

5328.

KÜBİK CİSİMLERDE
TAMLIK TABANI, DISKRİMİNANT VE İNDİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

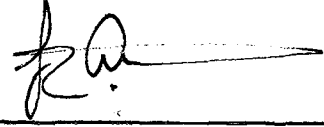
Mustafa YAPICI

Eylül 1988

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



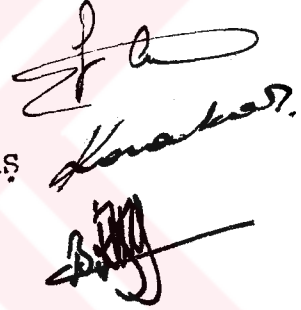
Danışman
Prof.Dr. Fethi Çallıalp

Sınav Jürisi

Başkan : Prof.Dr.Fethi ÇALLIALP

Üye : Yrd.Doç.Dr.Bülent KARAKAŞ

Üye : Yrd.Doç.Dr.Baki KARLIĞA



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına uygundur.



KÜBİK CİSİMLERDE
TAMLIK TABANI, DİSKRİMİNANT VE İNDİSLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa YAPICI
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 1988

ÖZ

Bu çalışmada, Q rasyonel sayı cisminin n -nci dereceden cisim genişlemesi ele alınmış ve $n = 3$ durumunda kübik cismin elemanlarıyla bazı hesaplamalar yapılarak, cisimdeki cebirsel tam elemanlarla, onların oluşturduğu halka incelenmiştir. İz ve norm tanımlarından yararlanarak diskriminant tanımlanmış ve diskriminantla ilgili olarak; üçüncü bölümde kullandığımız bazı teoremler ispatlanmıştır. Bazı sonlu genişlemelere Galois grubu karşılık getirilerek, f polinomunun diskriminantı ile f nin F cismi (Q nun cisim genişlemesi) üzerindeki Galois grubu $\text{Gal}_F(f)$ arasındaki ilişki ve cismin diskriminantıyla cisim arasındaki ilişki incelenmiştir. İndeks tanımı yapılarak, $Q((ab^2)^{1/3})$ pür kübik cisminin bir tamlık tabanı verilmiş, minimum indeksi, önceden verilen bir N pozitif tamsayısından daha büyük olan bir kübik cismin varlığı gösterilmiştir.

INTEGRAL BASIS, DISCRIMINANT AND INDICES
IN CUBIC FIELDS

(M.Sc. Thesis)

Mustafa YAPICI

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

September 1988

ABSTRACT

In this study the field extension from n . degree of the $\mathbb{Q}$ rational number field has been taken into consideration and being made calculations with numbers in cubic field which have a position ($n = 3$), algebraic integer in the field and ring which they have formed, have been examined. Making use of norm and trace definitions, the discriminant of it has been defined and some theorems related to its discriminant that we used in the third part have been proved. Being brought Galois group as a reply to some finite extensions, the relationship between Galois group on F field of f , $\text{Gal}_F(f)$ and the discriminant of f polynomial and the relationship between discriminant of field and field have been examined. Being given a definition of index the integral basis of $\mathbb{Q}((ab^2)^{1/3})$ pure cubic field have been given, existence of a cubic field whose minimum index is greater than any previously assigned N positive number.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen
Sayın Hocam Prof.Dr. Fethi Çallıalp'e teşekkürlerimi ve
en derin saygılarımı sunarım



İÇİNDEKİLER

ÖZ	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
BÖLÜM 1	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
BÖLÜM 2	
TAMLIK HALKASI VE DİSKRİMİNANT	7
2.1. Kübik Cisimde Bazı Hesaplamalar	7
2.2. Tamlık Halkası	13
2.3. İz, Norm ve Diskriminant	17
2.4. Tamlık Tabanı	28
BÖLÜM 3	
KÜBİK CİSİMLER	34
3.1. Diskriminantla 3. ncü Dereceden Asal Bir Polinomun Galois Grubu Arasındaki İlişki	34
3.2. Diskriminant ile Cisim Arasındaki İlişki	38
3.3. Kübik Cisimlerde İndisler	46
KAYNAK	58
ÖZGEÇMİŞ	

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1. E bir cisim olsun. E deki işlemlere göre kendi başına bir cisim olan E nin bir alt kümesi F ye, E nin bir alt cismi ve bu durumda da E ye F nin bir genişlemesi denir. E/F şeklinde gösterilir.

TANIM 1.2. E, F nin bir genişlemesi ve $S \subset E$ bir alt küme olsun. E nin F ve S yi kapsayan bütün alt cisimlerinin arakesiti $F(S)$ ile gösterilir ve bu cisme, F ye S nin elemanları katılarak elde edilen cisim denir. Bu tanıma göre, $F(S)$ bu özellikte en küçük cisimdir.

TANIM 1.3. E, F nin bir genişlemesi ve $\theta \in E$ olsun. $f(\theta) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in F[x]$ polinomu varsa, θ ya F üzerinde cebirsel eleman denir.

TANIM 1.4. F üzerinde cebirsel $\theta \in F$ nin sağladığı asal ve monik polinoma, θ nın F üzerinde sağladığı minimal polinom denir ve $P_F(\theta, x)$ ile gösterilir. $d^0 P_F(\theta, x)$ e de, θ nın F üzerindeki derecesi denir.

TANIM 1.5. E, F nin bir genişlemesi ise E ye F -vektör uzayı olarak bakabiliriz. E nin F üzerindeki boyutuna E/F genişlemesinin derecesi denir, $[E:F]$ ile gösterilir.

TEOREM 1.6. $\theta \in E$, F üzerinde cebirsel ve $P_F(\theta, x)$ in derecesi $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde:

$$(i) [F(\theta):F] = n$$

$$(ii) F(\theta) \text{ nın bir } F\text{-tabanı } \{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\} \text{ dir.}$$

İspat : (ii) gösterilirse (i) de ispatlanmış olur.

Her $b \in F(\theta)$ nın, $b_i \in F$ olmak üzere,

$b = b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$ şeklinde tek türlü olarak yazılabileceğini gösterelim. b nin başka bir yazılışı $b'_i \in F$, $b = b'_0 + b'_1\theta + \dots + b'_{n-1}\theta^{n-1}$ olsun. Buradan

$$0 = (b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)\theta + \dots + (b_{n-1} - b'_{n-1})\theta^{n-1} \text{ bulunur.}$$

Bu ise, θ nın F üzerinde derecesi $\leq n-1$ olan bir polinomun kökü olması demektir. Bu ise $d^0 P_F(\theta, x) = n$ ile çelişir. Her i için $b_i = b'_i$ olmalıdır.

