



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUATERNİYONLAR VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HUMAYLA ÖNDER

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi GÜLSÜM YÜCA

AKSARAY, 2021

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342410 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Humayla ÖNDER tarafından hazırlanan “**KUATERNİYONLAR VE GEOMETRİK UYGULAMALARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OYBİRLİĞİ/OYÇOKLUĞU ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman:Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye:Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye:Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YAVUZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Tez Savunma Tarihi:08/07/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Humayla ÖNDER

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca bana maddi, manevi desteği, motivasyonu veren, yol gösteren, her türlü kaynağa erişimimde yardımcı olan, 'yüksek matematik çalışması yapma'yı öğreten, bana yeni bakış açıları sunan, hayatımda büyük ve önemli bir dokunuşa sahip, sevgisini ve ilgisini esirgemeyen sevgili danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA'ya, daima yanımda olan aileme, görev yaptığım Kızılkaya Ortaokulu'nda, ilgi ve anlayış gösteren idari amirlerime ve öğrenim hayatımda bana matematiği sevdiren, örnek aldığım matematik öğretmenlerimden Mesut Sevim'e ve Dr. Öğr. Üyesi Sevdâ Sezer'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Humayla ÖNDER
AKSARAY, 2021

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ŞİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Öklid Uzayı	2
2.2 Öklid Uzayının İzometrilere	4
2.3 Dual Uzay	8
2.4 Öklid Düzleminde Kompleks Sayılarla Dönme Hareketi	19
3. REEL KUATERNİYONLAR.....	22
3.1 Reel Kuaterniyon Cebiri	23
3.2 Reel Kuaterniyonların Matrisel Gösterimleri	28
3.3 Reel Kuaterniyonların Uygulamaları	32
4. DUAL KUATERNİYONLAR	41
4.1 Dual Kuaterniyon Cebiri	42
4.2 Dual Kuaterniyonların Matrisel Gösterimleri	43
4.3 Dual Kuaterniyonların Uygulamaları.....	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	60

YÜKSEK LİSANS TEZİ
KUATERNİYONLAR VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Humayla ÖNDER

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

ÖZET

Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından tanıtıldı. Daha sonra, reel ve dual kuaterniyonlar bir çok yazar tarafından ele alınmıştır. Bu tezin amacı, reel ve dual kuaterniyonların cebiri ile matris gösterimlerini vererek geometrik uygulamalarını incelemektir. Ayrıca, reel kuaterniyonlar ile dönme hareketi arasındaki ilişki ve dual kuaterniyonlar ile vida hareketleri arasındaki ilişki verilecektir. Bu nedenle reel ve dual kuaterniyonlar, dönme, kayma ve bunların bileşimi olarak ifade edilen vida operatörleri olarak kullanılarak, reel ve dual kuaterniyonların kinematik uygulamalarına yer verilecektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş bölümü olarak düzenlenmiş ve W. R. Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden bahsedilerek reel ve dual kuaterniyonların uygulama alanlarına değinilmiştir. İkinci bölümde, dört alt başlık dahilinde temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, reel kuaterniyonların cebirsel yapıları, matrissel gösterimleri sunularak geometrik uygulamaları verilmiştir. Dördüncü bölümde ise dual kuaterniyonların cebirsel yapıları ve matrissel gösterimleri incelenerek geometrik uygulamaları verilmiştir. Son bölüm, tezin sonuç kısmı olarak düzenlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel kuaterniyon, Dual kuaterniyon, Dönme operatörü, Vida operatörü.

Temmuz, 2021; 60 sayfa

M. Sc. THESIS

QUATERNIONS AND THEIR GEOMETRIC APPLICATIONS

Humayla ÖNDER

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gülsüm YÜCA

ABSTRACT

Quaternions were introduced in 1843 by William Rowan Hamilton. Later, real and dual quaternions have been discussed by many authors. The aim of this thesis is to examine the geometric applications of real and dual quaternions by giving their algebra and matrix representations. Additionally, the relationship between real quaternions, rotational motion and the relation between dual quaternions and screw motions will be investigated. For this reason, real and dual quaternions will be used as rotation and screw operators and kinematics applications of them will be given.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is arranged as an introduction and W. R. Hamilton's discovery of quaternions is mentioned and the application areas of real and dual quaternions are mentioned. In these condpart, basic concepts are included within four subsections. In the third chapter, algebraic structures, matrix representations and geometric applications of real quaternions will be given. In the fourth chapter, algebraic structures and matrix representations of dual quaternions will be examined and their geometric applications will be given. The last chapter is organized as the conclusion part of the thesis.

Keywords: Real quaternions, Dual quaternions, Rotation operator, Screw operator.

July, 2021; 60 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Düzlemde dönme hareketi.....	7
Şekil 2.2. Birim dual küre.....	18
Şekil 2.3. Dual açı	19
Şekil 2.4. Kompleks düzlemde bir nokta.....	20
Şekil 2.5. Kompleks iki sayının çarpımı	21
Şekil 2.6. Kompleks düzlemde dönme	21
Şekil 3.1. Kuaterniyonların çarpım tablosu	22
Şekil 3.2. Örnek 3.3.6 a şıkkı çözümü.....	37
Şekil 3.3. Örnek 3.3.6 b şıkkı çözümü	38
Şekil 4.1. Vida operatörü önce kayma, sonra dönme	46
Şekil 4.2. Vida operatörü önce dönme, sonra kayma	47
Şekil 4.3. Örnek 4.3.1 koordinatları	47
Şekil 4.4. Örnek 4.3.7 koordinatları	54
Şekil 4.5. Örnek 4.3.8 koordinatları	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbf{q}$	Reel kuaterniyon
S_q	Kuaterniyonun skaler kısmı
V_q	Kuaterniyonun vektörel kısmı
$\hat{\mathbf{q}}$	Dual kuaterniyon
$S_{\hat{\mathbf{q}}}$	Dual kuaterniyonun skaler kısmı
$V_{\hat{\mathbf{q}}}$	Dual kuaterniyonun vektörel kısmı
N_q	Reel kuaterniyonun normu
$N_{\hat{\mathbf{q}}}$	Dual kuaterniyonun normu
$\bar{\mathbf{q}}$	Reel kuaterniyonun eşleniği
$\widehat{\bar{\mathbf{q}}}$	Dual kuaterniyonun eşleniği
$\mathbf{q}_0$	Birim kuaterniyon
$\wedge$	Vektörel çarpımı

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından keşfedilmiştir. Kuaterniyonların keşfi, matematikteki en iyi belgelenmiş keşiflerden biridir. Hamilton, kuaterniyon çarpımı için temel olan aşağıdaki formülü keşfettiği sırada Brougham köprüsü üzerindeki bir taş kazımıştır.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1.1)$$

Bugün onun yazdığı taş bulunamasa da 1958 yılında köprünün üzerine, formülü gösteren bir hatıra plaketi yerleştirilmiş durumdadır. Hamilton'un bu çalışmalarından sonra kuaterniyonlar ve kuaterniyon cebirleri birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir.

Dönme hareketlerini tarif etmenin alternatif bir yolu olan kuaterniyonlar, sadece matematikte değil; fizikte, mühendislikte ve bilimin pek çok uygulama alanında önemli rol oynamaktadır. Uçakların hareketindeki gimbal lock sorununun çözümünde, robotikteki ileri ve geri kinematik problemlerinde, bilgisayar oyunlarında hareketlerin yumuşak geçişlerle yapılabilmesi gibi pek çok farklı alanda kullanımı söz konusudur.

H. H. Hacısalihoğlu'nun "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" ile J.P. WARD' ın "Quaternions and Cayley Numbers" kitaplarında yer verilen reel ve dual kuaterniyon ile ilgili temel kavramlardan, bu tez çalışması süresince önemli ölçüde faydalanılmıştır. Reel ve dual kuaterniyonların cebiri ve matris gösterimleri için de diğer pek çok kaynak kullanılmıştır. Reel kuaterniyonlar ile dönme hareketi arasındaki ilişki ve dual kuaterniyonlar ile vida hareketleri arasındaki ilişki hareket geometrisinde, üzerinde çalışılan konulardandır. Bu tez çalışmasında da reel ve dual kuaterniyonlar; dönme, kayma ve bunların bileşimleri olan vida operatörleri olarak ele alınacaktır. Teorik unsurlara değinildikten sonra uygulamalara da ayrıca yer verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, reel ve dual kuaterniyonların çalışılabilmesi için gerekli olan temel kavramlar sunulacaktır. Bu tez çalışmasında kullanılacak farklı kavramların daha anlaşılır bir biçimde verilebilmesi adına, temel kavramlar dört alt başlık altında toplanmıştır.

2.1 Öklid Uzayı

Bu bölümde, Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Afin uzay) A , boştan farklı bir küme ve V de bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V \quad (2.1)$$

fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir. $\forall P, Q, R \in A$ için,

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R), \quad (2.2)$$

$\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için,

$$f(P, Q) = \vec{\alpha}, \quad (2.3)$$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.1.2 (Öklid uzayı) A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V 'de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.5)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlemin yardımı ile A afin uzayına Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.1.1 3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.6)$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 (n-boyutlu Öklid uzayı) Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

n=1 için $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, 1-boyutlu standart Öklid uzayı, reel sayılar eksenini olarak reel sayılar sistemi ile birleştirilen Öklid doğrusudur.

n=2 için $\mathbb{E}^2$, 2-boyutlu standart Öklid uzayı, reel düzlem ya da Öklid düzlemi olarak bilinir.

n=3 için $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu standart Öklid uzayı olarak bilinir.

Tanım 2.1.4 (Uzaklık) N-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. Bir

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.8)$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{E}^n$ için, V deki norm $\| \cdot \|$ olmak üzere,

$$d: (X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{E}^n$ de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adını alır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.5 (Öklid metriği) N-boyutlu $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de Standart Öklid metriği denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.2 Öklid Uzayının İzometrileri

Bu bölümde, Öklid uzayının izometrileri ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.2.1 (İkili işlem) G , boştan farklı bir küme olmak üzere, $*$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f: G \times G \rightarrow G, \quad f(x, y) = x * y \quad (2.10)$$

(Başar, 2012).

Tanım 2.2.2 (Grup) $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemi düşünelim.

$\forall x, y, z \in G$ olmak üzere,

◇ $\forall x, y, z \in G$ için,

$$x * (y * z) = (x * y) * z \quad (\text{Birleşme öz.})$$

◇ $\forall x \in G$ için, $\exists e \in G$

$$x * e = e * x = x \quad (\text{Birim eleman})$$

◇ $\forall x \in G$ için, $\exists x^{-1} \in G$

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \quad (\text{Ters eleman})$$

◇ $\forall x, y \in G$ için, $x * y \in G$ (Kapalılık öz.)

Bu şekilde tanımlanan $*$ ikili işlemi ile G kümesi bir gruptur ve $(G, *)$ ile gösterilir.

Eğer her bir $x, y \in G$ değişmeli ise Abel gruptur:

$$x * y = y * x \quad (2.11)$$

(Başar, 2012).

Örnek 2.2.1 $m, n \in \mathbb{N}$ için reel değerli bütün $m \times n$ formundaki matrislerin kümesi, matris toplama işlemi altında Abel gruptur.

