p_{i-1}} = q_i - q_{i-1}$ ve vektör toplamı kuaterniyon çarpımına dönüştürülerek

$$q(t) = q_0 \prod_{i=1}^n \exp(w_i \tilde{B}_i(t))$$

elde edilir. [24]

Tanım 2.3.10. (Kuaterniyon Bezier eğrisi) $\beta_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ Bernstein bazları ile n -inci dereceden bir Bezier eğrisi

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i \beta_{i,n}(t) \quad (2.3.1)$$

şeklinde gösterilir. [24] Bezier eğrisinden, bir önceki tanımda olduğu gibi kümülatif formda kuaterniyon Bezier eğrisi elde ederiz. Öncelikle (2.3.1) denklemini tekrar formüle edersek,

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=0}^n p_i \beta_{i,n}(t) \\ &= p_0 \beta_{0,n}(t) + p_1 \beta_{1,n}(t) + p_2 \beta_{2,n}(t) + \dots + p_n \beta_{n,n}(t) \\ &= p_0 (\underbrace{\beta_{0,n}(t) + \dots + \beta_{n,n}(t)}_{\tilde{\beta}_{0,n}(t)}) + (p_1 - p_0) (\underbrace{\beta_{1,n}(t) + \dots + \beta_{n,n}(t)}_{\tilde{\beta}_{1,n}(t)}) + \\ &\quad (p_2 - p_1) (\underbrace{\beta_{2,n}(t) + \dots + \beta_{n,n}(t)}_{\tilde{\beta}_{2,n}(t)}) + \dots + p_n \beta_{n,n}(t) \\ &= p_0 \tilde{\beta}_{0,n}(t) + \underbrace{(p_1 - p_0)}_{\Delta p_1} \tilde{\beta}_{1,n}(t) + \underbrace{(p_2 - p_1)}_{\Delta p_2} \tilde{\beta}_{2,n}(t) + \dots + p_n \tilde{\beta}_{n,n}(t) \end{aligned}$$

$\tilde{\beta}_{i,n}(t) = \sum_{j=i}^n \beta_{j,n}(t)$ kümülatif baz fonksiyonları ile $p(t)$ eğrisi

$$p(t) = p_0 \tilde{\beta}_{0,n}(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{\beta}_{i,n}(t) \quad (2.3.2)$$

şeklinde gösterilir. (2.3.2) denklemindeki $p(t)$ Bezier eğrisine $q(t) = e^{p(t)}$ dönüşümü yapıldığında,

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{p(t)} = e^{p_0 \tilde{\beta}_{0,n}(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{\beta}_{i,n}(t)} \\ &= e^{p_0 \tilde{\beta}_{0,n}(t) + (p_1 - p_0) \tilde{\beta}_{1,n}(t) + (p_2 - p_1) \tilde{\beta}_{2,n}(t) + \dots + (p_n - p_{n-1}) \tilde{\beta}_{n,n}(t)} \\ &= \underbrace{e^{p_0 \tilde{\beta}_{0,n}(t)}}_{q_0} e^{(p_1 - p_0) \tilde{\beta}_{1,n}(t) + (p_2 - p_1) \tilde{\beta}_{2,n}(t) + \dots + (p_n - p_{n-1}) \tilde{\beta}_{n,n}(t)} \end{aligned}$$

kümülatif form dönüşümü uygulandığında ise n -inci dereceden kuaterniyon Bezier eğrisi,

$$q(t) = q_0^{\tilde{\beta}_{0,n}(t)} \prod_{i=1}^n \exp(w_i \tilde{\beta}_{i,n}(t)) \quad (2.3.3)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.3.11. (Kuaterniyon Hermit eğrisi) Bir kübik Hermit eğrisi p_a ve p_b uç noktaları, v_a ve v_b uç hızları ile tanımlanır. Alternatif olarak, Hermit eğrisi bir kübik Bezier eğrisi tarafından

$$\begin{aligned} p_0 &= p_a, \\ p_1 &= p_a + \frac{v_a}{3}, \\ p_2 &= p_b - \frac{v_b}{3}, \\ p_3 &= p_b \end{aligned}$$

noktaları ile $\beta_i(t) = \beta_{i,3}(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) olmak üzere

$$p(t) = \sum_{i=0}^3 p_i \beta_i(t)$$

şeklinde gösterilir. [24] Benzer şekilde, bir kübik Bezier eğrisi q_a, q_b uç kuaterniyonlar ve w_a, w_b uç açısal hızlar olmak üzere (2.3.3) denkleminde $\tilde{\beta}_i(t) = \tilde{\beta}_{i,3}(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) ile

$$q(t) = q_0^{\tilde{\beta}_0(t)} \prod_{i=1}^n \exp(w_i \tilde{\beta}_i(t)) \quad (2.3.4)$$

şeklinde dir. p_0, p_1, p_2 ve p_3 kontrol noktalarına kuaterniyon dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki noktalar elde edilir:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_a, \\ q_1 &= q_a \exp\left(\frac{w_a}{3}\right), \\ q_2 &= q_b \exp\left(\frac{w_b}{3}\right)^{-1}, \\ q_3 &= q_b \end{aligned}$$

Bu yeni dört kontrol noktası yardımıyla w_i katsayıları

$$\begin{aligned} w_1 &= \log(q_0^{-1} q_1) = \log(q_a^{-1} q_a \exp\left(\frac{w_a}{3}\right)) = \frac{w_a}{3}, \\ w_2 &= \log(q_1^{-1} q_2) = \log\left(\exp\left(\frac{w_a}{3}\right)^{-1} q_a^{-1} q_b \exp\left(\frac{w_b}{3}\right)^{-1}\right), \\ w_3 &= \log(q_2^{-1} q_3) = \log\left(\exp\left(\frac{w_b}{3}\right) q_b^{-1} q_b\right) = \frac{w_b}{3} \end{aligned}$$

hesaplanarak (2.3.4) denklemindeki kübik Bezier kuaterniyon eğrisi elde edilir. Bu açısal hızlar kullanılarak (2.3.4) denkleminde bir kübik Hermit kuaterniyon eğrisi oluşturulur.

q_a, q_b ile w_a, w_b kübik Hermit kuaterniyon eğrisinde sırasıyla uç noktalar ve açısal hızlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 \exp(0) \exp(0) \exp(0) \\ &= q_0 = q_a, \\ q(1) &= q_0 \exp(w_1) \exp(w_2) \exp(w_3) \\ &= q_0 (q_0^{-1} q_1) (q_1^{-1} q_2) (q_2^{-1} q_3) \\ &= q_3 = q_b \end{aligned}$$

olduğunu görmek kolaydır. $q(t)$ nin birinci türevi

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1(t) &= 1 - (1-t)^3, \quad \tilde{\beta}_2(t) = 3t^2 - 2t^3, \quad \tilde{\beta}_3(t) = t^3, \\ \tilde{\beta}'_1(t) &= 3(1-t)^2, \quad \tilde{\beta}'_2(t) = 6t(1-t), \quad \tilde{\beta}'_3(t) = 3t^2 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} q'(t) &= q_0 \exp(w_1 \tilde{\beta}_1(t)) (w_1 \tilde{\beta}'_1(t)) \exp(w_2 \tilde{\beta}_2(t)) \exp(w_3 \tilde{\beta}_3(t)) \\ &\quad + q_0 \exp(w_1 \tilde{\beta}_1(t)) \exp(w_2 \tilde{\beta}_2(t)) (w_2 \tilde{\beta}'_2(t)) \exp(w_3 \tilde{\beta}_3(t)) \\ &\quad + q_0 \exp(w_1 \tilde{\beta}_1(t)) \exp(w_2 \tilde{\beta}_2(t)) \exp(w_3 \tilde{\beta}_3(t)) (w_3 \tilde{\beta}'_3(t)) \end{aligned}$$

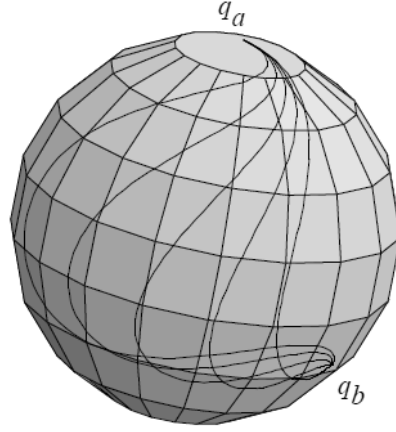
şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} q'(0) &= q_a w_a, \\ q'(1) &= q_b w_b \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $q(t)$ kuaterniyon eğrisi, eğrinin uç noktalarında

$$\begin{aligned} w_a &= q_a^{-1} q'(0) = q(0)^{-1} q'(0), \\ w_b &= q_b^{-1} q'(1) = q(1)^{-1} q'(1) \end{aligned}$$

açısal hızlarına sahiptir.



Şekil 2.4 : Hermit kuaterniyon eğrileri

Tanım 2.3.12. (Kuaterniyon B-Spline eğrisi) Süreklilik, türevlenebilirlik ve lokal kontrol edilebilirlik durumlarında daha avantajlı olması sebebiyle B-Spline eğriler bilgisayar grafikleri ve dizaynı alanında çok popüler bir yere sahiptir. Kontrol noktasının herhangi bir noktaya taşınmasıyla B-Spline eğrisi geometrik sürekliliğini kaybetmeden modifiye edilebilir.

B-Spline eğrisi $B_{i,k}(t)$ baz fonksiyonlarının ağırlıklı toplamı olarak tanımlanır. $\{p_i\}$ kontrol noktalar kümesi olmak üzere $p(t)$ B-Spline eğrisi

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,k}(t)$$

olarak ifade edilir.

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i < t < t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak şartıyla $B_{i,k}(t)$ baz fonksiyonları,

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t)$$

eşitliğine sahiptir. B-Spline eğrisi kümülatif form yardımıyla,

$$p(t) = p_0 \tilde{B}_{0,k}(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{B}_{i,k}(t)$$

şeklinde tekrardan formüle edilebilir. Burada $\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$ ve

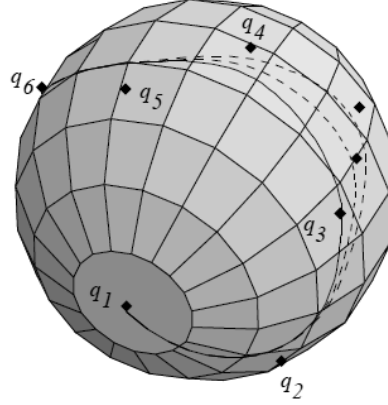
$$\tilde{B}_{i,k}(t) = \sum_{j=i}^n B_{j,k}(t) = \begin{cases} \sum_{j=i}^{i+k} B_{j,k}(t), & t_i < t < t_{i+k-1} \\ 1, & t \geq t_{i+k-1} \\ 0, & t \leq t_i \end{cases}$$

dır.

Gerekli kuaterniyonik dönüşümler yapıldığında eğri

$$q(t) = q_0^{\tilde{B}_{0,k}(t)} \prod_{i=1}^n \exp((w_i) \tilde{B}_{i,k}(t))$$

formuna dönüşür. Bu eşitlik bize $\{q_i\}$ kontrol noktaları ve $\{w_i\}$ açısal hızları ile sürekli ve lokal olarak kontrol edilebilen B-Spline kuaterniyon eğrisini verir. [24]



Şekil 2.5 : B-Spline kuaterniyon eğrisi

Tanım 2.3.13. (Kuaterniyon NURBS eğrisi) k -ncı dereceden bir B-Spline baz fonksiyonu (2.11) denklemi ile tanımlanır. Denklem ile verilen k dereceli bir B-Spline eğrisinden; w_i ağırlık vektörü olmak üzere,

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^n p_i w_i B_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,k}(t)}$$

NURBS eğrisi elde edilir. $p(t) = \sum_{i=0}^n p_i N_{i,k}(t)$ eğrisinde, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$N_{i,k}(t) = \frac{w_i B_{i,k}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,k}(t)}$$

dir. NURBS eğrisi reformüle edildiğinde,

$$p(t) = p_0 + \frac{\sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{w}_i \tilde{B}_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \tilde{B}_{i,k}(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Vektör toplamı kuaterniyon çarpıma dönüştürülerek

$$q(t) = q_0^{\tilde{B}_{0,k}(t)} \frac{\prod_{i=1}^n \exp((w_i) \tilde{B}_{i,k}(t) \overline{w_i})}{\prod_{i=1}^n \exp((w_i) \tilde{B}_{i,k}(t))}$$

elde edilir. Bu eğri kuaterniyon NURBS eğrisi adını alır. [24]

Tezin ileriki safhalarında bu özel yapıdaki eğrileri kullanarak tensör çarpımı yüzeyleri yardımıyla yeni yüzeyler elde edeceğiz.



3. EĞRİLERİN DÖNEL YÜZEYLERİ VE TENSÖR ÇARPIMI YÜZEY YAMALARI

Bu bölümde öncelikle eğrilerin standart baz fonksiyonları ile oluşturulan dönel yüzeylerinden ve karakterizasyonlarından bahsedeceğiz, daha sonra da genel tipte trigonometrik baz fonksiyonları tarafından oluşturulan Bezier, B-Spline ve NURBS eğrilerinin tensör çarpımı yüzey yamalarını oluşturacağız.

3.1 Kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri tarafından oluşturulan dönel yüzeyler

Dönme yüzeylerinin şekillerini ayarlama ve kontrol etmede geometrik tasarımla başa çıkmak için, öncelikle iki yerel şekil parametresiyle kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri kullanarak dönel yüzeyleri yaptığımız akademik çalışmada oluşturduk. Sonrasında oluşan yeni dönel yüzeylerin şekil parametrelerini değiştirerek yerel şekillerini ayarlama konusunda ne kadar iyi bir performans sunduğunu gördük. Kübik Hermit ve kübik Bezier eğrileri tarafından üretilen dönel yüzeyleri farklı yüzeylerin tasarımı için değerli bir yol sağladığına tanıklık ederek, son olarak ta bu dönel yüzeyleri için ortalama ve Gauss eğrilerini kullanarak karakterizasyonları inceledik. [20] Tezin bu altbölümünde ise bu çalışmamızdan bahsedeceğiz.

3.1.1 Kübik Hermit eğriler tarafından dönel yüzeylerin inşası

Bu bölümde, bir tüp deformasyonunun yapısını kullanarak kübik Hermit eğrisi tarafından oluşturulan dönme yüzeyini oluşturacağız.

$r \in [a, b]$ olmak üzere r yarıçaplı bir tüp verildiğini varsayalım, yani tüpün minimum yarıçapı a ve maksimum yarıçapı b 'dir. Ayrıca tüpün yüksekliğini h olarak tanımlayalım, burada $h \in [c, d]$, yani tüpün minimum yüksekliği c iken maksimum yüksekliği d 'dir. Aralıktaki r ve h değerlerinin seçimi, geometrik tasarımın şekil bileşenlerinin boyut farklılıklarını amaçlamaktadır. [25]

Öncelikle, tüpün taban dairesinde bir merkez noktası belirliyoruz $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$. Bu merkez noktası için çember denklemi kullanılarak $P(0)$ noktası

$$P(0) = (x_1 + r_1 \cos v, y_1 + r_1 \sin v, z_1) = (r_1, 0, 0). \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilir. Buna ek olarak, tüpün çatı dairesinde merkez noktası $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, h)$ olsun. $v = 0$ için, çember denklemini kullanarak tüp çatı dairesi oluşturabilir ve $P(1)$ noktasını

$$P(1) = (x_1 + r_2 \cos v, y_1 + r_2 \sin v, z_1) = (r_2, 0, h) \quad (3.1.2)$$

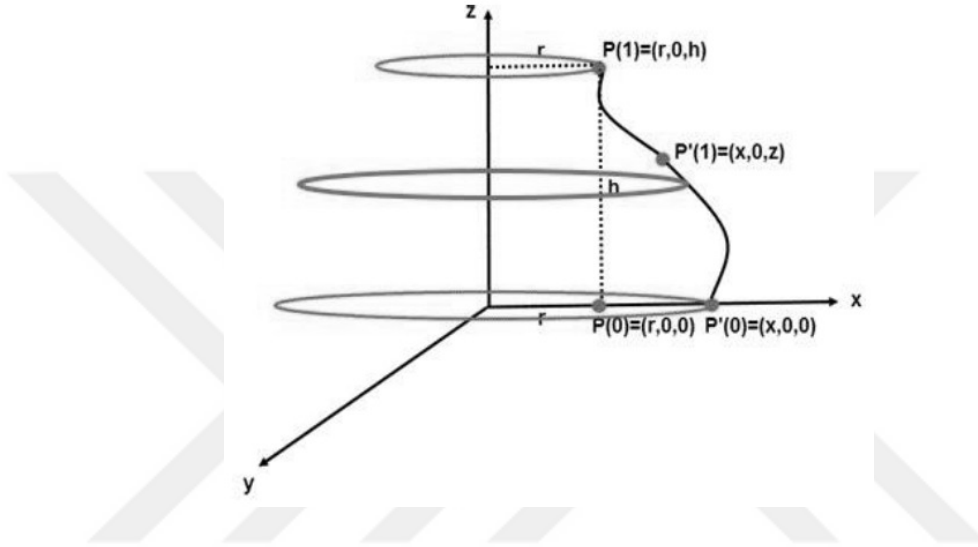
şeklinde elde edebiliriz. Ardından, Hermit eğrisinin eğriliklerini kontrol etmek için kontrol noktalarını belirleyebiliriz. $P'(0)$ ve $P'(1)$ aşağıdaki gibidir:

$$P'(0) = (x, 0, 0) \quad (3.1.3)$$

ve

$$P'(1) = (x, 0, z), \quad (3.1.4)$$

dir. [20] Burada $-2r \leq x, z \leq 2h$ ve $x, z \in \mathbb{R}$.



Şekil 3.1 : Hermit eğrisi için tüp deformasyonu gösterimi

3.1.1.1 Kübik Hermit eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizasyonları

(3.1.1)-(3.1.4) den $P(u) = P(0)H_1(u) + P(1)H_2(u) + P'(0)H_3(u) + P'(1)H_4(u)$ ve Hermit eğrisi

$$P(u) = (r_1H_1(u) + r_2H_2(u) + xH_3(u) + xH_4(u), 0, hH_2(u) + zH_4(u)), 0 \leq u \leq 1 \quad (3.1.5)$$

dir. (3.1.5) ve baz fonksiyonları

$$H_1(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3,$$

$$H_2(u) = 3u^2 - 2u^3,$$

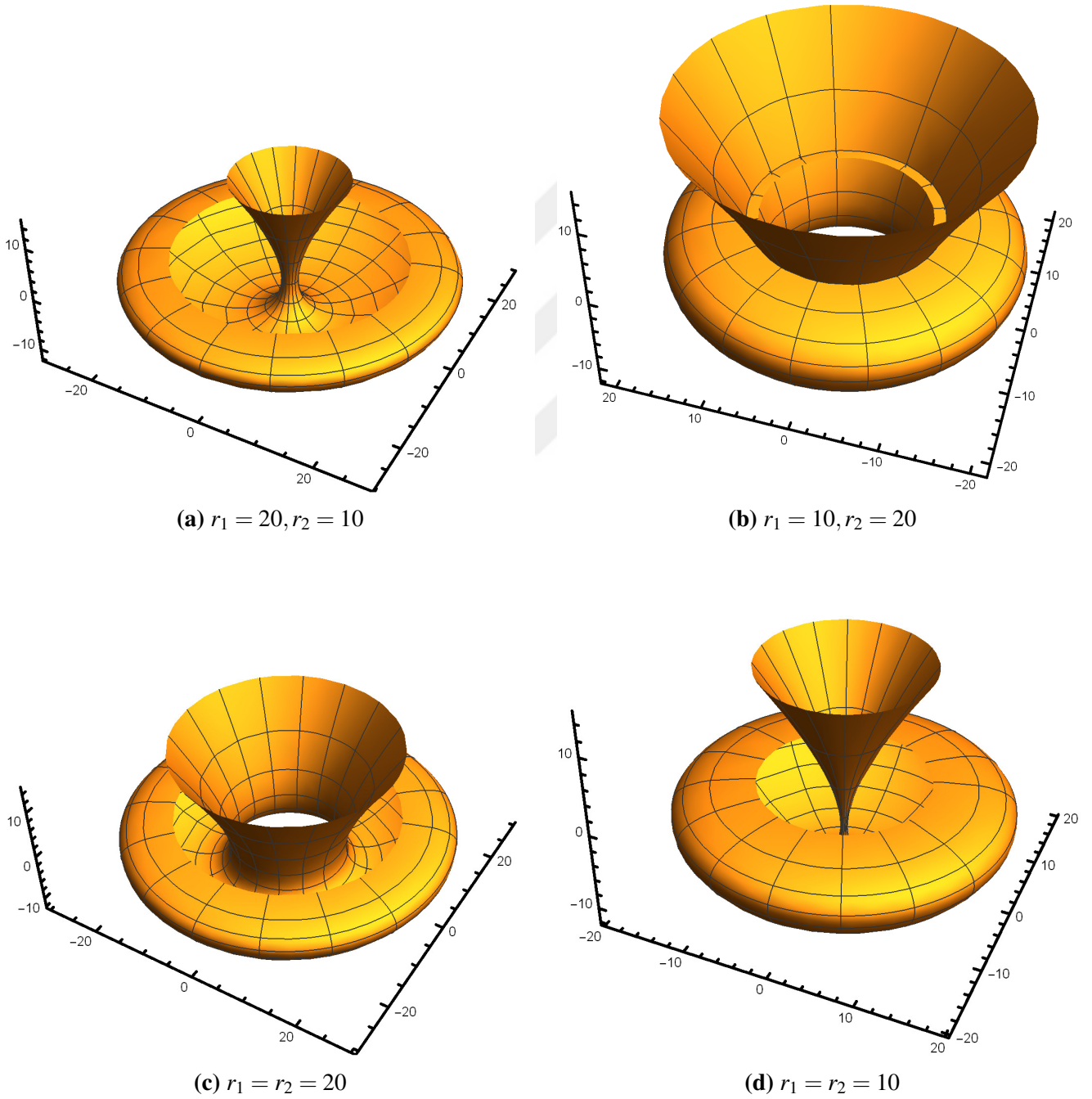
$$H_3(u) = u - 2u^2 + u^3,$$

$$H_4(u) = -u^2 + u^3.$$

şeklindedir. Hermit eğrisinin z -ekseni etrafında dönmesiyle,

$$\begin{aligned} P(u, v) = & ([r_1(1 - 3u^2 + 2u^3) + r_2(3u^2 - 2u^3) + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \cos v, \\ & [r_1(1 - 3u^2 + 2u^3) + r_2(3u^2 - 2u^3) + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \sin v, \\ & h(3u^2 - 2u^3) + z(-u^2 + u^3)). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dönel yüzeyi oluşur. Aşağıdaki grafiklerde (3.1.6) yüzeyinin farklı r_1 ve r_2 değerleri için $x = 100$, $h = 15$, $z = 150$ olduğu durumlarda şekillerini görüyoruz:



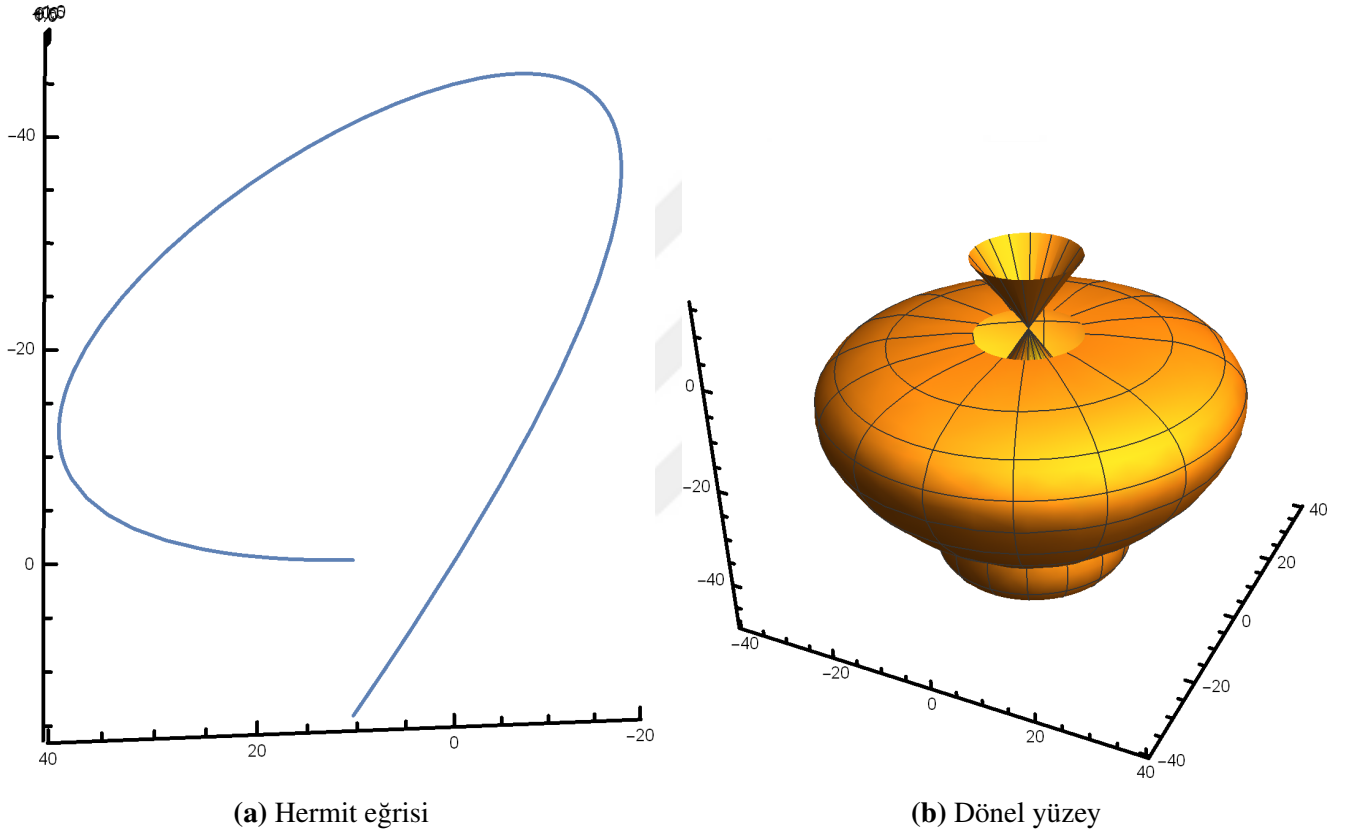
Şekil 3.2 : Farklı yarıçaplar için dönel yüzeyler

(3.1.6) denkleminde $r_1 = r_2 = r$ olmak üzere Hermit baz fonksiyonları tarafından oluşturulan dönel yüzeyi

$$P(u, v) = ([r + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \cos v, [r + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \sin v, h(3u^2 - 2u^3) + z(-u^2 + u^3)). \quad (3.1.7)$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda, (3.1.7) denkleminde $r = 10$, $x = 300$, $h = 15$, $z = 400$ değerleri için oluşturulan Hermit eğrisi ve dönel yüzey grafiklerini görüyoruz:



Şekil 3.3 : Hermit eğrisi ve dönel yüzeyin gösterimi

(3.1.7) dönel yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları sırasıyla

$$E = x^2(1 - 6u + 6u^2)^2 + [6hu(1 - u) + zu(-2 + 3u)]^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = [r + x(u - 3u^2 + 2u^3)]^2,$$

ve

$$\begin{aligned} L &= \frac{2x}{\sqrt{D}}[3h(1-2u) - z(1-3u+3u^2)], \\ M &= 0, \\ N &= \frac{1}{\sqrt{D}}[r+x(u-3u^2+2u^3)][6hu(1-u) + zu(-2+3u)], \end{aligned}$$

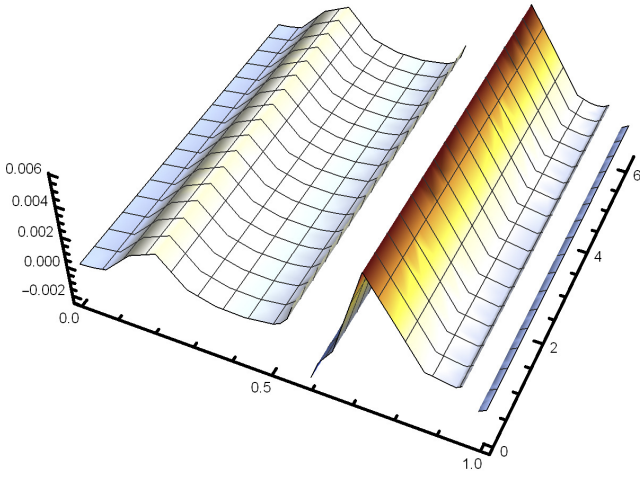
dir. Burada, $D = [6hu(1-u) + zu(-2+3u)]^2 + x^2(1-6u+6u^2)^2$ dir.