Şimdide yazılışın varlığını gösterelim.

$$P_F(\theta, x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$$

olsun. Buradan,

$$\theta^n = -c_{n-1}\theta^{n-1} - \dots - c_0$$

bulunur. Her $r \in \mathbb{N}$ için, $\theta^r = b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$ dir.

Şu halde F ve θ yı kapsayan en küçük halka,

$$F[\theta] = \{b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1} \mid b_i \in F\} \text{ dir.}$$

$F[\theta] \subset F(\theta)$ olduğu açıktır. Eğer $F[\theta]$ nın cisim olduğunu gösterirsek eşitlik bulunur. $b \in F(\theta)$ alalım.

$\varphi_\theta : F[x] \rightarrow F[\theta] ; \varphi_\theta(f(x)) = f(\theta)$ dönüşümü örten bir homomorfizmadır. $F[x]$ in T.İ.B. olduğu göz önünde tutularak, $\text{Çek}\varphi_\theta = (P_F(\theta, x))$ bulunur. $P_F(\theta, x)$ asal olduğundan, $\text{Çek}\varphi_\theta$ asal ideal, fakat T.İ.B. de asal idealler maksimal olduğundan $\text{Çek}\varphi_\theta$ maksimal idealdir. Şu halde $F[x]/\text{Çek}\varphi_\theta \cong F[\theta]$ cisimdir.

$F(\theta)$ cismine, F ye θ katmakla elde edilen basit genişleme denir.

TANIM 1.7. E, F nin bir genişlemesi olsun. Her $\theta \in E, F$ üzerinde cebirsel ise E ye F nin bir cebirsel genişlemesi denir.

TEOREM 1.8. $[E:F] = \text{sonlu}$ ise E, F nin cebirsel genişlemesidir.

İspat : $\theta \in E, [E:F] = n$ olsun. $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$, E nin $n + 1$ elemanı olduğundan, F üzerinde lineer bağımlıdır. Yani, $c_0 + c_1\theta + \dots + c_n\theta^n = 0$ olacak şekilde, hepsi sıfır olmayan $c_i \in F$ ler bulunabilir. Bu ise, θ nın $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \in F[x]$ polinomunun bir kökü olması demektir. Yani θ F üzerinde cebirseldir.

TEOREM 1.9. (İlkel Eleman Teoremi) $E = F(\alpha, \beta), F$ nin cebirsel bir genişlemesi olsun. Bu takdirde $E = F(\gamma)$ olacak şekilde bir $\gamma \in E$ bulunabilir.

İspat : [1]. Teorem 1.2.3.

TANIM 1.10. α , F cismi üzerinde cebirsel ve $f = P_F(\alpha, x)$ olsun. $f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, ($\alpha = \alpha_1$) ise $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ye $\alpha = \alpha_1$ in F üzerindeki eşlenikleri denir.

TANIM 1.11. E ve K bir F cisminin iki genişlemesi ve $\delta : E \rightarrow K$ bir monomorfizma olsun. Eğer her $a \in F$ için $\delta(a) = a$ ise δ ya E den K içine bir F -monomorfizma denir.

TEOREM 1.12. $[E:F] = n$ ve $\beta \in E$ için $E = F(\beta)$ olsun. $\delta : E \rightarrow \mathbb{C}$ bir F -monomorfizma ise $\delta(\beta)$, β nin F üzerinde bir eşleniğidir. E nin bütün F -monomorfizmalarının sayısı tam n -tanedir ve β nin eşlenikleri $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ iseler bunlar $\delta_i(\beta) = \beta_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ile belirlidirler.

İspat : [1]. Teorem 1.2.4.

Yukarıdaki teoremde geçen, δ_i ($1 \leq i \leq n$) F monomorfizmalarının kümesi $G(E/F)$ ile gösterilir. E nin kendi üzerine bir F -monomorfizmasına, E nin bir F -otomorfizması denir ve E nin bütün F -otomorfizmalarının kümesi $Gal(E/F)$ ile gösterilir. $Gal(E/F)$, bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu gruba, E/F genişlemesinin Galois grubu denir.

TANIM 1.13. E, F nin sonlu bir genişlemesi olsun. Eğer her $\delta \in G(E/F)$ için $\delta(E) = F$ ise, E/F ye normal genişleme denir.

TANIM 1.14. $f(x) \in F[x]$ in bütün köklerini F ye katmakla elde edilen genişlemeye, F nin F üzerindeki parçalanış cismi denir. E_f ile gösterilir. E_f , F nin bir Galois genişlemesidir.

TEOREM 1.15. (Cayley Teoremi) Her grup, en az bir dönüşüm grubuyla eş yapılıdır.

Ispat : G bir grup olsun. $S(G)$ ile, G nin kendi üzerine, 1-1 bütün dönüşümleri kümesini gösterelim. $S(G)$, bileşke işlemi altında bir gruptur. $a \in G$ olsun. Her $x \in G$ için $T_a(x) = ax$ ile G den G ye bir T_a dönüşümü tanımlayalım. Her $b \in G$ için, $T_a(y) = ay = b$ olacak şekilde bir $y \in G$ bulunabileceğinden T_a örten-dir. $x, y \in G$ için, $T_a(x) = T_a(y)$ olsun. $ax = ay$ den $x = y$ bulunur. Şu halde T_a 1-1 dir. Böylece $T_a \in S(G)$ bulunur. Her $a \in G$ için, $\psi(a) = T_a$ ile, G den $S(G)$ ye ψ dönüşümü tanımlayalım. Her $a, b \in G$ için $\psi(ab) = T_{ab} = T_a \circ T_b$ dir. Çünkü her $x \in G$ için, $T_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = aT_b(x) = T_a(T_b(x)) = (T_a \circ T_b)(x)$. Böylece $\psi : G \rightarrow S(G)$ dönüşümünün yapı koruduğu görülür. $a, b \in G$ için $\psi(a) = \psi(b)$ olsun. ψ nin tanımından bu $T_a = T_b$ demektir. Her $x \in G$ için $T_a(x) = ax = T_b(x) = bx$ den $a = b$ bulunur. Böylece ψ 1-1 dir. $\psi(G)$, $S(G)$ nin bir alt grubu ve $G = \psi(G)$ olduğundan G rubunun, $S(G)$ nin bir alt grubuyla eş yapılı olduğu görülür.