Tanım 2.2.3 $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan bütün $n \times n$ -lik matrislerin kümesi $\mathbb{R}_n^n$ olmak üzere, $\mathbb{R}_n^n$ deki bütün regüler matrislerin çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \det(A) \neq 0\} \quad (2.12)$$

$O(n)$ grubunun $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin bir altgrubu olduğu açıktır.

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n\} \quad (2.13)$$

$O(n)$ deki bir matrisin determinanı için, $AA^T = A^T A = I_n$ ifadesinde her iki tarafa determinant fonksiyonu uygulanırsa,

$$\det A \cdot \det A^T = 1 \quad (2.14)$$

ve

$$\det A^T = \det A \quad (2.15)$$

olduğundan

$$\det A = \pm 1 \quad (2.16)$$

olduğu görülür. O halde, $O(n)$ deki bazı matrislerin determinantları $+1$ 'dir. Bu matrislerin kümesi matris çarpımı işlemine göre bir gruptur. Bu grup $O(n)$ in bir altgrubu olup $SO(n)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Böylece şu tanım verilebilir:

Tanım 2.2.4 $SO(n) = \{A: A \in O(n), \det A = 1\}$ kümesinin çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba özel ortogonal grup veya dönme grubu denir ve $SO(n)$ ile gösterilir.

Aynı şekilde $GL(n, \mathbb{R})$ 'de de determinantı +1 olan matrisler vardır. Bu matrislerin kümeleri de matris çarpımı işlemine göre birer gruptur. Bu gruba, özel lineer grup denir ve $SL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Böylece aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$$

$SL(n, \mathbb{R})$ ve $SO(n)$ grupları $GL(n, \mathbb{R})$ nin birer alt grubuna izomorfurlar (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.2.5 ($\mathbb{E}^n$ de izometri) d , n -boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere,

$$f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu için

$$d(f(X), f(Y)) = d(X, Y) \quad (2.17)$$

$X, Y \in \mathbb{E}^n$ ise f fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ nin bir izometrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 2.2.1 N -boyutlu Öklid uzayında bir katı cisim hareketine karşılık gelen B matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} & & t_1 \\ & & t_2 \\ & a_{ij} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$[a_{ij}] \in O(n), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

olmak üzere $(n+1) \times (n+1)$ -lik reel ve regüler bir matristir. Böylece B ye karşılık gelen izometri, $\mathbb{E}^n$ deki bir X noktasının B altındaki görüntüsü Y olmak üzere, matris formunda

$$Y = A.X + C, \quad (2.19)$$

$A \in O(n)$, $C \in T(n)$ biçiminde ifade edilebilir (Bottema, 1979).

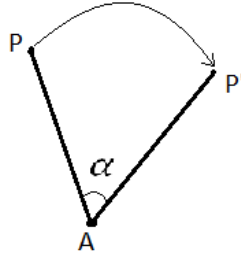
Tanım 2.2.6 (Genel hareket) N -boyutlu Öklid uzayında A bir $n \times n$ - lik ortogonal matris ve C , öteleme hareketine karşılık gelen $n \times 1$ -lik matris olmak üzere,

$$Y = A.X + C$$

$\mathbb{E}^n$ de bir genel harekettir. Burada A ve C matrisleri, zaman ile özdeşlenebilen bir t parametresinin fonksiyonları, A nın determinantı 1 ve bütün karakteristik değerleri farklıdır (Bottema, 1979).

$Y = A.X$ genel hareketinde $A.X$ kısmına hareketin dönme kısmı, C kısmına da hareketin öteleme kısmı denir.

Tanım 2.2.7 (Dönme hareketi) Düzlemde bir A noktası ve radyan bir α -açısı olsun. Bir P noktası için $\widehat{PAP'} = \alpha$ ve $|AP| = |AP'|$ olacak şekilde şekil 2.1'deki gibi P yi P' noktasına götüren dönüşüme dönme hareketi denir.



Şekil 2.1. Düzlemde dönme hareketi.

Teorem 2.2.2 $\mathbb{E}^n$ ile eşleşen n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayında

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.20)$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile, $O = (0, \dots, 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Böylece herhangi bir dönme hareketi altında, $\mathbb{E}^n$ deki bir X noktasının görüntüsü Y olmak üzere,

$$Y = A.X, \quad (2.21)$$

$A \in O(n)$ olur.

Tanım 2.2.8 (Öteleme hareketi) $f, \mathbb{E}^n$ nin bir izometrisi ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n), \quad (2.22)$$

$t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ ise $f, \mathbb{E}^n$ de bir öteleme fonksiyonudur (Hacısalıhoğlu, 1998).

Katı bir cismin yer değiştirmesi sadece matematikte değil; makine mühendisliği, robotik, biyomekanik, astrofizik gibi daha pek çok farklı alanda önemli bir yere sahiptir. Hareketler, uzaklığı koruyan dönüşümlerle verilir. Homotetik hareketler ise açıları koruyan dönüşümlerle verilir. Hareketler, homotetik hareketlerin özel halidir. N-boyutlu Öklid uzayında katı bir cismin homotetik hareketleri, homotetik dönüşümler ile verilir.

Tanım 2.2.9 (Vida hareketi) Bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen doğrultusunda ötelenmeyi ifade eden hareketlere vida hareketi denir. Bu hareketi yaptıran operatöre de vida operatörü denir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.2.10 (Homotetik hareket) N-boyutlu Öklid uzayındaki bir katı cismin homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h.A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ile verilir. Burada $h = h \cdot I_n$ bir skaler matris, $A \in SO(n)$ ve $a \in \mathbb{R}_1^n$ dir. $h=1$ ise 1-parametrelilik hareket olarak tanımlanır (Yaylı, 1988).

2.3 Dual Uzay

Bu bölümde, tez çalışmasında incelenen dual kuaterniyonların daha iyi kavranabilmesi adına, dual uzay ve elemanlarından bahsedilmiştir.

Tanım 2.3.1 (Dual sayı) $\forall x, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $X = (x, x^*)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerinden oluşan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{D}$ notasyonu ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbb{D}$ kümesi

$$\mathbb{D} = \{(x, x^*) | \forall x, x^* \in \mathbb{R}\}$$

ile ifade edilir. $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi, her bir $(x, x^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da dual sayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.2 Herhangi $X, Y \in \mathbb{D}$ olmak üzere $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*)$ için $x = y$, $x^* = y^*$ oluyorsa X ile Y eşittir denir ve $X = Y$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.3 $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*)$ dual sayılarının toplama işlemi,

$$+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$X + Y = (x, x^*) + (y, y^*) = (x + y, x^* + y^*) \quad (2.24)$$

ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.1 $\lambda \in \mathbb{R}$ skaler ve $X = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı için λ skalerinin X dual sayısı ile çarpma işlemi

$$\lambda.X = \lambda(x, x^*) = (\lambda x, \lambda x^*) \quad (2.25)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.4 $+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi için $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*)$ dual sayılarının çıkarma işlemi

$$X + (-Y) = (x, x^*) + (-y, -y^*) = (x - y, x^* - y^*) \quad (2.26)$$

ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.5 $0 = (0, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin sıfır elemanı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.6 $\cdot: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemin için $X = (x, x^*), Y = (y, y^*)$ dual sayılarının çarpma işlemi

$$X \cdot Y = (x, x^*) \cdot (y, y^*) = (xy, xy^* + x^*y) \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.7 $X = (x, x^*), x \neq 0$ ve $Y = (y, y^*), y \neq 0$ olmak üzere Y dual sayısının X dual sayısına bölme işlemi,

$$\frac{Y}{X} = \frac{(y, y^*)}{(x, x^*)} = \left(\frac{y}{x}, \frac{xy^* - x^*y}{x^2} \right) \quad (2.28)$$

ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.3.1 $X = 3 + 2\varepsilon$ ve $Y = 1 + 3\varepsilon$ olmak üzere, Y dual sayısının X dual sayısına bölümünü bulunuz.

Çözüm 2.3.1 Y dual sayısının X dual sayısına bölümü için 2.12 'den,

X dual sayısı için: $x = 3$ ve $x^* = 2$, Y dual sayısı için: $y = 1$ ve $y^* = 3$ olmak üzere,

$$\frac{1 + 3\varepsilon}{3 + 2\varepsilon} = \frac{(1, 3)}{(3, 2)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{3^2} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{9} \right)$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{3} + \frac{7}{9}\varepsilon$$

elde edilir.

Tanım 2.3.8 $(x, 0)$ dual sayısı x reel sayısı ile gösterilir. Böylece $x = (x, 0)$ yazılır.

Birimli değişmeli halka üzerinde tanımlanan $\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanları olan dual vektörlere değinmeden önce, aşağıdaki temel kavramlara yer verilmiştir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.9 (Halka) $S \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri tanımlansın.
 $\forall x, y, z \in S$ olmak üzere,

$$\diamond x \oplus y \in S$$

$$\diamond x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x, y \in S$$

$$\diamond x \oplus e = e \oplus x = x \quad \text{olan bir } e \in S \text{ vardır}$$

$$\diamond x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

$$\diamond x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = e \quad \text{olan bir } x^{-1} \text{ vardır}$$

$$\diamond x \otimes y \in S$$

$$\diamond x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

$$\diamond x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \quad (y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$$

özellikleri sağlanıyorsa $(S, \oplus, \otimes)$ bir halkadır denir. $(S, \oplus, \otimes)$ halkası, çarpma işleminin sahip olduğu özelliklere göre değişmeli ve birimli halka olarak adlandırılır (Başar, 2012).

Tanım 2.3.10 (Cisim) $F \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, eğer $(F, \oplus, \otimes)$ halkası;

$(F \setminus \{e\}, \otimes)$ bir Abel grubu ise o zaman $F, (\oplus)$ ve $(\otimes)$ işlemleriyle birlikte bir cisimdir denir (Başar, 2012).

Tanım 2.3.11 (Modül) R birimli bir halka ve $(M, +)$ Abel bir grup olsun. Eğer $\forall r \in \mathbb{R}, m \in M$ için

$$f: R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \mapsto f(r, m) = r \cdot m \tag{2.29}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu için, M ye R halkası üzerinde bir Sol R -Modül denir ve aşağıdaki koşulları sağlar;

$\forall r, r_1, r_2 \in R$ ve $\forall m, m_1, m_2 \in M$ için

$$\diamond r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$$

$$\diamond (r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$$

$$\diamond (r_1.r_2).m = r_1.(r_2.m)$$

$$\diamond 1.m = m$$

Ayrıca $\forall r \in R$ ve $\forall m \in M$ için yukarıdaki 4 koşulu sağlayan bir

$$g: M \times R \rightarrow M$$

$$(m, r) \mapsto g(m, r) = m.r \quad (2.30)$$

fonksiyonu verilmişse, M ye R üzerinde bir Sağ R -Modül denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Eğer R değişmeli bir halka ise sol ve sağ modül ayrımı yapılmasına gerek yoktur.

Tanım 2.3.12 ($\mathbb{D}$ -Modül) $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$$

biçiminde gösterilirse $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{D}^3$ tür. Bu sayı $X = (X_i)$, $i = 1, 2, 3$ biçiminde de yazılabilir.

$X = (X_i)$, $Y = (Y_i) \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere,

$$+: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

iç işlemi ile

$$X + Y = (X_i + Y_i) \quad (2.31)$$

üçlüsüne $\mathbb{D}^3$ de X ile Y nin toplamı denir.

