



KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa GEMİCİ

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

Mustafa GEMİCİ

Danışman
Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

TEZ ONAY SAYFASI

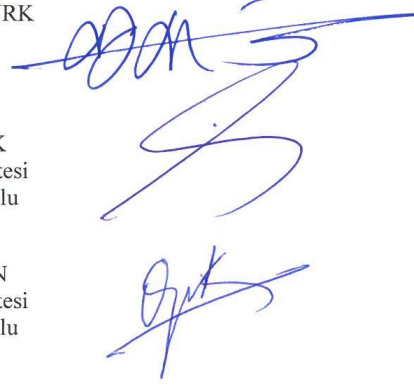
Mustafa GEMİCİ tarafından hazırlanan “Kuaterniyonik W-Eğriler” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 28/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Doç. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK
Kırklareli Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Afyon Meslek Yüksekokulu

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Afyon Meslek Yüksekokulu



Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım
bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/06/2019

Mustafa GEMİCİ

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

Mustafa GEMİCİ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid uzayının, Minkowski uzayının ve kuaterniyonlar kümesinin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, E_1^3 ve E_2^4 yarı-Öklid uzaylarında kuaterniyonik W-eğrilerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik W-eğrilerinin E_1^3 ve E_2^4 de kuaterniyonik pseudo-küre, kuaterniyonik pseudo-hiperbolik uzay ve kuaterniyonik ışık konisi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Dördüncü bölümde, E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında W-eğrilerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik W-eğrilerinin E^3 ve E^4 de kuaterniyonik küre üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

2019, v + 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Reel ve yarı-reel kuaterniyonlar, kuaterniyonik eğriler, Konum vektörü, W-eğri.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

QUATERNIONIC W-CURVES

Mustafa GEMİCİ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür KALKAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, the basic definitions and theorems of Euclidean space, Minkowski space and the set of quaternions are given. In the third chapter, the parametric equations of W-curves are obtained in E_1^3 and E_2^4 semi-Euclidean spaces. Also, necessary and sufficient conditions are given for a quaternionic W-curves to lie on a quaternionic pseudo-sphere, quaternionic pseudo-hyperbolic space and quaternionic light (null) cone in E_1^3 and E_2^4 . In the fourth chapter, the parametric equations of W-curves are obtained in E^3 and E^4 Euclidean spaces. Also, necessary and sufficient conditions are given for a quaternionic W-curves to lie on a quaternionic sphere in E^3 and E^4 .

2019, v + 48 pages

Keywords: Real and semi-real quaternions, quaternionic curves, position vector, W-curve.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibi ile bana yol gösteren, çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç Dr. Özgür KALKAN, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK hocama teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Mustafa GEMİCİ
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	3
2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	3
2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	8
2.3 Reel Kuaterniyonlar	11
2.4 Yarı Reel Kuaterniyonlar	17
3. YARI-ÖKLİD UZAYLARINDA KUATERNİYONİK W-EĞRİLER.....	21
3.1 E_1^3 Yarı-Öklid Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik W-Eğriler.....	21
3.2 E_2^4 Yarı-Öklid Uzayında Kuaterniyonik W-Eğriler.....	28
4. E^3 ve E^4 ÖKLİD UZAYLARINDA KUATERNİYONİK W-EĞRİLER	34
4.1 E^3 Öklid Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik W-Eğriler	34
4.2 E^4 Öklid Uzayında Kuaterniyonik W-Eğriler	37
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	43
6. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ.....	48

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel iç çarpım uzayı
E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
E_1^3	3- boyutlu Minkowski uzayı
E_2^4	4- boyutlu yarı-Öklidyen uzayı
V	Vektör uzayı
$\langle, \rangle$	İç çarpım
$\ , \ $	Norm
V_i	E^n Öklid uzayında i-yinci Frenet vektörü
k_i	E^n Öklid uzayında i-yinci Frenet eğriliği
$g(v, v)$	Minkowski uzayında iç çarpım
$h(p, q)$	Kuaterniyon iç çarpımı
$\wedge_L$	Minkowski uzayında vektörel çarpım
q	Herhangi bir kuaterniyon
Q	Kuaterniyonlar cümlesi
S_q	q kuaterniyonunun skaler kısmı
V_q	q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\bar{q}$	q kuaterniyonunun eşleniği
$\ q\ $	q kuaterniyonunun normu
S_0	q_0 birim kuaterniyonun ekseni
Q_v	Yarı-reel Kuaterniyonlar cümlesi
γq	Yarı-reel bir kuaterniyonunun eşleniği
$S^2(m, R)$	E^3 de m merkezli R yarıçaplı uzaysal kuaterniyonik küre
$S^3(m, R)$	E^4 de m merkezli R yarıçaplı reel kuaterniyonik küre
$S_1^2(m, R)$	E_1^3 yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik küre
$H_0^2(m, R)$	E_1^3 yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik hiperbolik küre
$C_2^2(m, R)$	E_1^3 yarı-Öklid uzayında ışık konisi
$S_2^3(m, R)$	E_2^4 yarı-Öklid uzayında pseudo-küre
$H_1^3(m, R)$	E_2^4 yarı-Öklid uzayında pseudo-hiperbolik küre
$C_3^3(m, R)$	E_2^4 yarı-Öklid uzayında ışık konisi
$\{t, n_1, n_2\}$	Uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Frenet vektörleri
$\{T, N_1, N_2, N_3\}$	Kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\{k, K, (r - K)\}$	Kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$\{T, N, B_1, B_2\}$	Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\{k, K, (r - \varepsilon_i \varepsilon_T \varepsilon_N K)\}$	Yarı-reel kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar teorisi kompleks sayıların genişlemesi olan bir sayı sistemidir. İlk tanım İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton (1843) tarafından yapılmıştır. Kuaterniyonlar bir skaler ve bir vektörün toplamı olarak yazılabilir. Kuaterniyonlar sıralı dört sayının 4 birime eşlik etmesiyle tanımlanan, cebirin ilginç bir formudur. Bu elemanlar doğal sayılara benzer bir yol ile tek bir birim olarak toplanabilir veya çarpılabilir. Ayrıca, q_1 ve q_2 kuaterniyon iken q_1q_2 sayısının q_2q_1 sayısına eşit olması gerekli değildir. Matematiksel olarak kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Kuaterniyonlar mekanik ve kinematik gibi çeşitli alanlarda, kuantum mekaniği ve kimyada grup temsiliinde önemli bir rol oynarlar. Diğer yandan da ortogonal ve birim simetri gruplarda dönme dönüşümü ile bağlantılıdır. Kuaterniyonlar uzayda sonlu dönmeyi temsil etme imkânı sağlarlar.

E^3 ve E^4 de kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri Bharathi ve Nagaraj (1985) tarafından verilmiştir. Daha sonra Çöken ve Tuna E_2^4 yarı-Öklidyen uzayında kuaterniyonik bir eğri için Serret-Frenet formüllerini tanımlamışlardır (Çöken and Tuna 2004). Ayrıca, bu yazarlar kuaterniyonik eğriler için kuaterniyonik eğimli eğriler ve harmonik eğrilikleri de tanımlamışlardır (Çöken and Tuna 2004). E^4 Öklid uzayında ise Gök, Okuyucu vd. (2011) kuaterniyonik B_2 -slant helisini karakterize etmişlerdir. Bundan başka, Okuyucu (2013) tarafından E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik Mannheim eğrilerini çalışılmıştır.

Geometride, özellikle diferensiyel geometride eğriler teorisi önemli bir yere sahiptir. Eğriler Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda da yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğriler geometrisinin çalışılmasında iki kavram çok önemlidir. Bunlar eğrinin Frenet denklemleri (bu denklemler Serret- Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir) ve eğrinin eğrilikleridir (Frenet 1852, Serret 1851). Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Örnek olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin k_1 eğriligi sıfır ise eğri bir doğrudur, $k_2 = 0$, $k_1 \neq 0$ bir sabit ise eğri bir çemberdir. Eğer k_1 ve k_2 sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helistir. n-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin tüm eğrilikleri sabit ise eğri W-eğri olarak

adlandırılır (Klein and Lie 1871). W -eğriler Öklid uzaylarında yoğun bir şekilde çalışılmıştır (İlarslan 2005). R^3 de düzlemsel W -eğri örneği olarak çemberler düzlemsel olmayan W -eğri örneği olarak helisler verilebilir.

Diğer taraftan R^n de W -eğriler sonlu tip eğriler için örnek oluşturmaktadır. Örnek olarak, R^4 de kapalı W -eğriler küresel 2-tipli eğrilerdir (Chen and Dillen 1986). Minkowski 3-uzayında tüm W -eğriler Walvare tarafından çalışılmıştır (Walvare 1995). Örnek olarak, Minkowski 3-uzayında düzlemsel spacelike W -eğriler çemberler ve hiperbollerdir.