Teorem 3.1.1. (3.1.7) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla,

$$\begin{aligned} H &= \frac{2x[r+x(u-3u^2+2u^3)][3h(1-2u) - z(1-3u+3u^2)] + \{x^2(1-6u+6u^2)^2 + [6hu(1-u) + zu(-2+3u)]^2\}[6hu(1-u) + zu(-2+3u)]}{2[x^2(1-6u+6u^2)^2 + [6hu(1-u) + zu(-2+3u)]^2]^{\frac{3}{2}}[r+x(u-3u^2+2u^3)]}, \\ K &= \frac{2x[3h(1-2u) - z(1-3u+3u^2)][6hu(1-u) + zu(-2+3u)]}{[x^2(1-6u+6u^2)^2 + [6hu(1-u) + zu(-2+3u)]^2]^2[r+x(u-3u^2+2u^3)]} \end{aligned}$$

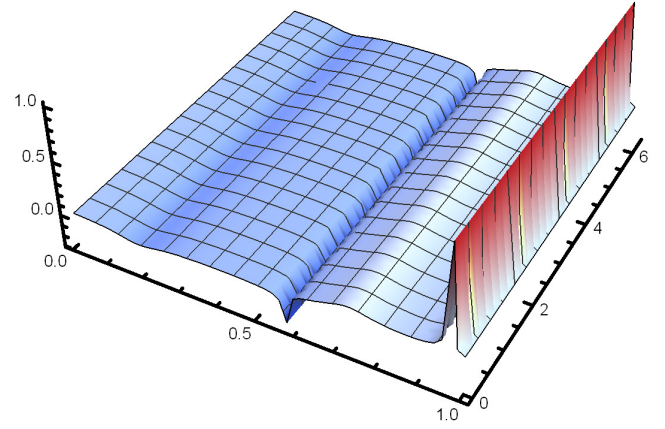
dir. [20]

Aşağıdaki grafikler, (3.1.7) dönel yüzeylerinin $r = 10$, $x = 300$, $h = 15$, $z = 400$ değerleri için sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri ile beraber dönel yüzey üzerinde Gauss ve ortalama eğriliklerin değişimlerini göstermektedir:



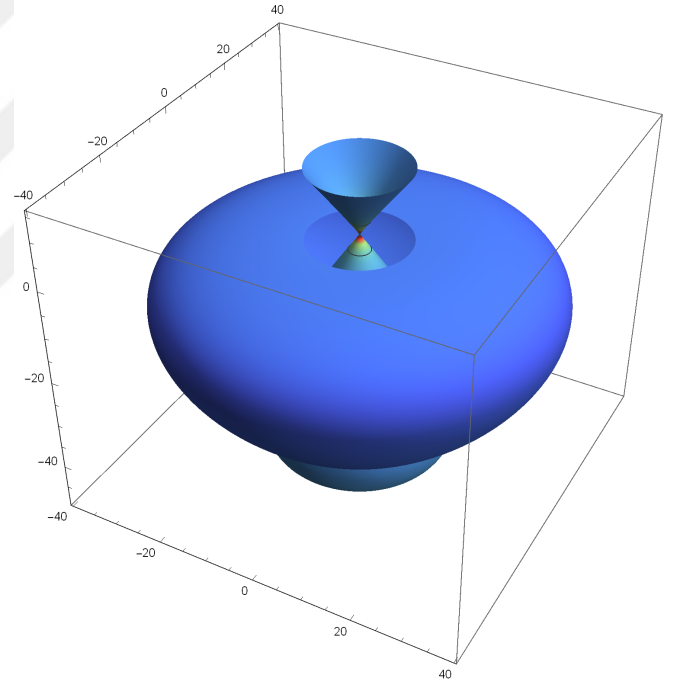
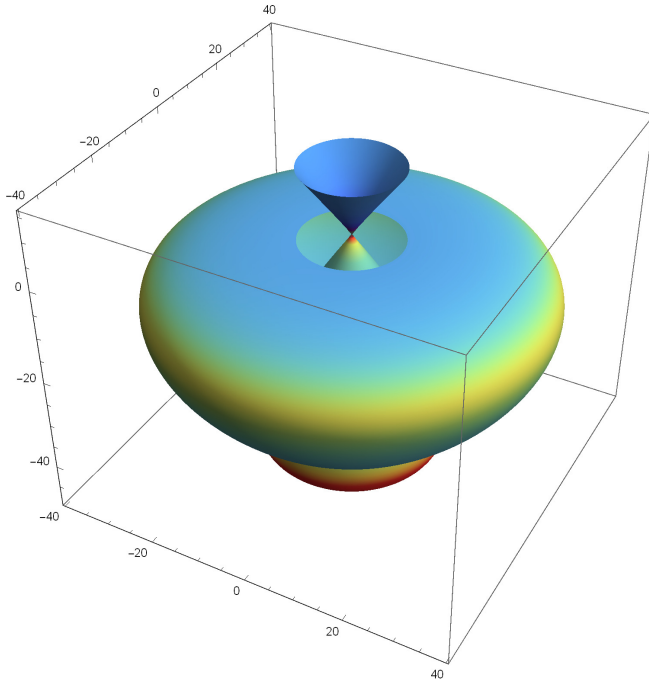
(a) Gauss eğriliğinin fonksiyon grafiği

Gaussian Curvature



(b) Ortalama eğriliğinin fonksiyon grafiği

Mean Curvature

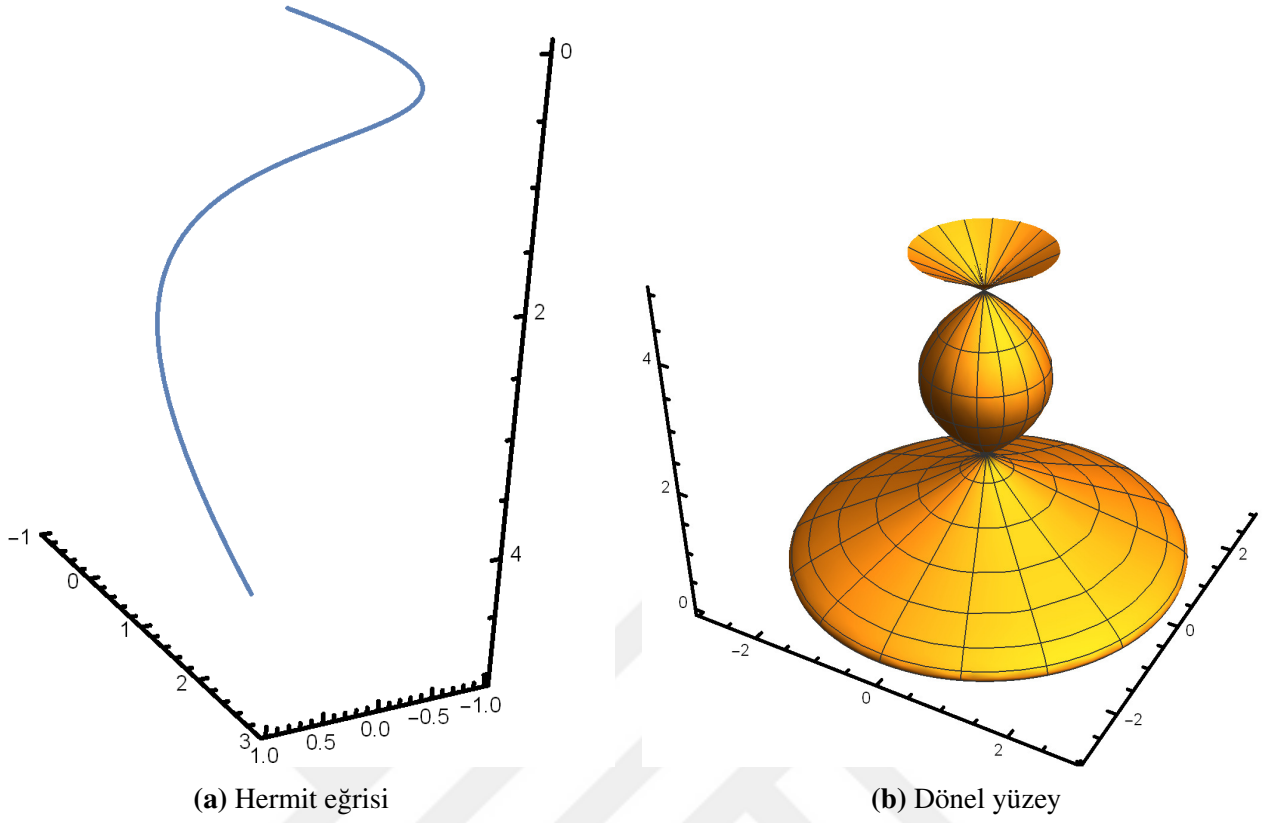


Şekil 3.4 : Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu

(3.1.7) denkleminde $z = 2h$ için

$$P(u, v) = ([r + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \cos v, [r + x(u - 3u^2 + 2u^3)] \sin v, hu^2). \quad (3.1.8)$$

elde edilir. Aşağıdaki grafiklerde, (3.1.8) denklemi için Hermit eğrisi ve $r = 1$, $x = 20$, $h = 5$, $z = 10$ değerleri için dönel yüzeyleri:



Şekil 3.5 : Hermit eğrisi ve dönel yüzey

şeklindedir.

(3.1.8) denklemini için,

$$E = x^2(1 - 6u + 6u^2)^2 + 4h^2u^2, \quad F = 0, \quad G = [r + x(u - 3u^2 + 2u^3)]^2,$$

$$L = \frac{2hx}{\sqrt{D}}(1 - 6u^2), \quad M = 0, \quad N = \frac{2hu}{\sqrt{D}}[r + x(u - 3u^2 + 2u^3)],$$

şeklindedir. Burada, $D = [6hu(1 - u) + zu(-2 + 3u)]^2 + x^2(1 - 6u + 6u^2)^2$ dir.

Teorem 3.1.2. (3.1.8) dönel yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla

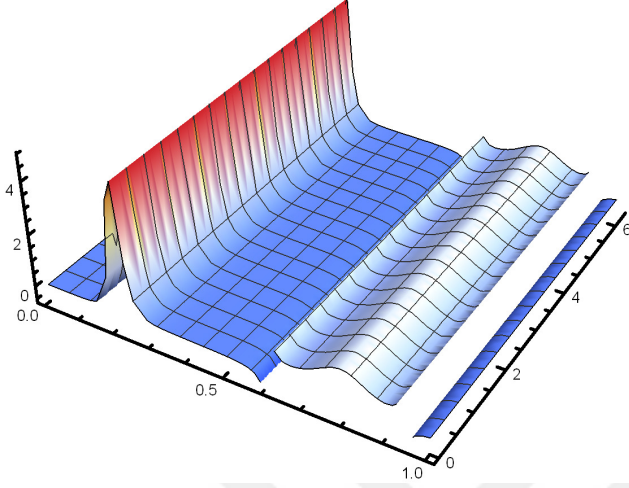
$$H = \frac{h\{x(1 - 6u^2)[r + x(u - 3u^2 + 2u^3)] + u[x^2(1 - 6u + 6u^2)^2 + 4h^2u^2]\}}{[x^2(1 - 6u + 6u^2)^2 + 4h^2u^2]^{\frac{3}{2}}[r + x(u - 3u^2 + 2u^3)]} \quad (3.1.9)$$

ve

$$K = \frac{4h^2xu(1 - 6u^2)}{[x^2(1 - 6u + 6u^2)^2 + 4h^2u^2]^2[r + x(u - 3u^2 + 2u^3)]}. \quad (3.1.10)$$

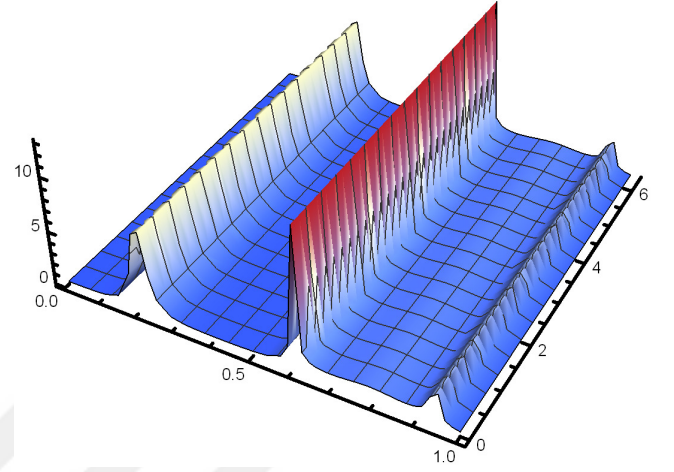
dir. [20]

Aşağıdaki grafikler $r = 1$, $x = 20$, $h = 5$, $z = 10$ için sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri ile beraber dönel yüzey üzerinde Gauss ve ortalama eğriliklerin değişimlerini göstermektedir:



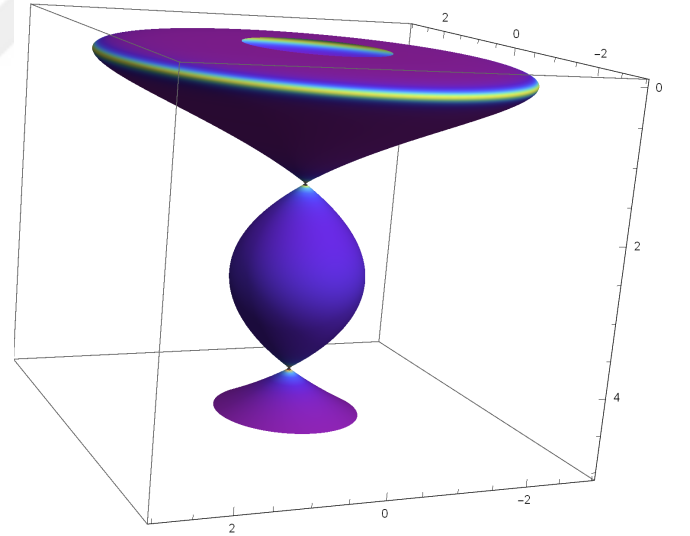
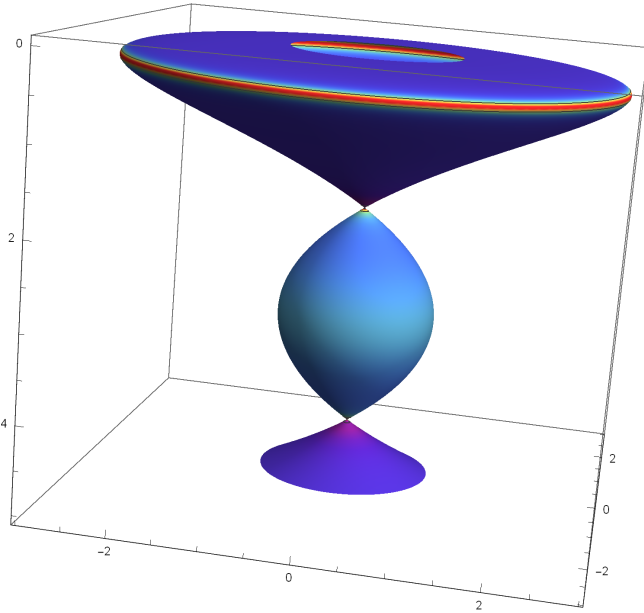
(a) Gauss eğriliğinin fonksiyon grafiği

Gaussian Curvature



(b) Ortalama eğriliğinin fonksiyon grafiği

Mean Curvature



Şekil 3.6 : Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu

Şimdi (3.1.9) ve (3.1.10) dan aşağıdaki karakterizasyonları verebiliriz:

Sonuç 3.1.1. *Kübik Hermit eğrisi tarafından oluşturulan dönme yüzeyi (3.1.8) olsun. Yüzeyin ortalama eğriliği,*

1. Hermit eğrisinin başlangıç noktasında yok olamaz.
2. Ancak ve ancak $5hrx = x^2 + 4h^2$ denklemi geçerliyse, Hermit eğrisinin bitiş noktasında kaybolur.
3. Hermit eğrisinin bitiş noktasında kayboluyorsa, $P'(1)$ in kontrol noktası z - eksenini üzerinde olamaz veya $P'(0)$ in kontrol noktası orijinde olamaz.

Sonuç 3.1.2. Kübik Hermit eğrisi tarafından oluşturulan dönme yüzeyi (3.1.8) olsun. Yüzeyin Gauss eğriliği,

1. Hermit eğrisinin başlangıç noktasında kaybolur.
2. (3.1.8) nin $P(\frac{1}{\sqrt{6}}, v)$ parametrik eğrisi üzerinde yok olur.
3. $P'(1)$ in kontrol noktası z - eksenini üzerindeyse veya $P'(0)$ in kontrol noktası orijindeyse yok olur.

3.1.2 Kübik Bezier eğriler tarafından dönel yüzeylerin inşası

Bu bölümde, tüp deformasyon yapısını kullanarak kübik Bezier eğrisi tarafından elde edilen dönme yüzeyini oluşturacağız.

r_1 ve r_2 yarıçaplı bir tüpün verildiğini varsayalım, burada $r_1, r_2 \in [a, b]$ dir. Ayrıca tüpün yüksekliğini h olarak tanımlayalım, burada $h \in [c, d]$ dir. Aralıktaki r_1, r_2 ve h değerlerinin seçimi ile, geometrik tasarımın şekil boyutlarının değişimi amaçlanmaktadır.

İlk olarak tüpün taban çemberi $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ üzerinde bir merkez (başlangıç) noktası belirliyoruz. Daha sonra bu merkez (başlangıç) noktası ve $v = 0$ için çember denklemi kullanılarak tüpün taban dairesi oluşturulur ve P_0 noktası

$$P_0 = (x_1 + r_1 \cos v, y_1 + r_1 \sin v, z_1) = (r_1, 0, 0). \quad (3.1.11)$$

şeklindedir. Ayrıca tüpün çatı çemberinin merkez (bitiş) noktası $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, h)$ olsun. Daha sonra, $v = 0$ için, çember denklemini kullanarak tüp çatı çemberi oluşturabilir ve P_3 noktası

$$P_3 = (x_1 + r_2 \cos v, y_1 + r_2 \sin v, z_1) = (r_2, 0, h) \quad (3.1.12)$$

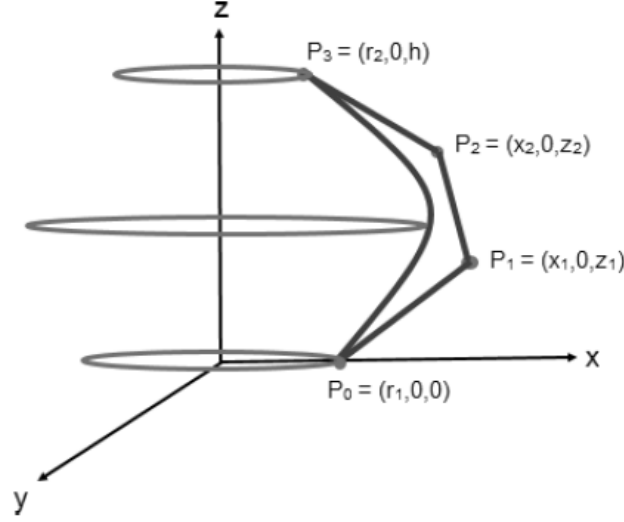
olarak elde edilir. Kübik Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktaları dışındaki diğer iki kontrol noktası P_1 ve P_2 sırasıyla

$$P_1 = (x_1, 0, z_1) \quad (3.1.13)$$

ve

$$P_2 = (x_2, 0, z_2). \quad (3.1.14)$$

şeklindedir.



Şekil 3.7 : Bezier eğrisi için tüp deformasyonunun gösterimi

3.1.2.1 Kübik Bezier eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizasyonları

Bu alt bölümde öncelikle kübik Bezier eğrisinin parametrik ifadesi elde edilerek oluşturulan dönme yüzeyi için bazı örnekler vereceğiz. Ayrıca, ortalama ve Gauss eğrilikleri yardımıyla bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

$$P(u) = f_0(u)P_0 + f_1(u)P_1 + f_2(u)P_2 + f_3(u)P_3 \text{ Bezier eğrisi}$$

$$P(u) = (r_1 f_0(u) + x_1 f_1(u) + x_2 f_2(u) + r_2 f_3(u), 0, z_1 f_1(u) + z_2 f_2(u) + h f_3(u)), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.1.15)$$

şeklindedir. [25] Burada,

$$f_0(u) = 1 - 3u + 3u^2 - u^3,$$

$$f_1(u) = 3u - 6u^2 + 3u^3,$$

$$f_2(u) = 3u^2 - 3u^3,$$

$$f_3(u) = u^3.$$

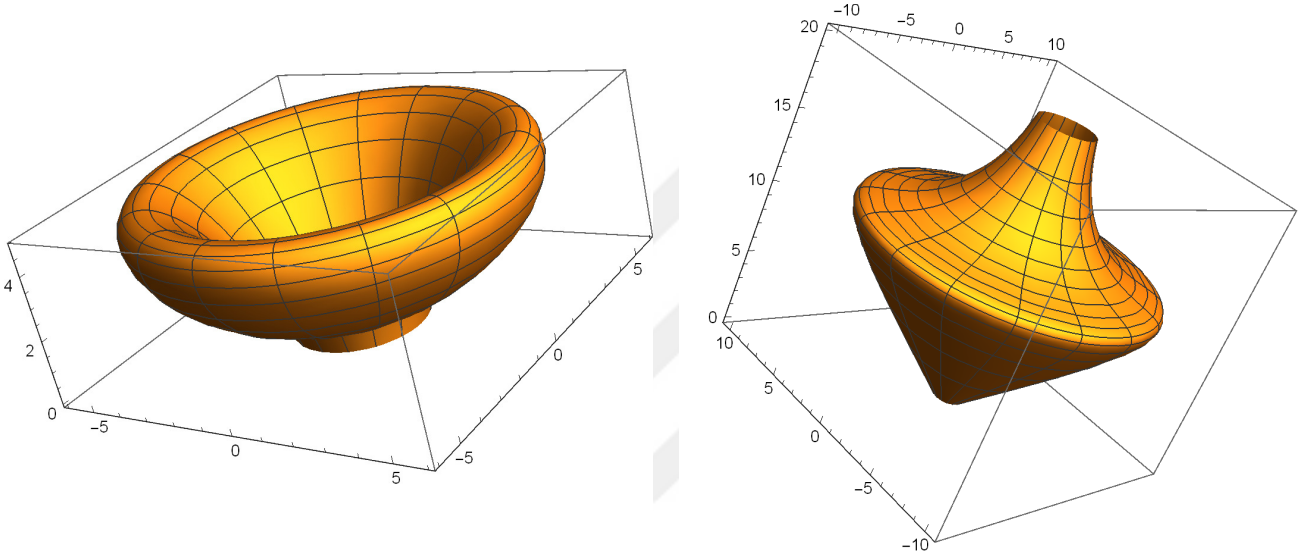
baz fonksiyonlarıdır. Bu alt bölümde

(3.1.15) Bezier eğrisinin z -ekseni etrafında dönmesiyle iki parametrelili

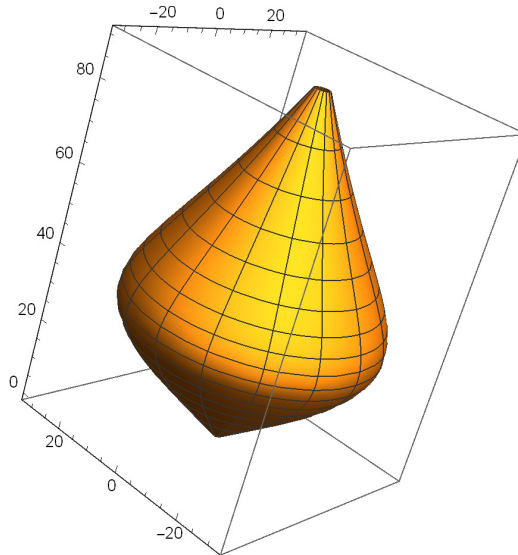
$$\begin{aligned} P(u, v) = & ([r_1(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + x_1(3u - 6u^2 + 3u^3) + x_2(3u^2 - 3u^3) + r_2u^3] \cos v, \\ & [r_1(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + x_1(3u - 6u^2 + 3u^3) + x_2(3u^2 - 3u^3) + r_2u^3] \sin v, \\ & z_1(3u - 6u^2 + 3u^3) + z_2(3u^2 - 3u^3) + u^3h). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

denklemini elde ederiz.

Aşağıdaki şekillerde, farklı $r_1, r_2, x_1, x_2, z_1, z_2$ ve h değerleri için (3.1.16) yüzeyinin grafikleri görülmektedir:



(a) $r_1 = 2, r_2 = 0, x_1 = 5, x_2 = 10, z_1 = 10, z_2 = 2, h = 0.1$ (b) $r_1 = 1, r_2 = 2, x_1 = 20, x_2 = 5, z_1 = 20, z_2 = 5, h = 20$



(c) $r_1 = 1, r_2 = 2, x_1 = 50, x_2 = 35, z_1 = 40, z_2 = 25, h = 90$

Şekil 3.8 : (3.1.16) denkleminde farklı yarıçaplar için dönel yüzeyler

$P(u, v)$ nin u ve v ye göre türevleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} P_u(u, v) &= ([r_1(-3 + 6u - 3u^2) + x_1(3 - 12u + 9u^2) + x_2(6u - 9u^2) + 3u^2 r_2] \cos v, \\ &\quad [r_1(-3 + 6u - 3u^2) + x_1(3 - 12u + 9u^2) + x_2(6u - 9u^2) + 3u^2 r_2] \sin v, \\ &\quad z_1(3 - 12u + 9u^2) + z_2(6u - 9u^2) + 3u^2 h), \\ P_v(u, v) &= (-\rho \sin v, \rho \cos v, 0) \end{aligned}$$

dir. Burada $\rho = r_1(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + x_1(3u - 6u^2 + 3u^3) + x_2(3u^2 - 3u^3) + r_2 u^3$, $0 \leq u \leq 1$.