$\lambda \in \mathbb{D}$ ve $X = (X_i) \in \mathbb{D}^3$, $i = 1, 2, 3$ için

$$.: \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi

$$\lambda.X = (\lambda.X_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

üçlüsüne karşılık gelsin. λX sayısına X in λ skaleri ile çarpımı denir.

$\mathbb{D}^3$, yukarda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür.

Dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül $\mathbb{D}$ -Modül biçiminde adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.13 (Dual Vektör) $\mathbb{D}$ –Modül’ün elemanları olan sıralı üçlülere dual vektörler denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.2 $\vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül 'de her bir $\vec{X}$ dual vektörü

$$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.3 $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* = (\vec{x}, \vec{x}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \vec{X} = (\lambda \vec{x}, \lambda \vec{x}^*) \quad (2.34)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.4 $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{x}^*)$ ve $\vec{Y} = (\vec{y}, \vec{y}^*) \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(\vec{X}, \vec{Y}) = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{x}^*, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}^* \rangle] \quad (2.35)$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.14 Bir $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ dual vektörünün normu

$$\|\vec{X}\| = (\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{x}\| + \varepsilon \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|}, \vec{x} \neq 0 \quad (2.36)$$

ile tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.3.1 $\vec{X} = (1, 2, 3) + \varepsilon \cdot (2, 0, 3)$ dual vektörünün normunu hesaplayınız.

Çözüm 2.3.1

$$\|\vec{X}\| = (\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{x}\| + \varepsilon \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|}, \vec{x} \neq 0$$

$$\vec{x} = (1, 2, 3) \neq (0, 0, 0)$$

O halde, $\vec{X}$ dual vektörünün normu,

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\| &= \|(1, 2, 3)\| + \varepsilon \cdot \frac{\langle (1, 2, 3), (2, 0, 3) \rangle}{\|(1, 2, 3)\|} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} + \varepsilon \cdot \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= \sqrt{14} + \varepsilon \cdot \frac{11}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.3.15 Normu 1 olan dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.3.2 $(1, 4\varepsilon, 3\varepsilon)$ bir birim dual vektördür.

$\|(1, 0, 0)\| = 1$ dir ve $\langle (1, 0, 0), (0, 4\varepsilon, 3\varepsilon) \rangle = 0$ dır.

Teorem 2.3.5 $\vec{X} \neq (\vec{0}, \vec{x}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere $\vec{U} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ birim dual vektördür (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.3.3

$\vec{X} = \left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{1}{3} - 4\varepsilon\right)$ vektörünün birim dual vektör olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm 2.3.3

$\|\vec{X}\| = \left(\|x\|, \frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|}\right) = (1, 0)$ şartını sağlarsa birim dual vektördür. O halde,

$\|x\| = 1$ ve $\langle x, x^* \rangle = 0$ eşitliği sağlanmalıdır.

$$x = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ ve } x^* = (1, 1, -4)$$

olur.

$$\|x\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$$

ve

$$\langle x, x^* \rangle = \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-4)\right) = 0$$

bulunur. O halde $\vec{X}$ birim dual vektördür.

Tanım 2.3.16 (Birim dual küre) Dual uzayda sabit bir $(0, 0, 0) \in \mathbb{D}$ sayısına 1 birim uzaklıktaki noktaların geometrik yerine birim dual küre denir. Birim dual küre $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\mathcal{S} = \{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D} - \text{Modül} \mid \|\vec{X}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$$

dir. Buradan $\|\vec{x}\|=1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0$ elde edilir.

Birim dual kürenin üzerindeki noktalara birim dual noktalar denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.6 (E. Study dönüşümü) Birim dual kürenin birim dual noktaları $\mathbb{R}^3$ te yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Özdemir, 2020).

Örnek 2.3.4

$\vec{X} = \left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{1}{3} - 4\varepsilon\right)$ birim dual vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu bulunuz.

Çözüm 2.3.4

E. Study teoremine göre $\vec{X}$ birim dual vektörü $\mathbb{R}^3$ te bir yönlü doğru belirtir. Doğru üzerinde orijine dik uzaklıkta bir $Z = (x_0, y_0, z_0)$ noktası alınsın. Bu durumda

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{1}$$

eşitliğinden doğruyu bulabiliriz. $z = \overrightarrow{OZ}$ denilirse,

$$x^* = x \times z \text{ ve } \|z\| = \|x^*\|$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Buna göre,

$$x^* = x \times z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (2z_0 - y_0, x_0 - 2z_0, 2y_0 - 2x_0)$$

eşitliğinden, $\vec{X} = \left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{1}{3} - 4\varepsilon\right)$ için, $x^* = (1, 1, -4)$ olduğundan,

$$\frac{1}{3} (2z_0 - y_0, x_0 - 2z_0, 2y_0 - 2x_0) = (1, 1, -4)$$

olmalıdır. Buradan

$$x_0 = 2z_0 + 3, \quad y_0 = 2z_0 - 3$$

bulunur. $\|z\| = \|x^*\| = \sqrt{18}$ eşitliğine göre,

$$18 = (2z_0 + 3)^2 + (2z_0 - 3)^2 + z_0^2$$

denklemden $z_0 = 0, x_0 = 3$ ve $y_0 = -3$ bulunur. O halde $\vec{X}$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

doğrusudur.

Örnek 2.3.5 $\vec{X} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} + 4\epsilon, -\frac{2}{3} + 4\epsilon\right)$ birim dual vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu bulunuz.

Çözüm 2.3.5 Bir önceki örnekteki yol izlenecektir. Orijinden doğruya çizilen dikme ayağı $Z = (x_0, y_0, z_0)$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{-2}$$

için $z = \overrightarrow{OZ}$ denilirse,

$$x^* = x \times z \text{ ve } \|z\| = \|x^*\|$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Buna göre,

$$x^* = x \times z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2z_0 + 2y_0, -2x_0 - z_0, y_0 - 2x_0)$$

eşitliğinden, $\vec{X} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} + 4\epsilon, -\frac{2}{3} + 4\epsilon\right)$ için, $x^* = (0, 4, 4)$ olduğundan,

$$\frac{1}{3}(2z_0 + 2y_0, -2x_0 - z_0, y_0 - 2x_0) = (0, 4, 4)$$

olmalıdır. Buradan

$$x_0 = -\frac{z_0}{2} - 6, \quad y_0 = -z_0$$

bulunur. $\|z\| = \|x^*\| = \sqrt{32}$ eşitliğine göre,

$$32 = \left(-\frac{z_0}{2} - 6\right)^2 + (-z_0)^2 + z_0^2$$

denkleminden $z_0 = -\frac{4}{3}, x_0 = \frac{-16}{3}$ ve $y_0 = \frac{4}{3}$ bulunur. O halde $\vec{X}$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru:

$$\frac{x + \frac{16}{3}}{1} = \frac{y - \frac{4}{3}}{2} = \frac{z + \frac{4}{3}}{-2}$$

doğrusudur.

Tanım 2.3.17 (Dual açı) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ birim dual vektörleri verilsin. $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ teki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki açı φ ve bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

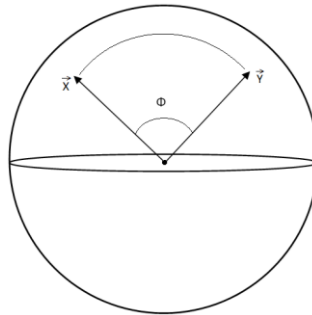
$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \cos \Phi \quad (2.37)$$

şeklindedir. Buradaki

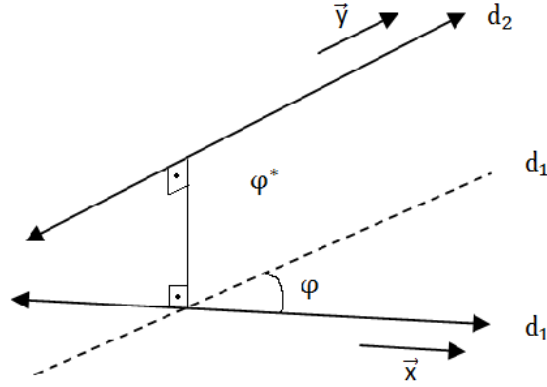
$$\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^* \quad (2.38)$$

dual sayısına $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ birim dual vektörleri arasındaki açı denir (Hacısalıhoğlu , 1983).

Birim dual küre (şekil 2.2) üzerinden alınan vektörler ile birim dual açı şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Birim dual küre.



Şekil 2.3. Dual açı.

Burada, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ birim dual vektörler değilse, vektörler normlarına bölünerek birimleştirilir.

2.4 Öklid Düzleminde Kompleks Sayılarla Dönme Hareketi

Kuaterniyonların ortaya çıkışını ve geometrik uygulamalarını daha iyi anlayabilmek için, kompleks sayılar kümesini geometrik yorumlarıyla birlikte iyi analiz etmek gerekir. Karmaşık sayılar kümesi de denilen, kompleks sayılar kümesinin

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

biçiminde tanımlandığını biliyoruz. Kompleks sayılar, birçok matematikçi tarafından geliştirilmiş ve 18. yüzyıldan itibaren geniş bir kullanım alanına ulaşmıştır.

Kompleks sayıların geometrik önemi ise, 1799 yılında kompleks sayıların düzlemdeki noktalarla eşlenmesiyle ve geometrik olarak yorumlanmasıyla birlikte başlamış ve daha sonra kompleks sayıların dairesel dönmelere karşılık gelmesiyle birlikte artmıştır (Özdemir, 2020).

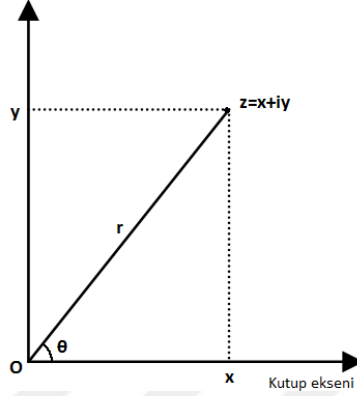
Tanım 2.4.1 Bir (x, y) noktası kompleks sayı olarak şu şekilde temsil edilir:

$$z = x + i \cdot y \quad (2.39)$$

(Şekil 2.4) burada i standart imajiner birim ve $i^2 = -1$ dir. Buradan,

$$x + i.y = x(1 + i.0) + y(0 + i.1) \quad (2.40)$$

bu nedenle 1 ve i kompleks düzlemde bir ortogonal baz oluşturur (Özdemir, 2020).



Şekil 2.4. Kompleks düzlemde bir nokta.