Minkowski uzay-zaman R_1^4 de spacelike W -eğriler Petrovic-Torgasev ve Sucurovic (2002) tarafından çalışılmıştır

Bu bilgiler ışığında; bu tez çalışmasında Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında kuaterniyonik W -eğriler incelenmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Kalkan Boyacıoğlu (2018) tarafından yapılan çalışma ayrıntılı olarak incelenerek, E_1^3 ve E_2^4 yarı-Öklid uzaylarında kuaterniyonik bir eğrinin kuaterniyonik W -eğrisi olması için sabit katsayılı vektör değerli diferensiyel denklemler inşa edilerek çözülmüştür. Ayrıca, kuaterniyonik W -eğrilerinin kuaterniyonik pseudo-küre, kuaterniyonik pseudo-hiperbolik uzay ve kuaterniyonik ışık konisi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir (Kalkan Boyacıoğlu 2018). Dördüncü bölüm tez çalışmasının orjinal kısmı olup E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında kuaterniyonik bir eğrinin kuaterniyonik W -eğrisi olması için sabit katsayılı vektör değerli diferensiyel denklemler inşa edilerek çözülmüştür. Ayrıca, kuaterniyonik W -eğrilerinin küre üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde E^n , n -boyutlu Öklid uzayında temel tanım ve teoremler verilecektir. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı standart Öklid uzayı anlamında fark edilmesi için E^n ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1 A bir reel afin uzay ve V , A ile birleşen bir vektör uzayı olsun. V de bir iç çarpım,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı olarak tanımlandığında A afin uzayına n -boyutlu bir Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.2 E^n , n -boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\|, \|$, V vektör uzayında bir norm olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.3 E^n n -boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\|, \|$, V vektör uzayında bir norm olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

ile tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.4 E^n n -boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\overrightarrow{xy}$ vektörü ile $\overrightarrow{yz}$ vektörü arasındaki açının ölçüsü,

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$$

ile hesaplanan θ reel sayıdır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.5 E^n de sıralı bir $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ nokta $n + 1$ -lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de bir dik çatı veya Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.6 E^n deki $E_0, E_1, \dots, E_n$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.7 E^n n -boyutlu Öklid uzayı ve $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^n \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

fonksiyonu diferensiyellenebilir ise α ya E^n n -boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri denir ve M ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.8 E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin. $h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.9 E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha(t) \in M$ için,

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_t = \alpha'(t) = \left(\left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_t, \dots, \left. \frac{d\alpha_n}{dt} \right|_t \right)$$

dır. $(\alpha(t), \alpha'(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.10 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.11 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) 'ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.12 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin t_0, t olmak üzere t_0 dan t ye yay uzunluğu fonksiyonu $f: t \rightarrow f(t)$ olduğuna göre,

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

değerine yay uzunluğu denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.13 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^k, k > r$ için; $\alpha^k \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $V_1, V_2, \dots, V_r$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ vektörüne Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.14 E^3 Öklid uzayında M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\begin{aligned} T &= \alpha' , \\ N &= \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} , \\ B &= T \times N \end{aligned}$$

olan $\{T(s), N(s), B(s)\}$ sistemine $\alpha(s)$ noktasındaki, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.15 E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.16 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere, $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ fonksiyonuna eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ise

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir (Frenet 1852, Serret 1851).

Bu teoremdede elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri denir. Bu formülleri Frenet 1847 de bulmuş, 1852 de yayınlamıştır. Ondan habersiz olarak Serret, 1851 yılında hesaplamıştır. Bundan dolayı bazen bu formüllere Frenet-Serret formülleri de denir.

Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ters simetrik bir matristir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.2 $\alpha: I \rightarrow E^3$ herhangi bir eğrinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması, κ, τ olsun. $\|\alpha'\| = v$ olduğuna göre,

$$T' = v\kappa N$$

$$N' = v(-\kappa T + \tau B)$$

$$B' = -v\tau N$$

dır (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.17 E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olsun. Bu takdirde

- i. $\{T(s), N(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem,
- ii. $\{T(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem,
- iii. $\{N(s), B(s)\}$ cümlesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem

denir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin eğriliği sıfır ise $\alpha(I)$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrunun alt cümlesidir. Karşıt olarak $\alpha(I)$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrunun alt cümlesi ise α eğrisinin eğriliği sıfırdır (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.4 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki oskülatör düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemidir. Karşıt olarak $\tau = 0$ ise $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemseldir (Sabuncuoğlu 2014).

Verilen bu temel kavramlar E^n uzayına genişletilirse,

Tanım 2.1.18 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki M eğrisinin i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.5 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ise,

- i. $V'_1(s) = k_1(s)V_2(s)$
- ii. $V'_i(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 < i < r$
- iii. $V'_r(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.19 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$H: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, M 'nin s noktasındaki 1 inci harmonik eğriliği denir (Hacısalıhoğlu 2000).

2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda 3-boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1 E_1^3 Minkowski 3-uzayında E_1^3 uzayının bir dik koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) olarak alınırsa,

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

metriği ile verilen $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, g)$ metrik uzayına Minkowski uzayı denir. g metriği de Minkowski metriği olarak adlandırılır (Lopez 2014).

Tanım 2.2.2 E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir vektörün normu,

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$$

olarak tanımlıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3 E_1^3 Minkowski 3-uzayında $v, w \in E_1^3 - \{0\}$ vektörleri için $g(v, w) = 0$ ise v ve w vektörleri ortogonal iki vektör olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4 E_1^3 Minkowski 3-uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olmak üzere x ve y nin vektörel çarpımı,

$$x \wedge_L y = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

olarak tanımlıdır (Lopez 2014).

Tanım 2.2.5 $v \in E_1^3 - \{0\}$ vektörü için,

- i. $g(v, v) > 0$ ise v spacelike vektör,
- ii. $g(v, v) < 0$ ise v timelike vektör,
- iii. $g(v, v) = 0$ $v \neq 0$ ise v null (lightlike) vektör

denir. Ayrıca $v = 0$ ise v spacelike vektör olur (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6 E_1^3 Minkowski 3-uzayında α keyfi bir eğri olsun. Hız vektörü α' sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) olursa α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null (lightlike) eğri olarak isimlendirilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.7 E_1^3 Minkowski 3-uzayında α bir eğri olsun. α' hız vektörü için,

- i. $g(\alpha', \alpha') = 1$ ise α eğrisine birim hızlı spacelike eğri,
- ii. $g(\alpha', \alpha') = -1$ ise eğrisine birim hızlı timelike eğri,
- iii. $g(\alpha', \alpha') = 0$ ise eğrisine null (lightlike) eğri

adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8 E_1^3 Minkowski 3-uzayında $\vec{a} \in E_1^3$ timelike bir vektör olsun. Eğer bu vektörün ilk bileşeni sırasıyla pozitif ya da negatif ise $\vec{a} \in E_1^3$ vektörü sırasıyla future pointing timelike vektör ya da past pointing timelike vektör olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.9 i) Hiperbolik açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, E_1^3 Minkowski 3-uzayında iki timelike future pointing (ya da past pointing) vektör olsun. O zaman $g(a, b) = -\|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (Ratcliffe 1994).

ii) Merkezi açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir timelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a, b) = \|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki merkezi açı denir (Ratcliffe 1994).

iii) Spacelike açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında bir spacelike alt vektör uzayını geren spacelike vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. O halde $g(a, b) = \|a\|\|b\|\cos\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa a ve b vektörleri arasındaki spacelike açı denir (Ratcliffe 1994).

iv) Lorentzian timelike açı: E_1^3 Minkowski 3-uzayında $\vec{a}$ spacelike bir vektör ve $\vec{b}$ timelike bir vektör olsun. O zaman $g(a, b) = \|a\|\|b\|\sinh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir (Ratcliffe 1994).

Tanım 2.2.10 $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ birim hızlı null olmayan (spacelike veya timelike) bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

i. α bir spacelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$$

$$g(T, T) = 1, \quad g(N, N) = \varepsilon = \mp 1, \quad g(B, B) = -\varepsilon$$

olarak verilir. κ ve τ , spacelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır. Ayrıca ε , α spacelike eğrisinin türünü belirler. $\varepsilon = 1$ ise spacelike eğrisi, $\vec{N}$ spacelike asli normal vektörü ve $\vec{B}$ timelike binormal vektörü olan bir eğridir. Eğer $\varepsilon = -1$ ise spacelike eğrisi, $\vec{N}$ timelike asli normal vektörü ve $\vec{B}$ spacelike binormal vektörü olan bir eğridir (Lopez 2014).

ii. α bir timelike eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$g(T, N) = g(N, B) = g(T, B) = 0$$

$$g(T, T) = -1, \quad g(N, N) = g(B, B) = 1$$

dır. κ ve τ , α timelike eğrisinin sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır (Lopez 2014).

Tanım 2.2.11 $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ birim hızlı null veya pseudo null bir eğri olsun. α eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarından oluşan hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

i. α bir null eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa = 0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa = 1$ dır. Burada,

$$\begin{aligned} g(T, T) &= g(B, B) = g(T, N) = g(N, B) = 0 \\ g(N, N) &= g(T, B) = 1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$T \wedge_L N = -T, \quad N \wedge_L B = -B, \quad B \wedge_L T = -N,$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave 1995).

ii. α bir pseudo-null eğri ise Frenet formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. α eğrisi bir doğru ise birinci eğrilik $\kappa = 0$ dır. Bunun dışındaki durumlar için $\kappa = 1$ dır. Burada,

$$\begin{aligned} g(N, N) &= g(B, B) = g(T, N) = g(T, B) = 0 \\ g(T, T) &= g(N, B) = 1 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla,

$$T \wedge_L N = N, \quad N \wedge_L B = T, \quad B \wedge_L T = B,$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave 1995).

2.3 Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.3.1 Reel bir kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Bu birimler,

- i.** $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = -1$
- ii.** $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
- iii.** $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

özelliklerine sahiptir. Dolayısıyla bir kuaterniyon,

$$q = d + a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, q kuaterniyonunu S_q ile gösterilen skaler kısım ve V_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_q &= d, \quad V_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \\ q &= S_q + V_q \end{aligned}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.2 Reel kuaterniyonlar cümlesi $\mathbb{Q}$ üzerinde toplama işlemi,

$$\oplus: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

ile

$$S_{q_1 \oplus q_2} = S_{q_1} \oplus S_{q_2}, \quad \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} \oplus \vec{V}_{q_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir. $\vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2}$ de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(\mathbb{Q}, +)$ ikilisi bir Abel gruptur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dördlüsünden başka birşey değildir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.3

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan dış işlem $\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R}$ ve $\forall q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için

- i. $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$
- ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$
- iii. $(\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$
- iv. $I \odot q = q$

dır. O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \dots, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısacası bu uzayı $\mathbb{Q}$ ile göstereceğiz (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.4

$$\times: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

işlemi

X	$+1$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$+1$	$+1$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	-1	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	-1	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	-1

ile tanımlanır. Buna göre,

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3) \times (d_2 + a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3),$$

$$q_1 \times q_2 = d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{e}_1 \\ + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - a_1 c_2) \vec{e}_2 + (d_1 c_2 + c_1 d_2 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{e}_3$$

elde edilir ve ifade düzenlendiğinde

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2}$$

elde edilir. Böylece kuaterniyon çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolaylıkla görülür.

- i. İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur.
- ii. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- iii. Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle, $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \dots, \odot, \times\}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.5 $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı,

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.6

$$K: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$q \rightarrow K(q) = K_q$$

işlemi $\forall q = S_q + \vec{V}_q \in \mathbb{Q}$ için $K_q = S_q - \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q nun eşleniği denir. $\vec{V}_{K_q} = -\vec{V}_q$ olduğundan,

$$q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dır (Hacısalıhoğlu 1983).