(3.1.16) dönel yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \beta^2 + \theta^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = \rho^2,$$

ki burada

$$\begin{aligned} \rho &= r_1(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + x_1(3u - 6u^2 + 3u^3) + x_2(3u^2 - 3u^3) + r_2 u^3, \\ \beta &= r_1(-3 + 6u - 3u^2) + x_1(3 - 12u + 9u^2) + x_2(6u - 9u^2) + 3u^2 r_2, \\ \theta &= z_1(3 - 12u + 9u^2) + z_2(6u - 9u^2) + 3u^2 h \end{aligned}$$

dir. $P(u, v)$ nin u ve v ye göre ikinci türevi

$$\begin{aligned} P_{uu}(u, v) &= ([r_1(6 - 6u) + x_1(-12 + 18u) + x_2(6 - 18u) + 6ur_2] \cos v, \\ &\quad [r_1(6 - 6u) + x_1(-12 + 18u) + x_2(6 - 18u) + 6ur_2] \sin v, \\ &\quad z_1(-12 + 18u) + z_2(6 - 18u) + 6uh) \\ P_{uv}(u, v) &= (-\beta \sin v, \beta \cos v, 0), \\ P_{vv}(u, v) &= (-\rho \cos v, -\rho \sin v, 0). \end{aligned}$$

olmak üzere, dönel yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları sırasıyla,

$$\begin{aligned} L &= \frac{-\sigma\theta + \mu\beta}{\sqrt{\theta^2 + \beta^2}}, \\ M &= 0, \\ N &= \frac{\rho\theta}{\sqrt{\theta^2 + \beta^2}}, \end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada, $\sigma = r_1(6 - 6u) + x_1(-12 + 18u) + x_2(6 - 18u) + 6ur_2$, $\mu = z_1(-12 + 18u) + z_2(6 - 18u) + 6uh$ dir.

Teorem 3.1.3. (3.1.16) denkleminin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla

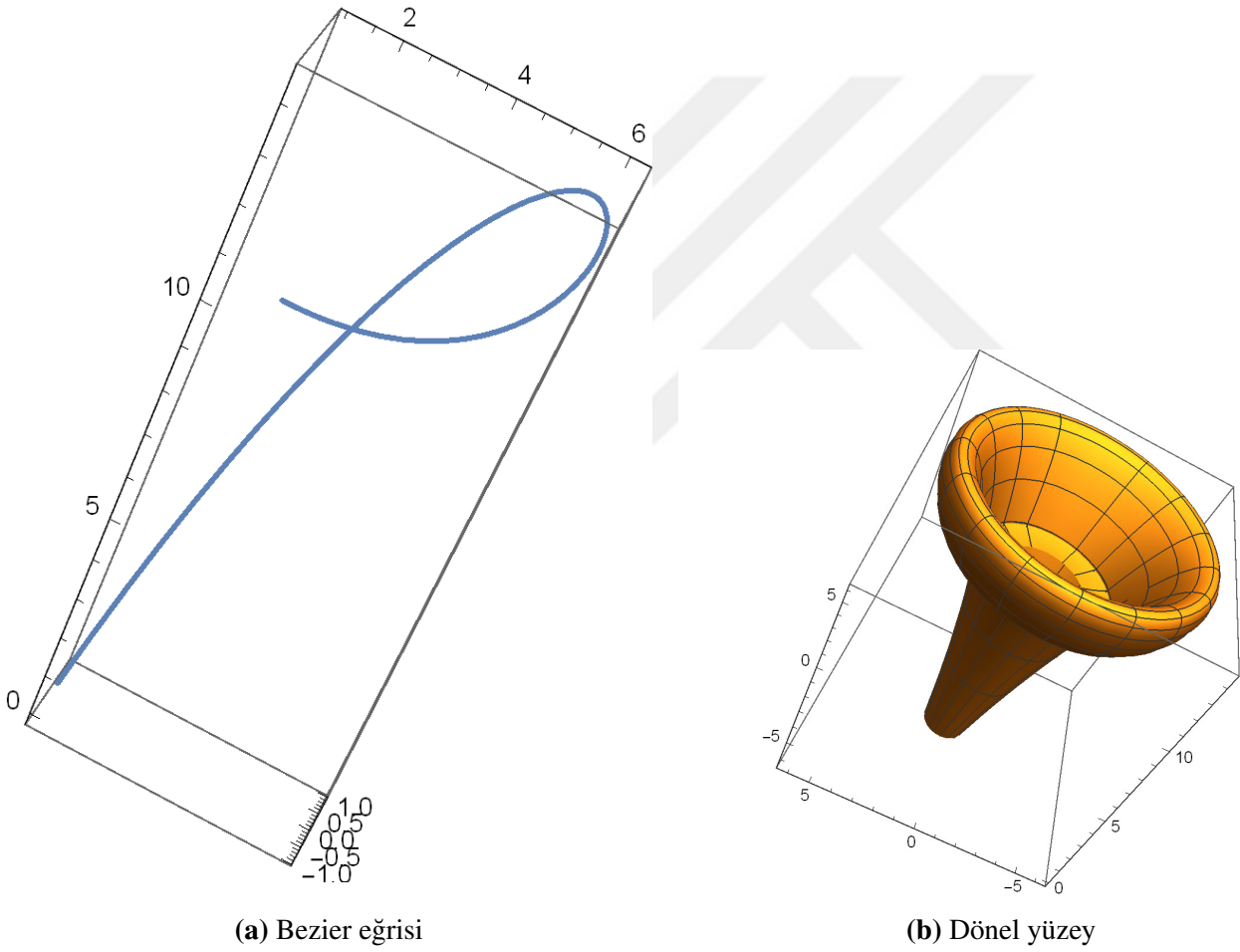
$$H = \frac{\theta(\beta^2 + \theta^2) + \rho(\mu\beta - \sigma\theta)}{2\rho(\beta^2 + \theta^2)^{3/2}}$$

ve

$$K = \frac{\theta(\mu\beta - \sigma\theta)}{\rho(\beta^2 + \theta^2)^2}$$

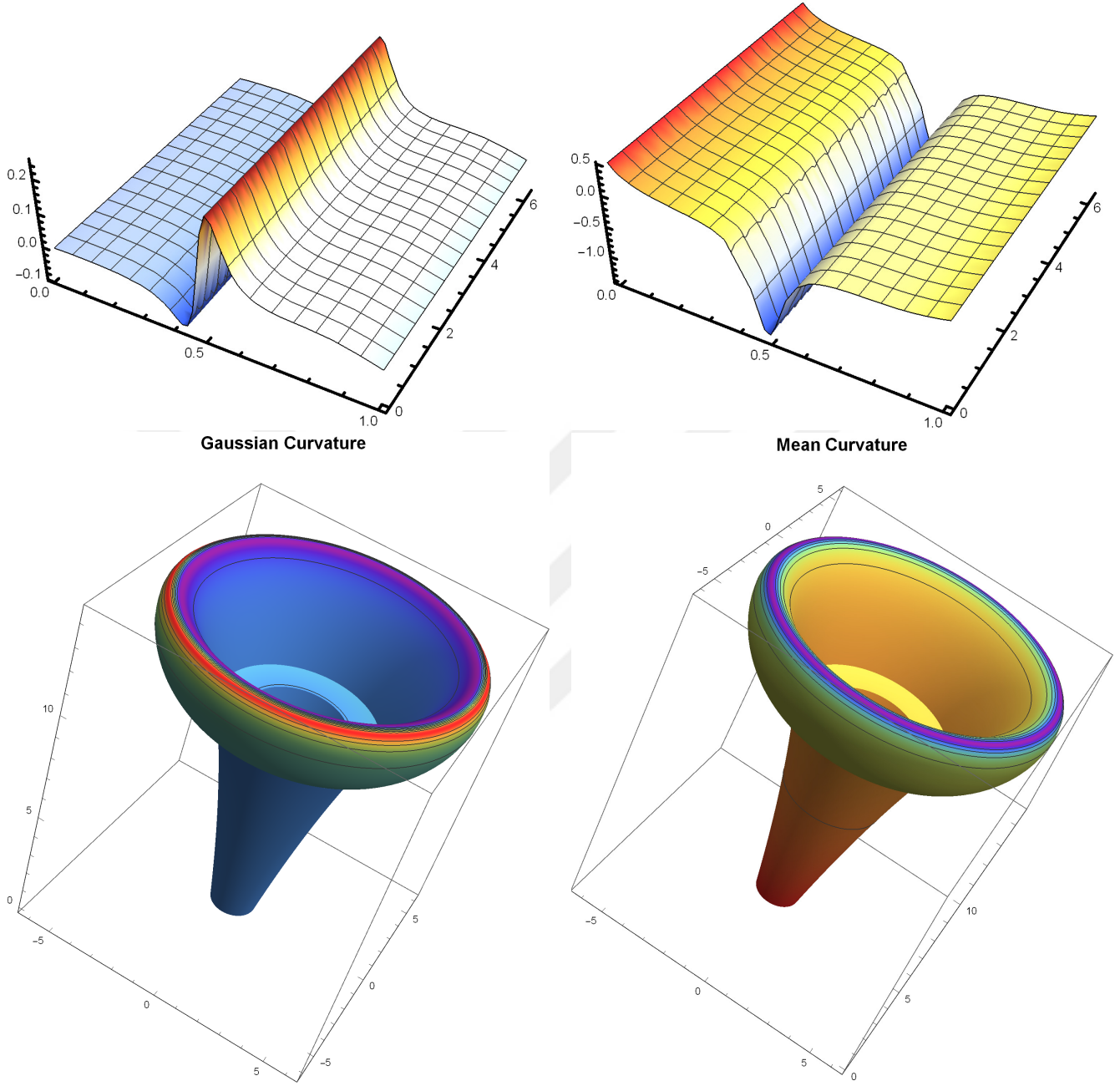
dir. [20]

Aşağıdaki şekillerde, $r_1 = 1, r_2 = 2, x_1 = 5, x_2 = 10, z_1 = 25, z_2 = 10, h = 10$ için kübik Bezier eğrisi ve bu kübik Bezier eğrisi tarafından oluşturulan (3.1.16) dönel yüzeyi görülmektedir:



Şekil 3.9 : (3.1.16) denkleminin Bezier eğrisi ve dönel yüzeyi

Aşağıdaki şekiller, (3.1.16) dönel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının grafiklerini ve bu yüzeydeki Gauss ve ortalama eğriliklerin varyasyonlarını göstermektedir:



Şekil 3.10 : (3.1.16) denkleminin Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri ve yüzey üzerindeki varyasyonları

Sonuç 3.1.3. *Kübik Bezier eğrisi tarafından oluşturulan (3.1.16) dönel yüzeyi M olsun.*

1. P_1 kontrol noktası x -ekseni üzerindeyse, yüzeyin ortalama eğriliği Bezier eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanamaz.

2. P_1 kontrol noktası orijindeyse, yüzeyin ortalama eğriliği Bezier eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanamaz.

3. P_1 kontrol noktası x -ekseni üzerindeyse, yüzeyin Gauss eğriliği Bezier eğrisinin başlangıç noktasında kaybolur.

4. P_2 kontrol noktası orijindeyse, yüzeyin Gauss eğriliği Bezier eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanamaz.

5. P_2 ve P_3 kontrol noktaları x -ekseni üzerindeyse, yüzeyin ortalama eğriliği Bezier eğrisinin bitiş noktasında sıfırlanamaz.

6. P_2 ve P_3 kontrol noktaları x -ekseni üzerindeyse, yüzeyin Gauss eğriliği Bezier eğrisinin bitiş noktasında kaybolur.

7. P_2 kontrol noktası orijindeyse ve denklem $x_1h = z_1r_2$ ise, yüzeyin Gauss eğriliği Bezier eğrisinin bitiş noktasında kaybolur.

Bu çalışmanın endüstriyel tasarım için faydaları şunlardır:

- i. Bilgisayar yardımıyla, bazı endüstriyel nesnelerin modellenmesi için bazı yeni prosedürler elde edilebilir.
- ii. Geometrik yüzey tasarımında bazı nesne modelleri endüstriyel alanda üreticiler için yeni fikirler vermektedir.

3.2 Ferguson bi-kübik yüzey yamaları

Bu alt bölümde Ferguson yüzey yamalarını kullanarak Bezier eğrilerin Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla bazı karakterizasyonlarda bulunacağız.

Tanım 3.2.1. Bir eğrinin uç noktaları $r(0)$ ve $r(1)$ ve bu noktalardaki eğim vektörleri $r_u(0), r_u(1)$ olmak üzere $r(u)$ Ferguson eğrisi,

$$r(u) = B_{0,3}(u)r(0) + B_{1,3}(u)r(1) + B_{2,3}(u)r_u(0) + B_{3,3}(u)r_u(1)$$

şeklinde yazılır. [26]

3.2.1 Fergüson bi-kübik Bezier yüzey yamaları

Tensör çarpım yüzey yaması bu yüzey yamalarında da kullanılır. Yani $i = 0, 1, 2, 3$ için $\Phi_i(u)$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için $\Phi_j(v)$, u ve v iki parametre olmak üzere iki Bezier baz fonksiyonu olsun.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere Bezier yüzey

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} B_0(u) & B_1(u) & B_2(u) & B_3(u) \end{bmatrix} [C]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} B_0(v) \\ B_1(v) \\ B_2(v) \\ B_3(v) \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. 16 adet C_{ij} kontrol noktaları aşağıdaki bilgiler ışığında belirlenebilir:

- a) Yüzey yamasının dört köşe noktası $r(0, 0), r(0, 1), r(1, 0)$ ve $r(1, 1)$ dir.
- b) Yüzeyin her köşesindeki u ve v ye göre sekiz tane teğet vektörü $r_u(0, 0), r_v(0, 0), r_u(0, 1), r_v(0, 1), r_u(1, 0), r_v(1, 0), r_u(1, 1), r_v(1, 1)$ dir.
- c) Yüzeyin köşelerindeki dört büküm vektörü $r_{uv}(0, 0), r_{uv}(0, 1), r_{uv}(1, 0), r_{uv}(1, 1)$ dir.

$$\begin{aligned} r(0, 0) &= C_{00}, r(0, 1) = C_{01}, r_v(0, 0) = C_{02}, r_v(0, 1) = C_{03}, \\ r(1, 0) &= C_{10}, r(1, 1) = C_{11}, r_v(1, 0) = C_{12}, r_v(1, 1) = C_{13}, \\ r_u(0, 0) &= C_{20}, r_u(0, 1) = C_{21}, r_{uv}(0, 0) = C_{22}, r_{uv}(0, 1) = C_{23}, \\ r_u(1, 0) &= C_{30}, r_u(1, 1) = C_{31}, r_{uv}(1, 0) = C_{32}, r_{uv}(1, 1) = C_{33} \end{aligned}$$

olarak alınırsa elde edilen geometrik matris,

$$[G] = \begin{bmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) & r_v(0, 0) & r_v(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) & r_v(1, 0) & r_v(1, 1) \\ r_u(0, 0) & r_u(0, 1) & r_{uv}(0, 0) & r_{uv}(0, 1) \\ r_u(1, 0) & r_u(1, 1) & r_{uv}(1, 0) & r_{uv}(1, 1) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\tilde{r}(u, v) = \begin{bmatrix} B_0(u) & B_1(u) & B_2(u) & B_3(u) \end{bmatrix} [G]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} B_0(v) \\ B_1(v) \\ B_2(v) \\ B_3(v) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. [27]

Ferguson yamasında, kontrol noktalarını yüzey yamasının dört köşe noktası, teğet vektörleri ve büküm vektörleri belirler.

$$\tilde{r}(u, v) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

şeklinde tanımlı yüzey tensör çarpım yüzeyi olmak üzere,

$$\tilde{r}(0, 0) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ij} B_{i,3}(0) B_{j,3}(0)$$

denkleminde u ve v yerine sıfır yazdığımızda elde ettiğimiz baz fonksiyonlarına göre, $B_{0,3}(0) = 1, B_{1,3}(0) = 0, B_{2,3}(0) = 0, B_{3,3}(0) = 0$ olduğundan $r(0, 0) = C_{00} B_{0,3}^2(0) = C_{00}$ elde edilir. Benzer şekilde diğer 15 kontrol noktası da elde edilir. Sonuç olarak, tensör çarpım yüzey yaması kullanılarak köşe noktaları, teğet ve büküm vektörleri elde edilir.

Örnek 3.2.1. Ferguson yüzey yamalarını kullanarak GT-Bezier yüzeyinin geometrik yapısını inceleyeceğimiz bir örnek yapalım. Bir Ferguson yüzey yamasının geometrik katsayılar matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} (1, 0, 0) & (1, 0, 1) & (0, 0, 1) & (0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) & (0, 1, 1) & (0, 0, 1) & (0, 0, 1) \\ (0, 2, 0) & (0, 2, 0) & 0 & 0 \\ (-2, 0, 0) & (-2, 0, 0) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi Bezier yüzeyin ($u = 0.5, v = 0.5$) noktasındaki normal, teğet düzlemi, Gauss ve ortalama eğriliğini hesaplayalım. İki şekil parametresi $\alpha = \beta = 1$ olmak üzere baz fonksiyonları ile edilen ferguson Bezier yüzey yaması matris formunda

$$\begin{aligned} \tilde{r}(u, v) &= B_u^T G B_v \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \sin^3(\frac{\pi}{2}u) \\ \sin(\frac{\pi}{2}u)(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}u)) \\ (1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)) - \sin(\frac{\pi}{2}u) \\ \sin(\frac{\pi}{2}u)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)) \end{bmatrix}^T \\ &\quad [G]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} 1 - \sin^3(\frac{\pi}{2}v) \\ \sin(\frac{\pi}{2}v)(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}v)) \\ (1 - \sin(\frac{\pi}{2}v))(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v)) - \sin(\frac{\pi}{2}v) \\ \sin(\frac{\pi}{2}v)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

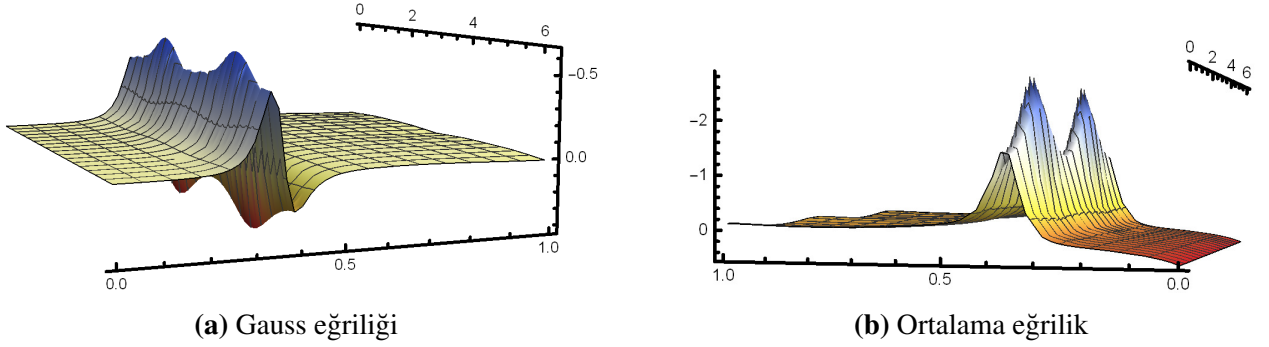
dir.

Sonuç 3.2.1. Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik H olmak üzere, $\tilde{r}(u, v)$ yüzeyi için

1. Konveks gövde özelliğini bozmadan seçilen kontrol noktalarına göre yüzeyin Gauss eğriliği K , $-1 \leq \alpha, \beta \leq 0$ için sıfırlanabilir.

2. Konveks gövde özelliğini bozmadan seçilen kontrol noktalarına göre yüzeyin ortalama eğriliği H , $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ için sıfırlanabilir.

Şekil 3.11 de Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri $\alpha = \beta = 1$ için verilmektedir. α ve β nin aldığı değerlere göre Gauss ve ortalama eğrilik grafikleri değişiklik göstermektedir.



Şekil 3.11 : Ferguson yüzey yaması ile oluşturulmuş GT-Trigonometrik Bi-Kübik yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

3.3 Genel tipte trigonometrik baz fonksiyonlarının eğri ve yüzey üzerine uygulamaları

Bu bölümde iki şekil parametrelili kübik baz fonksiyonlarını kullanarak trigonometrik Bezier, B-Spline ve NURBS eğrilerini, tensör çarpımı yüzey yamaları yardımıyla da yüzeyleri oluşturacağız.

3.3.1 Genel tipte trigonometrik baz fonksiyonu

Bu alt bölümde n –inci mertebeden yeni genel tipte baz fonksiyonlarından bahsedeceğiz. İki şekil parametrelili ikinci dereceden baz fonksiyon kümesi alınarak tanımlamaları yapacağız.

Tanım 3.3.1. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere baz fonksiyonları

$$B_{0,2}(t) = (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)),$$

$$B_{1,2}(t) = 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t),$$

$$B_{2,2}(t) = (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))$$

ikinci dereceden genel tipte baz fonksiyonları olarak bilinir. $m \geq 3$ olmak üzere,

$$B_{i,m}(t) = (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{i,m-1}(t) + \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{i-1,m-1}$$

m –nci mertebeden genel tipte baz fonksiyonudur. $i = -1$ veya $i > m$ olduğu durumda $B_{i,m}(t) = 0$ dır. [28]

Teorem 3.3.1. Genel tipte trigonometrik baz fonksiyonlarının özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Birimin parçalanması

$$\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) = 1$$

Örneğin; $m = 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) &= B_{0,2}(t) + B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t) \\ &= B_{0,2}(t) + 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t) + B_{2,2}(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

2. Non-negatiflik

$\alpha, \beta \in [-1, 1]$, $B_{i,m}(t) \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, m$) olmak üzere, $m = 2$ için

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= 1 - \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ &= 1 - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha + 1)}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

olduğundan, $t \in [0, 1]$ ve $\alpha \in [-1, 1]$ için $B_{0,2}(t) \geq 0$ dir.

3. Uç nokta özelliği

$\forall i = 0, 1, 2, \dots, m$ ($m \geq 2$), $B_{0,m}(0) = 1$, $B_{i,m}(0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $B_{i,m}(1) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) ve $B_{m,m}(1) = 1$ dir. $m = 2$ için doğruluğunu incelersek,

$t = 0, m = 2$ için

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= (1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right))(1 - \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)), \\ B_{0,2}(0) &= 1 \\ B_{2,2}(t) &= (1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right))(1 - \beta \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)), \\ B_{2,2}(0) &= 0 \\ B_{1,2}(t) &= 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t), \\ B_{1,2}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$t = 1, m = 2$ için

$$B_{2,2}(t) = (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)),$$

$$B_{2,2}(1) = 1$$

$$B_{0,2}(t) = (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)),$$

$$B_{0,2}(1) = 0$$

$$B_{1,2}(t) = 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t),$$

$$B_{1,2}(1) = 0$$

dir.

4. Köşe noktalarında türev

Baz fonksiyonlarının türevleri

$$B'_{0,2}(t) = (-\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + (-\frac{\alpha\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))$$

$$B'_{1,2}(t) = -B'_{0,2}(t) - B'_{2,2}(t)$$

$$B'_{2,2}(t) = (\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) + (\frac{\beta\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))$$

olmak üzere, $t = 0, m = 2$ için

$$B'_{0,2}(0) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$B'_{2,2}(0) = 0,$$

$$B'_{1,2}(0) = \frac{\pi + \alpha\pi}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$B'_{i,2}(0) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), & i=0 \\ \frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), & i=1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Genel durumda ise,

$$B'_{i,m}(0) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(m_k + \alpha), & i=0 \\ \frac{\pi}{2}(m_k + \alpha), & i=1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Burada $m_k = m - k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere m dereceyi ifade eder. Benzer şekilde,

$$B'_{i,2}(1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(m-1+\beta), & i=0 \\ \frac{\pi}{2}(m-1+\beta), & i=1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

3.3.2 Genel tipte Bezier eğrisinin inşası

Bu altbölümde iki şekil parametrelili kuadratik trigonometrik Bezier eğrilerini inşa edeceğiz, ardından trigonometrik Bezier eğrilerinin sürekliliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 3.3.2. P_i kontrol noktası olmak üzere, $(P_i \in \mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) ve şekil parametreleri α, β iken genel tipte Bezier eğrisi

$$r(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(t)$$

elde edilir, ki burada $B_{i,m}(t)$ genel tipte baz fonksiyonlarıdır.

$m = 2$ için,

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{i=0}^2 P_i B_{i,2}(t) \\ &= P_0 B_{0,2}(t) + P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t) \\ &= P_0 (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + P_1 (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) + P_2 (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

ikinci dereceden genel tipte kuadratik trigonometrik Bezier eğrisidir.

Genel tipte trigonometrik Bezier eğrisinin geometrik özellikleri:

1. Uç nokta özelliği:

$$\begin{aligned} r(0) &= P_0 (1 - \sin(\frac{\pi}{2} \cdot 0)) (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2} \cdot 0)) + P_1 (1 - B_{0,2}(0) - B_{2,2}(0)) + P_2 (1 - \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 0)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 0)) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

$$r(1) = P_2$$

olmaktadır. $r(t)$ eğrisinin türevini alırsak,

$$r'(t) = P_0 B'_{0,2}(t) + P_1 B'_{1,2}(t) + P_2 B'_{2,2}(t)$$

olur. $t = 0$ için,

$$\begin{aligned} B'_{0,2}(t) &= -\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), \\ B'_{1,2}(t) &= \frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), \\ B'_{2,2}(t) &= 0 \end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned} r'(0) &= P_0 (-\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)) + P_1 (\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)) \\ &= \frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)(P_1 - P_0) \\ r'(1) &= \frac{\pi}{2}(m-1+\beta)(P_2 - P_1) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

2. Konveks gövde özelliği: Tüm genel tipte trigonometrik Bezier eğri parçaları kontrol poligonunun içinde yer alır.

3. Geometrik invaryantlık: Genel tipte trigonometrik Bezier eğrisinin şekli seçilen koordinata bağlı değildir.

3.3.2.1 Genel tipte trigonometrik Bezier eğrisinin sürekliliği

Lemma 3.3.1. $r(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(t)$ ve $r_1(t) = \sum_{j=0}^n \tilde{P}_j B_{j,n}(t)$ olsun. $P_0, P_1, \dots, P_m, m \geq 3$ ve $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, n \geq 3$ kontrol noktaları olmak üzere,

1. $P_m = \tilde{P}_0$ C^0 –süreklilik için,
2. $P_m = \tilde{P}_0$ ve $r'(1) = r'_1(0)$ C^1 –süreklilik için,
3. $P_m = \tilde{P}_0, r'(1) = r'_1(0), r''(1) = r''_1(0)$ C^2 –süreklilik için gerek ve yeter koşuldur. Burada $P_m r(t)$ eğrisinin bitiş noktası, $\tilde{P}_0$ ise $r_1(t)$ nin başlangıç noktasıdır. [28]

Lemma 3.3.2. $r(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(t)$ ve $r_1(t) = \sum_{j=0}^n \tilde{P}_j B_{j,n}(t)$ olsun. $P_0, P_1, \dots, P_m, m \geq 3$ ve $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, n \geq 3$ kontrol noktaları olmak üzere $r(t)$ ve $r_1(t)$ eğrilerinde,

1. G^0 süreklilik için $P_m = \tilde{P}_0$,
2. G^1 süreklilik için $P_m = \tilde{P}_0$ ve $r'(1) = \varphi r'_1(0)$,
3. G^2 süreklilik için

$$k(1) = \frac{|r'(1) \times r''(1)|}{|r'(1)|^3} = \frac{|r'_1(0) \times r''_1(0)|}{|r'_1(0)|^3} = k_1(0)$$

gerek ve yeter koşuldur. [28]

Teorem 3.3.2. $P_0, P_1, \dots, P_m, m \geq 3$ ve $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, n \geq 3$ kontrol noktaları olmak üzere,

$$r(t; \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(t)$$

$$r_1(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{j=0}^n \tilde{P}_j B_{j,n}(t)$$

genel tipte Bezier eğrileri için

1. C^0 –süreklilik, $\tilde{P}_0 = P_m$

2. C^1 –süreklilik için,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= P_m, \\ \tilde{P}_1 &= P_m + \frac{(1+\beta)(P_m - P_{m-1})}{n_1 + \tilde{\alpha}}\end{aligned}$$

dir. Burada $n_k = n - k$, ($k = 1, 2, 3$) dir.