Tanım 2.4.2 z kompleks sayısının kutupsal veya polar gösterimi

$$z = x + i.y = r(\cos\theta + i.\sin\theta) \quad (2.41)$$

olarak verilir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.4.3 Kutupsal formda verilmiş olan

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1) \text{ ve } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$$

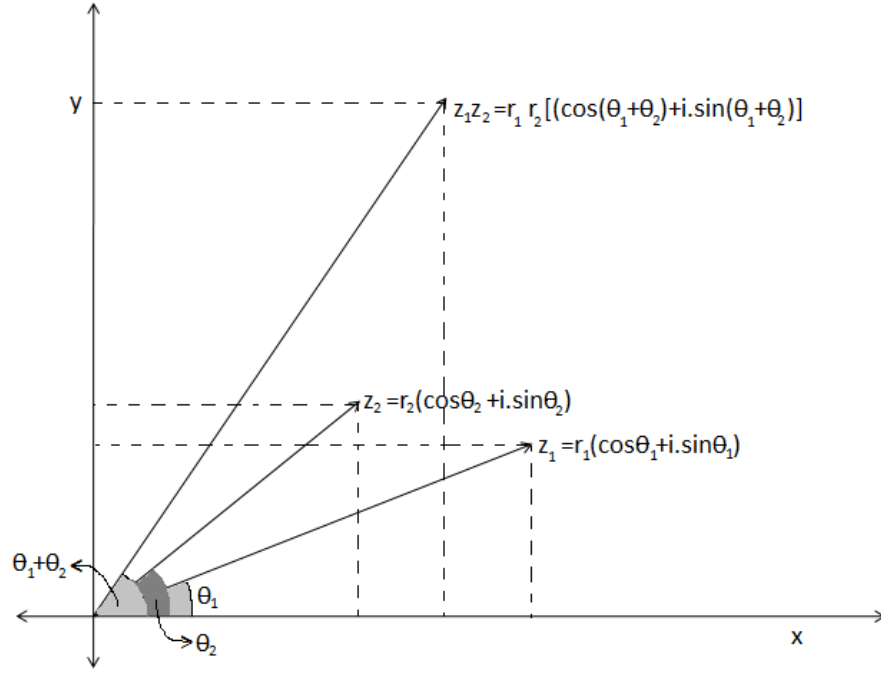
kompleks sayılarının çarpımı

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (2.42)$$

(Şekil 2.5) biçimindedir. Elde edilen kompleks sayının uzunluğu, yani orijine olan uzaklığı,

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 \quad (2.43)$$

ile verilebilir.

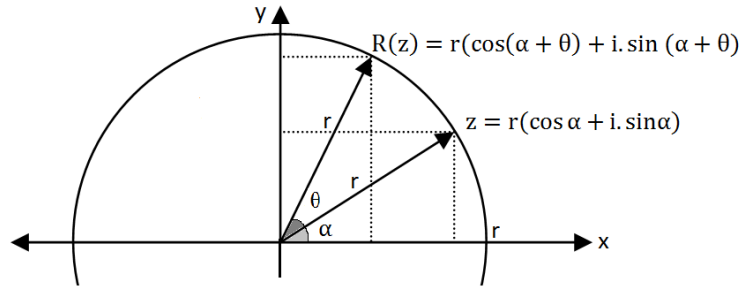


Şekil 2.5. Kompleks iki sayının çarpımı.

O halde, herhangi bir kompleks sayı,

$$z = \cos\theta + i.\sin\theta = e^{i\theta} \quad (2.44)$$

birim kompleks sayısı ile çarpılırsa, bu kompleks sayıya karşılık gelen koordinat θ açısı kadar saat yönünün tersine dairesel olarak döner (Şekil 2.6) (Özdemir, 2020).



Şekil 2.6. Kompleks düzlemde dönme.

3. REEL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, reel kuaterniyonlar tanımlanarak geometrik uygulamalarına yer verilecektir. Reel kuaterniyonların cebiri ve matrissel ifadeleri alt başlıklar halinde incelenerek, reel kuaterniyonların dönme operatörü olarak kullanılmasını temel alan uygulamalar yapılacaktır.

Tanım 3.1 Bir reel kuaterniyon, sıralı $+1, i, j, k$ gibi dört birimle ifade edilebilir. Burada $+1$ bir reel sayıdır, diğer üç birim ise;

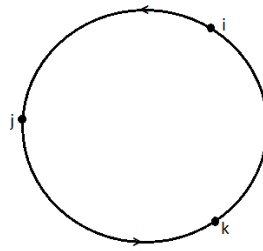
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (3.1)$$

$$i \wedge j = k, j \wedge k = i, k \wedge i = j$$

$$j \wedge i = -k, k \wedge j = -i, i \wedge k = j \quad (3.2)$$

özelliklerine sahiptir (Hamilton, 1947).

Burada i, j ve k imgesel kuaterniyonik birimler olarak adlandırılır. Görüldüğü üzere i, j, k çarpımlarının değişme özelliği yoktur. Kuaterniyon çarpım tablosu şematik olarak Şekil 3.1’de gösterilmiştir. İki kuaterniyonik birimi ok yönünde çarpmak üçüncüyü verir; okun tersi yönünde çarpmak ise üçüncünün eksi işaretlisini verir.



Şekil 3.1. Kuaterniyonların çarpım tablosu.

Tanım 3.2 Bir kuaterniyonu q ile ifade etmek istersek, a, b, c, d reel sayılar olmak üzere;

$$q = d + ai + bj + ck \quad (3.3)$$

olarak yazabiliriz. Burada d, a, b, c sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir.

d , skaler kısımdır ve S_q ile gösterilir. $ai + bj + ck$ vektörel kısımdır ve V_q ile gösterilir.

Bir kuaterniyon, vektörel ve skaler kısmın toplamından oluşur,

$$q = S_q + V_q . \quad (3.4)$$

Ayrıca, 3.3'teki gösterimle ifade edilen bir q kuaterniyonu, iki kompleks sayının toplamı şeklinde $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ olduğu düşünülerek aşağıdaki formda yazılabilir:

$$q = (d + ai) + (b + ci)j . \quad (3.5)$$

Böylelikle bir kuaterniyon, bir çift kompleks sayı ile

$$(d_{\mathbb{C}}, a_{\mathbb{C}}) = (d + ai, b + ci) \quad (3.6)$$

şeklinde gösterilebilir (Dray, 2015).

3.1 Reel Kuaterniyon Cebiri

Bu bölümde, reel kuaterniyon cebiri ile ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.1.1 $\mathbb{R}^4$, kuaterniyon çarpımına göre bir cebir teşkil eder. Bu dört boyutlu cebire kuaterniyon cebiri denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir (Dray, 2015).

Tanım 3.1.2 (Toplama işlemi) q_1 ve q_2 iki kuaterniyon olsun. Skaler kısımları ve vektörel kısımları ayrı ayrı toplanarak sonuç bulunur. Yani,

$$q_1 + q_2 = S_{q_1 + q_2} + V_{q_1 + q_2} \quad (3.7)$$

dir.

Toplama işleminin etkisiz elemanı $(0, 0, 0, 0)$ sıralı dörtlüsüdür. Bu dörtlüye sıfır kuaterniyonu denir (Ward, 1997).

Tanım 3.1.3 (Kuaterniyon Çarpımı) Kuaterniyon çarpımı dağılımlı ve birleşimlidir.

q_1 ve q_2 iki kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1i + b_1j + c_1k) \times (d_2 + a_2i + b_2j + c_2k) \\ &= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)i + \\ &\quad (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1d_2 - a_1c_2)j + (d_1c_2 + d_2c_1 + a_1b_2 - b_1a_2)k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kısaca,

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (S_{q_1} + V_{q_1}) \times (S_{q_2} + V_{q_2}) \\ &= S_{q_1}S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1}V_{q_2} + S_{q_2}V_{q_1} + (V_{q_1} \wedge V_{q_2}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde yazabiliriz.

Vektörel kısımlar lineer bağımlı ise kuaterniyon çarpımı değişmeli olur. Yani,

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1 \Leftrightarrow V_{q_1} = \lambda V_{q_2} \quad (3.10)$$

şartı sağlanır (Ward, 1997).

İki kuaterniyonun çarpımından sonra aşağıda skaler kısımları olmayan kuaterniyonların yani iki vektörün kuaterniyon çarpımları verilecektir.

Tanım 3.1.4 (İki Vektörün Kuaterniyon Çarpımı)

$q_1 = d_1 + a_1i + b_1j + c_1k$ ve $q_2 = d_2 + a_2i + b_2j + c_2k$ kuaterniyonlarının skaler kısımları 0 alınırsa yani, $d_1=d_2=0$ için,

$\vec{q}_1 = a_1i + b_1j + c_1k$ ve $\vec{q}_2 = a_2i + b_2j + c_2k$ vektörleri elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı,

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = -(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

olarak bulunur. Bu sonuç bir kuaterniyondur. Vektörlerin iç çarpımını $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle$ ve vektörel çarpımını da $\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2$ ile gösterirsek,

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \quad (3.12)$$

$$\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir.

O halde, kuaterniyonların çarpımının verildiği denklem (3.8)'de skaler kısımları 0 olduğu zaman,

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = -\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle + \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 \quad (3.14)$$

kısaltması elde edilir.

Eğer iki vektör birbirine dik ise iç çarpımları 0 olacağından

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 \quad (3.15)$$

elde edilir.

Eğer iki vektör birbirine paralel ise vektörel çarpımları 0 olacağından

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = -\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle \quad (3.16)$$

elde edilir. İki kuaterniyonun çarpımının matrislerle ifadesi,

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 - b_1 - c_1 \\ a_1 & d_1 - c_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & d_1 - a_1 \\ c_1 & -b_1 & a_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklinde de gösterilebilir (Ward, 1997).

Tanım 3.1.5 (Kuaterniyonun çarpma işlemiyle birleşme özelliği) $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_1(q_2q_3) &= (S_{q_1} + V_{q_1})(S_{(q_2q_3)} + V_{(q_2q_3)}) \\ &= S_{q_1}S_{q_2}S_{q_3} - \{S_{q_1}V_{q_2} \cdot V_{q_3} + S_{q_2}V_{q_3} \cdot V_{q_1} + S_{q_3}V_{q_1} \cdot V_{q_2}\} + \{S_{q_1}S_{q_3}V_{q_2} + S_{q_3}S_{q_2}V_{q_1} + \\ &S_{q_2}S_{q_1}V_{q_3}\} + \{S_{q_1}V_{q_2} \wedge V_{q_3} - S_{q_2}V_{q_3} \wedge V_{q_1} + S_{q_3}V_{q_1} \wedge V_{q_2}\} - (V_{q_2} \cdot V_{q_3})V_{q_1} + \\ &V_{q_1} \wedge (V_{q_2} \wedge V_{q_3}) - V_{q_1} \cdot (V_{q_2} \wedge V_{q_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q_1q_2)q_3 &= S_{q_1}S_{q_2}S_{q_3} - \{S_{q_3}V_{q_1} \cdot V_{q_2} + S_{q_1}V_{q_2} \cdot V_{q_3} + S_{q_1}V_{q_2} \cdot V_{q_3}\} \\ &+ \{S_{q_1}S_{q_2}V_{q_3} + S_{q_3}S_{q_1}V_{q_2} + S_{q_3}S_{q_2}V_{q_1}\} + \{S_{q_1}V_{q_2} \wedge V_{q_3} + S_{q_2}V_{q_1} \wedge V_{q_3} + \\ &S_{q_3}V_{q_1} \wedge V_{q_2}\} - (V_{q_1} \cdot V_{q_2})V_{q_3} + (V_{q_1} \wedge V_{q_2}) \wedge V_{q_3} - (V_{q_1} \wedge V_{q_2}) \cdot V_{q_3} \end{aligned}$$

Böylece $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$ olur (Ward, 1997).

Tanım 3.1.6 (Eşitlik) İki kuaterniyon birbirine eşit ise skaler kısımları ve vektörel kısımları da birbirine eşittir

$$q_1 = q_2 \leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2} \quad (3.18)$$

(Ward, 1997).

Tanım 3.1.7 (Fark) İki kuaterniyonun farkı bulunurken skaler kısımların farkı ve vektörel kısımların farkı ayrı ayrı bulunup sonuç elde edilir

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (V_{q_1} - V_{q_2}) \quad (3.19)$$

(Ward, 1997).