Burada $K_q = \bar{q}$ şeklinde de gösterilir. Bundan sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.3.7 $q = d + a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$ olmak üzere

$$N: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = [N_q]^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q$$

şeklinde tanımlanan $N(q)$ fonksiyonuna $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu denir. Üstelik

$$[N_q]^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

pozitif bir reel sayıdır (Hacısalıhoğlu 1983).

Burada $N_q = \|q\|$ şeklinde de gösterilir. Daha sonraki kısımlarda kolaylık sağlanması açısından bu ifade kullanılacaktır.

Tanım 2.3.8

$$(q)^{-1} : \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$ elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in \mathbb{Q}$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması $\mathbb{Q}$ cebirini bir bölüm cebiri yapar. Böylece $\mathbb{Q}$ da bölme işlemini tanımlamak mümkün olur. (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.9 $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpım işlemi iki türdür ve dolayısıyla p yi q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$r_1 = p \times q^{-1}$$

$$r_2 = q^{-1} \times p$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna p nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır. Dolayısıyla $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.10 Normu bir olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanması,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilebilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu $q_0 = \cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta$ formunda yazılabilir. Burada,

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

dır ve $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman,

$$\vec{S}_0 = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.11 $a, b \in \mathbb{Q}$ için genel bir kuaterniyon ifadesinde $d_1 = d_2 = 0$ alınırsa $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3$ ve $\vec{b} = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3$ şeklinde iki vektör elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Bu ise bir kuaterniyondur. Vektör cebirinde, $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin iç çarpımını $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ve vektörel çarpımını da $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ile gösterdiğimizize göre,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dır. Buna göre bu kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

formunda yazılabilir. O halde iki vektörün kuaterniyon çarpımı öyle bir kuaterniyondur ki bu kuaterniyonun skaler kısmı ve vektörel kısmı sırasıyla,

$$S(\vec{a} \times \vec{b}) = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \text{ ve } V(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

şeklindedir. Ayrıca iki vektör dik iseler kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur; iki vektör paralel iseler kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skaler (iç) çarpımının ters işaretlisine eşittir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.12 $p, q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları verilsin.

$$h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow h(p, q) = \frac{1}{2}(p \times \bar{q} + q \times \bar{p})$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyon iç çarpımı denir. h fonksiyonu reel değerli, simetrik ve bilineerdir. Dolayısıyla iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Burada $\times$ kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Bharathi ve Nagaraj 1985).

O halde bir kuaterniyonun normu bu tanımla beraber karakterize edilebilir.

Tanım 2.3.13 Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu

$$\|q^2\| = h(q, q) = q \times \bar{q}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısı ile ifade edilebilir (Bharathi and Nagaraj 1985).

Tanım 2.3.14 Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu,

$$q + \bar{q} = 0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir uzay kuaterniyon denir. Uzay kuaterniyonların cümlesi 3-boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ e izomorftur. $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için,

$$q - \bar{q} = 0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna bir temporal kuaterniyon denir. Genel olarak, $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) + \frac{1}{2}(q - \bar{q})$$

şeklinde ifade edilebilir (Bharathi ve Nagaraj 1985).

Tanım 2.3.15 E^3 de ve E^4 de m merkezli, $R > 0$ yarıçaplı küre sırasıyla

$$S^2(m, R) = \{p \in Q : h(p - m, p - m) = R^2\}$$

$$S^3(m, R) = \{p \in Q : h(p - m, p - m) = R^2\}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 1983).

2.4 Yarı-Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.4.1 .Bir yarı-reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olan dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada $+1$ reel birim olup, diğer üç birim ise (123) permütasyonu (ijk) ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ iken,

$$\text{i. } \vec{e}_i \times \vec{e}_i = -\varepsilon \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\text{ii. } \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon \vec{e}_i \varepsilon \vec{e}_j \varepsilon \vec{e}_k, \quad (E_1^3)$$

$$\text{iii. } \vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\varepsilon \vec{e}_i \varepsilon \vec{e}_j \varepsilon \vec{e}_k, \quad (E_2^4)$$

dır. Buna göre bir q yarı-reel kuaterniyonu, q nun sırasıyla skaler ve vektör kısımları $S_q = d$, ve $V_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ olmak üzere,

$$q = S_q + V_q,$$

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

formunda yazılır. Burada,

$$\varepsilon(\vec{e}_i) = \begin{cases} -1, & \vec{e}_i \text{ timelike} \\ 1, & \vec{e}_i \text{ spacelike} \end{cases}$$

dır. Bundan sonra yarı-reel kuaterniyonların cümlesi,

$$Q_v = \left\{ q \mid q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right. \\ \left. \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in R_1^3, \quad h(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = |\varepsilon(\vec{e}_i)|, \quad 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

ile gösterilecektir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.2 Her $p, q \in \mathbb{Q}_v$ için iki yarı-reel kuaterniyonun çarpımı E_1^3 de sırasıyla

$\langle, \rangle_L$ ve $\wedge_L$ skaler ve vektörel çarpım olmak üzere,

$$p \times_L q = S_q S_p + \langle V_p, V_q \rangle_L + S_p V_q + S_q V_p + V_p \wedge_L V_q$$

olarak tanımlıdır (Tuna 2002).

Tanım 2.4.3 $q \in Q_v$ kuaterniyonun eşleniği αq ile gösterilir ve

$$\alpha q = S_q - V_q = d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$$

ile tanımlıdır ve bu h formunun tanımlanmasına yardım eder (Tuna 2002).

Tanım 2.4.4 $p, q \in Q_v$ için

$$h : Q_v \times Q_v \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(p, q) = \frac{1}{2} [\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha p} (p \times_L \alpha q) + \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha q} (q \times_L \alpha p)] \quad , \quad E_1^3$$

$$h(p, q) = \frac{1}{2} [-\varepsilon_p \varepsilon_{\alpha p} (p \times_L \alpha q) - \varepsilon_q \varepsilon_{\alpha q} (q \times_L \alpha p)] \quad , \quad E_2^4$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna yarı-reel kuaterniyon iç çarpımı denir. Bu reel değerli h fonksiyonu anti simetrik ve bilinearlik özelliğine sahiptir. Burada $\times_L$ yarı-reel kuaterniyon çarpımını göstermektedir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.5 $q \in Q_v$ yarı-reel kuaterniyonun normu,

$$\|q\|^2 = |h(q, q)| = |\varepsilon q (q \times_L \alpha q)|$$

şeklinde tanımlı olan $\|q\|$ reel sayısına denir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.6 $q \in Q_v$ yarı-reel kuaterniyonu için $q + \alpha q = 0$ ise q ya bir yarı-reel uzaysal kuaterniyon denir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.7 $p, q \in Q_v$ için,

$$h(p, q) = 0$$

ise p ve q yarı-reel kuaterniyonlarına h -ortogonaldır denir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.8 $q \in Q_v$ yarı-reel kuaterniyonu için

$$\|q\|^2 = 1$$

ise q ya bir yarı-reel birim kuaterniyon denir (Tuna 2002).

Tanım 2.4.9 Bir yarı-reel kuaterniyon $I_q = q \times_L \alpha q = \alpha q \times_L q$ olmak üzere sırasıyla

$I_q < 0$, $I_q > 0$, $I_q = 0$ ise spacelike, timelike veya lightlike yarı-reel kuaterniyon olarak

adlandırılır (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.4.10 E_1^3 Minkowski uzayında herhangi bir spacelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike olur fakat herhangi bir timelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike ya da timelike olabilir. Yarı-reel kuaterniyonların kutupsal biçimleri aşağıdaki sınıflandırmalar ile verilmektedir:

i. E_1^3 de her spacelike kuaterniyon,

$$\sinh \theta = \frac{q_1}{N_q}, \quad \cosh \theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \quad \text{ve} \quad \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \quad \text{bir spacelike}$$

birim vektör iken,

$$q = N_q \left(\sinh \theta + \vec{\varepsilon}_0 \cosh \theta \right)$$

formunda yazılabilir.

ii. E_1^3 de spacelike vektör kısmıyla birlikte her timelike kuaterniyon $\vec{\varepsilon}_0 \times_L \vec{\varepsilon}_0 = 1$ için,

$$\cosh \theta = \frac{q_1}{N_q}, \quad \sinh \theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \quad \text{ve} \quad \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \quad \text{bir spacelike birim}$$

vektör iken,

$$q = N_q \left(\cosh \theta + \vec{\varepsilon}_0 \sinh \theta \right)$$

formunda yazılabilir.

iii. E_1^3 de timelike vektör kısmıyla birlikte her timelike kuaterniyon $\vec{\varepsilon}_0 \times_L \vec{\varepsilon}_0 = -1$ için,

$$\cosh \theta = \frac{q_1}{N_q}, \quad \sinh \theta = \frac{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}{N_q} \quad \text{ve} \quad \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3}{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}} \quad \text{bir timelike birim}$$

vektör iken,

$$q = N_q \left(\cos \theta + \vec{\varepsilon}_0 \sin \theta \right)$$

formunda yazılabilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.4.11 Her birim kuaterniyon $\vec{\varepsilon}_0 \times_L \vec{\varepsilon}_0 = -1$ denklemini sağlayan $\vec{\varepsilon}_0$ birim vektörü için,

$$q_0 = (\cos \theta + \vec{\varepsilon}_0 \sin \theta)$$

formunda yazılabilir ve $\vec{\varepsilon}_0$ vektörüne q_0 kuaterniyonunun eksenı denir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.4.12 E_1^3 de m merkezli, $R > 0$ yarıçaplı hiper-kuadrikler sırasıyla

$$S_1^2(m, R) = \{p \in E_1^3 : h(p - m, p - m) = R^2\}$$

$$H_0^2(m, R) = \{p \in E_1^3 : h(p - m, p - m) = -R^2\}$$

$$C_2^2(m, R) = \{p \in E_2^4 : h(p - m, p - m) = 0\}$$

pseudo-küre, pseudo-hiperbolik uzay ve ışık konisi olarak tanımlıdır (İlarslan and Nesovic 2009).

Tanım 2.4.13 E_2^4 de hiper-kuadrikler sırasıyla,

$$S_2^3(m, R) = \{p \in E_2^4 : h(p - m, p - m) = R^2\}$$

$$H_1^3(m, R) = \{p \in E_2^4 : h(p - m, p - m) = -R^2\}$$

$$C_3^3(m, R) = \{p \in E_2^4 : h(p - m, p - m) = 0\}$$

pseudo-küre, pseudo-hiperbolik uzay ve ışık konisi olarak tanımlıdır (İlarslan and Nesovic 2009).