3. C^2 –süreklilik için,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= P_m, \\ \tilde{P}_1 &= P_m + \frac{(1+\beta)(P_m - P_{m-1})}{n_1 + \tilde{\alpha}}, \\ \tilde{P}_2 &= P_m + \frac{1}{n_1 n_2 + 2n_2 \tilde{\alpha} + (1-\tilde{\beta})} [(\alpha - 1)(P_{m-1} - P_{m-2}) \\ &\quad - ((n_2 - 2\beta) - (\frac{1+\beta}{n_1} + \tilde{\alpha})) \\ &\quad (2n_1 n_2 + (2n_2 - 1)2\tilde{\alpha} + (1-\tilde{\beta}))(P_m - P_{m-1})]\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. İkinci dereceden iki genel tipte Bezier eğrisi için C^0 ve C^1 sürekliliklerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= P_2, \\ \tilde{P}_1 &= P_2 + \frac{(1+\beta)(P_2 - P_1)}{1 + \tilde{\alpha}}\end{aligned}$$

olması durumunda parametrik süreklilik vardır. İkinci dereceden genel tipte Bezier eğrilerinin geometrik sürekliliği için ise,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= P_2, \\ \tilde{P}_1 &= P_2 + \frac{(1+\beta)(P_2 - P_1)}{(1+\tilde{\alpha})\varphi}, \quad \varphi > 0\end{aligned}$$

koşullarının sağlanması gerek ve yeterdir. Kontrol noktaları alınırken bir eğrinin bitiş noktası diğer eğrinin başlangıç noktası olmalıdır.

Teorem 3.3.3. P_0, P_1, P_2 doğrudan olmayan üç nokta olmak üzere, $P_i (i = 0, 1, 2)$ kontrol noktaları için $r(t)$ kuadratik trigonometrik Bezier eğrisi ile $B(\tilde{t}) = \sum_{i=0}^2 P_i \binom{2}{i} (1 - \tilde{t})^{2-i} \tilde{t}^i, \tilde{t} \in [0, 1]$ kuadratik Bezier eğrisi arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}r(0) &= B(0), \\ r(1) &= B(1), \\ r\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 &= 2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \alpha)(B\left(\frac{1}{2}\right) - P_1) \quad (\alpha = \beta \text{ iken})\end{aligned}$$

İspat: $B(\tilde{t}) = (1 - \tilde{t})^2 P_0 + 2(1 - \tilde{t})\tilde{t} P_1 + \tilde{t}^2 P_2$ olduğundan, $B(0) = P_0, B(1) = P_2$ dir. Aynı zamanda, kuadratik trigonometrik eğrinin uç nokta özelliğinden $r(0) = P_0$ ve $r(1) = P_2$ olduğundan $r(t)$ ve $B(\tilde{t})$ eğrilerinin başlangıç ve bitiş noktaları aynıdır. $\tilde{t} = \frac{1}{2}$ için,

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 = \frac{1}{4}(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

dir. Şimdi $r(\frac{1}{2})$ yi bulalım. Genel tipte eğri formülünden

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = P_0 B_{0,2}\left(\frac{1}{2}\right) + P_1 B_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right) + P_2 B_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= P_0 \left(1 - \sin \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \alpha \sin \frac{\pi}{4}\right) + P_1 \left(1 - B_{0,2}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + P_2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \beta \cos \frac{\pi}{4}\right)$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \alpha)P_0 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)P_1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \beta)P_2$$

dir. $\alpha = \beta$ olduğu durumda,

$$r\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \alpha)(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

olmaktadır. Dolayısıyla,

$$r\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 = 2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \alpha)(B\left(\frac{1}{2}\right) - P_1)$$

sonucuna varırız.

$$r\left(\frac{1}{2}\right) - P_1 = 2(\sqrt{2} - 1)\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)(B\left(\frac{1}{2}\right) - P_1)$$

eşitliğinde $r(\frac{1}{2}) = B(\frac{1}{2})$ sonucu elde edilir. Sonuç olarak, $\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $\alpha = \beta$ olduğu durumda kuadratik trigonometrik Bezier eğrisi, kuadratik Bezier eğrisine en yakın durumdadır.

3.3.3 Kübik trigonometrik Bezier eğriler tarafından döneel yüzeylerin inşası

Bu bölümde, tüp deformasyon yapısını kullanarak kübik trigonometrik Bezier eğrisi (T-Bezier) tarafından elde edilen dönme yüzeyini oluşturacağız.

r_1 ve r_2 yarıçaplı bir tüpün verildiğini varsayalım, burada $r_1, r_2 \in [a, b]$ dir. Ayrıca tüpün yüksekliğini h olarak tanımlayalım, burada $h \in [c, d]$ dir. Aralıktaki r_1, r_2 ve h değerlerinin seçimi ile, geometrik tasarımın şekil boyutlarının değişimi amaçlanmaktadır.

İlk olarak tüpün taban çemberi $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ üzerinde bir merkez (başlangıç) noktası belirliyoruz. Daha sonra bu merkez (başlangıç) noktası ve $v = 0$ için çember denklemi kullanılarak tüpün taban dairesi oluşturulur ve P_0 noktası

$$P_0 = (x_1 + r_1 \cos v, y_1 + r_1 \sin v, z_1) = (r_1, 0, 0). \quad (3.3.1)$$

şeklindedir. Ayrıca tüpün çatı çemberinin merkez (bitiş) noktası $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, h)$ olsun. Daha sonra, $v = 0$ için, çember denklemini kullanarak tüp çatı çemberi oluşturabilir ve P_3 noktası

$$P_3 = (x_1 + r_2 \cos v, y_1 + r_2 \sin v, z_1) = (r_2, 0, h) \quad (3.3.2)$$

olarak elde edilir. Kübik Bezier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktaları dışındaki diğer iki kontrol noktası P_1 ve P_2 sırasıyla

$$P_1 = (x_1, 0, z_1) \quad (3.3.3)$$

ve

$$P_2 = (x_2, 0, z_2). \quad (3.3.4)$$

şeklindedir. Kontrol noktaları ve trigonometrik baz fonksiyonları kullanılarak

$$\begin{aligned} r(u) &= P_0 B_{0,3}(u) + P_1 B_{1,3}(u) + P_2 B_{2,3}(u) + P_3 B_{3,3}(u) \\ &= (r_1 B_{0,3}(u) + x_1 B_{1,3}(u) + x_2 B_{2,3}(u) + r_2 B_{3,3}(u), 0, z_1 B_{1,3}(u) + z_2 B_{2,3}(u) + h B_{3,3}(u)), \quad 0 \leq u \leq 1 \end{aligned}$$

eğrisi elde edilir.

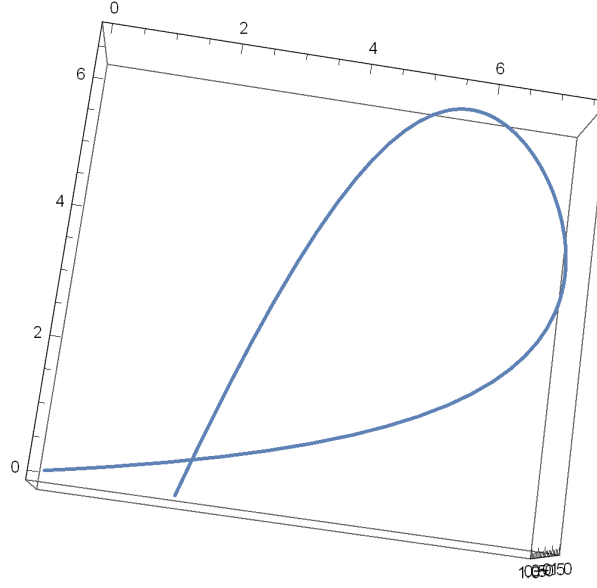
$$r(u) = (\zeta_1(u), 0, \zeta_2(u))$$

şeklinde ifade edilen eğride,

$$\begin{aligned} \zeta_1(u) &= r_1 (1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))^2 (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + x_1 \sin(\frac{\pi}{2}u) (1 - \sin(\frac{\pi}{2}u)) (2 + \alpha - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + \\ &\quad x_2 \cos(\frac{\pi}{2}u) (1 - \cos(\frac{\pi}{2}u)) (2 + \beta - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) + r_2 (1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))^2 (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2(u) &= z_1 \sin(\frac{\pi}{2}u) (1 - \sin(\frac{\pi}{2}u)) (2 + \alpha - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + z_2 \cos(\frac{\pi}{2}u) (1 - \cos(\frac{\pi}{2}u)) (2 + \beta - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) + \\ &\quad h (1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))^2 (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) \end{aligned}$$

olarak alınır. Aşağıdaki grafik $r_1 = \alpha = \beta = 1$, $r_2 = 2$, $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $z_1 = 25$, $z_2 = 10$, $h = 10$ T-Bezier eğrinin grafiğini göstermektedir.



Şekil 3.12 : T-Bezier eğrisi

3.3.3.1 Kübik trigonometrik Bezier eğrileri ile oluşturulan dönel yüzeylerin bazı karakterizasyonları

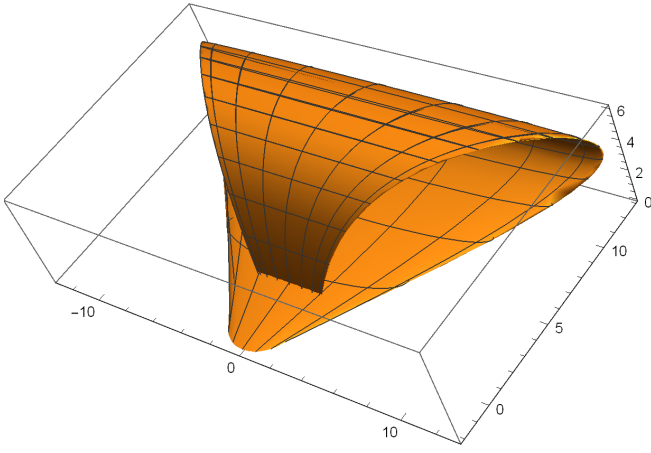
Bu alt bölümde trigonometrik Bezier eğrisini z -ekseni etrafında döndürerek farklı şekil parametreleriyle dönel yüzeyler oluşturacağız.

$r(u)$ eğrisini z -ekseni etrafında döndürerek $R(u, v)$ dönel yüzeyi

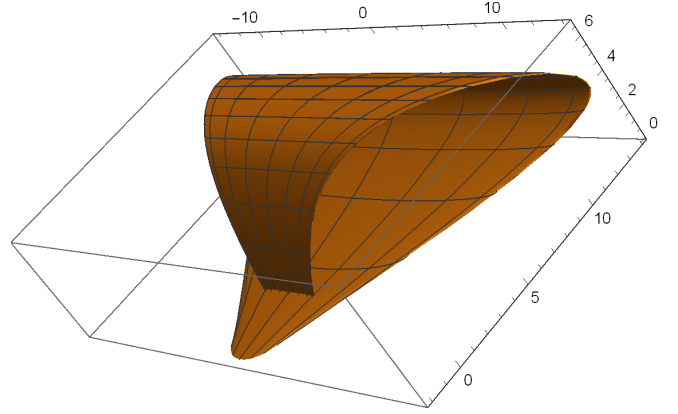
$$\begin{aligned}
 R(u, v) = & ([r_1(1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))^2(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + x_1 \sin(\frac{\pi}{2}u)(1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))(2 + \alpha - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + \\
 & x_2 \cos(\frac{\pi}{2}u)(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))(2 + \beta - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) + r_2(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))^2(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u))] \cos v, \\
 & [r_1(1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))^2(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + x_1 \sin(\frac{\pi}{2}u)(1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))(2 + \alpha - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + \\
 & x_2 \cos(\frac{\pi}{2}u)(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))(2 + \beta - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) + r_2(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))^2(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u))] \sin v, \\
 & z_1 \sin(\frac{\pi}{2}u)(1 - \sin(\frac{\pi}{2}u))(2 + \alpha - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}u)) + z_2 \cos(\frac{\pi}{2}u)(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))(2 + \beta - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u)) + \\
 & h(1 - \cos(\frac{\pi}{2}u))^2(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}u))
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

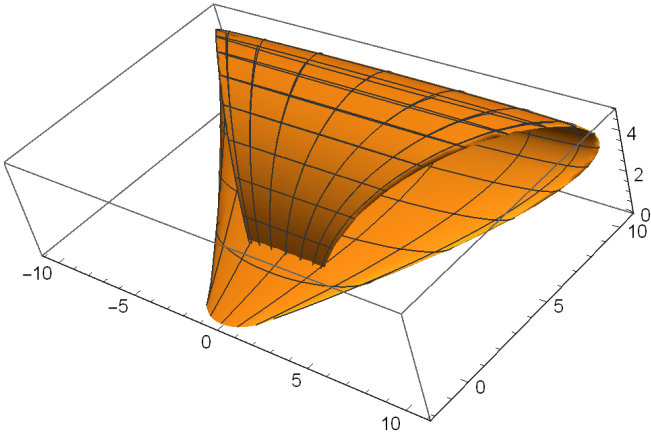
Grafikte α ve β şekil parametreleri 1 den -1 e doğru azaltıldığında, $\alpha = \beta$ için şekil yüzeyin tabanına doğru yaklaşır. $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 2$, $z_1 = 10$, $z_2 = 2$ ve $h = 0.1$ değerleri için:



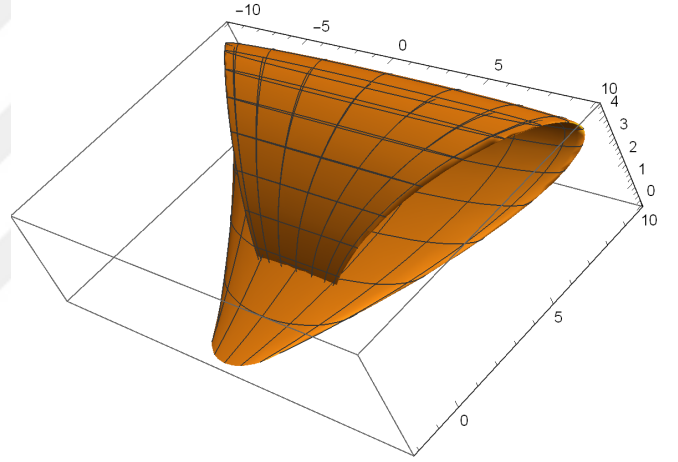
(a) $\alpha = \beta = 1$



(b) $\alpha = \beta = 0.5$



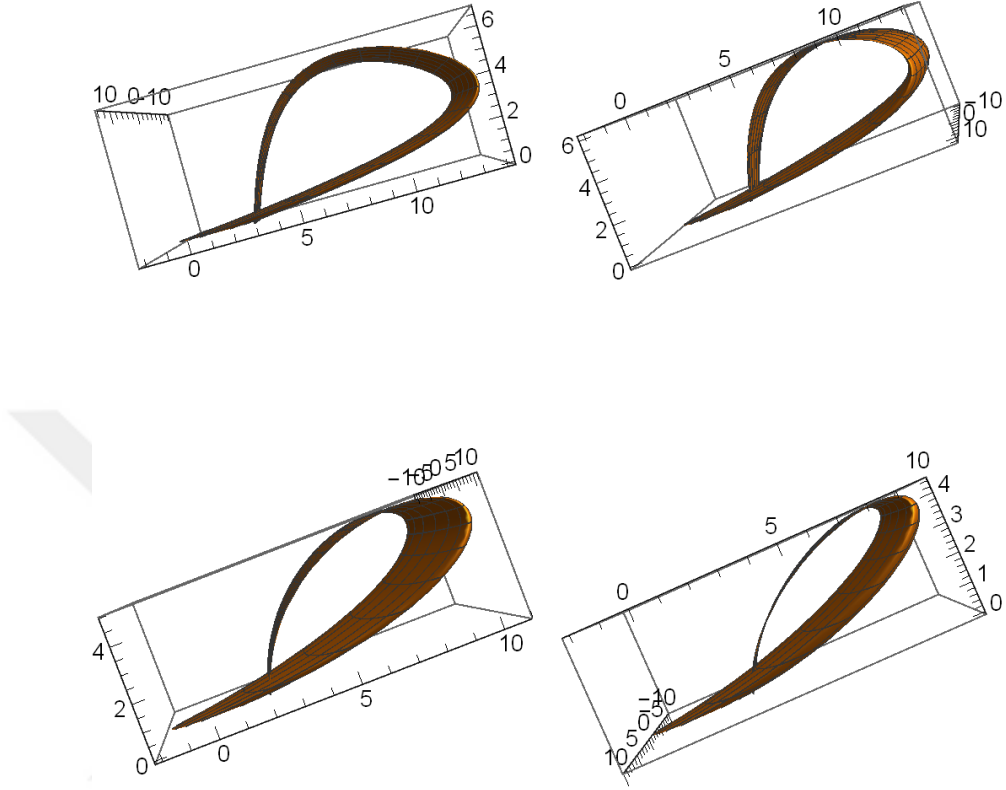
(c) $\alpha = \beta = -0.5$



(d) $\alpha = \beta = -1$

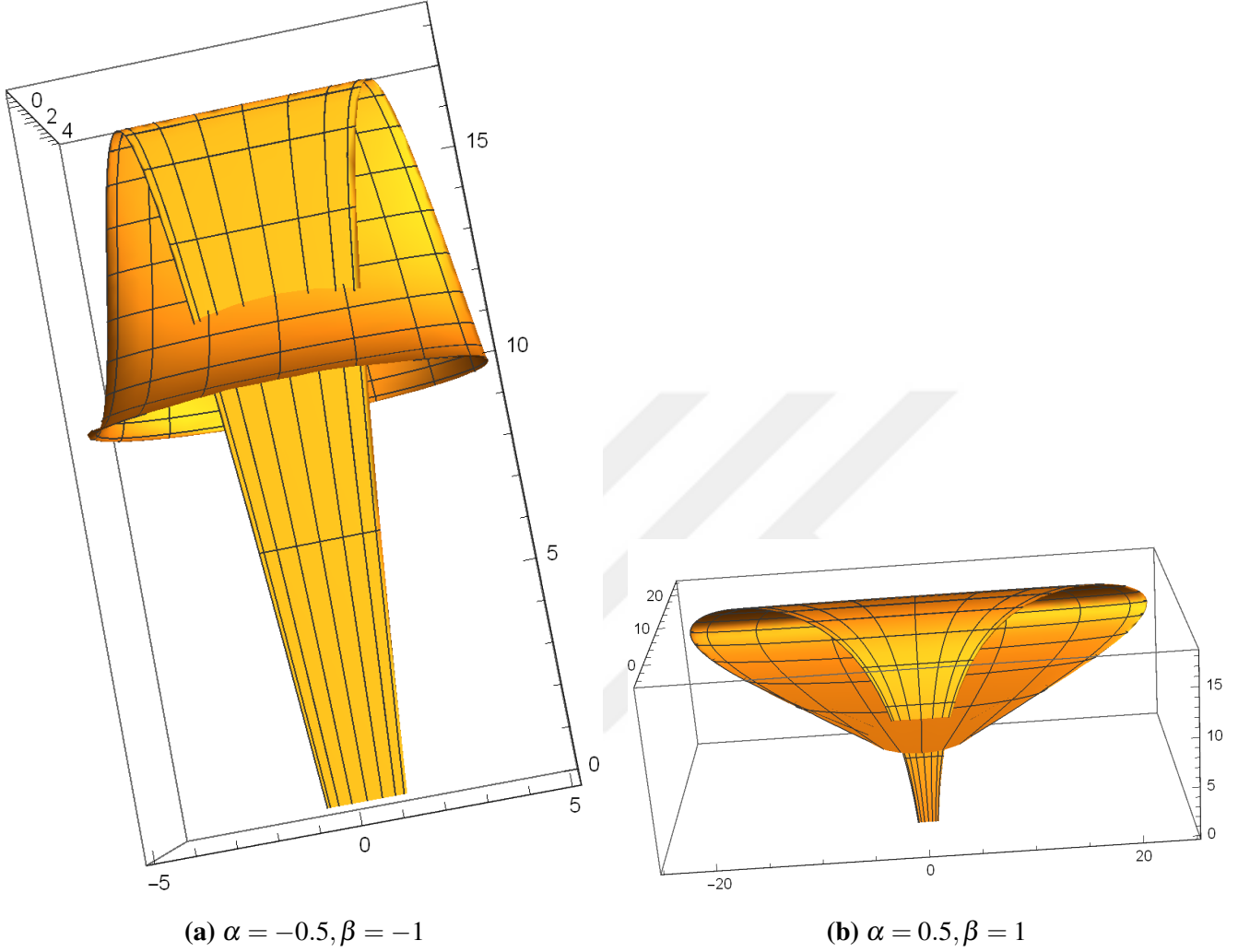
Şekil 3.13 : Aynı şekil parametresine göre T-Bezier yüzeyin varyasyonları

Grafikte trigonometrik Bezier yüzeylerin şekil parametreleri sırasıyla $\alpha = \beta = 1$ (sol üst), $\alpha = \beta = 0.5$ (sağ üst), $\alpha = \beta = -0.5$ (sol alt), $\alpha = \beta = -1$ (sağ alt) olarak alınmıştır.



Şekil 3.14 : Aynı şekil parametresine göre farklı perspektiflerden döneel yüzeylerin değişimi

Grafikte farklı şekil parametreleri için yüzey tasarımları verilmektedir. Grafikte $\alpha \neq \beta$ olmak üzere şekil parametrelerinin aldığı değerler azaldığında oluşan şekil yüzeyin taban kısmına doğru yaklaşmaktadır.



Şekil 3.15 : Farklı parametreler için T-Bezier yüzeyin varyasyonları

$R(u, v)$ yüzeyinin u ve v ye göre türevini aldığımızda,

$$\begin{aligned}
 R_u(u, v) &= ([r_1 B'_{0,3}(u) + x_1 B'_{1,3}(u) + x_2 B'_{2,3}(u) + r_2 B'_{3,3}(u)] \cos v, \\
 &\quad [r_1 B'_{0,3}(u) + x_1 B'_{1,3}(u) + x_2 B'_{2,3}(u) + r_2 B'_{3,3}(u)] \sin v, \\
 &\quad z_1 B'_{1,3}(u) + z_2 B'_{2,3}(u) + h B'_{3,3}(u)), \\
 R_v(u, v) &= (-\sigma \sin v, \sigma \cos v, 0)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $\sigma = r_1 B_{0,3}(u) + x_1 B_{1,3}(u) + x_2 B_{2,3}(u) + r_2 B_{3,3}(u)$ dir. Gauss ve ortalama eğriliği hesaplamak için $R(u, v)$ nin birinci ve ikinci temel formlarını hesaplamalıyız. Öncelikle,

$R(u, v)$ yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları,

$$E = \gamma^2 + \delta^2, F = 0, G = \sigma^2$$

şeklinde hesaplanır ve

$$\begin{aligned}\gamma &= r_1 B'_{0,3}(u) + x_1 B'_{1,3}(u) + x_2 B'_{2,3}(u) + r_2 B'_{3,3}(u) \\ \delta &= z_1 B'_{1,3}(u) + z_2 B'_{2,3}(u) + h B'_{3,3}(u)\end{aligned}$$

olarak alınır. Burada baz fonksiyonlarının birinci türevleri,

$$\begin{aligned}B'_{0,3}(u) &= \frac{-\pi \cos(\frac{\pi}{2}u)(\sin(\frac{\pi}{2}u) - 1)(3\alpha \sin(\frac{\pi}{2}u) - \alpha - 2)}{2}, \\ B'_{1,3}(u) &= \frac{\pi \cos(\frac{\pi}{2}u)(3\alpha \sin^2(\frac{\pi}{2}u) + (-4\alpha - 4)\sin(\frac{\pi}{2}u) + \alpha + 2)}{2}, \\ B'_{2,3}(u) &= \frac{-\pi(3\beta \cos^2(\frac{\pi}{2}u) + (-4\beta - 4)\cos(\frac{\pi}{2}u) + \beta + 2) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}u)}{2}, \\ B'_{3,3}(u) &= \frac{\pi(\cos(\frac{\pi}{2}u) - 1)(3\beta \cos(\frac{\pi}{2}u) - \beta - 2) \sin(\frac{\pi}{2}u)}{2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna ek olarak, $R(u, v)$ yüzeyinin birim normali

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}}(-\delta \cos v, -\delta \sin v, \gamma)$$

şeklindedir. $R(u, v)$ yüzeyinin ikinci türevleri ise,

$$\begin{aligned}R_{uu}(u, v) &= ([r_1 B''_{0,3}(u) + x_1 B''_{1,3}(u) + x_2 B''_{2,3}(u) + r_2 B''_{3,3}(u)] \cos v, \\ &\quad [r_1 B''_{0,3}(u) + x_1 B''_{1,3}(u) + x_2 B''_{2,3}(u) + r_2 B''_{3,3}(u)] \sin v, \\ &\quad z_1 B''_{1,3}(u) + z_2 B''_{2,3}(u) + h B''_{3,3}(u)), \\ R_{uv}(u, v) &= (-\gamma \sin v, \gamma \cos v, 0), \\ R_{vv}(u, v) &= (-\sigma \cos v, -\sigma \sin v, 0)\end{aligned}$$

olmaktadır.