TEOREM 1.16. M , sonlu mertebeden elemanı olmayan sonlu üretilmiş abeliyan grup, N de alt grubu olsun.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_{11}\omega_1 + c_{12}\omega_2 + \dots + c_{1k}\omega_k + \dots + c_{1m}\omega_m, \\ \eta_2 &= c_{22}\omega_2 + \dots + c_{2k}\omega_k + \dots + c_{2m}\omega_m, \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_k &= c_{kk}\omega_k + \dots + c_{km}\omega_m, \end{aligned}$$

TANIM 1.17. $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ve $f(x)$ in kökleri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ olsun. $S_i = (-1)^i a_{n-i}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ fonksiyonuna, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ nin i -nci elementer simetrik fonksiyonu denir. Elementer simetrik fonksiyonlarını daha açık yazarsak

-6-

BÖLÜM 2

TAMLIK HALKASI VE DİSKRİMİNANT

2.1. Kübik Cisimde Bazı Hesaplamalar

TANIM 2.1.1. Q rasyonel sayılar cisminin 3 ncü dereceden bir genişlemesine kübik cisim denir.

Q nın sağladığı asal ve monik polinom $x^3 + sx^2 + qx + n = 0$ olsun. $K = Q(\theta)$ diyelim. $[K:Q] = 3$ dür. Teorem 1.6. dan $\{1, \theta, \theta^2\}$, K nın bir Q -tabanıdır. Bir kübik cisimdeki elemanlar $(u, v, \gamma, \Delta \in \mathbb{Z})$,
$$\omega = \frac{u\theta^2 + v\theta + \gamma}{\Delta}$$
 biçimindedirler. ω nın bu şekildeki yazılışı tekdir. Eğer iki farklı yazılış olsaydı, θ 2-nci dereceden bir polinomun kökü olurdu. Halbuki θ yı asal, $x^3 + sx^2 + qx + n = 0$ polinomunun kökü olarak almıştık. Çelişki.

$K = Q(\theta)$ ve $[K:Q] = 3$ olsun. $\{1, \theta, \theta^2\}$, K nın Q -tabanı olduğundan $\omega = u\theta^2 + v\theta + \gamma$, u, v, γ rasyonel sayı olmak üzere, kübik cisimdeki herhangi bir eleman olsun. ω nın sağladığı 3. dereceden bir polinom aşağıdaki gibi kolayca bulunabilir.

ÖRNEK 2.1.2. θ nın sağladığı polinom $\theta^3 = \theta + 1$
 $\omega = 2\theta^2 + 3\theta + 1$ in sağladığı kübik polinomu bulalım.

$$\omega = 2\theta^2 + 3\theta + 1$$

$$\omega\theta = 3\theta^2 + \theta + 2(\theta + 1) = 2\theta^2 + 3\theta + 2$$

$$\omega\theta^2 = 3\theta^2 + 2\theta + 2(\theta + 1) = 3\theta^2 + 5\theta + 3$$

düzenleyerek;

$$-2\theta^2 - 3\theta + \omega - 1 = 0$$

$$-3\theta^2 + (\omega - 3)\theta - 2 = 0$$

$$(\omega - 3)\theta^2 - 5\theta - 3 = 0$$

homojen denklem sistemini elde ederiz. Sıfırdan farklı bir çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & \omega - 1 \\ -3 & \omega - 3 & -2 \\ \omega - 3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinant hesaplanarak, $\omega^3 - 2\omega^2 - 12\omega - 5 = 0$.

θ nın sağladığı kübik polinom $\theta^3 = s\theta^2 + q\theta + n$ olsun. O zaman $\theta^4 = (s^2 + q)\theta^2 + (sq + n)\theta + sn$ dir.

Eğer $\omega_1 = u_1\theta^2 + v_1\theta + \gamma_1$ ve $\omega_2 = u_2\theta^2 + v_2\theta + \gamma_2$ ($u_1, v_1, \gamma_1, u_2, v_2, \gamma_2 \in \mathbb{Q}$) ise,

$$\omega_1 \mp \omega_2 = (u_1 \mp u_2)\theta^2 + (v_1 \mp v_2)\theta + (\gamma_1 \mp \gamma_2) \text{ dir.}$$

$\omega_1\omega_2$ çarpımındaki θ^3 ve θ^4 terimleri yerine, yukardaki değerlerini koyarsak,

$$\omega_1\omega_2 = a\theta^2 + b\theta + c, (a, b, c \in \mathbb{Q}) \text{ elde ederiz.}$$

ÖRNEK 2.1.3. $\theta^3 = 3\theta^2 + \theta + 2$, $\omega_1 = 5\theta^2 + 2\theta - 1$,
 $\omega_2 = 2\theta^2 - 3\theta + 2$ olmak üzere, $\omega_1\omega_2$ yi hesaplayalım.

$$\theta^4 = 10\theta^2 + 5\theta + 6$$

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 &= (5\theta^2 + 2\theta - 1)(2\theta^2 - 3\theta + 2) = 10(10\theta^2 + 5\theta + 6) \\ &\quad + 4(3\theta^2 + \theta + 2) - 2\theta^2 - 15(3\theta^2 + \theta + 2) - 6\theta^2 + 3\theta \\ &\quad + 10\theta^2 + 4\theta - 2 = 69\theta^2 + 46\theta + 36.\end{aligned}$$

ÖRNEK 2.1.4. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5\theta^2 + 2\theta - 1}{2\theta^2 - 3\theta + 2} = A\theta^2 + B\theta + C$ olsun.

$$\begin{aligned}2A\theta^4 - 3A\theta^3 + 2A\theta^2 + 2B\theta^3 - 3B\theta^2 + 2B\theta + 2C\theta^2 - 3C\theta + 2C \\ = 5\theta^2 + 2\theta - 1\end{aligned}$$

θ^4 ve θ^3 değerleri yerine konularak düzenlenirse;

$$\begin{aligned}(13A + 3B + 2C)\theta^2 + (7A + 4B - 3C)\theta + (6A + 4B + 2C) \\ = 5\theta^2 + 2\theta - 1 \quad \text{elde edilir.}\end{aligned}$$

$$13A + 3B + 2C = 5$$

$$7A + 4B - 3C = 2$$

$$6A + 4B + 2C = -1$$

denklem sisteminden, $A = \frac{121}{172}$, $B = -\frac{185}{172}$, $C = -\frac{79}{172}$.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{121}{172}\theta^2 - \frac{185}{172}\theta - \frac{79}{172} \quad \text{dir.}$$

Şimdi de kübik cisimdeki elemanların kübik eşle-
 niklerinin çarpımlarını hesaplayalım.