Tanım 3.1.8 (Eşlenik) Kompleks sayılarda olduğu gibi bir kuaterniyonun eşleniği yani konjugesi bulunurken, skaler kısım aynen alınırken vektörel kısmın zıt işaretlisi alınır. q kuaterniyonunun eşleniği " K_q " ya da " $\bar{q}$ " ile gösterilir.

$$q = S_q + V_q \text{ ise}$$

$$\bar{q} = S_q - V_q = d - (ai + bj + ck) = d - ai - bj - ck \quad (3.20)$$

olur.

Bir kuaterniyonun eşleniğinin eşleniği bu kuaterniyonun kendisine eşittir.

$$\bar{\bar{q}} = q \quad (3.21)$$

Ayrıca iki kuaterniyonun çarpımlarının eşlenikleri, bu kuaterniyonların eşleniklerinin çarpımlarına aşağıdaki gibi eşitlenir;

q_1 ve q_2 iki kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{(q_1 q_2)} &= \{S_{q_1} S_{q_2} - V_{q_1} \cdot V_{q_2} - S_{q_2} V_{q_1} - S_{q_1} V_{q_2} - V_{q_1} \wedge V_{q_2}\} \\ &= \overline{q_2 q_1} \end{aligned}$$

(Ward, 1997).

Bir kuaterniyon, eşleniği ile çarpıldığında bir reel sayı elde edilir.

$$q \bar{q} = \bar{q} q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

Tanım 3.1.9 q 'nın normu " N_q " ya da $|q|$ ile gösterilir.

$$|q| = \sqrt{\bar{q} q} = \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.23)$$

bulunur. q_1 ve $q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$N_{q_1 q_2} = q_1 q_2 (\overline{q_1 q_2}) = q_1 q_2 (\overline{q_2 q_1}) = q_1 \bar{q}_1 q_2 \bar{q}_2 = N_{q_1} N_{q_2} \quad (3.24)$$

(Ward, 1997).

Tanım 3.1.10 $q \neq 0$ olmak üzere $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|}$ dur ($q=0$ olursa normu da $|q|=0$ olacağından $q \neq 0$ alınmıştır). Böylece

$$q^{-1} x q = q x q^{-1} = 1 \quad (3.25)$$

elde edilir. q_1 ve q_2 iki kuaterniyon olmak üzere,

$$(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1} \quad (3.26)$$

ve $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(\lambda q_1)^{-1} = \frac{1}{\lambda} q_1^{-1}, \quad N_{q_1} \neq 0 \quad (3.27)$$

özellikleri sağlanır (Ward, 1997).

Tanım 3.1.11 (Bölme) $q_1 \neq 0$ olmak üzere q_2 kuaterniyonunun q_1 kuaterniyonuna bölümü;

$$r_1 = q_2 \cdot q_1^{-1} \quad (\text{sağdan bölümü}) \quad (3.28)$$

$$r_2 = q_1^{-1} \cdot q_2 \quad (\text{soldan bölümü}) \quad (3.29)$$

ile ifade edilir.

$\frac{q_2}{q_1}$ notasyonu kullanılamaz. q_2 yi q_1 e bölmek için q_1^{-1} ile çarpılmalıdır. Yani tersi varsa bölme de yapılabilir demektir (Ward, 1997).

Tanım 3.1.12 (Birim Kuaterniyon) $N_q = 1$ ise q kuaterniyonuna birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir (Ward, 1997).

3.2 Reel Kuaterniyonların Matrisel Gösterimleri

Bu bölümde, reel kuaterniyonların matrisel gösterimlerine yer verilecektir.

Tanım 3.2.1 $q = d + ai + bj + ck$ olmak üzere, reel kuaterniyonların 3×3 lük matris temsili,

$$A = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2dc & 2ac + 2db \\ 2ab + 2dc & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2da \\ 2ac - 2db & 2bc + 2da & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

olarak ifade edilir. Burada $A \in SO(3)$ tür (Hanson, 2006).

Teorem 3.2.1 $A \in SO(3)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir dönme matrisi olmak üzere, bu matrisin dönme açısı,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\text{iz}A - 1) \quad (3.31)$$

ile bulunur.

Tanım 3.2.2 x , bir reel kuaterniyon olsun. Sol çarpım fonksiyonunu

$$\phi_L : \phi(x) \rightarrow q.x$$

dönüşümü ile tanımlayalım. $\mathbb{R}^4 = \text{span}\{1, i, j, k\}$ olmak üzere ϕ_L dönüşümü $\mathbb{R}^4$ ten $\mathbb{R}^4$ e lineer bir dönüşümdür. Bu dönüşüm bir dönme hareketine karşılık geldiğinden açıyı ve normu korur.

$$\phi_L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\phi_L(x) \rightarrow q.x$$

$\mathbb{R}^4$ ü geren vektörler:

$1=(1,0,0,0)$, $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$ ve $k=(0,0,0,1)$ dır.

$q = d + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ve $\sqrt{N_q}=1$ olsun.

ϕ_L lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulmak için, $\phi_L(1)$, $\phi_L(i)$, $\phi_L(j)$ ve $\phi_L(k)$ kuaterniyonları,

$$\phi_L(1) = q.1$$

$$= (d + ai + bj + ck).1$$

$$= d + ai + bj + ck \quad (3.32)$$

$$\phi_L(i) = q.i$$

$$= (d + ai + bj + ck).i$$

$$\begin{aligned}
&= d.i + a.i.i + b.j.i + c.k.i \\
&= -a + d.i + c.j - b.k
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\phi_L(j) &= q.j \\
&= (d + ai + bj + ck).j \\
&= d.j + a.i.j + b.j.j + c.k.j \\
&= -b - c.i + d.j + a.k
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\phi_L(k) &= q.k \\
&= (d + ai + bj + ck).k \\
&= d.k + a.i.k + b.j.k + c.k.k \\
&= -c + b.i - a.j + d.k
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Kuaterniyonların katsayıları sütunlara yerleştirilirse q nun matrisel gösterimi

$$q = \begin{bmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

olur. Bu matris ortogonaldır. Yani $q \cdot q^T = q^T \cdot q = I_4$ ve $\det(q) = 1$ dir. Determinantının 1 olması yönü koruduğunu gösterir.

Başka bir ifade ile, 4-boyutlu uzayda bir kuaterniyonun bazının elemanları:

$$d = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

olmak üzere, 4×4 matris formunda,

$$q = d + ai + bj + ck$$

$$= \begin{bmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ile ya da 4×1 lik matris formunda

$$q = (d, a, b, c)^T = \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

şeklinde temsil edilebilir (Hanson, 2006).

3.3 Reel Kuaterniyonların Uygulamaları

Bu bölümde, reel kuaterniyonlar ile ilgili uygulamalara yer verilecektir. Ayrıca, bir reel kuaterniyonun dönme operatörü olarak kullanılması ele alınarak konu ile ilgili çeşitli örnekler sunulacaktır. Örneklere başlamadan önce reel kuaterniyonların kutupsal gösterimi verilecektir.

Bir birim kuaterniyon: $\vec{S} \in \mathbb{R}^3$ ve $\vec{S}^2 = -1$ olmak üzere,

$$q = \cos \theta + \vec{S} \sin \theta \quad (3.43)$$

formunda yazılabilir (Özdemir, 2020).

Ayrıca düzlem üzerinde verilen vektörlerin çarpımlarının, normlarına bölünmesiyle, düzlemin normali bulunabilir;

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ düzlemdeki vektörler olmak üzere,

$$\vec{S} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad (3.44)$$

elde edilir.

İki vektör arasındaki açı,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad (3.45)$$

ile elde edilir.

Teorem 3.3.1 Her $q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu,

$$\vec{S} = \frac{V_q}{\|V_q\|}, \cos \theta = \frac{S_q}{\|q\|} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\|V_q\|}{\|q\|}$$

olmak üzere,

$$q = \|q\|(\cos \theta + \vec{S} \sin \theta) \quad (3.46)$$

formunda yazılabilir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.3.2 Her $q = \cos \theta + \vec{S} \sin \theta$ birim kuaterniyonu, birim küre üzerindeki bir büyük çember yayına karşılık gelir.

Her birim kuaterniyon, aralarındaki açı θ olan ve $\vec{S}$ birim vektörüne dik olan $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ birim vektörleriyle oluşturulan, O merkezli birim kürenin bir büyük

AB çember yayına karşılık gelir. Ayrıca, AB çember yayına karşılık gelen kuaterniyonu da,

$$q = BA^{-1} = \langle A, B \rangle + A \wedge B \quad (3.47)$$

şeklinde de yazılabilir (Özdemir, 2020).

Örnek 3.3.1 $q_1 = 2 - i + 3j + k$, $q_2 = 3i + 4k$ kuaterniyonları veriliyor. q_1 i q_2 ile sağdan ve soldan bölünüz. Çıkan kuaterniyonları karşılaştırınız.

Çözüm:

$$r_1 = q_1 \times q_2^{-1} \quad \text{ve} \quad r_2 = q_2^{-1} \times q_1$$

$$r_1 = q_1 \times \frac{K_q}{N_q} = (2 - i + 3j + k) \times \frac{(-3i - 4k)}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(-6i - 8k - 3 - 4j + 9k - 12i - 3j + 4)$$

$$= \frac{1}{5}(-18i - 7j + k + 1)$$

$$r_2 = q_2^{-1} \times q_1 = \frac{(-3i - 4k)}{5} \times (2 - i + 3j + k)$$

$$= \frac{1}{5}(-6i - 3 - 9k + 3j - 8k + 4j + 12i + 4)$$

$$= \frac{1}{5}(6i + 1 - 17k + 7j)$$

Görüldüğü üzere, $r_1 \neq r_2$ dir.

Örnek 3.3.2 $q = 3i + 4k$ kuaterniyonuna ait birim kuaterniyonu bulunuz ve $q_0 = \cos \theta + S_0 \cdot \sin \theta$ formunda yazınız.

Çözüm:

$$q = 3i + 4k$$

olduğundan $d = 0, a = 3, b = 0, c = 4$ tür.

$$S_0 = \frac{(3, 0, 4)}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{0}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0, \quad \sin \theta = 1$$

$$q_0 = \cos \theta + S_0 \cdot \sin \theta$$

$$q_0 = 0 + 1 \cdot \frac{(3, 0, 4)}{5}$$

Örnek 3.3.3 $q = 2 - i + 3j + k$ kuaterniyonuna ait matrisi yazınız.

Çözüm: $d = 2, a = -1, b = 3, c = 1$ olmak üzere, 3.25'ten

$$q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 3.3.4 $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olmak üzere $\vec{a}$ vektörü hangi düzlemde dönerse $\vec{b}$ vektörü üzerine gelir? Dönme hareketinin açısı kaç derecedir?

Çözüm:

$$\vec{q} \times \vec{a} = \vec{b}$$

$$q = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right)$$

$$q = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$$

Dönme açısı $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}}$, dönme eksenini $\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ olmak üzere, $\vec{a}$, $\vec{S}$ etrafında θ kadar dönerse $\vec{b}$ nin üzerine gelir. $x - y + 0z = 0 \Rightarrow x = y$ düzleminde dönme hareketi olur. Gerçekten de $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $x = y$ düzleminindedir.