3. YARI-ÖKLİD UZAYLARINDA KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

Bu bölümde, E_1^3 ve E_2^4 yarı-Öklid uzaylarında kuaterniyonik W-eğrilerinin parametrik denklemleri elde edilerek bu eğrilerin kuaterniyonik pseudo-küre, kuaterniyonik pseudo-hiperbolik uzay ve kuaterniyonik ışık konisi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar verilmiş olup Kalkan Boyacıoğlu (2018) makalesi detaylı olarak incelenmiştir.

3.1 E_1^3 Yarı-Öklid Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik W-Eğriler

Tanım 3.1.1 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonların uzayı $\{\gamma \in Q_p : p + \gamma p = 0\}$ olsun. $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_p$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) e_i$$

C^∞ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üç ayaklısı $t(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha'_i(s) e_i$, $n_1(s)$, $n_2(s)$ ve eğriliklerde $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere, α eğrisi boyunca t, n_1 ve n_2 nin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki,

$$t' = \varepsilon_{n_1} k n_1,$$

$$n_1' = -\varepsilon_t k t + \varepsilon_{n_1} r n_2,$$

$$n_2' = -\varepsilon_{n_2} r n_1$$

şeklindedir. Burada, $h(t, t) = \varepsilon_t$, $h(n_1, n_1) = \varepsilon_{n_1}$, $h(n_2, n_2) = \varepsilon_{n_2}$ dir (Tuna 2002).

Tanım 3.1.2 Eğer bir eğrinin bütün eğrilikleri sabit ise W-eğri denir (Klein and Lie 1871).

$\mathbb{R}^n$ de W-eğriler oldukça fazla çalışılmıştır. Bu eğrilerin en basit örnekleri düzlemsel olarak çemberler ve $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel olmayan helislerdir.

Yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğrilerinin parametrik denklemleri aşağıdaki teoremler ile verilmiştir.

Teorem 3.1.1 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E_1^3 de $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı spacelike asli normalli yarı-reel uzaysal kuaterniyonik bir W-eğrisi olsun.

a) $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 = 0$ ise $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left[-\varepsilon_t k^2 \frac{s^3}{6} + \varepsilon_1 c_1 k \frac{s^2}{2} + (\varepsilon_t c_2 k + 1)s \right] t(s) + \left[-k \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2 \right] n_1(s) \\ & + \left[rk \frac{s^3}{6} - c_1 r \frac{s^2}{2} - c_2 rs \right] n_2(s) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

dir.

b) $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 > 0$ ise $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left[\frac{\varepsilon_{n_2} r^2 s}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} + \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_t c_2 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \right] t(s) \\ & + \left[c_1 \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) - \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \right] n_1(s) \\ & + \left[\frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} - \frac{c_1 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \right. \\ & \left. + \frac{c_2 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \right] n_2(s) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dir.

c) $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 < 0$ ise $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left[\frac{\varepsilon_{n_2} r^2 s}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} - \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{\varepsilon_t c_2 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} \right] t(s) \\ & + \left[c_1 e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \right] n_1(s) \\ & + \left[\frac{c_1 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{c_2 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \right] n_2(s) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

dir.

İspat: $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi birim hızlı spacelike normalli yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğrisi olsun. Bu takdirde konum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)t(s) + \mu(s)n_1(s) + \nu(s)n_2(s) \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.4) denkleminin s 'ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$t = (\lambda' - \varepsilon_t k \mu)t + (\varepsilon_{n_1} k \lambda + \mu' - \varepsilon_{n_2} r \nu)n_1 + (\varepsilon_{n_1} r \mu + \nu')n_2$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda' - \varepsilon_t k \mu &= 1, \\ \varepsilon_{n_1} k \lambda + \mu' - \varepsilon_{n_2} r \nu &= 0, \\ \varepsilon_{n_1} r \mu + \nu' &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Bu üç denklemden

$$\mu'' + \varepsilon_{n_1} (\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2) \mu + \varepsilon_{n_1} k = 0 \quad (3.1.6)$$

bulunur. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi spacelike asli normal vektörlü olduğundan $\varepsilon_{n_1} = 1$, (3.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu'' + (\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2) \mu + k = 0 \quad (3.1.7)$$

elde edilir.

Durum 1. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 = 0$ ise (3.1.7) denkleminde $\mu'' + k = 0$ elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu(s) = -k \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2 \quad (3.1.8)$$

şeklindedir. (3.1.8) denklemini (3.1.5) de verilen eşitliklerde kullanılırsa

$$\lambda(s) = -\varepsilon_t k^2 \frac{s^3}{6} + \varepsilon_{n_1} c_1 k \frac{s^2}{2} + (\varepsilon_{n_2} c_2 k + 1)s \quad (3.1.9)$$

$$\nu(s) = r k \frac{s^3}{6} - c_1 r \frac{s^2}{2} - c_2 r s \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.8), (3.1.9) ve (3.1.10) eşitlikleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.1) eşitliği elde edilir.

Durum 2. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 > 0$ ise (3.1.6) diferensiyel denkleminin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu(s) = c_1 \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) - \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \quad (3.1.11)$$

şeklindedir. (3.1.11) denklemini (3.1.5) de verilen eşitliklerde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda(s) = & \frac{\varepsilon_{n_2} r^2 s}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} + \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \\ & - \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right),\end{aligned}\quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned}\nu(s) = & \frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} - \frac{c_1 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \\ & + \frac{c_2 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right)\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

elde edilir. (3.1.11), (3.1.12) ve (3.1.13) eşitlikleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.2) eşitliği bulunur.

Durum 3. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 < 0$ ise (3.1.6) diferensiyel denkleminin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu(s) = c_1 e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \quad (3.1.14)$$

şeklindedir. (3.1.14) denklemini (3.1.5) de verilen eşitliklerde kullanılırsa

$$\lambda(s) = \frac{\varepsilon_{n_2} r^2}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s - \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{\varepsilon_t c_2 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} \quad (3.1.15)$$

$$\nu(s) = \frac{c_1 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{c_2 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \quad (3.1.16)$$

elde edilir. (3.1.14), (3.1.15) ve (3.1.16) eşitlikleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.3) eşitliği bulunur.

Teorem 3.1.2 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E_1^3 de birim hızlı timelike asli normal vektörlü $\alpha = \alpha(s)$ yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha(s) = & \left[\frac{r^2 s}{r^2 + k^2} - \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} \right] t(s) \\
& + \left[c_1 e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{k}{r^2 + k^2} \right] n_1(s) \\
& + \left[-\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{rks}{r^2 + k^2} \right] n_2(s)
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

şeklinde elde edilir.

İspat: Birim hızlı timelike normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğrisi $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Bu takdirde

$$\alpha(s) = \lambda(s)t(s) + \mu(s)n_1(s) + \nu(s)n_2(s)$$

denkleminin s 'ye göre türevi alınıp Frenet formülleri uygulanırsa ($\varepsilon_{n_1} = -1$ ve $\varepsilon_{n_2} = \varepsilon_t = 1$) olduğundan

$$t = (\lambda' - k\mu)t + (-k\lambda + \mu' - r\nu)n_1 + (-r\mu + \nu')n_2$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lambda' - k\mu - 1 &= 0, \\
-k\lambda + \mu' - r\nu &= 0, \\
-r\mu + \nu' &= 0
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

denklemlerini sağlar. (3.1.18) de verilen eşitliklerden

$$\mu'' + (r^2 + k^2)\mu - k = 0 \tag{3.1.19}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu(s) = c_1 e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{k}{r^2 + k^2} \tag{3.1.20}$$

şeklindedir. (3.1.20) eşitliği (3.1.18) de verilen eşitliklerde yerine yazılırsa

$$\lambda(s) = \frac{r^2 s}{r^2 + k^2} - \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} \tag{3.1.21}$$

$$\nu(s) = -\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{rks}{r^2 + k^2} \tag{3.1.22}$$

elde edilir. (3.1.20), (3.1.21) ve (3.1.22) eşitlikleri $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin konum vektöründe yerine yazılırsa (3.1.17) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.3 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında $k(s)$, $r(s) \neq 0$ olmak üzere spacelike asli normal vektörlü $\alpha = \alpha(s)$ yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğrisinin S_1^2 kuaterniyonik küresi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul

i. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 = 0$ ise

$$0 = -\varepsilon_t k^2 \frac{s^3}{6} + \varepsilon_1 c_1 \frac{ks^2}{2} + (\varepsilon_t c_2 k + 1)s, \quad (3.1.23)$$

$$-\frac{\varepsilon_t}{k} = -k \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2, \quad (3.1.24)$$

$$0 = rk \frac{s^3}{6} - c_1 r \frac{s^2}{2} - c_2 rs \quad (3.1.25)$$

ii. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 > 0$ ise

$$0 = \frac{\varepsilon_{n_2} r^2 s}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} + \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) - \frac{\varepsilon_t c_2 k}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right), \quad (3.1.26)$$

$$-\frac{\varepsilon_t}{k} = -c_1 \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) - c_2 \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) + \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}, \quad (3.1.27)$$

$$0 = \frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} - \frac{c_1 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \sin\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) + \frac{c_2 r}{\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}} \cos\left(\sqrt{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} s\right) \quad (3.1.28)$$

iii. $\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2 < 0$ ise

$$0 = \frac{\varepsilon_{n_2} r^2 s}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} - \frac{\varepsilon_t c_1 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{\varepsilon_t c_2 k}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}}, \quad (3.1.29)$$

$$-\frac{\varepsilon_t}{k} = c_1 e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{k}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2}, \quad (3.1.30)$$

$$0 = \frac{c_1 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{-s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} - \frac{c_2 r}{\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} e^{s\sqrt{-\varepsilon_{n_2} r^2 - \varepsilon_t k^2}} + \frac{rks}{\varepsilon_{n_2} r^2 + \varepsilon_t k^2} \quad (3.1.31)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: (i) Kabul edelim ki α eğrisi m merkezli a yarıçaplı S_1^2 kuaterniyonik küresi üzerinde yatsın. Bu takdirde $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$h(\alpha - m, \alpha - m) = a^2 \quad (3.1.32)$$