θ nın sağladığı kübik polinom $\theta^3 = s\theta^2 + q\theta + n$,
 $s, q, n \in \mathbb{Z}$ olsun. $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ve $\omega \in K$ alalım.

$u, v, \gamma \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $\omega = u\theta^2 + v\theta + \gamma$ biçimindedir.

$\theta', \theta'', \theta$ nın eşlenikleri olsun. ω nın eşlenikleri

$$\omega' = u\theta'^2 + v\theta' + \gamma, \quad \omega'' = u\theta''^2 + v\theta'' + \gamma$$

dir. θ nın eşlenikleri arasında, Tanım 1.17. den aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\theta\theta'\theta'' = n, \quad \theta + \theta' + \theta'' = s, \quad \theta\theta' + \theta\theta'' + \theta'\theta'' = -q.$$

$$\theta' + \theta'' = s - \theta$$

$$\theta(\theta' + \theta'') + \theta'\theta'' = -q$$

$$\theta'\theta'' = -q - s\theta + \theta^2$$

$$\begin{aligned} \theta'^2\theta''^2 &= q^2 + 2qs\theta + (s^2 - 2q)\theta^2 - 2s\theta^3 + \theta^4 \\ &= -q\theta^2 + (sq + n)\theta - sn + q^2 \end{aligned}$$

$$(\theta'' + \theta')^2 = \theta''^2 + 2\theta''\theta' + \theta'^2 \quad \text{ise}$$

$$\theta'^2 + \theta''^2 = (s - \theta)^2 - 2(-q - (s - \theta)\theta) = s^2 + 2q - \theta^2.$$

$$\theta'\theta''(\theta' + \theta'') = s\theta^2 - s^2\theta - n - qs$$

$$\begin{aligned} \omega'\omega'' &= u^2\theta'^2\theta''^2 + uv(\theta'\theta''(\theta' + \theta'')) + u\gamma(\theta'^2 + \theta''^2) \\ &\quad + v\gamma(\theta' + \theta'') + v^2\theta'\theta'' + \gamma^2 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Yukarıda hesapladığımız değerleri bu eşitlikte yerine koyarsak, $(A, B, C \in \mathbb{Q})$,

$$\begin{aligned} \omega'\omega'' &= (-u^2q + uvs - u\gamma + v^2)\theta^2 + (u^2sq + u^2n - uvs^2 - v^2s - v\gamma)\theta \\ &\quad + (u^2q^2 - u^2sn - uvsq - uvn + u\gamma s^2 + 2u\gamma q - v^2q + v\gamma s + \gamma^2) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $\omega'\omega'' = A\theta^2 + B\theta + C$ dir. Aynı işlemi tekrarlayarak

$$\omega\omega' = A\theta''^2 + B\theta'' + C,$$

$$\omega\omega'' = A\theta'^2 + B\theta' + C \quad \text{elde ederiz.}$$

TEOREM 2.1.5. $K = Q(\theta)$ bir kübik cisim ve $\omega \in K$ olsun. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ olmak üzere, işaret farkı gözetmek-sizin $\omega = \frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta}$ biçiminde tek türlü yazılır.

İspat : $a, b, c \in Q$, $\omega = a\theta^2 + b\theta + c$ olsun. ω nin eşlenikleri K dadır.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\omega\omega' - \omega\omega''}{\omega' - \omega''} = \frac{A(\theta''^2 - \theta'^2) + B(\theta'' - \theta')}{a(\theta''^2 - \theta'^2) + b(\theta'' - \theta')} \\ &= \frac{A(\theta'' + \theta') + B}{a(\theta'' + \theta') + b}\end{aligned}\quad (1)$$

θ nin sağladığı polinom $\theta^3 = s\theta^2 + q\theta + n$ olduğundan $\theta' + \theta'' = s - \theta$ dir. Bu değer (1) de yerine konursa $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in Q$ olmak üzere,

$$\frac{A(s - \theta) + B}{a(s - \theta) + b} = \frac{A\theta - As - B}{-a\theta + as + b} = \frac{\alpha'\theta + \beta'}{\gamma'\theta + \delta'}$$

Pay ve paydayı uygun bir rasyonel sayıyla çarparak $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ tamsayı yapılır. Böylece $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tamsayı olmak üzere, $\omega = \frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta}$ dir. Bu yazılışın tekliğini gösterelim. Kabul edelimki iki farklı yazılış olsun. Yani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tamsayı olmak üzere,

$$\frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta} = \frac{\alpha_1\theta + \beta_1}{\gamma_1\theta + \delta_1} \quad \text{olsun.}$$

$$(\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma)\theta^2 + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma + \alpha\delta_1 - \alpha_1\delta)\theta + \beta\delta_1 - \beta_1\delta = 0 \quad \text{dir.}$$

Bu ise θ nin ikinci dereceden bir polinomun kökü olması demektir. Halbuki θ , üçüncü dereceden bir polinomun köküydü. O halde

$$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0 \quad (2)$$

$$\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma + \alpha\delta_1 - \alpha_1\delta = 0 \quad (3)$$

$$\beta\delta_1 + \beta_1\delta = 0 \quad (4)$$

(2) ve (4) den $\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = t$, $\frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\delta_1}{\delta} = u$ dersek,

$\alpha_1 = \alpha t$, $\gamma_1 = \gamma t$, $\beta_1 = \beta t$, $\delta_1 = \delta t$ dir. Bu değerleri

(3) de yerine koyarsak $(\alpha\delta - \beta\gamma)(t - u) = 0$ elde ederiz.

$(\alpha\delta + \beta\gamma) \neq 0$ dir. Eğer $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ olsaydı, $\alpha\delta = \beta\gamma$

ve $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ dir. Buradan da,

$$\omega = \frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta} = \frac{\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \theta + 1 \right)}{\delta \left(\frac{\gamma}{\delta} \theta + 1 \right)} = \frac{\beta}{\delta} \text{ bulunur.}$$

Yani ω rasyonel olurdu. O halde $t = u$ elde ederiz.

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; ∓ 1 den farklı ortak bölene sahip olmadıgından, $\alpha_1 = \mp\alpha$, $\beta_1 = \mp\beta$, $\gamma_1 = \mp\gamma$, $\delta_1 = \mp\delta$ elde ederiz.