Örnek 3.3.5 $2x - y + z = 0$ düzleminde 45° lik dönme hareketi yaptıran q kuaterniyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$q = \cos\theta + \sin\theta \cdot \vec{S}$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Düzlemin normali $\vec{S}$, birimleştirilirse,

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$$

elde edilir.

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{12}}(2, -1, 1)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.6 $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 2, 1)$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde;

a) $\text{Sp}\{\vec{a}, \vec{b}\} = M$ düzleminin denklemini bulunuz.

b) Bu düzlemde 45° dönme yaptıran q operatörünü yazınız (M' 'de).

c) $q \times \vec{a} = \vec{b}$ olacak şekildeki q operatörünü bulunuz.

Çözüm:

a) $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ aynı düzlemde iken, $\vec{a} \times \vec{b}$ bu iki vektöre aynı anda dik bir vektördür.

$$\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z = 0 \quad \dots M$$

$$x - y + z = 0 \quad \dots M$$

2. yol:

$q = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$ dir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birimleştirilirse,

$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$ olur.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

$$q = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

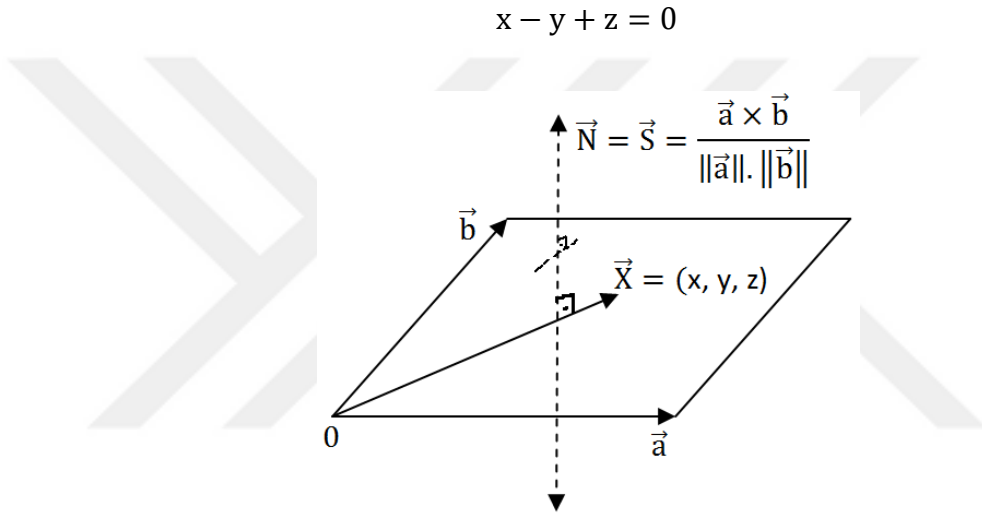
$$= \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{12}} + \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \sin\theta = \frac{1}{2}, \quad q = \cos\theta + \vec{S}\sin\theta, \quad \vec{S} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

Normali $\vec{S}$ olan ve orijinden geçen düzlem, aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2. Örnek 3.3.6 a şıkkı çözümü.

b) $q = \cos 45^\circ + \vec{S}\sin 45^\circ$ olmak üzere,

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, 1)$$

elde edilir.

c) $q \times \vec{a} = \vec{b}$ olacak şekilde q operatörü için,

1. yol:

$$q = \cos\theta + \vec{S}\sin\theta$$

$$\|\vec{a}\| = \|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{b}\| = \|(1, 2, 1)\| = \sqrt{6}$$

$$\text{İki vektör arasındaki açı} = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

$$\Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

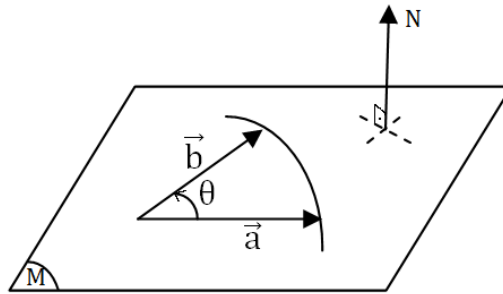
2. yol: $\vec{a}, \vec{b}$ birim olmak üzere,

$$q = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$q \times \vec{a} = \vec{b}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

elde edilir.



Şekil 3.3. Örnek 3.3.6 b şıkkı çözümü.

Örnek 3.3.7 $x + y + z = 0$ düzleminde $\vec{a} = (1, -1, 0)$ vektörünü 45° döndüren q birim kuaterniyonunu yazınız. Dönme hareketi sonucunda elde edilen yeni vektörü bulunuz.

Çözüm:

$$q = \cos \theta + \vec{S} \cdot \sin \theta = \cos 45^\circ + \vec{S} \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

olur. O halde,

$$\vec{b} = q \times \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, 1) \times (1, -1, 0)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.8 $\mathbb{R}^3$ te $2x + y + 2z = 0$ düzlemindeki bir $\vec{v}$ vektörüne 60° lik dönme hareketi yaptıran kuaterniyon operatörü nedir?

Çözüm:

$$q = \cos \theta + \vec{S} \cdot \sin \theta$$

için,

$$N_q = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{(2, 1, 2)}{3}$$

bulunur.

$$q = \frac{1}{2} + \frac{(2, 1, 2)}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})}{6}$$

kuaterniyonu elde edilir.



4. DUAL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, dual kuaterniyonlar tanımlanarak geometrik uygulamalarına yer verilecektir. Dual kuaterniyonların cebiri ve matrissel ifadeleri alt başlıklar halinde incelenerek, dual kuaterniyonların dönme ve kayma operatörlerinin birleşimi olan vida operatörü olarak kullanılmasını temel alan uygulamalar yapılacaktır.

Temel kavramlar bölümünde, dual uzay ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmişti. Dolayısıyla bu bölüme dual kuaterniyonun tanımı ile giriş yapılacaktır.

Tanım 4.6 $q = d + ai + bj + ck$ ve $q^* = d^* + a^*i + b^*j + c^*k$ iki reel kuaterniyon olmak üzere,

$$\hat{q} = q + \varepsilon q^*, \varepsilon^2 = 0 \quad (4.1)$$

bir dual kuaterniyondur. Bu dual kuaterniyon, $\hat{d} = d + \varepsilon d^*$, $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$, $\hat{b} = b + \varepsilon b^*$, $\hat{c} = c + \varepsilon c^*$ iken

$$\hat{q} = \hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k \quad (4.2)$$

olarak da yazılabilir. $\hat{d}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ dual sayıları $\hat{q}$ nun dual bileşenleridir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.7 Bir dual kuaterniyonun skaler kısmı $S_{\hat{q}}$, vektörel kısmı $\vec{V}_{\hat{q}}$ olmak üzere,

$$\hat{q} = S_{\hat{q}} + \vec{V}_{\hat{q}} \quad (4.3)$$

$$S_{\hat{q}} = S_q + \varepsilon S_{q^*} = \hat{d} \quad (4.4)$$

ve

$$\vec{V}_{\hat{q}} = \vec{V}_q + \varepsilon \vec{V}_{q^*} = \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k \quad (4.5)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir dual kuaterniyonun skaler kısmı dual sayı; vektörel kısmı ise dual vektördür.

Tanım 4.8 Eğer $S_{\hat{q}} = 0$ ve $\overrightarrow{V_{\hat{q}}} = 0$ ise $\hat{q} = 0$ dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.1 Dual Kuaterniyon Cebiri

Tanım 4.1.1 (Eşitlik) $\hat{q}_1$ ve $\hat{q}_2$ iki dual kuaterniyon olmak üzere,

$S_{\hat{q}_1} = S_{\hat{q}_2}$ ve $\overrightarrow{V_{\hat{q}_1}} = \overrightarrow{V_{\hat{q}_2}}$ ise $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$ olur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.1.2 (Toplama ve çıkarma) İki kuaterniyonun toplamı,

$$\hat{q}_1 + \hat{q}_2 = (S_{\hat{q}_1} + S_{\hat{q}_2}) + (\overrightarrow{V_{\hat{q}_1}} + \overrightarrow{V_{\hat{q}_2}}), \quad (4.6)$$

farkları da,

$$\hat{q}_1 - \hat{q}_2 = (S_{\hat{q}_1} - S_{\hat{q}_2}) + (\overrightarrow{V_{\hat{q}_1}} - \overrightarrow{V_{\hat{q}_2}}) \quad (4.7)$$

ile ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.1.3 (Çarpım) $\hat{q}_1 = q_1 + \varepsilon q_1^*$ ve $\hat{q}_2 = q_2 + \varepsilon q_2^*$ iki dual kuaterniyon olmak üzere çarpımları,

$$\hat{q}_1 \times \hat{q}_2 = q_1 \times q_2 + \varepsilon (q_1 \times q_2^* + q_1^* \times q_2) \quad (4.8)$$

$$\hat{q}_2 \times \hat{q}_1 = q_2 \times q_1 + \varepsilon (q_2 \times q_1^* + q_2^* \times q_1) \quad (4.9)$$

ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanımdan da görüldüğü üzere dual kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Tanım 4.1.4 (Eşlenik) $\hat{q} = q + \varepsilon q^*$ dual kuaterniyonunun eşleniği (konjugesi) $K_{\hat{q}}$ ile gösterilir ve

$$K_{\hat{q}} = K_q + \varepsilon K_{q^*} = \hat{d} - \hat{a}i - \hat{b}j - \hat{c}k \quad (4.10)$$

ile tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.1.5 (Norm) $\hat{q}$ dual kuaterniyonunun normu $N_{\hat{q}}$ ile gösterilir ve

$$N_{\hat{q}} = \hat{q} \times K_{\hat{q}} = K_{\hat{q}} \times \hat{q} = \hat{d}^2 + \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 \quad (4.11)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.1.6 (İnvers) Bir $\hat{q}$ dual kuaterniyonunun inversi $\hat{q}^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\hat{q}^{-1} = \frac{K_{\hat{q}}}{\sqrt{N_{\hat{q}}}} = \frac{\hat{d} - \hat{a}i - \hat{b}j - \hat{c}k}{\sqrt{\hat{d}^2 + \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2}} \quad (4.12)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 4.1.7 (Bölme) $\hat{q}_1$ ve $\hat{q}_2$ iki dual kuaterniyon olmak üzere, $\hat{q}_1$ in, $\hat{q}_2$ ye sağdan bölümü,

$$\hat{q}_1 \times \hat{q}_2^{-1} \quad (4.13)$$

$\hat{q}_1$ in, $\hat{q}_2$ ye soldan bölümü,

$$\hat{q}_2^{-1} \times \hat{q}_1 \quad (4.14)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2 Dual Kuaterniyonların Matrisel Gösterimleri

Bu bölümde, dual kuaterniyonların matris gösterimleri ifade edilecektir. İlk olarak, bir dual kuaterniyona karşılık gelen 3×3 -lük matris tanımlanacaktır.