dir. (3.1.32) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre art arda üç defa türevi alınırsa

$$\begin{aligned} h(t, \alpha) &= 0, \\ h(n_1, \alpha) &= -\frac{\varepsilon_t}{k}, \\ h(n_2, \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

elde edilir. (3.1.33) ifadesinde verilen denklemler (3.1.1) ifadesinde yerine yazılırsa (3.1.3) eşitlikleri elde edilir. Tersine kabul edelim ki $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için (3.1.3) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde (3.1.1) eşitliğinden eğrinin konum vektörü $\alpha = -\frac{\varepsilon_t}{k} n_1$ şeklindedir. Bu durumda $h(\alpha, \alpha) = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = a^2 > 0$ olduğundan α eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatar. (ii) ve (iii) 'nin ispatı (i) 'e benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.1.4 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında $k(s)$, $r(s) \neq 0$ olmak üzere timelike asli normal vektörlü $\alpha = \alpha(s)$ yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W -eğrisinin H_0^2 kuaterniyonik hiperbolik uzay üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul

$$0 = \frac{r^2 s}{r^2 + k^2} - \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}}, \quad (3.1.34)$$

$$-\frac{1}{k} = c_1 e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + c_2 e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{k}{r^2 + k^2}, \quad (3.1.35)$$

$$0 = -\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{-s\sqrt{r^2 + k^2}} + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} e^{s\sqrt{r^2 + k^2}} - \frac{rks}{r^2 + k^2} \quad (3.1.36)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 3.1.3 ün ispatına benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 3.1.1 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında, H_0^2 kuaterniyonik hiperbolik uzay üzerinde spacelike asli normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri bulunmaz.

Sonuç 3.1.2 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında, S_1^2 kuaterniyonik küre üzerinde timelike asli normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri bulunmaz.

Sonuç 3.1.3 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında, ışık konisi üzerinde yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri bulunmaz.

Sonuç 3.1.4 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ olmak üzere $\alpha = \alpha(s)$ spacelike asli normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu eğri kuaterniyonik küresel eğri ise S_1^2 nin yarıçapı $a = \frac{1}{k}$ 'dır.

Sonuç 3.1.5 E_1^3 , 3-boyutlu yarı-Öklid uzayında $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ olmak üzere $\alpha = \alpha(s)$ timelike asli normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu eğri kuaterniyonik hiperbolik eğri ise H_0^2 nin yarıçapı $a = \frac{1}{k}$ 'dır.

Sonuç 3.1.6 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E_1^3 de $\alpha = \alpha(s)$ spacelike veya timelike asli normal vektörlü yarı-reel uzaysal kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu eğrinin görüntüsünün orjin merkezli $a \in \mathbb{R}^+$ yarıçaplı S_1^2 kuaterniyonik pseudo-küre veya H_0^2 kuaterniyonik pseudo-hiperbolik uzay üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul eğrinin normal eğri olmasıdır.

3.2 E_2^4 Yarı-Öklid Uzayında Kuaterniyonik W-Eğriler

Teorem 3.2.1 E_2^4 uzayında bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_v$ eğrisi

$$\beta(s) = \sum_{i=1}^4 \beta_i(s) \vec{e}_i, \quad (1 \leq i \leq 4), \quad \vec{e}_4 = 1$$

şeklinde tanımlı olsun. s parametresi $T = \beta'(s) = \sum_{i=1}^4 \beta'_i(s) \vec{e}_i$ ile tanımlanan bir büyüklük olsun. E_2^4 yarı-Öklid uzayında diferensiyellenebilir eğrilerin Frenet vektörleri $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ olsun. β eğrisinin tanjant vektörü $T(s)$ ve $K = \varepsilon_N \|T'(s)\|$, $N_1 = \varepsilon_t(t \times T)$, $N_2 = \varepsilon_t(n_1 \times T)$, $N_3 = \varepsilon_t(n_2 \times T)$, $h(T, T) = \varepsilon_T$, $h(N_1, N_1) = \varepsilon_{N_1}$, $h(N_2, N_2) = \varepsilon_T \varepsilon_{n_1}$, $h(N_3, N_3) = \varepsilon_T \varepsilon_{n_2}$ iken Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T &= \varepsilon_{N_1} K N_1, \\ N_1' &= -\varepsilon_t \varepsilon_{N_1} K T + \varepsilon_{n_1} k N_2, \\ N_2' &= -\varepsilon_t k N_1 + \varepsilon_{n_1} (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K) N_3, \\ N_3' &= -\varepsilon_{n_2} (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K) N_2 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

şeklindedir (Tuna 2002).

$\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisi için Frenet formülleri kullanılarak, β eğrisi için Frenet formülleri elde edilmiştir. Ayrıca α ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında ilişkiler vardır. Bu ilişkiler, α eğrisinin asli eğriliğinin β eğrisinin torsiyonu olmasıyla açıklanabilir. Ayrıca, β eğrisinin asli eğriliği K ve α eğrisinin torsiyonu r iken, β eğrisinin bitorsiyonu $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)$.dır. Bu ilişkiler kuaterniyonik eğriler için tek türlü belirlidir.

Teorem 3.2.2 $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ ve $K(s), k(s), (r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$ eğrilikleri için E_2^4 de $\beta = \beta(s)$ birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu takdirde $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\begin{aligned} \beta(s) &= [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)] T(s) \\ &+ \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1}}{K} [-c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) \\ &+ c_3 Q_2 \sinh(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cosh(Q_2 s) - 1] N_1(s) \\ &+ \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1}}{kK} [(K^2 - \varepsilon_t Q_1^2)(c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) \\ &+ (K^2 + \varepsilon_t Q_2^2)(c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s))] N_2(s) \\ &+ A [((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_1 - \varepsilon_t Q_1^3)(-c_1 \sin(Q_1 s) + c_2 \cos(Q_1 s)) \\ &+ ((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_2 + \varepsilon_t Q_2^3)(c_3 \sinh(Q_2 s) + c_4 \cosh(Q_2 s)) - \varepsilon_{n_1} k^2] N_3(s) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

denklemini sağlar. Burada $A = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{n_2} \varepsilon_{N_1}}{kK[r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]}$ şeklindedir.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi birim hızlı yarı-reel kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu takdirde konum vektörü

$$\beta(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N_1(s) + \gamma(s)N_2(s) + \sigma(s)N_3(s) \quad (3.2.3)$$

denklemini sağlar. (3.2.3) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (3.2.1) Frenet formülleri kullanılırsa

$$T = (\lambda' - \varepsilon_t \varepsilon_{N_1} K \mu)T + (\varepsilon_{N_1} K \lambda + \mu' - \varepsilon_t k \gamma)N_1 + (\varepsilon_{n_1} k \mu + \gamma' - \varepsilon_{n_2} [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K] \sigma)N_2 + (\varepsilon_{n_1} [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K] \gamma + \sigma')N_3$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda' - \varepsilon_t \varepsilon_{N_1} K \mu - 1 &= 0, \\ \varepsilon_{N_1} K \lambda + \mu' - \varepsilon_t k \gamma &= 0, \\ \varepsilon_{n_1} k \mu + \gamma' - \varepsilon_{n_2} [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K] \sigma &= 0, \\ \varepsilon_{n_1} [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K] \gamma + \sigma' &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. (3.2.4) de verilen ilk üç denklemden

$$\mu = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1} (\lambda' - 1)}{K} \quad (3.2.5)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1}}{kK} (K^2 \lambda + \varepsilon_t \lambda'') \quad (3.2.6)$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{n_2} \varepsilon_{N_1}}{kK[r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]} [\varepsilon_t \lambda''' + (\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) \lambda' - \varepsilon_{n_1} k^2] \quad (3.2.7)$$

şeklinde bulunur. (3.2.7) eşitliği (3.2.4) de verilen son eşitlikte kullanılırsa

$$\lambda^{(4)} - [\varepsilon_{n_2} k^2 - \varepsilon_t K^2 + \varepsilon_t [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]^2] \lambda'' - K^2 [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]^2 \lambda = 0 \quad (3.2.8)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$\lambda(s) = c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s) \quad (3.2.9)$$

bulunur. Burada

$$Q_1^2 = \frac{1}{2} \left(C + \sqrt{C^2 + 4K^2 [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]^2} \right),$$

$$Q_2^2 = \frac{1}{2} \left(C - \sqrt{C^2 + 4K^2 [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]^2} \right),$$

$$C = \varepsilon_{n_2} k^2 - \varepsilon_t K^2 + \varepsilon_t [r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]^2$$

şeklindedir. (3.2.9) ifadesi (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\mu = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1}}{K} [-c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) + c_3 Q_2 \sinh(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cosh(Q_2 s) - 1] \quad (3.2.10)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{N_1}}{kK} \left[\left(K^2 - \varepsilon_t Q_1^2 \right) (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) + \left(K^2 + \varepsilon_t Q_2^2 \right) (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)) \right] \quad (3.2.11)$$

$$\sigma = A \left[\left((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_1 - \varepsilon_t Q_1^3 \right) (-c_1 \sin(Q_1 s) + c_2 \cos(Q_1 s)) + \left((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_2 + \varepsilon_t Q_2^3 \right) (c_3 \sinh(Q_2 s) + c_4 \cosh(Q_2 s)) - \varepsilon_{n_1} k^2 \right] \quad (3.2.12)$$

elde edilir. Burada $A = \frac{\varepsilon_t \varepsilon_{n_2} \varepsilon_{N_1}}{kK[r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K]}$ şeklindedir. (3.2.9) , (3.2.10) , (3.2.11) ve

(3.2.12) eşitlikleri (3.2.3) de yerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin konum vektörü (3.2.2) şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2.3 E_2^4 , 4-boyutlu yarı Öklid uzayında $K(s)$, $k(s)$, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$ olmak üzere $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisi

$$0 = c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s), \quad (3.2.13)$$

$$-\varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} = -c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) + c_3 Q_2 \sinh(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cosh(Q_2 s) - 1, \quad (3.2.14)$$

$$0 = \left(K^2 - \varepsilon_t Q_1^2 \right) (c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s)) + \left(K^2 + \varepsilon_t Q_2^2 \right) (c_3 \cosh(Q_2 s) + c_4 \sinh(Q_2 s)), \quad (3.2.15)$$

$$0 = \left((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_1 - \varepsilon_t Q_1^3 \right) (-c_1 \sin(Q_1 s) + c_2 \cos(Q_1 s)) + \left((\varepsilon_{n_1} k^2 + K^2) Q_2 + \varepsilon_t Q_2^3 \right) (c_3 \sinh(Q_2 s) + c_4 \cosh(Q_2 s)) \quad (3.2.16)$$

eşitliklerini sağlasın.

i. $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisinin S_2^3 kuaterniyonik küresi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul;

$$\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 > \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2$$

olmasıdır.

ii. $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisinin H_1^3 kuaterniyonik hiperbolik uzayı üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul;

$$\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 < \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2$$

olmasıdır.

iii. $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisinin kuaterniyonik ışık konisi üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul;

$$\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 = \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2$$

olmasıdır.