ÖRNEK 2.1.6. $\theta^3 = \theta + 1$, $\omega = \theta^2 - 3\theta + 1$ olsun.

y4 teoremdeki gibi yazalım.

$$\omega = \frac{\alpha\theta + \beta}{\gamma\theta + \delta} = \theta^2 - 3\theta + 1 \text{ dersek}$$

$$\alpha\theta + \beta = (\delta - 3\gamma)\theta^2 + (2\gamma - 3\delta)\theta + \delta + \gamma \text{ dir.}$$

$$\delta - 3\gamma = 0, \quad 2\gamma - 3\delta = \alpha \text{ ve } \delta + \gamma = \beta \text{ olmalıdır.}$$

$$\delta = 3\gamma, \quad \alpha = -7\gamma, \quad \beta = 4\gamma \text{ olduğundan}$$

$$\omega = \frac{-7\gamma\theta + 4\gamma}{\gamma\theta + 3\gamma} = \frac{-7\theta + 4}{\theta + 3}.$$

2.2. Tamlık Halkası

TANIM 2.2.1. E, Q nun bir genişlemesi ve $a \in E$ olsun. $f(a) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in Z[x]$ polinomu varsa a 'ya Q üzerinde cebirsel tam eleman denir.

ÖRNEK 2.2.2. $\sqrt[3]{3}$, $f(x) = x^3 - 3 \in Z[x]$ polinomunun bir kökü olduğundan cebirsel tam elemandır.

TEOREM 2.2.3. Bir r rasyonel sayısının cebirsel tam olması için gerek ve yeter şart $r \in Z$ olmasıdır.

İspat : r rasyonel sayısı cebirsel tam ve sağladığı polinom $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m \in Z[x]$ olsun. $(a,b) = 1$, (a,b) tamsayı $r = \frac{a}{b}$ olarak alınır-
sa ve $f(r) = 0$ olduğundan,

$$a_0 + a_1 \frac{a}{b} + \dots + \frac{a^m}{b^m} = 0$$

ve

$$-a^m = a_0b^m + a_1ab^{m-1} + \dots + ba_{m-1}a^{m-1}$$

dir. Eşitliğin ikinci tarafını b ye göre düzenlersek,

$$-a^m = b(a_0b^{m-1} + a_1ab^{m-2} + \dots + a_{m-1}a^{m-1})$$

dir. Bu ise $b|a^m$ demektir. Halbuki $(a,b) = 1$ idi.

$b = 1$ alırsak çelişki olmaz. O zaman $r = a \in Z$ dir.

TANIM 2.2.4. K bir cebirsel sayı cismi ve $\omega_1, \dots, \omega_n$; K dan keyfi olarak seçilen elemanlar olsun. c_i ($1 \leq i \leq n$) katsayıları tamsayı olmak üzere

$c_1\omega_1 + \dots + c_n\omega_n$ lineer kombinasyonlarının W kümesine K da bir Z -modül denir. Eğer $\omega_1, \dots, \omega_n$; W nın üreteçleri ise $W = [\omega_1, \dots, \omega_n]$ yazılır.

TEOREM 2.2.5. W bir Z -modül olsun. $\gamma \in \mathbb{C}$ olmak üzere her $\omega \in W$ için $\gamma\omega \in W$ ise γ cebirsel tamdır.

İspat : $W = [\omega_1, \dots, \omega_n]$ Z -modül olsun. Her i için $\gamma\omega_i \in W$ olduğundan, $b_{ij} \in Z$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\gamma\omega_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\omega_j \quad \text{dir.}$$

$$i = 1 \quad \text{için, } (\gamma - b_{11})\omega_1 - b_{12}\omega_2 - \dots - b_{1n}\omega_n = 0$$

$$i = 2 \quad \text{için, } -b_{21}\omega_1 + (\gamma - b_{22})\omega_2 - \dots - b_{2n}\omega_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$i = n \quad \text{için, } -b_{n1}\omega_1 - b_{n2}\omega_2 - \dots + (\gamma - b_{nn})\omega_n = 0$$

Bu homojen lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} \gamma - b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & \gamma - b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ -b_{31} & -b_{32} & \dots & -b_{3n} \\ \vdots & & & \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & \gamma - b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantı açarsak γ nın sağladığı $f(x)$ polinomunu elde ederiz. b_{ij} ler tamsayı olduğundan

$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dir. Bu ise γ nın cebirsel tam olduğunu gösterir.

TEOREM 2.2.6. Cebirsel tam sayılar bir halka oluştururlar.

İspat : (i) α, β cebirsel tam olsunlar. Bu taktirde $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$ ve $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0$ ve

$$\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_1\beta + b_0 = 0,$$

$W = [1, \alpha, \alpha^2, \dots, \beta, \beta^2, \dots, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \dots]$, $\mathbb{Z}$ -modül olsun. W , $n \times m$ eleman tarafından üretilmiştir. Her $\omega \in W$ için, Teorem 2.2.5. ten $\omega\alpha \in W$ ve $\omega\beta \in W$ dir. $\omega \in W$ ise,

$$\omega = \sum_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq j < m}} b_{ij} \alpha^i \beta^j, \quad b_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \text{olduğundan}$$

$$\alpha\omega = \sum_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq j < m}} b_{ij} \alpha^{i+1} \beta^j \quad \text{elde ederiz. Bu toplamı açtığı-$$

mızda bulacağımız α^n yerine, $-(a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \dots + a_1\alpha + a_0)$ koyarsak

$$\alpha\omega = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j < m}} (b_{ij} \alpha^{i+1} \beta^j + b_{(n-1)j} \alpha^n \beta^j)$$

$$= \sum_{i,j} (b_{ij} \alpha^{i+1} \beta^j + b_{(n-1)j} (-a_{n-1}\alpha^{n-1} - a_{n-2}\alpha^{n-2} - \dots - a_1 - a_0) \beta^j)$$

Buradan $\alpha\omega \in W$ elde ederiz. Aynı düşünceyle ve β^m yeri-

ne $-(b_{m-1}\beta^{m-1} + b_{m-2}\beta^{m-2} + \dots + b_1\beta + b_0)$ koyarak

$\beta\omega \in W$ olduğu kolaylıkla görülür. Her $\omega \in W$ için $(\alpha \mp \beta)\omega = \alpha\omega \mp \beta\epsilon \in W$ olduğundan $\alpha + \beta \in W$ dir.

(ii) Şimdi de $\alpha\beta$ nın cebirsel tam olduğunu gösterelim.

Her $\omega \in W$ için $(\alpha\beta)\omega \in W$ olduğunu göstermeliyiz.