İkinci olarak, $R(u, v)$ yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}L &= \frac{-\phi \delta + \psi \gamma}{\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}}, \\ M &= 0, \\ N &= \frac{\sigma \delta}{\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}}\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}\phi &= r_1 B''_{0,3}(u) + x_1 B''_{1,3}(u) + x_2 B''_{2,3}(u) + r_2 B''_{3,3}(u), \\ \psi &= z_1 B''_{1,3}(u) + z_2 B''_{2,3}(u) + h B''_{3,3}(u),\end{aligned}$$

ve trigonometrik baz fonksiyonlarının ikinci türevleri

$$\begin{aligned}B''_{0,3}(u) &= \frac{\pi^2}{4} [3\alpha \sin^3(\frac{\pi}{2}u) + (-4\alpha - 2) \sin^2(\frac{\pi}{2}u) + \\ &\quad (-6\alpha \cos^2(\frac{\pi}{2}u) + \alpha + 2) \sin(\frac{\pi}{2}u) + (4\alpha + 2) \cos^2(\frac{\pi}{2}u)], \\ B''_{1,3}(u) &= \frac{-\pi^2}{4} [3\alpha \sin^3(\frac{\pi}{2}u) + (-4\alpha - 4) \sin^2(\frac{\pi}{2}u) + \\ &\quad (-6\alpha \cos^2(\frac{\pi}{2}u) + \alpha + 2) \sin(\frac{\pi}{2}u) + (4\alpha + 4) \cos^2(\frac{\pi}{2}u)], \\ B''_{2,3}(u) &= \frac{\pi^2}{4} [(6\beta \cos(\frac{\pi}{2}u) - 4\beta - 4) \sin^2(\frac{\pi}{2}u) - 3\beta \cos^3(\frac{\pi}{2}u) + \\ &\quad (4\beta + 4) \cos^2(\frac{\pi}{2}u) + (-\beta - 2) \cos(\frac{\pi}{2}u)], \\ B''_{3,3}(u) &= \frac{-\pi^2}{4} [(6\beta \cos(\frac{\pi}{2}u) - 4\beta - 2) \sin^2(\frac{\pi}{2}u) - 3\beta \cos^3(\frac{\pi}{2}u) + \\ &\quad (4\beta + 2) \cos^2(\frac{\pi}{2}u) + (-\beta - 2) \cos(\frac{\pi}{2}u)]\end{aligned}$$

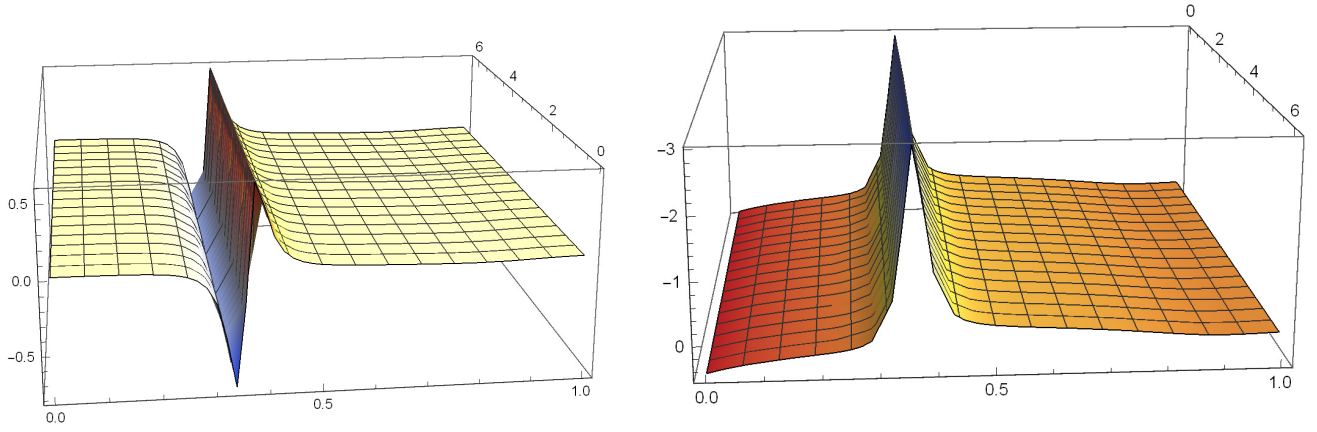
olarak bulunur. Bu sonuçlardan yola çıkarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.4. *z -ekseni etrafında döndürülen trigonometrik Bezier eğri tarafından oluşturulan $R(u, v)$ dönel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla*

$$\begin{aligned}H &= \frac{\sigma(\psi\gamma - \phi\delta) + \delta(\gamma^2 + \delta^2)}{2\sigma\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)^3}}, \\ K &= \frac{\delta(\psi\gamma - \phi\delta)}{\sigma(\delta^2 + \gamma^2)^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. [29]

Şekil 3.16 da $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $z_1 = 25$, $z_2 = 10$ ve $h = 10$ değerleri ve verilen kontrol noktaları ile belirli aralıklarda seçilen α ve β şekil parametreleri için $R(u, v)$ dönel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının grafikleri verilmektedir.



(a) $0 < \alpha, \beta \leq 1$ için Gauss eğriliği

(b) $0 < \alpha, \beta \leq 1$ için ortalama eğrilik

Şekil 3.16 : Farklı parametreler için T-Bezier yüzeyin varyasyonları

Sonuç 3.3.1. z -ekseni etrafında döndürülen T-Bezier eğriler tarafından oluşturulan $R(u, v)$ yüzeyi için belirli aralıklarda seçilen şekil parametreleri ve kontrol noktalarının uyumluluğuna göre Gauss ve ortalama eğrilikler için verilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

1. Eğer P_1 kontrol noktası x -ekseni üzerinde ve $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ise, $R(u, v)$ dönel yüzeyinin ortalama eğriliği $r(u)$ eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanmaktadır.
2. Eğer P_1 kontrol noktası orijin üzerinde ve $-1 \leq \alpha, \beta < 0$ ise, $R(u, v)$ dönel yüzeyinin ortalama eğriliği $r(u)$ eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanmaz.
3. Eğer P_2 ve P_3 kontrol noktaları x -ekseni üzerinde ve $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ise, $R(u, v)$ dönel yüzeyinin Gauss eğriliği $r(u)$ eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanmaktadır.
4. Eğer P_2 ve P_3 kontrol noktaları orijin üzerinde ve $-1 \leq \alpha, \beta < 0$ ise, $R(u, v)$ dönel yüzeyinin Gauss eğriliği $r(u)$ eğrisinin başlangıç noktasında sıfırlanmaz. [29]

Teorem 3.3.5. z -ekseni etrafında döndürülen trigonometrik Bezier eğrisi tarafından oluşturulan dönel yüzey $R(u, v)$ ve $f_1(u) = \sin(\frac{\pi}{2}u)$, $f_2(u) = \cos(\frac{\pi}{2}u)$, $0 \leq u \leq 1$ olsun. Yüzey ancak ve ancak aşağıdaki koşullar geçerliyse düzlemseldir:

1. $\delta = 0$ ise,

$$f_1(u) = \frac{2\alpha + 2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 4}}{3\alpha},$$

$$f_2(u) = \frac{2\beta + 2 \pm \sqrt{\beta^2 + 2\beta + 4}}{3\beta}, \text{ veya}$$

$$f_2(u) = \frac{\beta + 2}{3\beta}$$

olmaktadır. Burada α ve β , kübik trigonometrik baz fonksiyonlarının şekil parametreleridir.

2. $\delta \neq 0$ ise,

$$\alpha = \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)},$$

$$\beta = \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)}$$

şeklindedir.

3. $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ ve $\phi \neq 0$ ise $\delta = \frac{\psi\gamma}{\phi}$. [29]

İspat: ($\implies$) $K = \frac{\delta(\psi\gamma - \phi\delta)}{\sigma(\delta^2 + \gamma^2)^2}$ olduğundan, incelenmesi gereken iki durum vardır:

1. $\delta = 0$ ($\gamma \neq 0$) için $K = 0$ dır.

$$z_1 B'_{1,3}(u) + z_2 B'_{2,3}(u) + h B'_{3,3}(u) = 0$$

denkleminde,

$$3\alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) + (-4\alpha - 4) \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right) + \alpha + 2 = 0,$$

$$3\beta \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) + (-4\beta - 4) \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) + \beta + 2 = 0,$$

$$3\beta \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) - \beta - 2 = 0$$

eşitlikleri çözümlerse $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ veya $f_2(u) = \frac{\beta+2}{3\beta}$ sırasıyla elde edilir.

2. $\delta \neq 0$ için $\psi\gamma - \phi\delta = 0$ dır. ($\sigma \neq 0$)

i. Eğer $\gamma = 0$ ise $\phi = 0$ dır. Böylece,

$$r_1 B'_{0,3}(u) + x_1 B'_{1,3}(u) + x_2 B'_{2,3}(u) + r_2 B'_{3,3}(u) = 0,$$

$$r_1 B''_{0,3}(u) + x_1 B''_{1,3}(u) + x_2 B''_{2,3}(u) + r_2 B''_{3,3}(u) = 0,$$

denklemleri çözülerek, $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ ile

$$\alpha = \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)},$$

$$\beta = \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)}$$

elde edilir.

ii. $\gamma \neq 0$ olsun. Eğer ϕ ve ψ sıfır ise, $K = 0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} r_1 B''_{0,3}(u) + x_1 B''_{1,3}(u) + x_2 B''_{2,3}(u) + r_2 B''_{3,3}(u) &= 0, \\ z_1 B''_{1,3}(u) + z_2 B''_{2,3}(u) + h B''_{3,3}(u) &= 0, \end{aligned}$$

denklemleri çözülerek

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)}, \\ \beta &= \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

iii. Eğer $\gamma \neq 0$ ise $\delta = \frac{\psi\gamma}{\phi}$. ($\phi \neq 0$)

($\Leftarrow$) 1. $\delta = 0$ ve $0 \leq u \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} &z_1 \frac{\pi f_2(u)(3\alpha f_1^2(u) + (-4\alpha - 4)f_1(u) + \alpha + 2)}{2} + \\ &z_2 \frac{-\pi(3\beta f_2^2(u) + (-4\beta - 4)f_2(u) + \beta + 2) \cdot f_1(u)}{2} + \\ &h \frac{\pi(f_2(u) - 1)(3\beta f_2(u) - \beta - 2)f_1(u)}{2} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği vardır. $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ ve $h \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} 3\alpha f_1^2(u) + (-4\alpha - 4)f_1(u) + \alpha + 2 &= 0, \\ 3\beta f_2^2(u) + (-4\beta - 4)f_2(u) + \beta + 2 &= 0, \\ 3\beta f_2(u) - \beta - 2 &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ ve $f_2(u) = \frac{\beta+2}{3\beta}$ değerleri için $\delta = 0$ ve dolayısıyla K sıfırdır. K sıfır olduğundan yüzey düzlemseldir.

2. $\delta \neq 0$ ve $0 \leq u \leq 1$ için,

i. Eğer şekil parametreleri, $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ ile

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)}, \\ \beta &= \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)} \end{aligned}$$

ise $\gamma = 0$ ve $\phi = 0$ dır. $\psi\gamma - \phi\delta = 0$ olduğundan, K sıfırlanır ve yüzey düzlemseldir.

ii. Eğer $\alpha = \frac{-4f_1^2(u)+2f_1(u)+4f_2^2(u)}{3f_1^3(u)-4f_1^2(u)-6f_1(u)f_2^2(u)+f_1(u)+4f_2^2(u)}$, $\beta = \frac{-4f_2^2(u)+2f_2(u)+4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u)-4f_1^2(u)-3f_2^3(u)+4f_2^2(u)-f_2(u)}$ ise $\gamma \neq 0$ durumu için ϕ ve ψ sıfırdır. Bu yüzden, K sıfır olduğundan yüzey düzlemseldir.

iii. Eğer $\delta = \frac{\psi\gamma}{\phi}$ ise yüzey düzlemseldir.

Teorem 3.3.6. z -ekseni etrafında döndürülen trigonometrik Bezier eğrisi tarafından oluşturulan dönel yüzey $R(u, v)$ ve $f_1(u) = \sin(\frac{\pi}{2}u)$, $f_2(u) = \cos(\frac{\pi}{2}u)$, $0 \leq u \leq 1$ olsun. Yüzey ancak ve ancak aşağıdaki koşullar geçerliyse minimaldir:

1. $\delta = 0$ ise, $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ ile

$$\alpha = \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)},$$

$$\beta = \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)}$$

olmaktadır.

2. $\delta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ ise, $\delta^2 = \sigma\phi$ dir. [29]

İspat: ($\implies$) Yüzey minimal olduğundan, $H = \frac{\sigma(\psi\gamma - \phi\delta) + \delta(\gamma^2 + \delta^2)}{2\sigma\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)^3}} = 0$ ve $\delta = \frac{-\sigma(\psi\gamma - \phi\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}$ dir. İncelenmesi gereken iki durum vardır:

1. Eğer $\delta = 0$ ise $\psi\gamma - \phi\delta = 0$ olmaktadır. Burada $\psi = 0$ ve $\gamma \neq 0$ dir.

$$z_1 B'_{1,3}(u) + z_2 B'_{2,3}(u) + h B'_{3,3}(u) = 0,$$

$$z_1 B''_{1,3}(u) + z_2 B''_{2,3}(u) + h B''_{3,3}(u) = 0$$

denklemlerinin çözümünden, $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ ile

$$\alpha = \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)},$$

$$\beta = \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)}$$

sırasıyla elde edilir.

2. İspatı açıktır.

($\Leftarrow$) 1. $\delta = 0$ ve $0 \leq u \leq 1$ için,

$$z_1 \frac{\pi f_2(u)(3\alpha f_1^2(u) + (-4\alpha - 4)f_1(u) + \alpha + 2)}{2} +$$

$$z_2 \frac{-\pi(3\beta f_2^2(u) + (-4\beta - 4)f_2(u) + \beta + 2) \cdot f_1(u)}{2} +$$

$$h \frac{\pi(f_2(u) - 1)(3\beta f_2(u) - \beta - 2)f_1(u)}{2} = 0,$$

ve

$$z_1 B''_{1,3}(u) + z_2 B''_{2,3}(u) + h B''_{3,3}(u) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ ve $h \neq 0$ olduğundan $f_1(u) = \frac{2\alpha+2\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha+4}}{3\alpha}$, $f_2(u) = \frac{2\beta+2\pm\sqrt{\beta^2+2\beta+4}}{3\beta}$ veya $f_2(u) = \frac{\beta+2}{3\beta}$ ile

$$\alpha = \frac{-4f_1^2(u) + 2f_1(u) + 4f_2^2(u)}{3f_1^3(u) - 4f_1^2(u) - 6f_1(u)f_2^2(u) + f_1(u) + 4f_2^2(u)},$$

$$\beta = \frac{-4f_2^2(u) + 2f_2(u) + 4f_1^2(u)}{6f_2(u)f_1^2(u) - 4f_1^2(u) - 3f_2^3(u) + 4f_2^2(u) - f_2(u)}$$

şeklindedir. α ve β şekil parametreleri için H sıfırdır, dolayısıyla yüzey minimaldir.

2. İspat aşıkardır.

Ek olarak şunu söyleyebiliriz ki, $\delta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ iken $R(u, v)$ yüzeyi her zaman minimal olmayabilir.

3.3.3.2 Genel tipte trigonometrik Bezier tensör çarpım yüzey yamaları

n -inci mertebeden iki şekil parametrelili genel tipte baz fonksiyonları yardımıyla $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$B_{0,2}(t) = (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)),$$

$$B_{1,2}(t) = 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t),$$

$$B_{2,2}(t) = (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))$$

ikinci dereceden trigonometrik baz fonksiyonları elde edilir. C_{ij} kontrol noktaları olmak üzere $(i, j = 0, 1, 2)$ ve şekil parametreleri α, β iken genel tipte Bezier tensör çarpımı yüzey yaması ikinci mertebeden iki Bezier eğrisi için,

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 C_{ij} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$$

şeklinde olup tensör çarpımı yüzeyi,

$$r(u, v) = C_{00}B_{0,2}(u)B_{0,2}(v) + C_{01}B_{0,2}(u)B_{1,2}(v) + C_{02}B_{0,2}(u)B_{2,2}(v)$$

$$+ C_{10}B_{1,2}(u)B_{0,2}(v) + C_{11}B_{1,2}(u)B_{1,2}(v) + C_{12}B_{1,2}(u)B_{2,2}(v)$$

$$+ C_{20}B_{2,2}(u)B_{0,2}(v) + C_{21}B_{2,2}(u)B_{1,2}(v) + C_{22}B_{2,2}(u)B_{2,2}(v)$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin matris formu,

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,2}(u) & B_{1,2}(u) & B_{2,2}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,2}(v) \\ B_{1,2}(v) \\ B_{2,2}(v) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.1. Kontrol noktaları $C_{00} = (0,0,0), C_{01} = (1,2,0), C_{02} = (0,2,4), C_{10} = (1,2,4), C_{11} = (1,-1,3), C_{12} = (0,1,-1), C_{20} = (0,0,2), C_{21} = (0,0,-1), C_{22} = (2,2,4)$ olsun. Şekil parametreleri $\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1 = 1$ olmak üzere, $0 \leq u, v \leq 1$ için

$$B_{0,2}(u) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right),$$

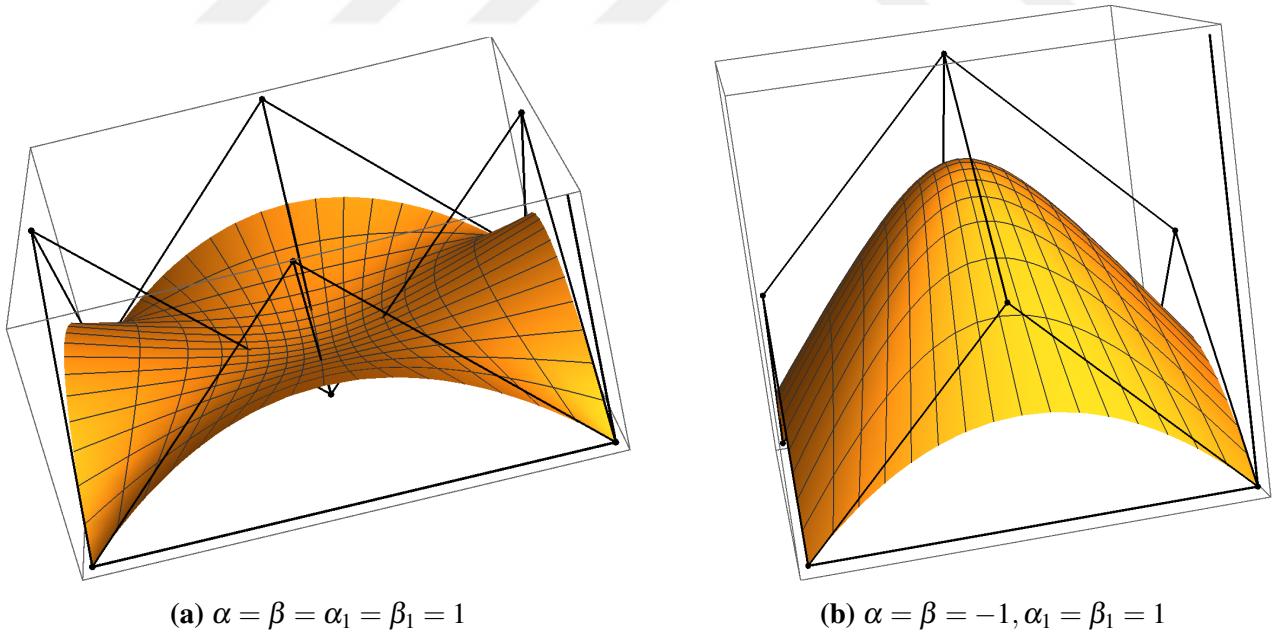
$$B_{1,2}(u) = 1 - B_{0,2}(u) - B_{2,2}(u),$$

$$B_{2,2}(u) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)$$

aynı şekilde v parametresi için de aynı baz fonksiyonları elde edilir.

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) & 0 & 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0,0,0) & (1,2,0) & (0,2,4) \\ (1,2,4) & (1,-1,3) & (0,1,-1) \\ (0,0,2) & (0,0,-1) & (2,2,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\right) \\ 0 \\ 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\right) \end{bmatrix}$$

kuadratik Bezier eğrileri ile oluşturulan matris formunda tensör çarpımı Bezier yüzey yamasıdır. Şekil 3.17 de u parametresine bağlı Bezier eğrisinin şekil parametreleri olan α ve β , v parametresine bağlı Bezier eğrisinin şekil parametreleri olan α_1, β_1 değerlerine göre yüzey yamasındaki değişim gösterilmektedir.



Şekil 3.17 : Farklı şekil parametreleriyle GT-trigonometrik Bezier tensör çarpım yüzey yamaları

3.3.4 Genel tipte trigonometrik B-Spline eğrisi

Bu alt bölümde trigonometrik baz fonksiyonları ile trigonometrik B-Spline eğrilerini elde edeceğiz. Oluşan eğriden tensör çarpımı yardımıyla yüzey yamaları oluşturacağız.

Tanım 3.3.3. *p* dereceli bir B-Spline baz fonksiyonu

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$B_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} B_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} B_{i+1,p-1}(t)$$

şeklindedir. Dolayısıyla, *p* dereceli bir B-Spline eğrisi,

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,p}(t) \quad (3.3.5)$$

olarak ifade edilir. [30]

Tanım 3.3.4. Şekil parametreleri α, β ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $p = 3$ için, $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere

$$B_{i,3}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+3} - t_i} B_{i,2}(t) + \frac{t_{i+4} - t}{t_{i+4} - t_{i+1}} B_{i+1,2}(t)$$

denklemini ile elde edilen trigonometrik B-Spline baz fonksiyonları $i = 0$ için,

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= \frac{t - t_0}{t_3 - t_0} B_{0,2}(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_1} B_{1,2}(t) \\ &= \frac{t - t_0}{t_3 - t_0} (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) \end{aligned}$$

$i = 1$ için,

$$\begin{aligned} B_{1,3}(t) &= \frac{t - t_1}{t_4 - t_1} B_{1,2}(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_2} B_{2,2}(t) \\ &= \frac{t - t_1}{t_4 - t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

$i = 2$ için,

$$\begin{aligned} B_{2,3}(t) &= \frac{t - t_2}{t_5 - t_2} B_{2,2}(t) + \underbrace{\frac{t_6 - t}{t_6 - t_3} B_{3,2}(t)}_{0, i > m} \\ &= \frac{t - t_2}{t_5 - t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

$i = 3$ için, $B_{3,3}(t) = 0$ olur. Elde edilen yeni baz fonksiyonları ile (3.3.5) eğri denklemi

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,p}(t) \\ &= P_0 \left\{ \frac{t-t_0}{t_3-t_0} (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + \frac{t_4-t}{t_4-t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) \right\} \\ &\quad + P_1 \left\{ \frac{t-t_1}{t_4-t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) + \frac{t_5-t}{t_5-t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \right\} \\ &\quad + P_2 \frac{t-t_2}{t_5-t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))\end{aligned}$$

şeklindedir.

Kontrol noktaları P_0, P_1, P_2 ve $T = \{t_0, t_1, \dots, t_5\}$ düğüm vektörü, $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere bir örnek yapalım.

Örnek 3.3.2. $P_0 = (0, 1), P_1 = (1, 2), P_2 = (2, 4)$ ve $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ düğüm vektörü, $\alpha = \beta = 0.5$ olmak üzere genel tipte trigonometrik B-Spline eğri denklemini bulunuz.

$\forall t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (0, 1) \left\{ \left(\frac{t}{3} \right) (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t)) + \frac{4-t}{3} (1 - (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t))) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t)) \right\} + (1, 2) \left\{ \frac{t-1}{3} (1 - (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}t))) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t)) \right\} + \frac{5-t}{3} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t)) \left\{ \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{t-2}{3} \right) (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t)) \right\} + (2, 4)\end{aligned}$$

kuadratik trigonometrik B-Spline eğrisidir.

3.3.4.1 Genel tipte trigonometrik B-Spline tensör çarpımı yüzey yamaları

Bu alt bölümde trigonometrik B-Spline baz fonksiyonları yardımıyla elde edilen eğriler ile tensör çarpımı yüzey yamaları elde edeceğiz.

Tanım 3.3.5. İki şekil parametrelili trigonometrik B-Spline baz fonksiyonları

$$\begin{aligned}B_{0,3}(t) &= \frac{t-t_0}{t_3-t_0} (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + \frac{t_4-t}{t_4-t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) \\ B_{1,3}(t) &= \frac{t-t_1}{t_4-t_1} (1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t)) + \frac{t_5-t}{t_5-t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \\ B_{2,3}(t) &= \frac{t-t_2}{t_5-t_2} (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))\end{aligned}$$

olmak üzere bi-kuadratik B-Spline tensör çarpım yüzey yaması, C_{ij} kontrol noktaları ($i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$) ve şekil parametreleri $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ olmak üzere,

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

şeklinde olup, tensör çarpımı yardımıyla

$$\begin{aligned} r(u, v) = & C_{00}B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{01}B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{02}B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) \\ & + C_{10}B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{11}B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{12}B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) \\ & + C_{20}B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{21}B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{22}B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) \end{aligned}$$

yüzey denklemi elde edilir. Burada dikkat edilirse, $C_{03}, C_{13}, C_{23}, C_{33}, C_{30}, C_{31}, C_{3,2}$ yüzey denklemine etki etmez, çünkü $B_{3,3}(u) = B_{3,3}(v) = 0$ dır. Dolayısıyla yüzey denklemi 9 kontrol noktası ile elde edildiğinden yüzey bi-kuadratik yapıdadır.

Örnek 3.3.3. Kontrol noktaları $C_{00} = (0, 0, 0), C_{01} = (1, 2, 0), C_{02} = (0, 2, 4), C_{10} = (1, 2, 4), C_{11} = (1, -1, 3), C_{12} = (0, 1, -1), C_{20} = (0, 0, 2), C_{21} = (0, 0, -1), C_{22} = (2, 2, 4)$ olsun. $\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 1$ ve $0 \leq u, v \leq 1$, düğüm noktalar kümesi $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_{0,2}(u) &= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right), \\ B_{1,2}(u) &= 0, \\ B_{2,2}(u) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right) \end{aligned}$$

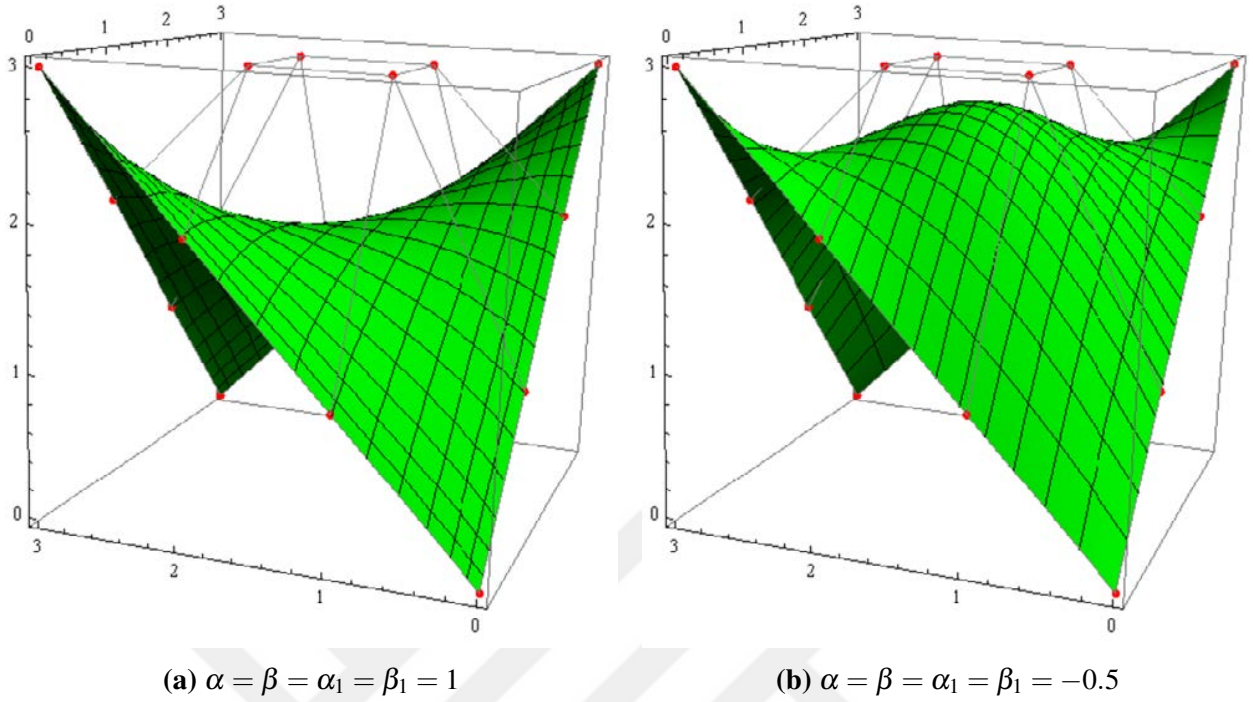
baz fonksiyonları B-Spline genel tipte baz fonksiyonları oluşturmak için kullanıldığında,

$$\begin{aligned} B_{0,3}(u) &= \frac{u}{3}(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)), \\ B_{1,3}(u) &= \frac{5-u}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)), \\ B_{2,3}(u) &= \frac{u-2}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)), \\ B_{3,3}(u) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde v parametresi için de aynı baz fonksiyonları elde edilir. Böylece $r(u, v)$ tensör çarpımı yüzey yaması

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{3}(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)) & \frac{5-u}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)) & \frac{u-2}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v}{3}(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\right)) \\ \frac{5-v}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\right)) \\ \frac{v-2}{3}(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\right)) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Şekil 3.18 de farklı şekil parametreleri için tensör çarpımı yüzey yamaları verilmektedir.