İspat: (i) Kabul edelim ki $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde (3.2.2) eşitliğinden eğrinin konum vektörü

$$\beta = -\frac{\varepsilon_T \varepsilon_{N_1}}{K} N_1 - \varepsilon_t \varepsilon_{n_1} \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} \frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} N_3$$

şeklindedir. Bu durumda $h(\beta, \beta) = \varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 + \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2 = a^2$

olduğundan β eğrisi S_2^3 küresi üzerinde yatar

Tersine kabul edelim ki β eğrisi, m merkezli, a yarıçaplı S_1^3 kuaterniyonik küre üzerinde yatsın. Bu takdirde $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$h(\beta - m, \beta - m) = a^2 \quad (3.2.17)$$

dır. (3.2.17) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre art arda dört defa türevi alınır

$$\begin{aligned} h(T, \beta) &= 0, \\ h(N_1, \beta) &= -\frac{\varepsilon_T \varepsilon_{N_1}}{K}, \\ h(N_2, \beta) &= 0, \\ h(N_3, \beta) &= -\varepsilon_t \varepsilon_{n_1} \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} \frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

elde edilir. (3.2.18) ' de verilen eşitlikler (3.2.2) denkleminde kullanılırsa (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15), ve (3.2.16) eşitlikleri elde edilir. (ii) ve (iii) durumlarının ispatı (i) ' ye benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.2.1 E_2^4 , 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında $K(s)$, $k(s)$, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$

olmak üzere $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisi kuaterniyonik küresel bir eğri

ise bu takdirde, S_2^3 ' nin yarıçapı $a = \sqrt{\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 + \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2}$ dir.

Sonuç 3.2.2 E_2^4 , 4 boyutlu yarı-Öklid uzayında $K(s)$, $k(s)$, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$ olmak üzere $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisi, kuaterniyonik hiperbolik bir

eğri ise bu takdirde, H_1^3 ün yarıçapı $a = \sqrt{\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 + \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2}$ dir.

Sonuç 3.2.3 E_2^4 , 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında $K(s)$, $k(s)$, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$ olmak üzere $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğri olsun. Bu eğrinin görüntüsünün kuaterniyonik küresel bir eğri ise bu takdirde, S_2^3 ' nin yarıçapı

$$a = \sqrt{\varepsilon_{N_1} \left(\frac{1}{K} \right)^2 + \varepsilon_T \varepsilon_{n_2} \left(\frac{k}{K(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)} \right)^2} \text{ dir.}$$

Sonuç 3.2.4 E_2^4 , 4-boyutlu yarı-Öklid uzayında $K(s)$, $k(s)$, $(r - \varepsilon_t \varepsilon_T \varepsilon_{N_1} K)(s) \neq 0$ olmak üzere $\beta = \beta(s)$ yarı-reel kuaterniyonik W-eğrisi N_1 ile N_3 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatar.

4. E^3 ve E^4 ÖKLİD UZAYLARINDA KUATERNİYONİK W-EĞRİLER

4.1 E^3 Öklid Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik W-Eğriler

Tanım 4.1.1 Reel kuaterniyonlar cümlesinde $s \in I = [0,1]$ için,

$$\sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$s \rightarrow \sigma(s) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i(s) e_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

olarak tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharathi and Nagaraj 1985).

Teorem 4.1.1 E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, kuaterniyonların uzayı, $\{\sigma \in \mathbb{Q}, \sigma + \bar{\sigma} = 0\}$ şeklindedir. $\mathbb{R}$ reel doğrusunda $I = [0,1]$ bir aralık olsun ve $s \in I$ parametresi, tüm s ler için $\|t(s)\| = 1$ birim uzunluğu, $\sigma'(s) = t$ seçimi ile;

$$\sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \sigma(s) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i(s) e_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

olur. Burada $t' \times \bar{t} + t \times \bar{t}' = 0$ koşulu vardır.

Son denklemde t' , t ye dik ve $t' \times \bar{t}$ bir uzaysal kuaterniyondur. $\sigma \sigma \sigma$ kuaterniyonik eğrisinin $\sigma(s)$ noktasındaki Frenet üç-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olsun. Bu takdirde Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s) n_1(s), \\ n_1'(s) &= -k(s) t(s) + r(s) n_2(s), \\ n_2'(s) &= -r(s) n_1(s) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

şeklindedir. Burada t birim teğet, n_1 birim normal vektör alanı, n_2 birim binormal vektör alanı, σ kuaterniyonik eğrisinin eğriliği k ve burulması ise r dir (Bharathi and Nagaraj 1985).

Uzaysal kuaterniyonik W-eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.1.2 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3 de $\sigma = \sigma(s)$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik bir W-eğrinin konum vektörü;

$$\begin{aligned}
\sigma(s) = & \left(s + \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k^2 s}{k^2 + r^2} \right) t(s) \\
& + \left(c_1 \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + c_1 \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k}{k^2 + r^2} \right) n_1(s) \\
& + \left(-\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{krs}{k^2 + r^2} \right) n_2(s)
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

şeklindedir.

İspat: E^3 de $\sigma = \sigma(s)$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik bir W-eğri olsun. Bu durumda

$$\sigma(s) = \lambda(s)t(s) + \mu(s)n_1(s) + \gamma(s)n_2(s) \tag{4.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.3) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (4.1.1) de verilen Frenet formülleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \lambda't + \lambda t' + \mu'n_1 + \mu n_1' + \gamma'n_2 + \gamma n_2', \\
t &= \lambda't + \lambda k n_1 + \mu'n_1 + \mu(-k t + r n_2) + \gamma'n_2 + \gamma(-r n_1), \\
t &= (\lambda' - \mu k)t + (\lambda k + \mu' - \gamma r)n_1 + (\mu r + \gamma')n_2
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafta katsayı eşitliğine göre,

$$\lambda' - \mu k = 1, \quad \lambda k + \mu' - \gamma r = 0, \quad \mu r + \gamma' = 0 \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) de verilen denklemlerden

$$\lambda' = 1 + \mu k, \quad \mu' = \gamma r - \lambda k, \quad \gamma' = -\mu r \tag{4.1.5}$$

olduğu görülür. $\lambda k + \mu' - \gamma r = 0$ ifadesinin s ye türevi alınır ve (4.1.5) de verilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda' k + \mu'' - \gamma' r &= 0, \\
(1 + \mu k)k + \mu'' - (-\mu r)r &= 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$k + \mu k^2 + \mu'' + \mu r^2 = 0$$

denklemini bulunur ve bu denklem düzenlendiğinde

$$\mu'' + \mu(k^2 + r^2) + k = 0 \tag{4.1.6}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu homojen olmayan diferensiyel denklemin çözümü

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\mu(s) = c_1 \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + c_1 \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k}{k^2 + r^2} \quad (4.1.7)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.7) eşitliği $\lambda' = 1 + \mu k$ ifadesinde yerine yazılarak,

$$\lambda(s) = s + \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k^2 s}{k^2 + r^2} \quad (4.1.8)$$

bulunur. (4.1.7) eşitliği $\gamma' = -\mu r$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\gamma(s) = -\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{krs}{k^2 + r^2} \quad (4.1.9)$$

bulunur. (4.1.7), (4.1.8) ve (4.1.9) eşitlikleri (4.1.3) de yerine yazıldığında (4.1.2) denklemi elde edilir.

Teorem 4.1.3 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3 de $\sigma = \sigma(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik W-eğrinin S^2 kuaterniyonik küresinde yatması için gerek ve yeter koşul;

$$s + \frac{c_1 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{c_2 k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k^2 s}{k^2 + r^2} = 0, \quad (4.1.10)$$

$$c_1 \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + c_1 \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) - \frac{k}{k^2 + r^2} = -\frac{1}{k}, \quad (4.1.11)$$

$$-\frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \sin(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{c_2 r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \cos(s\sqrt{r^2 + k^2}) + \frac{krs}{k^2 + r^2} = 0 \quad (4.1.12)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: İlk olarak $\sigma = \sigma(s)$ eğrisi S^2 kuaterniyonik küresinde yatsın. Bu takdirde $h(\sigma, \sigma) = a^2$, $a \in \mathbb{R}^+$ eşitliğinin s ye göre türevi alınır;

$$h(\sigma', \sigma) + h(\sigma, \sigma') = 0$$

buradan,

$$h(\sigma, t) = 0 \quad (4.1.13)$$

olur. (4.1.13) ifadesinin tekrar türevi alınır ve (4.1.1) Frenet formülleri uygulanırsa;

$$h(t', \sigma) + h(t, \sigma') = 0,$$

$$h(t', \sigma) + h(t, t) = 0,$$

$$h(kn_1, \sigma) + 1 = 0$$

olduğundan,

$$h(n_1, \sigma) = -\frac{1}{k} \quad (4.1.14)$$

bulunur. (4.1.14) eşitliğinde tekrar türev alınır ve (4.1.1) Frenet formülleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} h(n_1', \sigma) + h(n_1, \sigma') &= 0, \\ h(-kt + rn_2, \sigma) + h(n_1, t) &= 0, \\ -kh(t, \sigma) + rh(n_2, \sigma) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$h(n_2, \sigma) = 0 \quad (4.1.15)$$

bulunur. (4.1.13), (4.1.14) ve (4.1.15) eşitliklerinden sırası ile

$$\lambda = 0, \quad \mu = -\frac{1}{k}, \quad \gamma = 0$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikler sırası ile (4.1.7), (4.1.8) ve (4.1.9) ifadelerinde yerine yazıldığında (4.1.10), (4.1.11) ve (4.1.12) eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Tersine $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için (4.1.10), (4.1.11) ve (4.1.12) denklemleri sağlansın. Bu takdirde (4.1.2) denkleminde eğrinin konum vektörü $\sigma(s) = -\frac{1}{k}n_1$ şeklindedir.