$0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\omega &= \sum_{i,j} b_{ij} \alpha^{i+1} \beta^{j+1} \\ &= \sum_{i,j} (b_{ij} \alpha^i \beta^j + b_{(n-1)j} \alpha^n \beta^j) + \sum_{i,j} (b_{ij} \alpha^i \beta^j + b_{i(m-1)} \alpha^i \beta^m) \end{aligned}$$

α^n ve β^m yerine yukarıdaki değerleri konursa $(\alpha\beta)\omega \in W$ olduğu görülür. O halde $\alpha\beta$ cebirsel tamdır. (i) ve (ii) den cebirsel tam sayılar bir halka oluştururlar.

SONUÇ 2.2.7. Eğer θ cebirsel ise, $k\theta$ cebirsel tam olacak şekilde en az bir k tamsayısı vardır.

İspat : θ cebirsel eleman olsun. a_i, b_i ler tamsayı, $(a_i, b_i) = 1$ olmak üzere, θ nın sağladığı polinom

$$\theta^n + \frac{a_1}{b_1} \theta^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{olsun. } k = \text{ekok}(b_1, \dots, b_n)$$

diyelim. Bu takdirde $b_1|k, \dots, b_n|k$ dir.

$$k\theta^n + k \frac{a_1}{b_1} \theta^{n-1} + \dots + k \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$k\theta^n + k_1 \theta^{n-1} + \dots + k_n a_n = 0, \quad (k_i \in \mathbb{Z}).$$

her iki tarafı k^{n-1} ile çarparak yeniden düzenlersek

$$(k\theta)^n + k_1'(k\theta)^{n-1} + \dots + k_n' = 0, \quad (k_1', \dots, k_n' \in \mathbb{Z})$$

O halde $k\theta$, $x^n + k_1' x^{n-1} + \dots + k_n' = 0$ polinomunun bir köküdür. $k\theta$ cebirsel tamdır.

Her sayı cismi, θ cebirsel tam olmak üzere $Q(\theta)$ biçiminde ifade edilebilir. $K = Q(\beta)$, $\beta \in K$ olsun $k\beta = \theta$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. $K = Q(\beta) = Q(\theta)$ dır. Gerçekten $\beta = \frac{\theta}{k}$, $\beta \in Q(\beta)$ ise $Q(\beta) \subset Q(\theta)$ ve $\theta = k\beta \in Q(\beta)$ olduğundan $Q(\theta) \subset Q(\beta)$ dır. Böylece $Q(\theta) = Q(\beta)$ olduğu görülür.

TANIM 2.2.8. K bir sayı cismi olsun. Cebirsel tam elemanların oluşturduğu halkayı M ile gösterelim. Bu takdirde $M \cap K$ da bir halkadır. Bu halkayı K nın tamlık halkası denir ve O_K ile gösterilir. O_K , $\mathbb{Z}$ tamsayılar hal-kasını kapsayan bir halkadır.

2.3. İz, Norm, Diskriminant

A bir halka, E serbest A -modül, $\text{rank} = n$ ve $K:E \rightarrow E$ endomorfizm olsun. U dönüşümüne $(a_{ij}) = M$, $(a_{ij} \in A)$ mat-risi karşılık gelir.

$$\text{İz}(u) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \det(u) = \det(a_{ij}) \text{ ve}$$

$$\det(x - J_E - u) = \det(x\delta_{ij} - a_{ij}) \quad (1)$$

Bu eşitlikler tabanın seçiminden bağımsızdır. Buradan da,

$$\begin{aligned} \text{Iz}(u + u') &= \text{Iz}(u) + \text{Iz}(u'), \quad \det(uu') = \det(u)\det(u') \quad \text{ve} \\ \det(XI - u) &= x^n - (\text{Iz}(u))x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u) \end{aligned} \quad (2)$$

elde edilir.

Özel olarak $[K:F] = n$ ve $K = F(x)$ ise $(x, \text{primitif eleman})$ K, F üzerinde vektör uzayı olup yukarıda açıklanan ifadeler geçerlidir.

TANIM 2.3.1. $x \in K$ için, $m_x = K \rightarrow K; y \rightarrow xy$ dönüşümünü alalım. x in izi, $\text{Iz}_{K/F}(x) = \text{Iz}(m_x)$ ve x in normu, $N_{K/F}(x) = N(m_x)$ şeklinde tanımlanır.

Iz ve norm aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$x, x' \in K, a \in F$ için $m_x + m_{x'} = m_{x+x'}, m_x \circ m_{x'} = m_{xx'}$ ve $m_{ax} = a m_x$ dir. m_a nın, K nın F üzerindeki tabanına göre matrisi, bütün köşegen girişleri a olan köşegen matristir. (1) ve (2) formüllerinden kolayca,

$$\text{Iz}(x+x') = \text{Iz}(x) + \text{Iz}(x'), \quad \text{Iz}(ax) = a \text{Iz}(x), \quad \text{Iz}(a) = na$$

ve

$N(xx') = N(x)N(x'), N(ax) = a^n N(x), N(a) = a^n$ olduğu görülür.

K cismi; F' nin n -nci dereceden cebirsel bir genişlemesi ve x de K nın elemanı olsun. K nın F de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ tabanını tesbit edelim. K cisminin her elemanı katsayıları F den seçilmek şartıyla $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ nin lineer kombinasyonudur. $a_{ij} \in F$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$x\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\omega_j \quad \text{dir.}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad \text{ile} \quad A(a_{ij}), \quad x\Omega = A\Omega \quad \text{bulunur.}$$

K cisminin x elemanı ve bir $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ tabanı verildiğinde a_{ij} elemanları dolayısıyla A matrisi tek türlü olarak belirlenmiş olur.

$(xI_K - A)\Omega = 0$ dir. Bu denklemin çözüm kabul etmesi için $\det(xI_K - A) = 0$ olmalıdır. Aksi halde $\Omega = 0$ olurdu. $\det(xI_K - A)$ determinantı, derecesi n olan bir polinomdur. Bu polinomun katsayıları F cisminde dir. Ve x de bu polinomun bir köküdür. $\det(xI_K - A) = 0$ denkleminin yazılışı her ne kadar Ω tabanı ile oluyorsada, göstereceğiz ki bu denklem Ω ya bağlı değildir.