Şekil 3.18 : Farklı şekil parametreleri ile B-Spline tensör çarpımı yüzey yamalarının davranışı

3.3.5 Genel tipte trigonometrik NURBS eğrisi

Bu alt bölümde standart yapıdaki trigonometrik baz fonksiyonlarını kullanarak yeni NURBS trigonometrik baz fonksiyonları, sonrasında elde edilen baz fonksiyonları yardımıyla trigonometrik NURBS eğriler elde edeceğiz.

Tanım 3.3.6. p -dereceli bir B-Spline baz fonksiyonu

$$B_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} B_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} B_{i+1,p-1}(t)$$

ve w_i ağırlık vektörü olmak üzere,

$$\alpha(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i w_i B_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,p}(t)} = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,p}(t)$$

biçiminde yazılmasıyla NURBS eğrisi elde edilir. Burada $R_{i,p}(t)$ baz fonksiyonudur ve

$$R_{i,p}(t) = \frac{w_i B_{i,p}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,p}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

olarak ifade edilir. [30]

Tanım 3.3.7. $p = 3$, $i = 0, 1, 2, 3$, w_0, w_1, w_2, w_3 ağırlık vektörü olsun. $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$B_{i,3}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+3} - t_i} B_{i,2}(t) + \frac{t_{i+4} - t}{t_{i+4} - t_{i+1}} B_{i+1,2}(t)$$

denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} R_{0,3}(t) &= \frac{w_0 B_{0,3}(t)}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{1,3}(t) &= \frac{w_1 B_{1,3}(t)}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{2,3}(t) &= \frac{w_2 B_{2,3}(t)}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{3,3}(t) &= \frac{w_3 B_{3,3}(t)}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)} \end{aligned}$$

trigonometrik baz fonksiyonları elde edilir. Bu durumda, NURBS baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} R_{0,3}(t) &= \frac{w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_3-t_0} B_{0,2}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_1} B_{1,2}(t) \right]}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{1,3}(t) &= \frac{w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_4-t_1} B_{1,2}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_2} B_{2,2}(t) \right]}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{2,3}(t) &= \frac{w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_5-t_2} B_{2,2}(t) \right]}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)}, \\ R_{3,3}(t) &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.3.8. (Genel tipte trigonometrik kuadratik NURBS eğrisi) w_i ($i = 0, 1, 2, 3$), $t \in [0, 1]$ ve düğüm vektör noktaları düzgün olmayan yapıda olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= P_0 R_{0,3}(t) + P_1 R_{1,3}(t) + P_2 R_{2,3}(t) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^3 w_j B_{j,3}(t)} \{ P_0 w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_3-t_0} B_{0,2}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_1} B_{1,2}(t) \right] \\ &\quad + P_1 w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_4-t_1} B_{1,2}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_2} B_{2,2}(t) \right] + P_2 w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_5-t_2} B_{2,2}(t) \right] \}\end{aligned}$$

genel tipte trigonometrik kuadratik NURBS eğrisidir. B-Spline eğrisinden farkı hem düzgün olmayan yapıda düğüm noktalarına sahip olması, hem de ağırlık vektörlerinin devreye girmesidir.

3.3.5.1 Genel tipte trigonometrik NURBS tensör çarpımı yüzeyleri

Bu alt bölümde trigonometrik NURBS eğrileri yardımıyla tensör çarpımı NURBS yüzey yamaları elde edeceğiz.

Tanım 3.3.9. C_{ij} kontrol noktaları olmak üzere, ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$) için,

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ij} R_{i,3}(u) R_{j,3}(v)$$

dir. Burada $R_{i,3}(u)$ ve $R_{j,3}(v)$ NURBS eğrileridir. Tensör çarpımından,

$$\begin{aligned}r(u, v) &= C_{00} R_{0,3}(u) R_{0,3}(v) + C_{01} R_{0,3}(u) R_{1,3}(v) + C_{02} R_{0,3}(u) R_{2,3}(v) \\ &\quad + C_{10} R_{1,3}(u) R_{0,3}(v) + C_{11} R_{1,3}(u) R_{1,3}(v) + C_{12} R_{1,3}(u) R_{2,3}(v) \\ &\quad + C_{20} R_{2,3}(u) R_{0,3}(v) + C_{21} R_{2,3}(u) R_{1,3}(v) + C_{22} R_{2,3}(u) R_{2,3}(v)\end{aligned}$$

elde edilir. $R_{3,3}(u) = R_{3,3}(v) = 0$ olduğundan 4 baz fonksiyonu olmasına karşın 9 kontrol noktası yüzey tasarımı için yeterlidir.

Örnek 3.3.4. $C_{00} = (0, 0, 0)$, $C_{01} = (1, 2, 0)$, $C_{02} = (0, 2, 4)$, $C_{10} = (1, 2, 4)$, $C_{11} = (1, -1, 3)$, $C_{12} = (0, 1, -1)$, $C_{20} = (0, 0, 2)$, $C_{21} = (0, 0, -1)$, $C_{22} = (2, 2, 4)$ kontrol noktaları ile beraber $0 \leq u, v \leq 1$ alalım. $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = 2$ ve şekil parametreleri $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ olmak üzere B-Spline baz fonksiyonları,

$$\begin{aligned}B_{0,3}(u) &= \frac{u}{3} (1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}u)), \\ B_{1,3}(u) &= \frac{5-u}{3} (1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)), \\ B_{2,3}(u) &= \frac{u-2}{3} (1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)), \\ B_{3,3}(u) &= 0\end{aligned}$$

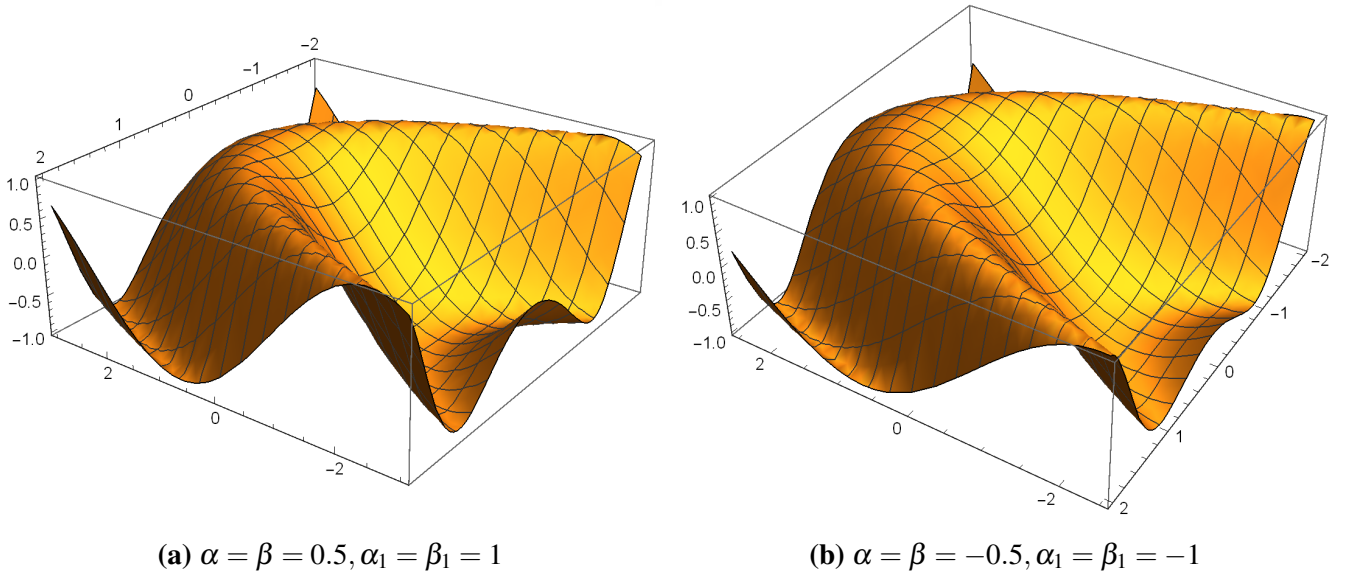
kullanılarak NURBS baz fonksiyonlarını yazalım. NURBS baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} R_{0,3}(u) &= \frac{u(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)}, \\ R_{1,3}(u) &= \frac{(5-u)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)}, \\ R_{2,3}(u) &= \frac{(2u-4)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)}, \\ R_{3,3}(u) &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. v parametresi için de aynı baz fonksiyonları elde edilerek tensör çarpımı yüzey yaması matris formunda

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)} & \frac{(5-u)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)} & \frac{(2u-4)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u))}{u + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}u)} \end{bmatrix} [C_{ij}]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \frac{v(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}v))}{v + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v)} \\ \frac{(5-v)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v))}{v + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v)} \\ \frac{(2v-4)(1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v))}{v + 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}v)} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 3.19 da farklı şekil parametreleri için NURBS tensör çarpımı yüzey yamaları verilmektedir.



Şekil 3.19 : Trigonometrik bi-kuadratik NURBS tensör çarpım yüzey yamaları

3.3.6 Genelleştirilmiş kübik yapıda trigonometrik Bezier, B-Spline, NURBS eğrileri ve yüzeyleri

Bu alt bölümde kübik yapıda temel trigonometrik baz fonksiyonlarını kullanarak trigonometrik Bezier, B-Spline ve NURBS baz fonksiyonlarını elde edeceğiz. Sonrasında bu baz fonksiyonlarını kullanarak kübik yapıda trigonometrik Bezier, B-Spline ve NURBS eğrilerini oluşturarak tensör çarpımı yardımıyla trigonometrik Bezier, B-Spline ve NURBS yüzeylerini elde edeceğiz.

3.3.6.1 GT-Kübik Bezier eğrileri

Bu alt bölümde kübik trigonometrik Bezier baz fonksiyonlarından kübik trigonometrik Bezier eğrisi elde edeceğiz.

Tanım 3.3.10. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{0,2}(t), \\ B_{1,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{0,2}(t) + (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{1,2}(t), \\ B_{2,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{2,2}(t) + \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{1,2}(t), \\ B_{3,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{2,2}(t) \end{aligned}$$

3. dereceden genelleştirilmiş tipte trigonometrik baz fonksiyonlarıdır. Burada,

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)), \\ B_{1,2}(t) &= 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t), \\ B_{2,2}(t) &= (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

2. dereceden trigonometrik baz fonksiyonlarıdır. [28] P_i kontrol noktaları olmak üzere, ($P_i \in \mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$) ($i = 0, 1, \dots, m$) ve şekil parametreleri α, β iken GT-Bezier eğrisi

$$r(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(t)$$

şeklindedir. $m = 3$ için GT-Kübik bezier eğrisi,

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) \\ &= P_0 B_{0,3}(t) + P_1 B_{1,3}(t) + P_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t) \end{aligned}$$

olmak üzere 3. dereceden genelleştirilmiş tipte trigonometrik Bezier eğrisi,

$$\begin{aligned} r(t) = & P_0(1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))^2(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) + P_1[(\sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin^2(\frac{\pi}{2}t)) \\ & + (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))\{1 - (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) - (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) \\ & (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))\}] + P_2[(1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \\ & + \sin(\frac{\pi}{2}t)(1 - (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)) - (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t)) \\ & (1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)))] + P_3[\sin(\frac{\pi}{2}t)(1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.3.11. (GT-Bezier eğrisinin özellikleri) Klasik yapıda Bezier eğrisinin özelliklerini incelemiştik. Şimdi de GT-Bezier eğrisinin geometrik özelliklerini inceleyelim:

Uç nokta özelliği: $r(0) = P_0$ ve $r(1) = P_3$ olur.

$$r'(t) = P_0B'_{0,3}(t) + P_1B'_{1,3}(t) + P_2B'_{2,3}(t) + P_3B'_{3,3}(t)$$

olmak üzere, $t = 0$ için,

$$\begin{aligned} B'_{0,3}(0) &= -\frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \alpha), \\ B'_{1,3}(0) &= \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \alpha), \\ B'_{2,3}(0) &= \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \beta), \\ B'_{3,3}(0) &= -\frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \beta) \end{aligned}$$

dir. Buna ek olarak,

$$\begin{aligned} r'(0) &= \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \alpha)(P_1 - P_0) + \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \beta)(P_2 - P_3), \\ r'(1) &= \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \beta)(P_1 - P_0) + \frac{\pi^2}{4}(m^2 - m - 1 + \alpha)(P_2 - P_3) \end{aligned}$$

türevlerinden yola çıkarak başlangıç noktasında P_0 ve P_1 kontrol noktaları arasındaki yakınsaklığı α , P_2 ve P_3 noktalarındaki yakınsaklığı β parametresi; bitiş noktasında ise P_0 ve P_1 kontrol noktasına yakınsaklığı β , P_2 ve P_3 noktalarında yakınsaklığı α parametresi belirler.

3.3.6.2 GT-Kübik Bezier yüzeyleri

Bu alt bölümde kübik trigonometrik Bezier eğriler yardımıyla kübik Bezier yüzeyleri elde edeceğiz.

Tanım 3.3.12. $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$) kontrol noktaları için 3×3 (bi-kübik) GT-Bezier yüzeyi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ şekil parametreleri ile,

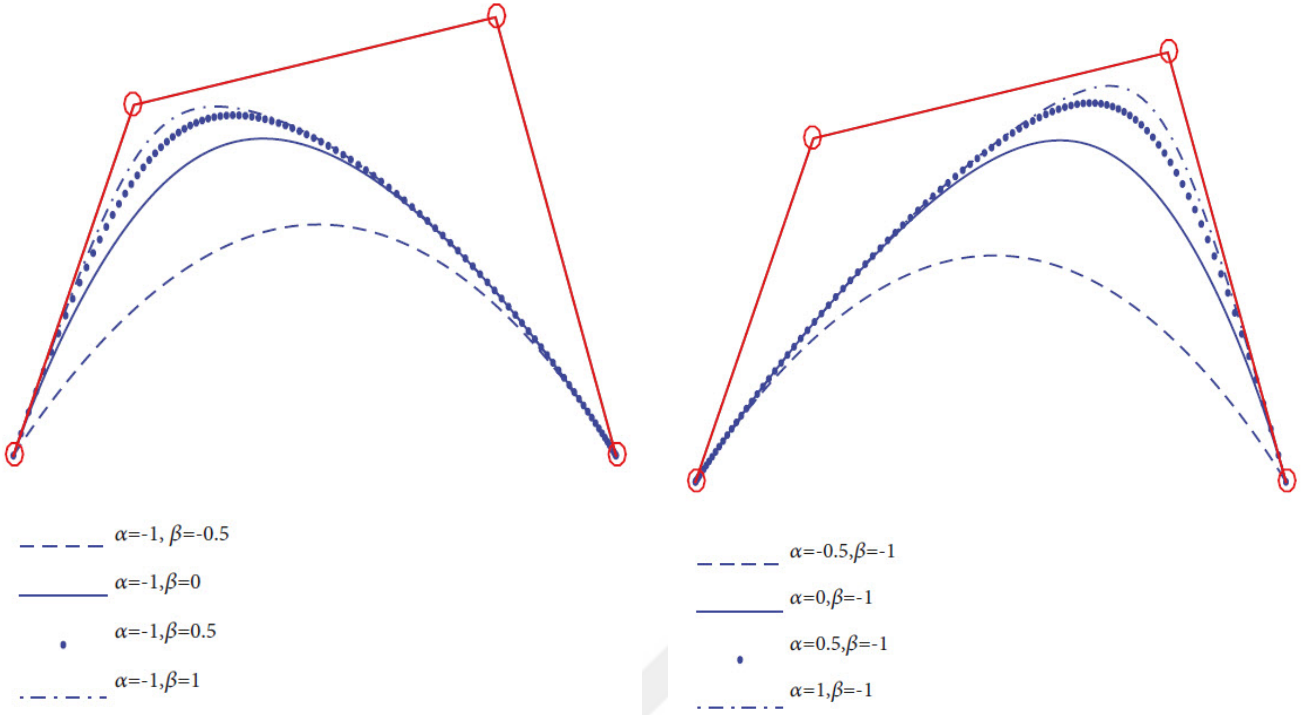
$$R_{3,3}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_{i,3}(u)$ ve $B_{j,3}(v)$ GT-baz fonksiyonları olup

$$\begin{aligned} R_{3,3}(u, v) = & P_{00}B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) + P_{01}B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) + P_{02}B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) + P_{03}B_{0,3}(u)B_{3,3}(v) \\ & + P_{10}B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) + P_{11}B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) + P_{12}B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) + P_{13}B_{1,3}(u)B_{3,3}(v) \\ & + P_{20}B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) + P_{21}B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) + P_{22}B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) + P_{23}B_{2,3}(u)B_{3,3}(v) \\ & + P_{30}B_{3,3}(u)B_{0,3}(v) + P_{31}B_{3,3}(u)B_{1,3}(v) + P_{32}B_{3,3}(u)B_{2,3}(v) + P_{33}B_{3,3}(u)B_{3,3}(v) \end{aligned}$$

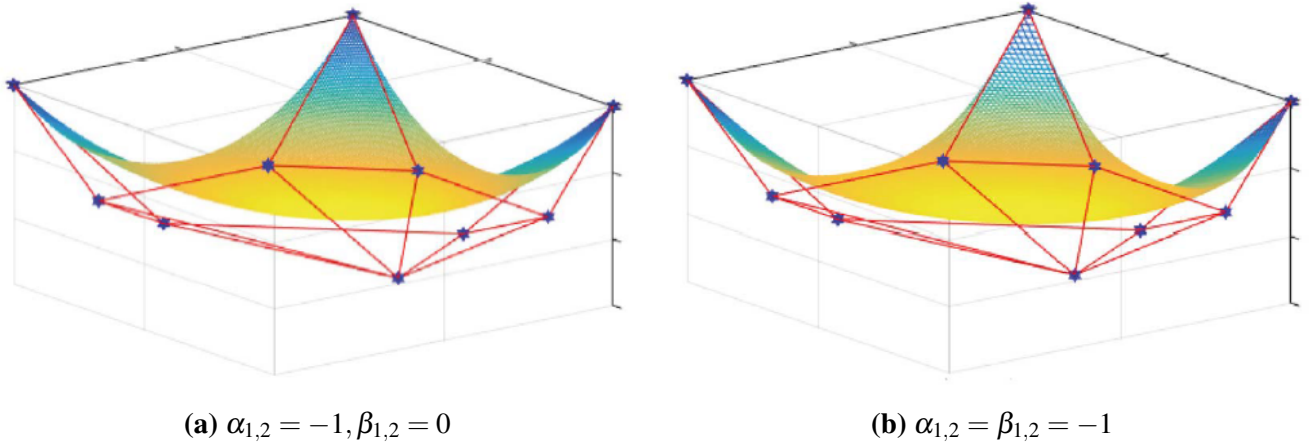
dir. P_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$) kontrol noktaları 16 adettir. Üçüncü dereceden bir Bezier eğrisi için, derecenin bir fazlası $(3 + 1) \times (3 + 1)$ kontrol noktasına sahip yüzey yamasının başlangıç noktası $P_{0,0}$, bitiş noktası $P_{3,3}$ tür.

Örnek 3.3.5. Şekil 3.20 de $P_0(0.1, 0.4)$, $P_1(0.15, 0.75)$, $P_2(0.25, 0.9)$, $P_3(0.5, 0.9)$ kontrol noktaları ile farklı şekil parametrelerine bağlı eğrilerin davranışı gösterilmiştir. Dikkat edilirse $\alpha = -1, \beta = -0.5$ için eğri P_1 kontrol noktasına daha yakın bir sonuç verir. $\alpha = -1, \beta = 1$ için ise en uzak sonucu vermektedir. Benzer şekilde Şekil 3.20 de $\beta = -1$ olduğu durumda α değeri arttıkça eğri P_3 kontrol noktasından uzaklaşır.



Şekil 3.20 : Değişik şekil parametrelerinin GT-kübik Bezier eğrisine etkisi

Şekil 3.21 de ise 16 kontrol noktası ve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ parametresi ile oluşturulan iki yüzey yaması verilmektedir.



Şekil 3.21 : GT-kübik Bezier yüzey yamaları

Dikkat edilirse α ve β şekil parametreleri hem konveks gövde içerisinde yer alan eğrilerin hangi kontrol noktasına yaklaşacağını, hem de yüzeyin kontrol noktaları içerisinde kalarak farklı

tasarımlar elde edilmesini sağlar. Burada, $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ olduğundan konveks gövde özelliği sağlanmaktadır.

3.3.6.3 GT-Kübik B-Spline baz fonksiyonları ve B-Spline eğrisi

Bu alt bölümde trigonometrik kübik baz fonksiyonlarını kullanarak kübik yapıda B-Spline baz fonksiyonlarını elde edeceğiz. Ardından trigonometrik kübik B-Spline eğrisini elde edeceğiz.

Tanım 3.3.13. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere 3. dereceden yeni B-Spline baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} B_{0,4}(t) &= \frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t), \\ B_{1,4}(t) &= \frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t), \\ B_{2,4}(t) &= \frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t), \\ B_{3,4}(t) &= \frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t), \\ B_{4,4}(t) &= 0 \end{aligned}$$

olup, burada $t_0, \dots, t_7$ düğüm noktaları ve $B_{i,4}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+4}-t_i}B_{i,3}(t) + \frac{t_{i+5}-t}{t_{i+5}-t_{i+1}}B_{i+1,3}(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) şeklindedir.

Bu durumda baz fonksiyonları kullanılarak elde edilen B-Spline eğrisi aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.3.14. (Kübik GT-B-Spline eğrisi) $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} p(t) &= P_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) \right] + P_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) \right] \\ &+ P_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t) \right] + P_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t) \right] \end{aligned}$$

denklemine kübik GT-B-Spline eğrisi denir. Burada $t_0, t_1, \dots, t_7$ düğüm noktaları, $t_7 - t_6 = t_6 - t_5 = \dots = t_1 - t_0 = \text{sabit}$; P_0, P_1, P_2, P_3 kontrol noktaları ve

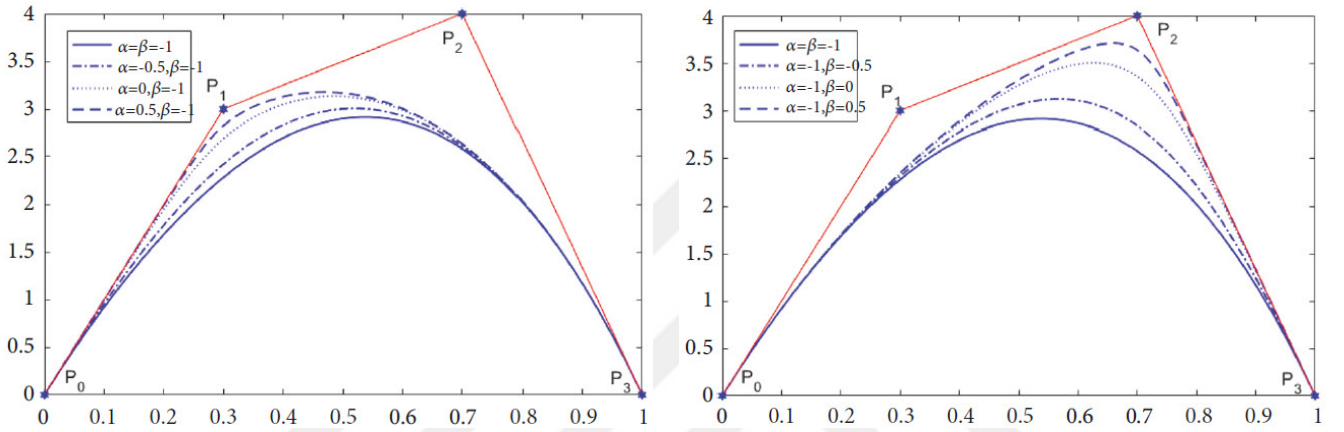
$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{0,2}(t), \\ B_{1,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{0,2}(t) + (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{1,2}(t), \\ B_{2,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{2,2}(t) + \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{1,2}(t), \\ B_{3,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{2,2}(t), \end{aligned}$$

$$B_{0,2}(t) = (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)),$$

$$B_{1,2}(t) = 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t),$$

$$B_{2,2}(t) = (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t))$$

dir. Şekil 3.22 da $P_0 = (0.1, 0.4)$, $P_1 = (0.15, 0.75)$, $P_2 = (0.25, 0.9)$, $P_3 = (0.5, 0.9)$ kontrol noktaları ve α, β şekil parametreleri ile 3. dereceden GT-B-Spline eğrisine şekil parametrelerinin etkilerini görüyoruz. $\beta = -1, \alpha = 0.5$ için eğri P_1 kontrol noktasına, $\alpha = -1, \beta = 0.5$ için eğri P_2 noktasına daha yakındır.



Şekil 3.22 : Kübik GT-B-Spline eğrilerine şekil parametrelerinin etkisi

3.3.6.4 Kübik GT-B-Spline yüzey yamaları

Bu alt bölümde kübik trigonometrik B-Spline eğrileri ve tensör çarpımı yardımıyla kübik trigonometrik B-Spline yüzeyleri elde edeceğiz.