Dolayısıyla $h(\sigma, \sigma) = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}^+$ elde edilir. Bu ise σ eğrisinin S^2 kuaterniyonik küresinde yattığını gösterir.

Sonuç 4.1.1 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3 de $\sigma = \sigma(s)$ bir birim hızlı uzaysal kuaterniyonik bir W-eğri olsun. Eğrinin görüntüsünün orjin merkezli $a \in \mathbb{R}^+$ yarıçaplı S^2 kuaterniyonik küresinin üzerinde yatması için gerek ve yeter koşul eğrinin normal eğri olmasıdır.

Sonuç 4.1.2 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^3 de $\sigma = \sigma(s)$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik W-eğri olsun. $\sigma(s)$ kuaterniyonik küresel bir eğri ise, S^2 kuaterniyonik küresinin yarıçapı $a = \frac{1}{k}$ dır.

4.2 E^4 Öklid Uzayında Kuaterniyonik W-Eğriler

Tanım 4.2.1 $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar cümlesinde $s \in I = [0,1]$ için,

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \beta_i(s)e_i, \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (e_4 = +1)$$

fonksiyonu ile tanımlanan kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj 1985).

Teorem 4.2.1 E^4 4-boyutlu Öklid uzayında,

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \beta_i(s) e_i, \quad e_4 = 1$$

fonksiyonu ile tanımlanan β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki hız vektörü

$$T = \beta'(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i'(s) e_i \text{ dir. } E^4 \text{ boyutlu öklid uzayında, diferensiyellenebilir bir eğrinin}$$

Frenet vektörleri, $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ olsun. Buna göre Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} T'(s) &= KN_1(s), \\ N_1'(s) &= -KT(s) + kN_2(s), \\ N_2'(s) &= -kN_1(s) + (r-k)N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(r-K)N_2(s) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ile verilir. Burada;

$$\begin{aligned} N_1 &= t \times T, \\ N_2 &= n_1 \times T, \\ N_3 &= n_2 \times T, \\ K &= \|T'(s)\| \end{aligned}$$

dir. E^4 de γ eğrisi aracılığıyla, bir β eğrisi için Frenet formülleri açıklanmıştır. Ayrıca β ve γ eğrilerinin eğrilikleri arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki, β eğrisinin burulmasının γ eğrisinin asli eğriliği olduğu ile açıklanır. Ek olarak, β eğrisinin bitorsiyonu $(r - K)$ dir. Burada, β eğrisinin asli eğriliği K ve γ eğrisinin burulması r dir. Bu ilişkiler kuaterniyonlar için tek türlü belirlidir.

Kuaterniyonik W-eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.2.2 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ ve $(r(s) - K(s)) \neq 0$, eğrilikleri için $\beta = \beta(s)$ birim hızlı kuaterniyonik W-eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned}
\beta(s) = & [c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cos(Q_2 s) + c_4 \sin(Q_2 s)] T(s) \\
& + \frac{1}{K} [-c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) - c_3 Q_2 \sin(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cos(Q_2 s) - 1] N_1(s) \\
& + \left[\left(\frac{K}{k} c_3 - \frac{1}{kK} c_3 Q_2^2 \right) \cos(Q_2 s) + \left(\frac{K}{k} c_4 - \frac{1}{kK} c_4 Q_2^2 \right) \sin(Q_2 s) \right] N_2(s) \\
& + \frac{1}{kK(r-K)} \left[(-k^2 + K^2) c_1 Q_1 + c_1 Q_1^3 \right] \sin(Q_1 s) + (k^2 + K^2) c_2 Q_1 - c_2 Q_1^3 \cos(Q_1 s) \\
& + (-k^2 + K^2) c_3 Q_2 + c_3 Q_2^3 \sin(Q_2 s) + (k^2 + K^2) c_4 Q_2 - c_4 Q_2^3 \cos(Q_2 s) - k^2 \Big] N_3(s)
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

şeklindedir.

İspat: E^4 de birim hızlı kuaterniyonik bir W-eğrisi $\beta = \beta(s)$ olsun. Bu durumda

$$\beta(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N_1(s) + \gamma(s)N_2(s) + \nu(s)N_3(s) \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazılır. (4.2.3) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (4.2.1) Frenet formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\beta' &= \lambda' T + \lambda T' + \mu' N_1 + \mu N_1' + \gamma' N_2 + \gamma N_2' + \nu' N_3 + \nu N_3', \\
T &= \lambda' T + \lambda K N_1 + \mu' N_1 + \mu (-K T + k N_2) + \gamma' N_2 + \gamma (-k N_1 + (r - K) N_3) + \nu' N_3 \\
&\quad + \nu (-r - K) N_2, \\
0 &= (\lambda' - \mu K - 1) T + (\lambda K + \mu' - k \gamma) N_1 + (\mu k + \gamma' - \nu(r - K)) N_2 + (\gamma(r - K) + \nu') N_3
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafta katsayı eşitliğine göre,

$$\begin{aligned}
\lambda' - \mu K - 1 &= 0, \\
\lambda K + \mu' - \gamma k &= 0, \\
\mu k + \gamma' - \nu(r - K) &= 0, \\
\gamma(r - K) + \nu' &= 0
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.4) de verilen denklemlerden

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\lambda' - 1}{K}, \\
\gamma &= \frac{1}{k} (\mu' + \lambda K), \\
\nu &= \frac{1}{(r - K)} (\gamma' + \mu k),
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olduğu görülür. (4.2.5) de verilen eşitliklerden,

$$\gamma = \frac{1}{Kk} (\lambda'' + \lambda K^2) \tag{4.2.6}$$

$$\nu = \frac{1}{Kk(r-K)} [\lambda''' + (K^2 + k^2)\lambda' - k^2]$$

elde edilir. (4.2.4) de verilen $\gamma(r-K) + \nu' = 0$ denkleminde, (4.2.6) da verilen eşitlikler kullanılarak

$$\frac{1}{Kk(r-K)} [\lambda^4 + (K^2 + k^2 + (r-K)^2)\lambda'' + (r-K)^2 K^2 \lambda] = 0 \quad (4.2.7)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü;

$$\lambda(s) = c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cos(Q_2 s) + c_4 \sin(Q_2 s) \quad (4.2.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada $C = k^2 + K^2 + (r-K)^2$ olmak üzere

$$Q_1^2 = \frac{1}{2} \left(-C + \sqrt{C^2 - 4K^2(r-K)^2} \right), \quad Q_2^2 = -\frac{1}{2} \left(C + \sqrt{C^2 - 4K^2(r-K)^2} \right)$$

şeklindedir. (4.2.5) ve (4.2.6) da verilen eşitliklerde (4.2.8) eşitliği kullanılarak

$$\mu = \frac{1}{K} [-c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) - c_3 Q_2 \sin(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cos(Q_2 s) - 1] \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \left(\frac{K}{k} c_1 - \frac{1}{kK} c_1 Q_1^2 \right) \cos(Q_1 s) + \left(\frac{K}{k} c_2 - \frac{1}{kK} c_2 Q_1^2 \right) \sin(Q_1 s) \\ & + \left(\frac{K}{k} c_3 - \frac{1}{kK} c_3 Q_2^2 \right) \cos(Q_2 s) + \left(\frac{K}{k} c_4 - \frac{1}{kK} c_4 Q_2^2 \right) \sin(Q_2 s), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} \nu = & \frac{1}{kK(r-K)} \left[\left(-(k^2 + K^2) c_1 Q_1 + c_1 Q_1^3 \right) \sin(Q_1 s) + \left((k^2 + K^2) c_2 Q_1 - c_2 Q_1^3 \right) \cos(Q_1 s) \right. \\ & \left. + \left(-(k^2 + K^2) c_3 Q_2 + c_3 Q_2^3 \right) \sin(Q_2 s) + \left((k^2 + K^2) c_4 Q_2 - c_4 Q_2^3 \right) \cos(Q_2 s) - k^2 \right] \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

bulunur. (4.2.8) , (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) de verilen eşitlikler (4.2.3) de yerine yazılırsa (4.2.2) elde edilir.

Teorem 4.2.3 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$ ve $r(s) \neq 0$ eğrilikleri için E^4 de $\beta = \beta(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik eğrisinin S^3 kuaterniyonik küresinde yatması için gerek ve yeter koşul

$$c_1 \cos(Q_1 s) + c_2 \sin(Q_1 s) + c_3 \cos(Q_2 s) + c_4 \sin(Q_2 s) = 0 \quad (4.2.12)$$

$$-c_1 Q_1 \sin(Q_1 s) + c_2 Q_1 \cos(Q_1 s) - c_3 Q_2 \sin(Q_2 s) + c_4 Q_2 \cos(Q_2 s) = 0 \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{K}{k} c_1 - \frac{1}{kK} c_1 Q_1^2 \right) \cos(Q_1 s) + \left(\frac{K}{k} c_2 - \frac{1}{kK} c_2 Q_1^2 \right) \sin(Q_1 s) \\ & + \left(\frac{K}{k} c_3 - \frac{1}{kK} c_3 Q_2^2 \right) \cos(Q_2 s) + \left(\frac{K}{k} c_4 - \frac{1}{kK} c_4 Q_2^2 \right) \sin(Q_2 s) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned} & \left(-(k^2 + K^2) c_1 Q_1 + c_1 Q_1^3 \right) \sin(Q_1 s) + \left((k^2 + K^2) c_2 Q_1 - c_2 Q_1^3 \right) \cos(Q_1 s) \\ & + \left(-(k^2 + K^2) c_3 Q_2 + c_3 Q_2^3 \right) \sin(Q_2 s) + \left((k^2 + K^2) c_4 Q_2 - c_4 Q_2^3 \right) \cos(Q_2 s) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi S^3 kuaterniyonik küresinde yatsın. Bu takdirde $h(\beta, \beta) = a^2$, $a \in \mathbb{R}^+$ dır. Burada türev alınırsa ;