Tanım 4.2.1 $\hat{q} = \hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k$ olmak üzere, dual kuaterniyonların 3×3 lük matris temsili,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{d}^2 + \hat{a}^2 - \hat{b}^2 - \hat{c}^2 & 2\hat{a}\hat{b} - 2\hat{d}\hat{c} & 2\hat{a}\hat{c} + 2\hat{d}\hat{b} \\ 2\hat{a}\hat{b} + 2\hat{d}\hat{c} & \hat{d}^2 - \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 & 2\hat{b}\hat{c} - 2\hat{d}\hat{a} \\ 2\hat{a}\hat{c} - 2\hat{d}\hat{b} & 2\hat{b}\hat{c} + 2\hat{d}\hat{a} & \hat{d}^2 - \hat{a}^2 - \hat{b}^2 + \hat{c}^2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 4.2.2 X bir dual kuaterniyon olsun. Sol çarpım fonksiyonu

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}: \varphi(x) \rightarrow \hat{q}.x$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{D}^4 = \text{span}\{1, i, j, k\}$ olmak üzere φ_L dönüşümü $\mathbb{D}^4$ ten $\mathbb{D}^4$ e lineer bir dönüşümdür. Bu dönüşüm bir dönme hareketine karşılık geldiğinden açıyı ve normu korur.

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^4 \rightarrow \mathbb{D}^4$$

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}(x) \rightarrow \hat{q}.x$$

$\mathbb{D}^4$ uzayının bazının elemanları olan vektörler;

$1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$ ve

$\hat{q} = \hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k$ için $\sqrt{N_q} = 1$ olsun. $\varphi_L^{\mathbb{D}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulmak için, $\varphi_L^{\mathbb{D}}(1)$, $\varphi_L^{\mathbb{D}}(i)$, $\varphi_L^{\mathbb{D}}(j)$ ve $\varphi_L^{\mathbb{D}}(k)$ kuaterniyonları,

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}(1) = \hat{q}.1$$

$$= (\hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k).1$$

$$= \hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k \quad (4.16)$$

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}(i) = \hat{q}.i$$

$$= (\hat{d} + \hat{a}i + \hat{b}j + \hat{c}k).i$$

$$= \hat{d}.i + \hat{a}.i.i + \hat{b}.j.i + \hat{c}.k.i$$

$$= -\hat{a} + \hat{d}i + \hat{c}j - \hat{b}k \quad (4.17)$$

$$\varphi_L^{\mathbb{D}}(j) = \hat{q}.j$$

$$= (\hat{d} + \hat{a}.i + \hat{b}.j + \hat{c}.k).j$$

$$= \hat{d}.j + \hat{a}.i.j + \hat{b}.j.j + \hat{c}.k.j$$

$$= -\hat{b} - \hat{c}.i + \hat{d}.j + \hat{a}.k \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_L^{\mathbb{D}}(k) &= \hat{q}.k \\
&= (\hat{d} + \hat{a}.i + \hat{b}.j + \hat{c}.k).k \\
&= \hat{d}.k + \hat{a}.i.k + \hat{b}.j.k + \hat{c}.k.k \\
&= -\hat{c} + \hat{b}.i - \hat{a}.j + \hat{d}.k
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Kuaterniyonların katsayıları sütunlara yerleştirilirse, $\varphi_L^{\mathbb{D}}$ dönüşümünün matris temsili

$$A_{\varphi_L^{\mathbb{D}}} = \begin{bmatrix} \hat{d} & -\hat{a} & -\hat{b} & -\hat{c} \\ \hat{a} & \hat{d} & -\hat{c} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & -\hat{a} \\ \hat{c} & -\hat{b} & \hat{a} & \hat{d} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

olarak ifade edilir (Hanson, 2006).

$A_{\varphi_L^{\mathbb{D}}} \cdot \varphi_L^{\mathbb{D}^T} = I$ ve $\det(A_{\varphi_L^{\mathbb{D}}}) = 1$ olduğundan $A_{\varphi_L^{\mathbb{D}}} \in SO(4, \mathbb{D})$ dir. Burada $\hat{q}.x$, $\mathbb{D}^4$ te x 'in döndürülmesine karşılık gelir.

4.3 Dual Kuaterniyonların Uygulamaları

Bu bölümde, bir dual kuaterniyon, dönme ve kayma operatörlerinin birleşimi olan vida operatörü olarak ele alınacaktır.

Tanım 4.3.1 $\hat{q} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) + \vec{S}\sin(\theta + \varepsilon\theta^*)$ operatörüne vida operatörü denir.

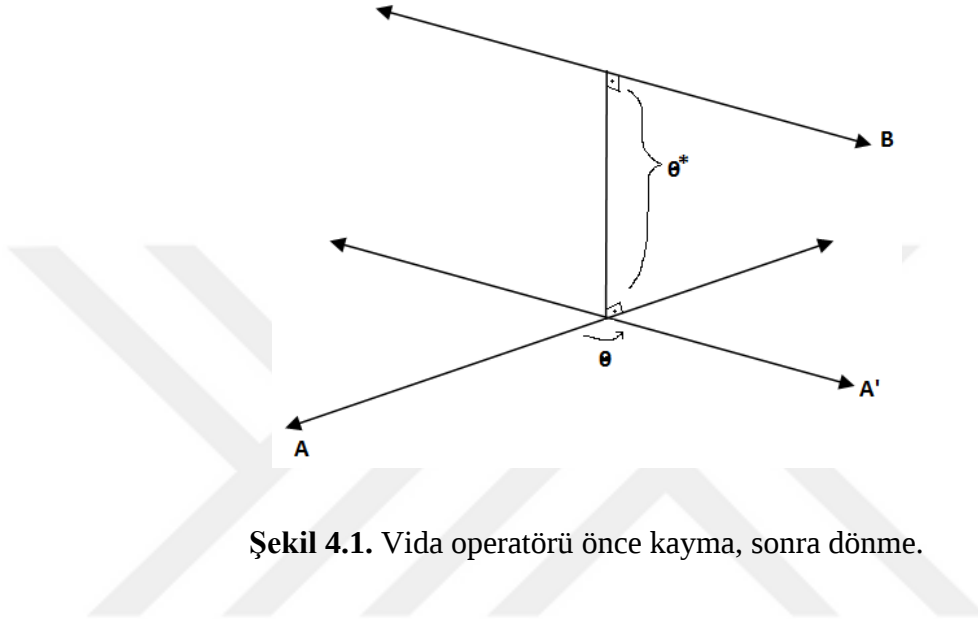
$\theta^* = 0$, $\theta \neq 0$ durumunda $\hat{q}$ dönme operatörü; $\theta = 0$, $\theta^* \neq 0$ durumunda $\hat{q}$ kayma operatörü olur.

$$\begin{aligned}
\hat{q} &= \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) + \vec{S}.\sin(\theta + \varepsilon\theta^*) \\
&= (\cos\theta + \vec{S}\sin\theta) \times (1 + \varepsilon\theta^*\vec{S}) \\
&= (1 + \varepsilon\theta^*\vec{S}) \times (\cos\theta + \vec{S}\sin\theta)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

(değişme özelliği vardır).

$(1 + \varepsilon \theta^* \vec{S}) \rightarrow \hat{q}_K$ (kayma) ve $(\cos\theta + \vec{S}\sin\theta) \rightarrow \hat{q}_D$ (dönme) şeklinde ifade edilsin.

1. Durum: Vida operatörü, önce döndürür sonra kaydırır.



Şekil 4.1. Vida operatörü önce kayma, sonra dönme.

$$\hat{q} \times A = (\hat{q}_K \times \hat{q}_D) \times A$$

$$= \hat{q}_K \times (\hat{q}_D \times A)$$

$$= \hat{q}_K \times A'$$

$$= B$$

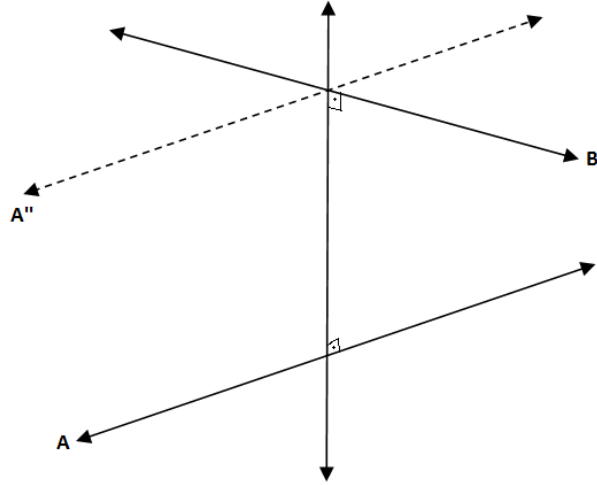
$$A \xrightarrow{\hat{q}_D} A' \xrightarrow{\hat{q}_K} B$$

2. Durum: Bu durumda vida operatörü önce kaydırır sonra döndürür.

$$\hat{q} \times A = \hat{q}_D \times (\hat{q}_K \times A)$$

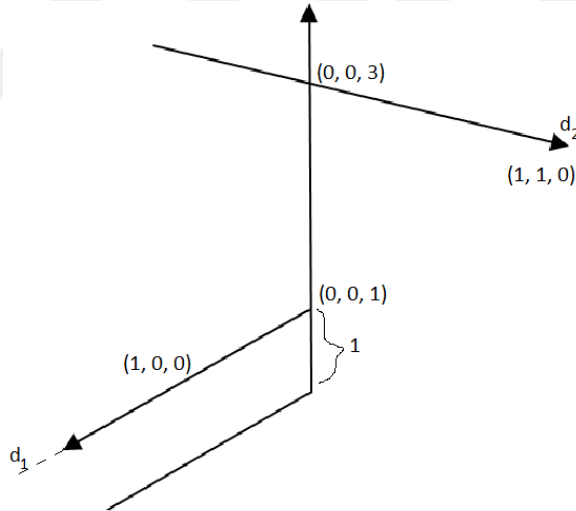
$$= \hat{q}_D \times A'' = B$$

$$A \xrightarrow{\hat{q}_K} A'' \xrightarrow{\hat{q}_D} B$$



Şekil 4.2. Vida operatörü önce dönme, sonra kayma.

Örnek 4.3.1 Aşağıdaki görselde verildiği üzere, d_1 doğrusunu d_2 doğrusu üzerine getiren vida operatörünü yazınız. Bu vida operatörünü bir dönme hareketi ve bir kayma hareketinin bileşkesi olarak ifade ediniz.



Şekil 4.3. Örnek 4.3.1 koordinatları.

Çözüm: d_2 ... $(0, 0, 3)$ geçtiği nokta, $(1, 1, 0)$ doğrultman, P_2 , d_2 üzerinde bir nokta

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{B} = \vec{b} + \vec{b}^*$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1-3\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1+3\varepsilon}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$d_1 \dots (0, 0, 1)$ geçtiği nokta, $(1, 0, 0)$ doğrultmanı ve P_1 , d_1 üzerindeki bir nokta olmak üzere,

$$\vec{a} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{a}$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{1} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (1, \varepsilon, 0)$$

$$A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \dot{1} & \dot{0} & \dot{0} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \langle (1, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \rangle + \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

elde edilir.

d_1 ile d_2 arasındaki açı:

$$\cos\theta = \frac{a \wedge b}{\|a\| \cdot \|b\|} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

d_1 ile d_2 arasındaki uzaklık: 2 br olmak üzere,

$$\hat{q} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\varepsilon\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\varepsilon\right)(0, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon\right)(0, 0, 1)$$

$$= \langle A, B \rangle + A \wedge B$$

$$\hat{q}_D = \cos 45^\circ + \vec{S} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1)$$

$$\hat{q}_K = 1 + 2\varepsilon \cdot \vec{S} = 1 + 2\varepsilon(0, 0, 1)$$

elde edilir.

Örnek 4.3.2

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$$

$$d_2: x = y = z$$

doğruları veriliyor. d_2 yi d_1 in üzerine getiren vida operatörünü bulunuz.