$\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n$, başka bir taban olsun. Bu taktirde, $b_{ij}, b'_{ij} \in F$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\omega_j, \quad \omega_i = \sum_{j=1}^n b'_{ij}\omega'_j$$

$$B = (b_{ij}), \quad B' = (b'_{ij}) \quad \text{dersek,}$$

$$\Omega' = B\Omega \quad \text{ve} \quad \Omega = B'\Omega' \quad \text{dir. Buradan}$$

$\Omega' = BB'\Omega'$ ve $(BB' - I_K)\Omega' = 0$ dir. Ω' , F de lineer bağımsız olduğundan F de $BB' = I_K$ ise $B' = B^{-1}$ dir. Ω' tabanı için aynı şekilde $x\Omega' = A'\Omega'$ dir.

ve karakteristik polinom $\det(xI_K - A)$ dır.

$$\det(xI_K - A) = \begin{vmatrix} x & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & & 0 & a_2 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & f(x) \\ -1 & \dots & 0 & a_1 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & x & a_{n-2} \\ 0 & \dots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} f(x) \begin{vmatrix} -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} f(x) (-1)^{n-1} = f(x)$$

(2) den $-a_{n-1} = \text{iz}(x) = x_1 + \dots + x_n$, (kökler toplamı)
ve $(-1)^n a_0 = N(x) = x_1 \dots x_n$, (kökler çarpımı)

olduğu görülür. Eğer x cebirsel tamsa, $\text{iz}(x), N(x) \in \mathbb{Z}$ dir.

ÖRNEK 2.3.3. θ , $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir kökü olsun. $K = \mathbb{Q}(\theta)$ cisminde, $x = 1 + \theta^2$ elemanının norm ve izini bulalım.

$x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu asaldir. O halde $[K:\mathbb{Q}] = 3$ ve K nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki tabanı $\{1, \theta, \theta^2\}$ dir.

$$x.1 = 1.1 + 0.\theta + 1.\theta^2$$

$$x.\theta = -1.1 + 0.\theta + 0.\theta^2$$

$$x.\theta^2 = 0.1 + (-1).\theta + 0.\theta^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{olduğundan} \quad N_{K/Q}(x) = |A| = 1,$$

$$\text{Iz}_{K/Q} = \text{Iz}(A) = 1.$$

x in norm ve izini başka şekilde de hesaplayabiliriz.

$x = 1 + \theta^2$, $\theta^3 = -\theta - 1$, $\theta^4 = -\theta^2 - \theta$ olduğundan x in sağladığı kübik polinom $x^3 - x^2 - 1 = 0$ dir. O halde $N_{K/Q}(x) = (-1)^3(-1) = 1$ ve $\text{Iz}_{K/Q}(x) = -(-1) = 1$ dir.

TANIM 2.3.4. L, K nin n . dereceden bir cisim genişlemesi ve L nin bir K -tabanı $\{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. $\{x_1, \dots, x_n\}$ tabanının diskriminantı,

$$D(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Iz}_{L/K}(x_i x_j))$$

ile tanımlanır.

ÖRNEK 2.3.5. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $L = Q(i)$ olsun. Bu durumda $[Q(i) : Q] = 2$ dir. $\{1, i\}$, $Q(i)$ nin bir Q -tabanıdır.

$D(1, i)$ i hesaplayabilmek için $\text{Iz}(1.1)$, $\text{Iz}(1.i)$, $\text{Iz}(i.i)$ değerlerini hesaplamamız lazımdır.

$$\begin{aligned} -1.1 &= -1.1 = 0.i \\ -1.i &= 0.1 = (-1).i \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Iz}_{L/Q}(-1) = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{aligned} 1.1 &= 1.1 = 0.i \\ 1.i &= 0.1 = 1.i \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Iz}_{L/Q}(1) = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} i.1 &= 0.1 + 1.i \\ i.i &= -1.1 + 0.i \end{aligned} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Iz}_{L/Q}(i) = 0 + 0 = 0$$

$$D(1,i) = \begin{vmatrix} \text{Iz}_{L/Q}(1) & \text{Iz}_{L/Q}(i) \\ \text{Iz}_{L/Q}(i) & \text{Iz}_{L/Q}(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

TEOREM 2.3.6. $[L:K] = n$ ve $\{x_1, \dots, x_n\}$ L nin bir K tabanı olsun. Eğer $\{y_1, \dots, y_n\}$ L nin başka bir K -tabanı ve $a_{ij} \in K$ olmak üzere $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ise,

$$D(y_1, \dots, y_n) = (\det(a_{ij}))^2 D(x_1, \dots, x_n) \text{ dir.}$$

İspat : Tanım 2.3.4. den,

$$D(y_1, \dots, y_n) = \det(\text{Iz}_{L/K}(y_p y_q)) \text{ dir. } a_{p_i}, a_{q_j} \in K \text{ ve}$$

$$y_p = \sum_{i=1}^n a_{p_i} x_i, \quad y_q = \sum_{j=1}^n a_{q_j} x_j \text{ olmak üzere}$$

$$y_p y_q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{p_i} a_{q_j} x_i x_j \text{ dir. Iz in özelliklerinden}$$

$$\text{Iz}_{L/K}(y_p y_q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{p_i} a_{q_j} \text{Iz}_{L/K}(x_i x_j) \text{ dir. } A = (a_{ij}),$$

$$\det(\text{Iz}_{L/K}(y_p y_q)) = \det(A^T \text{Iz}_{L/K}(x_i x_j) A)$$

$$D(y_1, \dots, y_n) = (\det(a_{ij}))^2 D(x_1, \dots, x_n)$$

TEOREM 2.3.7. G bir grup, C bir cisim, C^* çarpımsal bir grup olmak üzere, G den C^* içine farklı homomorfizmalar $\delta_1, \dots, \delta_n$ olsun. O zaman δ_i ler C üzerin-

de lineer bağımsızdırlar.

İspat : [3]. Dedekind Lemması.

TEOREM 2.3.8. K sonlu bir cisim, $[L:K] = n$ olsun.
 $\delta_i : L \rightarrow C$ farklı n , K -monomorfizma olsun. Eğer
 $\{x_1, \dots, x_n\}$ L nin bir K tabanı ise,

$$D(x_1, \dots, x_n) = (\det(\delta_i(x_j)))^2 \neq 0 \quad \text{dir.}$$

İspat :

$$\begin{aligned} D(x_1, \dots, x_n) &= \det(\text{fz}_{L/K}(x_i, x_j)) = \det \left(\sum_{k=1}^n \delta_k(x_i, x_j) \right) \\ &= \det \left(\sum_{k=1}^n \delta_k(x_i) \delta_k(x_j) \right) \\ &= \det(\delta_k(x_i)) \det(\delta_k(x_j)) \\ &= (\det(\delta_i(x_j)))^2 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Eğer $\det(\delta_i(x_j)) = 0$ ise, hepsi birden sıfır olmayan $u_1, \dots, u_n \in C$ vardır, öyle ki her j için,

$$\sum_{i=1}^n u_i \delta_i(x_j) = 0 \quad \text{dır. Buradan da her } x \in L \text{ için}$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \delta_i(x) = 0 \quad \text{elde ederiz. Teorem 2.3.7. den } \delta_i \text{ ler}$$

Lineer bağımsız olduğundan, u_i ler sıfır olmalıydı. Böylece çelişkiye düşeriz. O halde $\det(\delta_i(x_j)) \neq 0$ dır.