Tanım 3.3.15. $-1 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq 1$, $0 \leq s, t \leq 1$, $P_{ij} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$S(t, s) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 P_{ij} B_{i,4}(t) B_{j,4}(s)$$

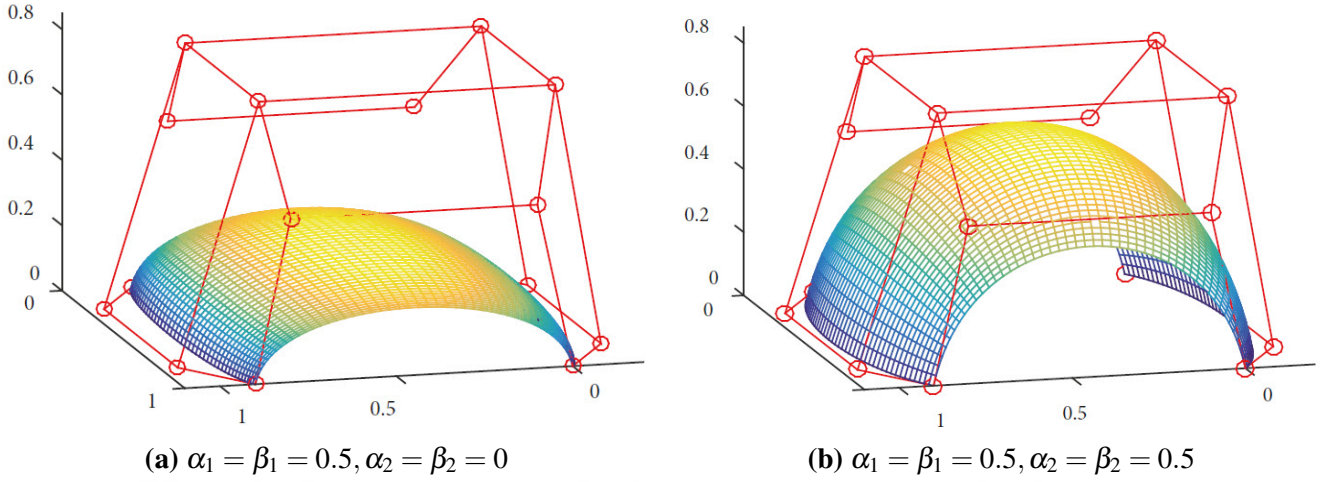
denklemini bi-kübik tensör çarpım yüzey yamasıdır. Burada

$$B_{i,4}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+4} - t_i} B_{i,3}(t) + \frac{t_{i+5} - t}{t_{i+5} - t_{i+1}} B_{i+1,3}(t),$$

$$B_{j,4}(s) = \frac{s - s_j}{s_{j+4} - s_j} B_{j,3}(s) + \frac{s_{j+5} - s}{s_{j+5} - s_{j+1}} B_{j+1,3}(s)$$

üçüncü dereceden eğriler için GT-B-Spline baz fonksiyonlarıdır. $S(t, s)$ yüzeyinde $t = 0, t = 1, s = 0, s = 1$ ile $S(0, 0) = P_{00}$, $S(1, 0) = P_{30}$, $S(0, 1) = P_{03}$, $S(1, 1) = P_{33}$ ve $P_{ij}(i, j = 0, 1, 2, 3)$ kontrol noktalarıdır.

Şekil 3.23 de kontrol noktaları ile B-Spline yüzey yamasının şekil parametrelerine göre değişimi verilmektedir.



Şekil 3.23 : Şekil parametrelerinin GT-B-Spline yüzeylerine etkisi

3.3.6.5 Kübik GT-Nurbs eğrileri

Bu alt bölümde trigonometrik NURBS kübik baz fonksiyonlarını kullanarak trigonometrik yapıda kübik NURBS eğrisi elde edeceğiz.

Tanım 3.3.16. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$p(t) = P_0 R_{0,4}(t) + P_1 R_{1,4}(t) + P_2 R_{2,4}(t) + P_3 R_{3,4}(t)$$

denklemini kübik trigonometrik NURBS eğrisidir. Burada,

$$\begin{aligned} R_{0,4}(t) &= \frac{1}{\tau} w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) \right], \\ R_{1,4}(t) &= \frac{1}{\tau} w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) \right], \\ R_{2,4}(t) &= \frac{1}{\tau} w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right], \\ R_{3,4}(t) &= \frac{1}{\tau} w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right], \\ R_{4,4}(t) &= 0, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &= w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) \right] + w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) \right] \\ &+ w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] + w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] \end{aligned}$$

dir. α ve β şekil parametreleri eğriye etki ederken, w_0, w_1, w_2, w_3 ağırlık fonksiyonları lokal olarak kontrol noktalarına etki eder.

3.3.6.6 Kübik GT-Nurbs yüzey yamaları

Bu alt bölümde trigonometrik kübik NURBS eğrileri yardımıyla trigonometrik kübik NURBS yüzeyleri elde edeceğiz.

Tanım 3.3.17. $-1 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq 1, 0 \leq s, t \leq 1, P_{ij} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$S(t, s) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 P_{ij} R_{i,4}(t) R_{j,4}(s)$$

denklemi bi-kübik NURBS tensör çarpım yüzey yamasıdır. Burada,

$$\begin{aligned} R_{0,4}(t) &= \frac{1}{\tau_1} w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) \right], \\ R_{1,4}(t) &= \frac{1}{\tau_1} w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) \right], \\ R_{2,4}(t) &= \frac{1}{\tau_1} w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right], \\ R_{3,4}(t) &= \frac{1}{\tau_1} w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right], \\ R_{4,4}(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{0,4}(s) &= \frac{1}{\tau_2} w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(s) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(s) \right], \\ R_{1,4}(s) &= \frac{1}{\tau_2} w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(s) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(s) \right], \\ R_{2,4}(s) &= \frac{1}{\tau_2} w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(s) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(s) \right], \\ R_{3,4}(s) &= \frac{1}{\tau_2} w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(s) \right], \\ R_{4,4}(s) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) \right] + w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) \right] \\ &\quad + w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] + w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(s) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(s) \right] + w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(s) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(s) \right] \\ &\quad + w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(s) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(s) \right] + w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(s) \right] \end{aligned}$$

olmaktadır.

4. GENEL TİPTE KUATERNİYONİK TRİGONOMETRİK EĞRİLER

Bir katı cisme yön vermenin ana etkenleri Euler açısı, dönme matrisi ve kuaterniyondur. Yönlendirmeyi tanımlamak için kullanılan kuaterniyon yöntemi aşağıdaki avantajlara sahiptir:

1. Daha yüksek dereceden hesaplamalarda verimlilik,
2. Smooth interpolasyonu sağlamada kolaylıktır.

Kuaterniyon dönme uygulamalarında kullanılır. Kuaterniyon dönel uzayına ait ve dört boyutlu bir vektördür. Sonuç olarak, kartezyen uzaydaki üç boyutlu vektörün algoritmaları doğrudan kuaterniyon için uygun değildir.

Üç boyutlu vektör uzayındaki interpolasyon teorileri kuaterniyon interpolasyonuna doğrudan uygulanamaz. Yani, kartezyen uzaydaki yüksek dereceli interpolasyon yöntemleri, kuaterniyonun çok yönlü interpolasyonu için doğrudan kullanılamaz.

Kuaterniyonun en yaygın olarak kullanılan oryantasyon interpolasyonu Shoemake tarafından geliştirilen küresel doğrusal interpolasyondur (SLERP). SLERP in uygulaması basit ve kullanışlıdır. SLERP formülü aşağıdaki gibidir:

$$SLERP(Q_1, Q_2, t) = \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} \theta_1 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \theta_2, t \in [0, 1],$$

Burada θ_1 orijinal yön vektörü, θ_2 uç yön vektörüdür. θ ise θ_1 ve θ_2 4-boyutlu vektörleri arasındaki açıdır. θ nın açı değeri, $\cos \theta = \theta_1 \cdot \theta_2$ iç çarpımı ile elde edilebilir. t değişkeni 0 ile 1 arasında düzgün bir şekilde değiştiğinde, θ_1 ve θ_2 arasında bir dizi düzgün dörtlü yönler elde edilebilir. [31]

SLERP sadece iki yön arasında kuaterniyon interpolasyonu için çok uygundur. Bununla birlikte, ikiden fazla oryantasyon arasındaki interpolasyonlar uygulanmak istendiğinde SLERP sadece C^0 sürekliliği garanti edebilir, birkaç eğri parçasının birbirine bağlandığı noktalar smooth yapıda değildir. Bunun için Shoemake SQUAD'ı (küresel dörtgen lineer interpolasyon) SLERP yardımıyla geliştirmiştir.

SQUAD'ın uygulaması ve türevi daha komplike olmasına rağmen, SLERP'in dezavantajlarını taşımaz.

$$SQUAD(Q_i, Q_{i+1}, S_i, S_{i+1}, h) = SLERP[SLERP(Q_i, Q_{i+1}, h), SLERP(S_i, S_{i+1}, h), 2h(1-h)],$$

$$S_i = Q_i * \exp\left[\frac{\ln(Q_i^{-1} * Q_{i-1}) + \ln(Q_i^{-1} * Q_{i+1})}{4}\right], i = 0, 1, \dots, n-1, h \in [0, 1]$$

Yukarıdaki formül iki fonksiyondan oluşur. İlk fonksiyon interpolasyon fonksiyonu, ikinci fonksiyon ise yardımcı fonksiyon olarak adlandırılır. $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ kuaterniyon formunda verilen bir dizi anahtar yönelimdir, h tek değişkendir, Q_i^{-1} ise Q_i nin ters kuaterniyonudur. S_i ve S_{i+1} ikinci formül tarafından elde edilen yardımcı fonksiyonlardır. S_0 ve S_n değerlerini elde etmek istiyorsak Q_{-1} ve Q_{n+1} değerlerine ihtiyaç vardır. Ancak elimizde sadece $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ değerleri vardır. Burada $S_0 = Q_0$ ve $S_n = Q_n$ eşitlikleri alınır ve bu eşitlik interpolasyon eğrisi üzerinde çok az etkide bulunur. SLERP formülünün 3 kez uygulanması sonucu SQUAD formülü oluşur. SQUAD formülü C^0 ve C^1 sürekliliklerini sağlar. [31]

Kuaterniyon,

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

şeklinde tanımlanır, q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar, i, j, k kompleks sayının imajiner kısmıdır.

Kuaterniyon $Q = [q_0, (q_1, q_2, q_3)] = [w, v]$ vektör formunda da gösterilir. w kuaterniyonun reel kısmı, v ise imajiner kısmıdır. Q nun normu,

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

dir. Genellikle, dönme için uygulanan kuaterniyon birim kuaterniyondur. Dahası, popüler olan gösterimi

$$\theta = [\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) * (a, b, c)] = [\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) * n]$$

dir. Burada θ dönme açısı ve $n = (a, b, c)$ dönme ekseninin vektörüdür. Buna ek olarak n birim vektördür. ($\|n\| = 1$)

Yukarıdaki eşitlik kuaterniyonun θ dönme açısı ile yaptığı dönme karakteristiğidir.

Bildiğimiz üzere, F kompleks sayısı $F = A + Bi$ şeklindedir. $\|F\| = 1$ ise F birim komplekstir. Birim kompleks eksponansiyel formda $F = e^{\phi i}$ şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde, bilinen kompleks form yerine birim kuaterniyon eksponansiyel formda,

$$Q = [\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) * n] = e^{\theta n} = e^{\theta * (a, b, c)}$$

şeklinde tanımlanabilir. Her iki tarafın logaritması alındığında,

$$\ln Q = \theta n = \theta * (a, b, c) = (x, y, z) = P$$

dir. Birim kuaterniyon için logaritma alındığında S^3 deki 4-boyutlu kuaterniyon, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki üç boyutlu noktalara dönüşür. Bu durumda, yüksek mertebeden interpolasyon teorileri özellikle B-Spline, NURBS interpolasyonları için uygun duruma gelmiş olur. [32]

Tanım 4.0.1. $p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [0, 1]$ *interpole edilen noktalar olmak üzere*, $\mathbb{R}^3$ uzayında çeşitli interpolasyon metodlarını $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ *nokta serileri için kullanırız. İnterpole edilmiş noktalar, $\mathbb{R}^3$ uzayında üç boyutlu vektörlerdir ve S^3 uzayında birim kuaterniyonlara dönüştürülmesi gerekir. Kuaterniyonların dönme eksenlerinin birim vektör olmasını sağlamak için dönme eksen vektörlerinin lineer kombinasyonu alınmalıdır. Bu nedenle interpolasyon denklemi,*

$$p(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \cdot \frac{[x(t), y(t), z(t)]}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, t \in [0, 1]$$

şeklinde yazılır.

$$Q(t) = e^{p(t)} = e^{\left\{ \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \cdot \frac{[x(t), y(t), z(t)]}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} \right\}}$$

denklemi, $Q = [\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) * n] = e^{\theta n} = e^{\theta * (a, b, c)}$ denklemi ile karşılaştırıldığında, dönme açısı ve interpolate edilmiş birim kuaterniyon dönme eksen vektörü,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}, \\ a(t) &= \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, \\ b(t) &= \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, \\ c(t) &= \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} \end{aligned}$$

şeklinde dir. Sonuç olarak, reel ve imajiner kısım aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} q_0(t) &= \cos\left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}\right), \\ q_1(t) &= \sin\left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, \\ q_2(t) &= \sin\left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, \\ q_3(t) &= \sin\left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Burada $[q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t)]$ interpolate edilmiş birim kuaterniyondur. [32]

4.1 Kuaterniyonik GT-kuadratik Bezier eğrileri ve özellikleri

Bu alt bölümde kuaterniyonik yapıdaki kuadratik Bezier eğrilerinden ve özelliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 4.1.1. İkinci dereceden bir kuaterniyon Bezier eğrisi,

$$P(t) = \sum_{i=0}^2 P_i B_{i,2}(t)$$

olmak üzere,

$$P(t) = P_0 \tilde{B}_{0,2}(t) + \sum_{i=1}^2 \Delta P_i \tilde{B}_{i,2}(t)$$

olarak ifade edilir. Burada $e^{p(t)} \rightarrow q(t)$, $P_0 \tilde{B}_{0,2}(t) \rightarrow q_0^{\tilde{B}_{0,2}(t)}$, $\Delta P_i \tilde{B}_{i,2}(t) \rightarrow e^{w_i \tilde{B}_{i,2}(t)}$ dönüşümleri yapıldığında,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0^{\tilde{B}_{0,2}(t)} \prod_{i=1}^2 e^{w_i \tilde{B}_{i,2}(t)} \\ &= q_0^{\tilde{B}_{0,2}(t)} e^{w_1 \tilde{B}_{1,2}(t) + w_2 \tilde{B}_{2,2}(t)} \end{aligned}$$

dir. $w_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i)$ için ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0^{\tilde{B}_{0,2}(t)} e^{\log(q_0^{-1} q_1) \tilde{B}_{1,2}(t) + \log(q_1^{-1} q_2) \tilde{B}_{2,2}(t)} \\ &= q_0^{B_{0,2} + B_{1,2} + B_{2,2}} e^{\log(q_0^{-1} q_1) (B_{1,2} + B_{2,2}) + \log(q_1^{-1} q_2) B_{2,2}} \\ &= q_0^{B_{0,2} + B_{1,2} + B_{2,2}} e^{B_{2,2} (\log(q_0^{-1} q_1 q_1^{-1} q_2) + B_{1,2} (\log(q_0^{-1} q_1)))} \\ &= q_0^{B_{0,2}} q_1^{B_{1,2}} q_2^{B_{2,2}} \end{aligned}$$

eğrisi elde edilir.

Teorem 4.1.1. Kuaterniyonik kuadratik trigonometrik Bezier eğrinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Uç nokta özellikleri :

$t = 0$ için $B_{0,2}(0) = 1, B_{1,2}(0) = 0, B_{2,2}(0) = 0$ olduğundan $q(0) = q_0$ dir. $t = 1$ için $B_{0,2}(1) = 0, B_{1,2}(1) = 0, B_{2,2}(1) = 1$ olduğundan $q(1) = q_2$ dir.

GT-baz fonksiyonları kullanılarak $t = 0$ ve $t = 1$ için, α, β şekil parametreleri olmak üzere

$$\begin{aligned} B'_{0,2}(0) &= -\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), \\ B'_{1,2}(0) &= \frac{\pi}{2}(m-1+\alpha), \\ B'_{2,2}(0) &= 0, \\ B'_{0,2}(1) &= -\frac{\pi}{2}(m-1+\beta), \\ B'_{1,2}(1) &= \frac{\pi}{2}(m-1+\beta), \\ B'_{2,2}(1) &= 0 \end{aligned}$$

baz fonksiyonlarının türevleri bulunur.

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0^{B_{0,2}} q_1^{B_{1,2}} q_2^{B_{2,2}} \\ \ln(q(t)) &= \ln(q_0^{B_{0,2}} q_1^{B_{1,2}} q_2^{B_{2,2}}) \\ &= B_{0,2} \ln q_0 + B_{1,2} \ln q_1 + B_{2,2} \ln q_2 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilirse, türevi alındığında

$$\frac{q'}{q} = B'_{0,2}(t) \ln q_0 + B'_{1,2}(t) \ln q_1 + B'_{2,2}(t) \ln q_2$$

elde edilir. Buradan, $q(0) = q_0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} q'(0) &= q_0 \left(-\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha) \right) \ln q_0 + q_0 \left(\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha) \right) \ln q_1 \\ &= q_0 \left(\ln q_0^{-\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)} + \ln q_1^{\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)} \right) \\ &= q_0 \ln \left(\frac{q_1}{q_0} \right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\alpha)} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, $t = 1$ için

$$q'(1) = q_2 \ln \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\beta)}$$

elde edilir.

2. Simetri: $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}$ ve $B_{2,2}, B_{1,2}, B_{0,2}$ farklı parametrisasyonlarda aynı eğriyi tanımlar.

Şöyleki $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$q(t; \alpha, \beta, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}) = q(1-t; \alpha, \beta, B_{2,2}, B_{1,2}, B_{0,2})$$

dir. $t \rightarrow 1-t$ için,

$$\begin{aligned} B_{0,2}(1-t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}(1-t)))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}(1-t))), \\ B_{1,2}(1-t) &= 1 - B_{0,2}(1-t) - B_{2,2}(1-t), \\ B_{2,2}(1-t) &= (1 - \cos(\frac{\pi}{2}(1-t)))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}(1-t))) \end{aligned}$$

şeklindedir. $t = 0$ için,

$$q(0; \alpha, \beta, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}) = q(1; \alpha, \beta, B_{2,2}, B_{1,2}, B_{0,2})$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını görmek için,

$$q(1-t) = q_0^{(1-\sin(\frac{\pi}{2}(1-t)))(1-\alpha \sin(\frac{\pi}{2}(1-t)))} q_1^{1-B_{0,2}(1-t)-B_{2,2}(1-t)} q_2^{(1-\cos(\frac{\pi}{2}(1-t)))(1-\beta \cos(\frac{\pi}{2}(1-t)))}$$

denkleminde faydalanırız. $B_{0,2}(1-t), B_{1,2}(1-t), B_{2,2}(1-t)$ baz fonksiyonları kullanılarak, $t = 0$ için,

$$\begin{aligned} q(1) &= q_0^{(1-\sin(\frac{\pi}{2}))(1-\alpha \sin(\frac{\pi}{2}))} q_1^{1-B_{0,2}(1-t)-B_{2,2}(1-t)} q_2^{(1-\cos(\frac{\pi}{2}))(1-\beta \cos(\frac{\pi}{2}))} \\ &= q_2^{(1-\cos(\frac{\pi}{2}))^2} = q_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Uç nokta özelliğinden biliyoruz ki $q(1) = q_2$ dir. Dolayısıyla simetri özelliği sağlanır.

3. Geometrik invaryantlık: Eğrinin şekli koordinat seçiminden bağımsızdır.

4. Konveks gövde özelliği: Non-negatiflik ve birimin parçalanması özelliğinden tüm eğri, kontrol noktaları tarafından konveks gövde içerisinde kalır.

Teorem 4.1.2. q_0, q_1, q_2 ve $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ kontrol noktaları olmak üzere,

$$\begin{aligned} q(t; \alpha, \beta) &= q_0^{B_{0,2}(t)} q_1^{B_{1,2}(t)} q_2^{B_{2,2}(t)}, \\ \tilde{q}(t; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \tilde{q}_0^{\tilde{B}_{0,2}(t)} \tilde{q}_1^{\tilde{B}_{1,2}(t)} \tilde{q}_2^{\tilde{B}_{2,2}(t)} \end{aligned}$$

ikinci dereceden kuaterniyonik GT-kuadratik Bezier eğrileri için,

$$q(1) = \tilde{q}(0),$$

$$q'(1) = \tilde{q}'(0)$$

eşitlikleri sağlanırsa bu eğriler C^0 ve C^1 süreklidir.

$$q_2 \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\beta)} = \tilde{q}_0 \ln\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_0}\right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\tilde{\alpha})}$$

eşitliği parametrik süreklilik için sağlanmalıdır. Aksi durumda

$$q_2 \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\beta)} = \xi \tilde{q}_0 \ln\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_0}\right)^{\frac{\pi}{2}(m-1+\tilde{\alpha})}$$

denkleminde $\xi \in \mathbb{R}$ ($\xi > 0$) için geometrik süreklilik incelenir.

4.1.1 GT-Kuaterniyonik kübik Bezier eğrileri ve yüzey tasarımları

Bu alt bölümde kuaterniyonik trigonometrik kübik Bezier eğrilerinden ve tensör çarpımı yüzey tasarımlarından bahsedeceğiz.

Üçüncü dereceden bir kuaterniyon Bezier eğrisi,

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=0}^3 p_i B_{i,3}(t) \\ &= p_0 \tilde{B}_{0,3}(t) + \sum_{i=1}^3 \Delta p_i \tilde{B}_{i,3}(t) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada $p(t) \rightarrow q(t)$, $p_0 \tilde{B}_{0,3}(t) \rightarrow q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)}$, $\Delta p_i \tilde{B}_{i,3}(t) \rightarrow e^{w_i \tilde{B}_{i,3}(t)}$ dönüşümleri yapıldığında,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} \prod_{i=1}^3 e^{w_i \tilde{B}_{i,3}(t)} \\ &= q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} e^{w_1 \tilde{B}_{1,3}(t) + w_2 \tilde{B}_{2,3}(t) + w_3 \tilde{B}_{3,3}(t)} \end{aligned}$$

dir. $w_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i)$ için ($i = 1, 2, 3$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} \{ e^{\log(q_0^{-1} q_1) \tilde{B}_{1,3}(t) + \log(q_1^{-1} q_2) \tilde{B}_{2,3}(t) + \log(q_2^{-1} q_3) \tilde{B}_{3,3}(t)} \} \\ &= q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} q_1^{\tilde{B}_{1,3}(t)} q_2^{\tilde{B}_{2,3}(t)} q_3^{\tilde{B}_{3,3}(t)} \end{aligned}$$

olmaktadır. Her iki tarafın e tabanından logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned} \ln(q(t)) &= \ln(q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} q_1^{\tilde{B}_{1,3}(t)} q_2^{\tilde{B}_{2,3}(t)} q_3^{\tilde{B}_{3,3}(t)}) \\ &= \ln q_0^{\tilde{B}_{0,3}(t)} + \ln q_1^{\tilde{B}_{1,3}(t)} + \ln q_2^{\tilde{B}_{2,3}(t)} + \ln q_3^{\tilde{B}_{3,3}(t)} \end{aligned}$$

olur. Burada biliyoruz ki $q(t) = e^{p(t)}$ dir. Böylece $\ln(q(t))$ eğrisi,

$$\ln(q(t)) = \ln e^{p(t)} = p(t)$$

olduğundan $p(t)$ eğrisine dönüşür. Burada

$$p(t) = B_{0,3}(t) \ln q_0 + B_{1,3}(t) \ln q_1 + B_{2,3}(t) \ln q_2 + B_{3,3}(t) \ln q_3$$

kuaterniyonik Bezier eğri denklemdir. $t \in [0, 1]$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ de interpolate edilmiş nokta vektörüne dönüşen kontrol noktaları için,

$$\begin{aligned} p(t) = & B_{0,3}(t) \ln[\cos(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2})] \\ & + B_{1,3}(t) \ln[\sin(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}) \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}] \\ & + B_{2,3}(t) \ln[\sin(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}) \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}] \\ & + B_{3,3}(t) \ln[\sin(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2}) \cdot \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}] \end{aligned}$$

şeklindedir. Birim kuaterniyon teorisine göre, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ eşitliği kullanılarak reel kısım $B_{0,3}(t)$ baz fonksiyonuyla, imajiner kısım diğer baz fonksiyonları ile ilişkilidir. Burada $p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [0, 1]$ olmak üzere, t değişkenine bağlı fonksiyonlar alınır. Şimdi genel tipte kuaterniyonik bi-kübik Bezier tensör çarpımı yüzey yaması oluşturalım:

Tanım 4.1.2. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{0,2}(t), \\ B_{1,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{0,2}(t) + (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{1,2}(t), \\ B_{2,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{2,2}(t) + \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{1,2}(t), \\ B_{3,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{2,2}(t) \end{aligned}$$

üçüncü dereceden genelleştirilmiş tipte trigonometrik baz fonksiyonlarıdır, ki burada;

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)), \\ B_{1,2}(t) &= 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t), \\ B_{2,2}(t) &= (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

ikinci dereceden trigonometrik baz fonksiyonları olarak bilinir. Tensör çarpımı yüzey yaması oluşturmak için öncelikle $\ln q_{ij} = C_{ij}$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned} \tilde{r}(u, v) &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 \ln q_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) \\ &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 C_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) \end{aligned}$$

bi-kübik kuaterniyonik Bezier tensör çarpımı yüzey yamasıdır. C_{ij} ($i = j = 0, 1, 2, 3$) olmak üzere,

$$\tilde{r}(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(u) & B_{1,3}(u) & B_{2,3}(u) & B_{3,3}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,3}(v) \\ B_{1,3}(v) \\ B_{2,3}(v) \\ B_{3,3}(v) \end{bmatrix}$$

tensör çarpımı yüzey yamasıdır. $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ şekil parametreleri olmak üzere, $0 \leq u, v \leq 1$ ve 16 kontrol noktası alalım. $C_{00}, C_{01}, \dots, C_{32}, C_{33}$ kontrol noktaları $C_{ij} = q_k(u_{ij})$ ($i, j, k = 0, 1, 2, 3$) formuna dönüştürülürse kuaterniyonik Bezier tensör çarpımı yüzey yaması elde edilmiş olur.