Çözüm: $d_1: M(0, 1, 0)$ geçtiği nokta ve doğrultman vektörü $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3)$

olmak üzere,

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{1} & \dot{0} \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3) + \varepsilon \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right)$$

elde edilir.

$d_2: N(0, 0, 0)$ geçtiği nokta ve doğrultmanı $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ olmak üzere,

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) + \varepsilon(0, 0, 0)$$

$$\hat{q} \times A = B$$

$$\hat{q} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{2+3\varepsilon}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3-2\varepsilon}{\sqrt{14}} \right) \right\rangle$$

$$= \frac{2+3\varepsilon}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{3-2\varepsilon}{\sqrt{42}} = \frac{6+\varepsilon}{\sqrt{42}}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \dot{1} & \dot{1} & \dot{1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2+3\varepsilon}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3-2\varepsilon}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \left(\frac{2-2\varepsilon}{\sqrt{42}}, \frac{-1+5\varepsilon}{\sqrt{42}}, \frac{-1-3\varepsilon}{\sqrt{42}} \right)$$

$$\hat{q} = \frac{6+\varepsilon}{\sqrt{42}} + \left(\frac{2-2\varepsilon}{\sqrt{42}}, \frac{5\varepsilon-1}{\sqrt{42}}, \frac{-1-3\varepsilon}{\sqrt{42}} \right)$$

olur.

Örnek 4.3.3

$$d_1 \dots \left\{ \frac{x-0}{1} = t, \quad y = z = 0 \right\}$$

$$d_2 \dots \left\{ \frac{x-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, z = 2 \right\}$$

doğrularına karşılık gelen A ve B birim dual vektörlerini bulunuz ve A'yı B'nin üzerine getiren kuaterniyon operatörünü yazınız.

Çözüm: d_1 üzerindeki $M=(0, 0, 0)$ noktası ve doğrultmanı $\vec{a} = (1, 0, 0)$ olmak üzere,

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{0} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{A} = (1, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, 0)$$

elde edilir.

d_2 üzerindeki $N=(0, 0, 2)$ noktası ve doğrultmanı $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olmak üzere,

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \varepsilon \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\hat{q} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle (1, 0, 0) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon, 0 \right) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \dot{1} & \dot{0} & \dot{0} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon \right)$$

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon + \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.3.4 Ox eksenini Oz eksenini etrafında 30° döndüren ve Oz eksenini boyunca 2 birim öteleyen $\hat{q}$ vida operatörünü yazınız. Yeni doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\hat{q} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) + \vec{S} \sin(\theta + \varepsilon\theta^*)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\varepsilon\right) + \vec{S} \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\varepsilon\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{6} - 2\varepsilon \sin\frac{\pi}{6} + (0, 0, 1) \cdot \sin\frac{\pi}{6} + 2\varepsilon \cos\frac{\pi}{6} \cdot (0, 0, 1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon + (0, 0, 1) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\varepsilon\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon + \left(0, 0, \frac{1}{2} + \sqrt{3}\varepsilon\right)$$

$$\hat{q} \times \vec{A} = \hat{q} \times (1, 0, 0)$$

$$= S_{\hat{q}} \cdot 0 - \left\langle \left(0, 0, \frac{1}{2} + \sqrt{3}\varepsilon\right), (1, 0, 0) \right\rangle$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon\right) (1, 0, 0) + 0 \cdot V_{\hat{q}} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \sqrt{3}\varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - 2\varepsilon}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}\varepsilon}{2}, 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1, 0) + \varepsilon \frac{1}{2}(-2, \sqrt{3}, 0)$$

Doğrunun denklemi,

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = y, z = 0 \quad \text{olur.}$$

Örnek 4.3.5 $\vec{S} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varepsilon(1, 1, -2)$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Doğrunun doğrultmanı $\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ ve geçtiği nokta $z = \vec{S} \wedge \vec{S}^*$ (orijinden doğruya indirilen dikmenin ayağı) olmak üzere,

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} \dot{1} & \dot{1} & \dot{1} \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3, 3, 0) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$$

olur.

Doğrunun kartezyen denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{x - (-\sqrt{3})}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{y - \sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{z - 0}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Parametrik olarak da aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x + \sqrt{3} = y - \sqrt{3} = z = t$$

Örnek 4.3.6 $\frac{x-1}{2} = y = z$ denkleminin karşılık gelen birim dual vektörü bulunuz.

Çözüm: Doğrunun doğrultmanı $(2, 1, 1)$, birimleştirilerek,

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$$

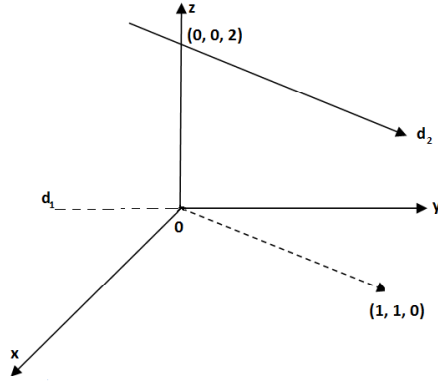
elde edilir. Doğrunun geçtiği nokta, $M = (1, 0, 0)$ olmak üzere, s^* aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M \wedge \vec{S} = s^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \dot{1} & \dot{0} & \dot{0} \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, 1)$$

$s \perp s^*$ olduğundan, $\langle \vec{S}, \vec{s}^* \rangle = 0$ dir.

$$\vec{S} = \vec{s} + \varepsilon \vec{s}^* \Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, 1)$$

Örnek 4.3.7



Şekil 4.4. Örnek 4.3.7 koordinatları.

- a) d_1 doğrusuna karşılık gelen $\vec{A}$ birim dual vektörü ile d_2 doğrusuna karşılık gelen $\vec{B}$ birim dual vektörünü bulunuz.
- b) d_1 ve d_2 arasındaki açıyı ve en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm:

- a) d_1 doğrusunun geçtiği nokta $(0, 0, 0)$, d_1 üzerinde bir nokta P_1 ve $(0, 1, 0)$ doğrultman vektörü olmak üzere,

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{a}$$

$$= (0, 0, 0) \wedge \vec{a}$$

$$= (0, 0, 0)$$

ve buradan

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

$$= (0, 1, 0) + \varepsilon(0, 0, 0)$$

$$= (0, 1, 0)$$

elde edilir.

d_2 doğrusunun geçtiği nokta $(0, 0, 2)$, doğrultmanı $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ ve d_2 üzerinde bir nokta P_2 olmak üzere,

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{b}$$

$$\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$$

$$b^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \dot{0} & \dot{0} & \dot{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-2, 2, 0)$$

$$= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) + \varepsilon(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\varepsilon, 0 \right)$$

şeklinde elde edilir.

b) Doğrular arasındaki açı,

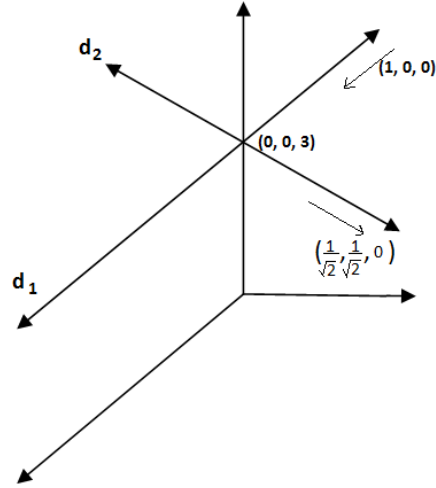
$$\langle A, B \rangle = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\varepsilon = \cos\theta + \varepsilon(-\theta^*\sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

olur. Doğrular arasındaki uzaklık ise, $\theta^* = 2$ olarak elde edilir.

Örnek 4.3.8 Aşağıdaki şekil 4.5'te verildiği üzere, d_1 doğrusunu d_2 doğrusu üzerine getiren q dönme operatörünü bulunuz.



Şekil 4.5. Örnek 4.3.8 koordinatları.

Çözüm: d_1 doğrusunun geçtiği nokta $(0, 0, 3)$, doğrultmanı $(1, 0, 0)$ ve d_1 üzerinde bir nokta P_1 olmak üzere, $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\vec{a} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{a}$$

$$= (0, 0, 3) \wedge (1, 0, 0)$$

$$= (0, 3, 0).$$

O halde, $\vec{A}$ birim dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

$$= (1, 0, 0) + \varepsilon(0, 3, 0)$$

$$= (1, 3\varepsilon, 0)$$

olarak elde edilir.

d_2 doğrusunun geçtiği nokta $(0, 0, 3)$, doğrultmanı $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, d_2 üzerinde bir nokta P_2 olmak üzere,

$$\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{b}$$

$$= (0, 0, 3) \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$= \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1-3\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1+3\varepsilon}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$q = \langle A, B \rangle + A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1).$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kuaterniyonlar, 3 – boyutlu uzayda dönme hareketlerini tarif etmenin alternatif bir yolu olarak önemli rol oynamaktadır. Hareket geometrisindeki geniş kullanım alanının yanı sıra, havacılık ve uzay mühendisliğinde, robotların ileri ve geri hareketlerinin temelinde ve sorunlarının giderilmesinde, oyun geliştirme aşamalarında ve fizikteki pek çok uygulamada önemli bir yere sahiptir.

Bu tez çalışmasında, reel ve dual kuaterniyonların cebirleri tanıtılmış, matrissel ifadeleri sunulmuş, ardından da 3 - boyutlu reel ve dual uzayda, nasıl dönme ve vida operatörleri olarak kullanıldığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının devamı olarak hareket geometrisinde rol oynayan diğer kuaterniyon çeşitleri ve bunların geometrik uygulamaları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Başar, F., 2012. Lineer cebir, Görsel Dizayn Ofset Matbaacılık Tic. Ltd. Şti., Üçüncü Baskı, İstanbul.
- Bottema, O., Roth, B., 1979. Theoretical kinematics, Amsterdam.
- Dray, T., 2015. The geometry of the octanions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Oregon State University, USA.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1971. On the rolling of one curve or surface upon another mathematical, Proceeding of the R. Irish Academy, 71(A),2, 13-17.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1983. Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1998. Diferensiyel geometri, 1, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara.
- Hamilton, R.W., 1947. On quaternions, Proceedings of the Royal Irish Academy 3: 1-16.
- Hanson, A.J., 2006. Visualizing quaternions, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, USA.
- Özdemir, M., 2020. Kuaterniyonlar ve geometri, Birinci Baskı, Altın Nokta Basım, İzmir.
- Ward, J.P., 1997. Quaternions and cayley numbers, Algebra and Applications, Springer, Netherlands.
- Yaylı, Y., 1988. Hamilton hareketleri ve lie grupları, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Humayla ÖNDER

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Akdeniz Üniversitesi, 2011-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2019-2021

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Dr. Cahit Ünver OO/Üniversite stajı
2. Meryem Mustafa Ege OO/Üniversite stajı
3. Nebi Güney İHO/Ücretli Matematik öğretmeni
4. Hüseyin Ak OO / Aday Matematik Öğretmeni
5. Kırımini OO/ Matematik Öğretmeni
6. Kızılkaya OO/Matematik Öğretmeni

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Sempozyumlar

1. Önder, H. ve Yüca, G., 2021. One-Parameter Homothetic Motions with Quaternions and Their Geometric Applications, IFSCOM2021, Mersin, 25-29 Mayıs.