$$h(\beta', \beta) + h(\beta, \beta') = 0$$

buradan,

$$h(T, \beta) = 0 \quad (4.2.16)$$

olur. (4.2.16) ifadesinin tekrar türevi alınır ve (4.2.1) Frenet formülleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} h(T', \beta) + h(T, \beta') &= 0, \\ h(T', \beta) + h(T, T) &= 0, \\ h(KN_1, \beta) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$h(N_1, \beta) = -\frac{1}{K} \quad (4.2.17)$$

bulunur. (4.2.17) eşitliğinde tekrar türev alınır ve (4.2.1) Frenet formülleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} h(N_1', \beta) + h(N_1, \beta') &= 0, \\ h(-KT + kN_2, \beta) + h(N_1, T) &= 0, \\ -Kh(T, \beta) + kh(N_2, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$h(N_2, \beta) = 0 \quad (4.2.18)$$

bulunur. (4.2.18) eşitliğinde de türev alınır ve (4.2.1) Frenet formülleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} h(N_2', \beta) + h(N_2, \beta') &= 0, \\ h(-kN_1 + (r - K)N_3, \beta) + h(N_2, T) &= 0, \\ -kh(N_1, \beta) + (r - K)h(N_3, \beta) &= 0, \\ -k\left(-\frac{1}{K}\right) + (r - K)h(N_3, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$h(N_3, \beta) = -\frac{k}{K(r-K)} \quad (4.2.19)$$

olur. (4.2.16), (4.2.17), (4.2.18) ve (4.2.19) eşitliklerinden sırası ile

$$\lambda = 0, \quad \mu = -\frac{1}{K}, \quad \gamma = 0, \quad v = -\frac{k}{K(r-K)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) ifadelerinde yerine yazıldığında sırasıyla (4.2.12), (4.2.13), (4.2.14), (4.2.15) eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Tersine (4.2.12), (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) eşitlikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için sağlansın. Bu takdirde (4.2.3) eşitliğinden eğrinin konum vektörü

$$\beta(s) = -\frac{1}{K}N_1 - \frac{k}{K(r-K)}N_3$$

şeklinde dir. Bu durumda $h(\beta, \beta) = (\frac{1}{K})^2 + (\frac{k}{K(r-K)})^2 = a^2$, ($a \in \mathbb{R}^+$) olduğundan β eğrisi S^3 kuaterniyonik küresi üzerinde yatar.

Sonuç 4.2.1 $s \in I \subset \mathbb{R}$, $k(s) > 0$, $r(s) \neq 0$ ve $(r(s) - K(s)) \neq 0$ eğrilikleri için $\mathbb{Q}$ da $\beta = \beta(s)$ bir birim hızlı kuaterniyonik bir W-eğri olsun. $\beta(s)$ kuaterniyonik küresel bir eğriyse, S^3 birim küresinin yarıçapı $a = \sqrt{(\frac{1}{K})^2 + (\frac{k}{K(r-K)})^2}$ olur.

Sonuç 4.2.2 E^4 , 4-boyutlu Öklid uzayında $k(s) > 0$, $r(s) \neq 0$ ve $(r(s) - K(s)) \neq 0$ olmak üzere $\beta = \beta(s)$ kuaterniyonik W-eğrisi N_1 ile N_3 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak E_1^3 3-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve E_2^4 4-boyutlu yarı-Öklid uzaylarında kuaterniyonik W-eğriler için diferensiyel denklemler elde edilmiş ve bu diferensiyel denklemler çözülerek adı geçen eğrilerin parametrik denklemleri oluşturulmuştur. Ayrıca, bu eğrilerin hiper kuadriklerin üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar elde edilerek bazı sonuçlar verilmiştir. Daha sonra E^3 3-boyutlu ve E^4 4-boyutlu Öklid uzaylarında kuaterniyonik W-eğriler için diferensiyel denklemler elde edilmiş ve bu diferensiyel denklemler çözülerek adı geçen eğrilerin parametrik denklemleri oluşturulmuştur. Bundan başka, bu eğrilerin kuaterniyonik küre üzerinde yatması için gerek ve yeter koşullar elde edilerek bazı sonuçlar verilmiştir. Yapılan bu tez çalışmasına paralel olarak bazı özel tipli eğriler ve yüzeyler üzerinde çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Bharathi, K. and Nagaraj, M. (1985). Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formulae. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **16**: 741-756.
- Camcı, Ç., İlarslan, K. and Šućurović, E. (2003). On Pseudohyperbolical curves in Minkowski Space-Time. *Turkish Journal of Mathematics*, **27**: 315-328.
- Chen, B. Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane. *The American Mathematical Monthly*, **110**: 147-152.
- Chen, B.Y. and Dillen, F. (1986) Verstraelen, L., Finite type space curves. *Soochow Journal of Mathematics* **12**: 1-10.
- Chevalley C. (1946). Theory of Lie Groups. Princeton University Press, Princeton (NJ).
- Clifford, W.K. (1873). Preliminary sketch of biquaternions. *The Proceedings of the London Mathematical Society*, **4**: 361-395.
- Çöken, A. C. and Tuna, A. (2004). On the quaternionic inclined curves in the semi-Euclidean space E_2^4 . *Applied Mathematics and Computation*, **155**: 373-389.
- Ekmekci, N. and İlarslan K. (1998). Higher curvatures of a regular curve in Lorentzian space. *Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences. Mathematics Series*, **11(2)**: 97-102.
- Frenet, F. (1852). Sur les courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Ire Série*, **17**: 437-447.
- Gök, İ., Okuyucu, O. Z., Kahraman, F. and Hacısalıhoğlu, H. H. (2011). On the quaternionic B_2 slant helices in the Euclidean space E^4 . *Advances in Applied Clifford Algebras*, **21**: 707-719.
- Gray A. (1993). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, Journal of Geometry, CRC Press, Boca Raton.
- Gungor, M. A. and Tosun, M. (2011). Some characterizations of quaternionic rectifying curves. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, **13**: 89-100.

- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Yayınları, Cilt 1-2, Ankara.
- Hamilton, W. R. (1899). Elements of Quaternions, I, II and III. Chelsea, New York.
- İlarslan K. and Nesovic E. (2009). Spacelike and timelike normal curves in Minkowski Space-time. *Publications De L.Institut Mathematique*, **85**: 99, 111-118,
- İlarslan K. (2005). Spacelike normal curves in Minkowski space E_1^3 . *Turkish Journal of Mathematics*, **29**: 53-63.
- İlarslan K. and Nesovic E. (2004). Timelike and null normal curves in Minkowski space E_1^3 . *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **35**: 7, 881-888.
- İlarslan, K. and Boyacıoğlu, Ö. (2007). Position vectors of a spacelike W-curve in Minkowski space E_1^3 . *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **44**: (3), 429-438.
- İlarslan, K. and Boyacıoğlu, Ö. (2008). Position vectors of a timelike and a null helix in Minkowski 3-space, *Chaos, Solitons and Fractals*, **38**: 1383–1389.
- Lopez, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *International Electronic Journal of Geometry*, **1**: 44-107
- Kahraman, F., Gök, İ. and Hacısalıhoğlu, H. H. (2012). On the quaternionic B_2 slant helices in the semi-Euclidean space E_2^4 . *Applied Mathematics and Computation*, **218**: 6391-6400.
- Kalkan B. Ö. (2018). On the quaternionic W-curves in the semi-Euclidean spaces, *Bulletin of the Transilvania University of Braşov*. **11**: (60), 23-36
- Karadağ, M. and Sivridağ, A. İ. (1997). Characterizations for the quaternionic inclined curves. *Erciyes Üniversitesi Fen bilimleri Dergisi*, **13**: (1), 37-53.
- Klein, F. and Lie, S. (1871). Über diejenigen ebenen curven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformatronen in sich übergeben. *Mathematische Analen*, **4**: 50-84.

- Milman, R. S. and Parker G. D. (1977). Elements of Differential Geometry. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Okuyucu, O. Z. (2013). Characterizations of the quaternionic Mannheim curves in Euclidean space. *The International J. Mathematical Combinatorics*, **2**: 44-53
- O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, New York.
- Özdemir, M. and Ergin, A.A. (2006). Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, **56**: 322–336.
- Petrović-Torgašev, M. and Šućurović, E. (2002). W-curves in Minkowski space-time. *Novi Sad Journal of Mathematics*, **32**: 55-65.
- Petrović-Torgašev, M. and Šućurović, E. (2000). Some characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves with the timelike and null principal normal. *Mathematica Moravica*, **4**: 83-92.
- Ratcliffe, J. G. (1994). Foundations of hyperbolic manifolds. Springer-Verlag New York, Inc. 736
- Sabuncuoğlu, A. (2004). Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara.
- Sağlam, D. (2012). On the osculating sphere of a real quaternionic curve in the Euclidean space E^4 . *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **3**: 46-53.
- Serret, J. A. (1851). Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Ire Série*, **16**: 193-207
- Synge, J. L. (1967). Timelike helices in flat space-time. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Sect. A*, **65**: 27-42.
- Tuna, A. (2002). Yarı Öklid Uzaylarda Kuaterniyonik Eğiler için Serret-Frenet Formülleri. Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Isparta, Türkiye.
- Walrave, J. (1995). Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral thesis, Leuven K.U. Faculty of Science, Leuven.

- Ward, J. P. (1997). Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Publishers, Boston/London.
- Wong, Y. C. (1972). On an explicit characterization of spherical curves. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **34**: 239.242.
- Wong, Y. C. (1963). A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere. *Monatshefte für Mathematik*, **67**: 363.5.
- Yıldız, Ö.G. and Karakuş, Ö. S. (2016). On the Quaternionic Normal Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4 . *The International Journal Mathematical Combinatorics*, **3**: 68-76.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa GEMİCİ
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul 1982
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : mgemici07@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Alanya Lisesi, (1996-1999)
Lisans : Balıkesir Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği
Bölümü, (1999-2004)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Alanya Ümit Altay Turizm Otelcilik ve Meslek
Lisesi (2004-2005)
Alanya Abdurrahman Alaattinoğlu İlköğretim
Okulu (2008-2009)
Alanya Kaymakamlığı İlçe Yazı İşleri
Müdürlüğü (2010-2012)
Nusaybin Mehmet Emin KUŞ Anadolu
İmamhatip Lisesi (2013-2016)
Bolvadin Raziye Sultan Yusuf Kayabaşı Sosyal
Bilimler Lisesi (2018-.....)