Kontrol noktaları,

$$\begin{aligned} C_{00} &= q_0(u_{00}) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{x_{00}^2(t) + y_{00}^2(t) + z_{00}^2(t)}}{2}\right) \right] |_{(x_{00}, y_{00}, z_{00})}, \\ C_{01} &= q_1(u_{01}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{01}^2(t) + y_{01}^2(t) + z_{01}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{x_{01}(t)}{\sqrt{x_{01}^2(t) + y_{01}^2(t) + z_{01}^2(t)}} \right] |_{(x_{01}, y_{01}, z_{01})}, \\ C_{02} &= q_2(u_{02}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{02}^2(t) + y_{02}^2(t) + z_{02}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{y_{02}(t)}{\sqrt{x_{02}^2(t) + y_{02}^2(t) + z_{02}^2(t)}} \right] |_{(x_{02}, y_{02}, z_{02})}, \\ C_{03} &= q_3(u_{03}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{03}^2(t) + y_{03}^2(t) + z_{03}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{z_{03}(t)}{\sqrt{x_{03}^2(t) + y_{03}^2(t) + z_{03}^2(t)}} \right] |_{(x_{03}, y_{03}, z_{03})}, \\ C_{10} &= q_0(u_{10}) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{x_{10}^2(t) + y_{10}^2(t) + z_{10}^2(t)}}{2}\right) \right] |_{(x_{10}, y_{10}, z_{10})}, \\ C_{11} &= q_1(u_{11}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{11}^2(t) + y_{11}^2(t) + z_{11}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{x_{11}(t)}{\sqrt{x_{11}^2(t) + y_{11}^2(t) + z_{11}^2(t)}} \right] |_{(x_{11}, y_{11}, z_{11})}, \\ C_{12} &= q_2(u_{12}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{12}^2(t) + y_{12}^2(t) + z_{12}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{y_{12}(t)}{\sqrt{x_{12}^2(t) + y_{12}^2(t) + z_{12}^2(t)}} \right] |_{(x_{12}, y_{12}, z_{12})}, \\ C_{13} &= q_3(u_{13}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{13}^2(t) + y_{13}^2(t) + z_{13}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{z_{13}(t)}{\sqrt{x_{13}^2(t) + y_{13}^2(t) + z_{13}^2(t)}} \right] |_{(x_{13}, y_{13}, z_{13})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{20} &= q_0(u_{20}) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{x_{20}^2(t) + y_{20}^2(t) + z_{20}^2(t)}}{2}\right) \right] |_{(x_{20}, y_{20}, z_{20})}, \\
C_{21} &= q_1(u_{21}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{21}^2(t) + y_{21}^2(t) + z_{21}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{x_{21}(t)}{\sqrt{x_{21}^2(t) + y_{21}^2(t) + z_{21}^2(t)}} \right] |_{(x_{21}, y_{21}, z_{21})}, \\
C_{22} &= q_2(u_{22}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{22}^2(t) + y_{22}^2(t) + z_{22}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{y_{22}(t)}{\sqrt{x_{22}^2(t) + y_{22}^2(t) + z_{22}^2(t)}} \right] |_{(x_{22}, y_{22}, z_{22})}, \\
C_{23} &= q_3(u_{23}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{23}^2(t) + y_{23}^2(t) + z_{23}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{z_{23}(t)}{\sqrt{x_{23}^2(t) + y_{23}^2(t) + z_{23}^2(t)}} \right] |_{(x_{23}, y_{23}, z_{23})}, \\
C_{30} &= q_0(u_{30}) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{x_{30}^2(t) + y_{30}^2(t) + z_{30}^2(t)}}{2}\right) \right] |_{(x_{30}, y_{30}, z_{30})}, \\
C_{31} &= q_1(u_{31}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{31}^2(t) + y_{31}^2(t) + z_{31}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{x_{31}(t)}{\sqrt{x_{31}^2(t) + y_{31}^2(t) + z_{31}^2(t)}} \right] |_{(x_{31}, y_{31}, z_{31})}, \\
C_{32} &= q_2(u_{32}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{32}^2(t) + y_{32}^2(t) + z_{32}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{y_{32}(t)}{\sqrt{x_{32}^2(t) + y_{32}^2(t) + z_{32}^2(t)}} \right] |_{(x_{32}, y_{32}, z_{32})}, \\
C_{33} &= q_3(u_{33}) = \left[\sin\left(\frac{\sqrt{x_{33}^2(t) + y_{33}^2(t) + z_{33}^2(t)}}{2}\right) \cdot \frac{z_{33}(t)}{\sqrt{x_{33}^2(t) + y_{33}^2(t) + z_{33}^2(t)}} \right] |_{(x_{33}, y_{33}, z_{33})}
\end{aligned}$$

şeklinde modifiye edilir ve oluşan yüzey,

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(u, v) &= C_{00}B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{01}B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{02}B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) + \\
&C_{03}B_{0,3}(u)B_{3,3}(v) + C_{10}B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{11}B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) + \\
&C_{12}B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) + C_{13}B_{1,3}(u)B_{3,3}(v) + C_{20}B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) + \\
&C_{21}B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{22}B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) + C_{23}B_{2,3}(u)B_{3,3}(v) + \\
&C_{30}B_{3,3}(u)B_{0,3}(v) + C_{31}B_{3,3}(u)B_{1,3}(v) + C_{32}B_{3,3}(u)B_{2,3}(v) + \\
&C_{33}B_{3,3}(u)B_{3,3}(v)
\end{aligned}$$

bi-kübik kuaterniyonik Bezier tensör çarpım yüzey yamasıdır.

Örnek 4.1.1. $0 \leq u, v \leq 1$ olmak üzere,

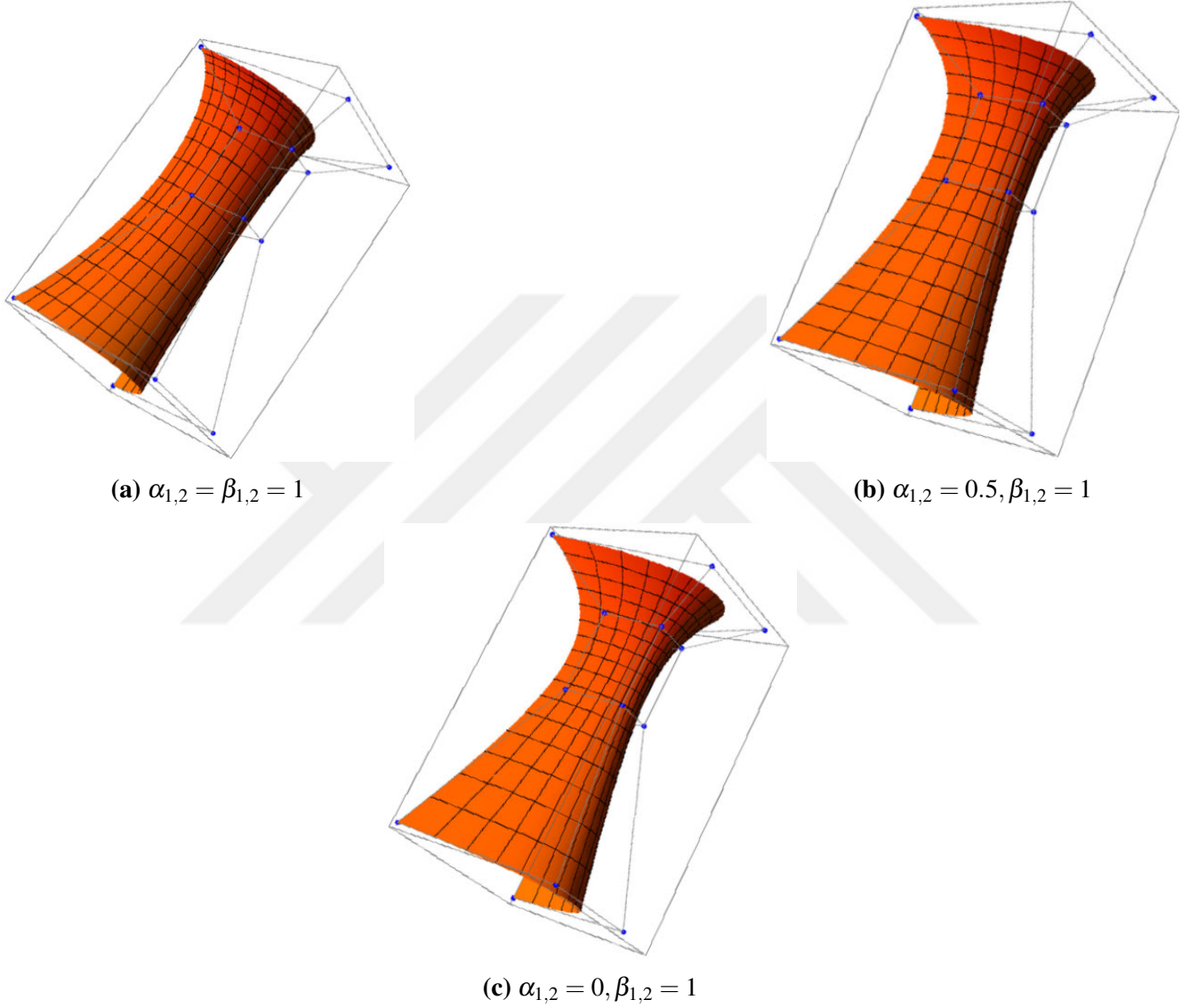
$$C_{00} = (1, 1, 1), C_{01} = (1, 1, 2), C_{02} = (1, 2, 1), C_{03} = (2, 1, 3),$$

$$C_{10} = (2, -1, 2), C_{11} = (2, -1, 3), C_{12} = (1, 3, 2), C_{13} = (1, 3, 3),$$

$$C_{20} = (2, 2, 4), C_{21} = (2, 3, 4), C_{22} = (3, 1, 1), C_{23} = (3, 2, 1),$$

$$C_{30} = (3, -1, 2), C_{31} = (3, 2, 3), C_{32} = (3, 3, 3), C_{33} = (3, 4, 1)$$

kontrol noktalarını aldığımızda, farklı şekil parametreleri ile aşağıdaki bi-kübik Bezier tensör çarpımı yüzey yamaları oluşur.



Şekil 4.1 : Farklı şekil parametreleriyle kuaterniyonik bi-kübik Bezier tensör çarpımı yüzey yamaları

4.1.2 GT-Kuaterniyonik kübik B-Spline eğrileri ve yüzey tasarımları

Bu alt bölümde kuaterniyonik yapıda kübik B-Spline eğrilerini oluşturacağız, ardından tensör çarpımı yardımıyla B-Spline yüzey tasarımlarını elde edeceğiz.

Tanım 4.1.3. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere 3. dereceden yeni B-Spline baz fonksiyonları

$$\begin{aligned} B_{0,4}(t) &= \frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t), \\ B_{1,4}(t) &= \frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t), \\ B_{2,4}(t) &= \frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t), \\ B_{3,4}(t) &= \frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t), \\ B_{4,4}(t) &= 0 \end{aligned}$$

$t_0, \dots, t_7$ düğüm noktaları ve $B_{i,4}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+4}-t_i}B_{i,3}(t) + \frac{t_{i+5}-t}{t_{i+5}-t_{i+1}}B_{i+1,3}(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) şeklindedir. Bu durumda baz fonksiyonları kullanılarak elde edilen kuaterniyonik kübik B-Spline eğrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p(t) &= \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) \right] \ln \left[\cos \left(\frac{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}{2} \right) \right] \\ &+ \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \\ &+ \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \\ &+ \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \end{aligned}$$

Burada $t_0, t_1, \dots, t_7$ düğüm noktaları, $t_7 - t_6 = t_6 - t_5 = \dots = t_1 - t_0 = \text{sabit}$; q_0, q_1, q_2, q_3 kontrol noktaları ve

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{0,2}(t), \\ B_{1,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{0,2}(t) + (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{1,2}(t), \\ B_{2,3}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))B_{2,2}(t) + \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{1,2}(t), \\ B_{3,3}(t) &= \sin(\frac{\pi}{2}t)B_{2,2}(t), \\ B_{0,2}(t) &= (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))(1 - \alpha \sin(\frac{\pi}{2}t)), \\ B_{1,2}(t) &= 1 - B_{0,2}(t) - B_{2,2}(t), \\ B_{2,2}(t) &= (1 - \cos(\frac{\pi}{2}t))(1 - \beta \cos(\frac{\pi}{2}t)) \end{aligned}$$

dir. Birim kuaterniyon teorisine göre, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ eşitliğinden reel kısım $B_{0,3}(t)$ baz fonksiyonuyla, imajiner kısım diğer baz fonksiyonları ile ilişkilidir. Burada $p(t) =$

$[x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [0, 1]$ olmak üzere, t değişkenine bağlı fonksiyonlar alınır. Şimdi genel tipte kuaterniyonik bi-kübik B-Spline tensör çarpımı yüzey yaması oluşturalım:

$\alpha\beta$ -kuaterniyonik GT-B-Spline yüzey yaması GT-B-Spline baz fonksiyonları kullanılarak elde edilir. $C_{00}, C_{01}, \dots, C_{32}, C_{33}$ kontrol noktaları $C_{ij} = q_k(u_{ij})$ ($i, j, k = 0, 1, 2, 3$) olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{r}(u, v) = & C_{00}B_{0,4}(u)B_{0,4}(v) + C_{01}B_{0,4}(u)B_{1,4}(v) + C_{02}B_{0,4}(u)B_{2,4}(v) + \\ & C_{03}B_{0,4}(u)B_{3,4}(v) + C_{10}B_{1,4}(u)B_{0,4}(v) + C_{11}B_{1,4}(u)B_{1,4}(v) + \\ & C_{12}B_{1,4}(u)B_{2,4}(v) + C_{13}B_{1,4}(u)B_{3,4}(v) + C_{20}B_{2,4}(u)B_{0,4}(v) + \\ & C_{21}B_{2,4}(u)B_{1,4}(v) + C_{22}B_{2,4}(u)B_{2,4}(v) + C_{23}B_{2,4}(u)B_{3,4}(v) + \\ & C_{30}B_{3,4}(u)B_{0,4}(v) + C_{31}B_{3,4}(u)B_{1,4}(v) + C_{32}B_{3,4}(u)B_{2,4}(v) + \\ & C_{33}B_{3,4}(u)B_{3,4}(v)\end{aligned}$$

formundadır.

4.1.3 GT-Kuaterniyonik kübik NURBS eğrileri ve yüzey tasarımları

Bu alt bölümde kuaterniyonik yapıda kübik NURBS eğrilerini oluşturacağız, ardından tensör çarpımı yardımıyla NURBS yüzey tasarımlarını elde edeceğiz.

Tanım 4.1.4. $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$p(t) = P_0R_{0,4}(t) + P_1R_{1,4}(t) + P_2R_{2,4}(t) + P_3R_{3,4}(t)$$

denklemini kübik GT-NURBS eğrisidir. Burada

$$\begin{aligned}R_{0,4}(t) &= \frac{1}{\tau}w_0\left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t)\right], \\ R_{1,4}(t) &= \frac{1}{\tau}w_1\left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t)\right], \\ R_{2,4}(t) &= \frac{1}{\tau}w_2\left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t)\right], \\ R_{3,4}(t) &= \frac{1}{\tau}w_3\left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t)\right], \\ R_{4,4}(t) &= 0,\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, trigonometrik NURBS eğrilerinde olduğu gibi burada da

$$\begin{aligned}\tau = & w_0\left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0}B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1}B_{1,3}(t)\right] + w_1\left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1}B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2}B_{2,3}(t)\right] \\ & + w_2\left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2}B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3}B_{3,3}(t)\right] + w_3\left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3}B_{3,3}(t)\right]\end{aligned}$$

olarak alınır. α ve β şekil parametreleri eğriye etki ederken, w_0, w_1, w_2, w_3 ağırlık fonksiyonları lokal olarak kontrol noktalarına etki eder. Bu durumda bi-kübik kuaterniyonik NURBS eğrisi,

$$p(t) = \frac{1}{\tau} w_0 \left[\frac{t-t_0}{t_4-t_0} B_{0,3}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) \right] \ln \left[\cos \left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2} \right) \right] \\ + \frac{1}{\tau} w_1 \left[\frac{t-t_1}{t_5-t_1} B_{1,3}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} \\ + \frac{1}{\tau} w_2 \left[\frac{t-t_2}{t_6-t_2} B_{2,3}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} \\ + \frac{1}{\tau} w_3 \left[\frac{t-t_3}{t_7-t_3} B_{3,3}(t) \right] \ln \left[\sin \left(\frac{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}{2} \right) \right] \cdot \frac{z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 4.1.5. $C_{00}, C_{01}, \dots, C_{32}, C_{33}$ kontrol noktaları $C_{ij} = q_k(u_{ij})$ ($i, j, k = 0, 1, 2, 3$) olmak üzere, kuaterniyonik bi-kübik NURBS tensör çarpımı yüzey yamaları,

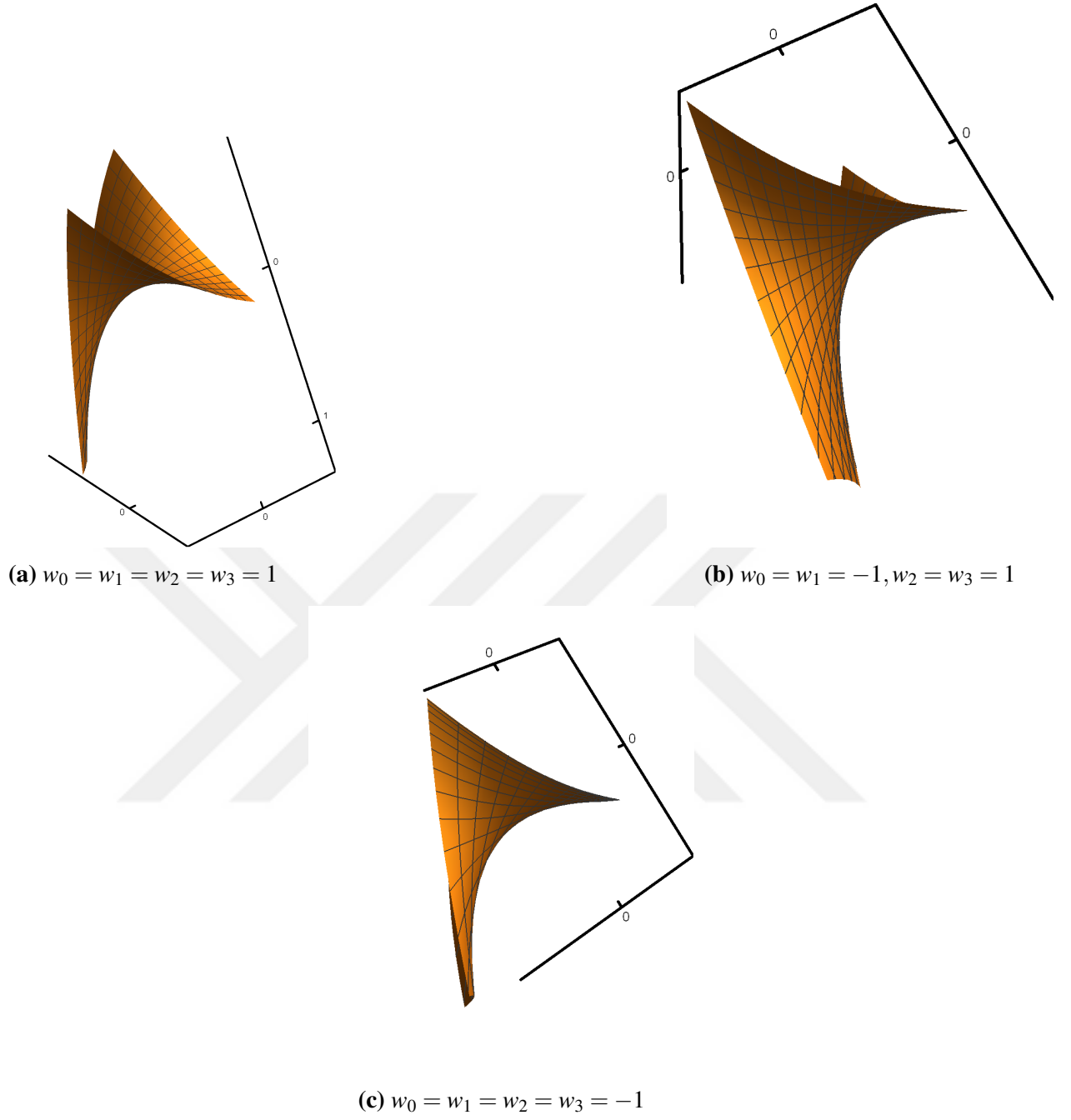
$$\tilde{r}(u, v) = C_{00}R_{0,4}(u)R_{0,4}(v) + C_{01}R_{0,4}(u)R_{1,4}(v) + C_{02}R_{0,4}(u)R_{2,4}(v) + \\ C_{03}R_{0,4}(u)R_{3,4}(v) + C_{10}R_{1,4}(u)R_{0,4}(v) + C_{11}R_{1,4}(u)R_{1,4}(v) + \\ C_{12}R_{1,4}(u)R_{2,4}(v) + C_{13}R_{1,4}(u)R_{3,4}(v) + C_{20}R_{2,4}(u)R_{0,4}(v) + \\ C_{21}R_{2,4}(u)R_{1,4}(v) + C_{22}R_{2,4}(u)R_{2,4}(v) + C_{23}R_{2,4}(u)R_{3,4}(v) + \\ C_{30}R_{3,4}(u)R_{0,4}(v) + C_{31}R_{3,4}(u)R_{1,4}(v) + C_{32}R_{3,4}(u)R_{2,4}(v) + \\ C_{33}R_{3,4}(u)R_{3,4}(v)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada, en önemli nokta ise şekil parametrelerinin yanısıra ağırlık fonksiyonunun ve düğüm vektörler kümesinin de şekle etki etmesidir. Yüzey tasarımı kuaterniyonik Bezier yüzeyleri ve B-Spline yüzeylerinden farklı olarak NURBS yüzeyleri bize daha çok seçenek sunmaktadır.

Örnek 4.1.2. $0 \leq u, v \leq 1$ olmak üzere,

$$C_{00} = (1, 1, 1), C_{01} = (1, 1, 2), C_{02} = (1, 2, 1), C_{03} = (2, 1, 3), \\ C_{10} = (2, -1, 2), C_{11} = (2, -1, 3), C_{12} = (1, 3, 2), C_{13} = (1, 3, 3), \\ C_{20} = (2, 2, 4), C_{21} = (2, 3, 4), C_{22} = (3, 1, 1), C_{23} = (3, 2, 1), \\ C_{30} = (3, -1, 2), C_{31} = (3, 2, 3), C_{32} = (3, 3, 3), C_{33} = (3, 4, 1)$$

kontrol noktaları olsun. Aşağıdaki grafikler bize şekil parametreleri $\alpha = \alpha_1 = -1, \beta = \beta_1 = 1$ olmak üzere ağırlık vektörlerinin sağladığı değişimi vermektedir.



Şekil 4.2 : Kuaterniyonik bi-kübik NURBS tensör çarpımı yüzey yamalarına ağırlık fonksiyonlarının etkisi

KAYNAKLAR

- [1] **Agoston, M.** (2005). *Computer Graphics and Geometric Modeling*, Springer.
- [2] **Anand, V.** (1992). *Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers*, John Wiley and Sons.
- [3] **Levent, A. ve Şahin, B.** (2018). Cubic Bezier-like Transition Curves with New Basis Functions, *The Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 44(2), 222–228.
- [4] **Levent, A. ve Şahin, B.** (2019). Beta Bézier Curves, *Applied and Computational Mathematics an International Journal*, 18(1), 79–94.
- [5] **Uzma, B., Abbas, M. ve Ali, J.** (2013). The G2 and C2 rational quadratic trigonometric Bezier curve with two shape parameters with applications, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 10183–10197.
- [6] **Liu, H., L. D. ve Zhang, D.** (2011). Study on a class of TC-Bezier curve with shape parameters, *Journal of Information and Computational Science*, 8, 1217–1223.
- [7] **Uzma, B., Abbas, M., Awang, M. ve Ali, J.** (2012). The quadratic trigonometric Bezier curve with single shape parameter, *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 2, 2541–2546.
- [8] **Prautzsch, H., Boehm, W. ve Palusany, M.** (2002). *Bezier and B-Spline Techniques*, Springer.
- [9] **Solomon, D.** (2006). *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer.
- [10] **Hamilton, W.** (1969). *Elements of Quaternions (Volume I-II)*, Chelsea Publishing Company.
- [11] **Shoemake, K.** (1985). Animating Rotations with Quaternion Curves, *Computer Graphics*, 19(3), 245–254.
- [12] **Zube, S.** (2011). Quaternion Rational Bezier Curves, *Lientuvos Matematikos Rinkiny*, 53–58.
- [13] **Sanchet-Reyes, J.** (2009). Complex Rational Bezier Curves, *CAGD*, 36, 865–876.
- [14] **Nielson, G.** (2004). v-Quaternion Splines for the Smooth Interpolation of Orientations, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(2).
- [15] **Foley, T. ve Nielson, G.** (1997). Knot selection for Parametric Spline Interpolation, *Math. Methods in CAGD*, 261–271.
- [16] **Shin, K.A.** (1995). Continuous B-Spline Quaternion curve Interpolating a Given Sequence of Solid orientations.
- [17] **Saxena, A. ve Sahay, B.** (2005). *Computer Aided Engineering Design*, Anamaya.

- [18] **Farin, G.** (2002). *Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide*, Academic Press Inc., San Diego.
- [19] **Piegl, L. ve Tiller, W.** (1997). *The NURBS Book*, Springer, 2nd sürüm.
- [20] **Gündüz, H., Kazan, A. ve Karadağ, H.** (2019). Rotational Surfaces generated by Cubic Hermitian and Cubic Bezier Curves, *Journal of Polytechnic*, 22(4), 1075–1082.
- [21] **Levent, A.** (2013). *Bezier Yüzeyleri ve Kıvrımlı Yüzeyler* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi.
- [22] **Hacısalıhoğlu, H.** (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi yayınları.
- [23] **Özdemir, M.** (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*, Altın Nokta.
- [24] **Kim, M., Kim, M. ve Shin, S.** (1995). General construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives, Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques.
- [25] **Octafiatiningsih, E. ve Sujarwo, I.** (2016). The Application of Quadratic Bezier Curve on Rotational and Symmetrical Lampshade, *Cauchy-Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(2), 100–106.
- [26] **Marsh, D.** (2004). *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer, 2nd sürüm.
- [27] **Pressley, A.** (2001). *Elementary Differential Geometry*, Springer.
- [28] **Maqsood, S., Abbas, M., Hu, G., Ramli, A. ve Miura, K.** (2020). A Novel Generalization of Trigonometric Bezier Curve and Surface with Shape Parameters and Its Applications, *Mathematical Problems In Engineering*.
- [29] **Gündüz, H. ve Karadağ, H.** (2023). Surface applications of T-Bezier curves, *Journal of Polytechnic*, doi: 10.2339/politeknik.1326633.
- [30] **Hoschek, J., Lasser, D. ve Schumaker, L.** (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, Wellesley.
- [31] **Dam, E., Koch, M. ve Lillholm, M.** (1998). *Quaternions, Interpolation and Animation*, University of Copenhagen.
- [32] **Yasong, P., Yaoyao, S., Xiaojun, L., Yuan, H. ve Zhishan, L.** (2020). C2-Continuous Orientation Planning for Robot End-Effector with B-Spline Curve Based on Logarithmic Quaternion, *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 16.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Hakan Gündüz

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2007, İzmir Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İngilizce Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2010, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İngilizce Matematik
- **Doktora:** 2023, Malatya İnönü Üniversitesi, Geometri Anabilim Dalı, Matematik

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2019-2023 Malatya İntegral Eğitim Kurumlarında geometri öğretmeni olarak çalıştı.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Gündüz, H., Kazan, A., Karadağ, H.Bayram (2019)** Rotational Surfaces Generated by Cubic Hermitian and Cubic Bezier Curves, 2019, Journal of Polytechnic, Cilt: 22 Sayı: 4, 1075 - 1082
- **Gündüz, H., Karadağ, H.Bayram (2023)** Surface applications of T-Bezier curves, 2023, Journal of Polytechnic (DOI: 10.2339/politeknik.1326633)
- **Gündüz, H., Kazan, A., Karadağ, H.Bayram (2018)** Some Characterizations of Rotational Surfaces Generated by Cubic Hermitian Curves, 16th International Geometry Symposium (2018), Manisa
- **Gündüz, H., Karadağ, M., Karadağ, H.Bayram (2021)** Generalized Trigonometric B-Spline and Nurbs Curves and Surfaces with shape parameters, 18th International Geometry Symposium (2021), Malatya