Teorem 2.3.8. de, taban olarak $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\}$ yi alırsak: ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n-1$) ve

$\delta_i(\theta) = \theta_i$, θ nın eşleniği olmak üzere,

$$D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}) = \det(\delta_i(\theta^j)) = \det(\delta_i(\theta)^j)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \dots & \theta_1^{n-1} \\ 1 & \theta_2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \theta_n & \theta_n^2 & \dots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

$$= \left(\prod_{\substack{i \neq j \\ i < j}} (\theta_i - \theta_j) \right)^2 \text{ dir.}$$

$D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1})$ e, θ nın veya θ nın sağladığı polinomun diskriminantı denir ve D_θ şeklinde gösterilir.

TEOREM 2.3.9. $[L:K] = n$ olsun. Bir tabana ait diskriminantın sıfır olması için gerek ve yeter şart, her $a \in L$ için $\text{İz}_{L/K}(a) = 0$ olmasıdır.

İspat : Her $a \in L$ için $\text{İz}_{L/K}(a) = 0$ olsun. Bu takdirde $D(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{İz}(x_i x_j)) = 0$ dır.

Şimdi de $\{x_1, \dots, x_n\}$ bir taban ve bu tabana ait diskriminant sıfır olsun. Yani

$$D(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{İz}(x_i x_j)) = 0$$

olsun. Şu denklem sistemini düşünelim.

$$\text{İz}(x_1 x_1) y_1 + \text{İz}(x_1 x_2) y_2 + \dots + \text{İz}(x_1 x_n) y_n = 0$$

$$\text{İz}(x_2 x_1) y_1 + \text{İz}(x_2 x_2) y_2 + \dots + \text{İz}(x_2 x_n) y_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{İz}(x_n x_1) y_1 + \text{İz}(x_n x_2) y_2 + \dots + \text{İz}(x_n x_n) y_n = 0$$

Katsayılar matrisinin determinantı $\det(\text{İz}(x_i x_j)) = 0$

olduğundan hepsi sıfır olmayan c_i çözümü vardır.

$0 \neq c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ diyelim. Bu c için İz i hesaplayalım.

$$\text{İz}(x_i c) = c_1 \text{İz}(x_i x_1) + c_2 \text{İz}(x_i x_2) + \dots + c_n \text{İz}(x_i x_n) = 0$$

dır. $a \in L$ alalım. $a = cd$, $d \in L$ ve $d = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$,

($d_i \in K$) dersek, İz in özelliklerinden

$$\begin{aligned} \text{İz}(a) &= \text{İz}(cd_1 x_1 + \dots + cd_n x_n) \\ &= d_1 \text{İz}(cx_1) + \dots + d_n \text{İz}(cx_n) \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \text{İz}(cx_i) = 0. \end{aligned}$$

SONUÇ 2.3.10. $K = Q(\theta)$, $[K:Q] = n$ ve θ nın Q üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ ve $f(x)$ in türevi $f'(x)$ olmak üzere,

$$D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2}, N_{K/Q}(f'(\theta)) \text{ dır.}$$

İspat : $\theta_i = \delta_i(\theta)$, θ nın eşlenikleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}) &= \left[\prod_{i < j} (\theta_i - \theta_j) \right]^2 \\ &= c \prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j), \quad (c = (-1)^{(1/2)n(n-1)}) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\theta_i - \theta_j)$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n \left(\prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j) \right)$$

$$f(x) = \prod_{j=1}^n (x - \theta_j) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \dots (x - \theta_n) \quad \text{olsun.}$$

$$f'(x) = (x - \theta_2)(x - \theta_3) \dots (x - \theta_n) + (x - \theta_1)(x - \theta_3) \dots (x - \theta_n) \\ + \dots + (x - \theta_1)(x - \theta_2) \dots (x - \theta_{n-1})$$

$$f'(\theta_1) = (x - \theta_2) \dots (x - \theta_n) \quad \text{Buna göre}$$

$$f'(\theta_i) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \dots (x - \theta_{i-1})(x - \theta_{i+1}) \dots (x - \theta_n)$$

$$f'(\theta_i) = \prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j) \quad \text{olur. Bu değeri yerine koyarsak}$$

$$D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n (f'(\theta_i)) \quad \text{ve}$$

$$f'(\theta_i), f'(\theta) \quad \text{nın eşleniği olduğundan,}$$

$$f'(\theta_1)f'(\theta_2) \dots f'(\theta_n) = N_{K/Q}(f'(\theta)) \quad \text{dır. O halde}$$

$$D(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} N_{K/Q}(f'(\theta)).$$

ÖRNEK 2.3.11. $[K:Q] = 3$ ve $K = Q(\theta)$ olsun. θ nın sağladığı $f(x) = x^3 + px + q$ polinomunun (θ nın) diskriminantını hesaplayalım. $\{1, \theta, \theta^2\}$ K nın bir Q -tabanıdır. Sonuç 2.3.10. dan, $D_\theta = (-1)^3 N(f'(\theta))$ dır. $f(x)$ in kökleri $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ olsunlar. $f'(x) = 3x^2 + p$ olduğundan,

$$N(f'(\theta)) = 27(\theta_1\theta_2\theta_3)^2 + 9p(\theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + \theta_2^2\theta_3^2) + 3p^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + p^3$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0, \theta_1\theta_2\theta_3 = q \text{ ve } \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 = p$$

$$\text{olduğundan, } \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = -2p \text{ ve } \theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + \theta_2^2\theta_3^2 = p^2$$

elde ederiz. Bu değerler yerine konursa,

$$D_\theta = D(1, \theta, \theta^2) = -(27q^2 + 4p^3).$$

2.4. Tamlık Tabanı

TANIM 2.4.1. $[K:Q] = n$ ve K nın tamlık halkası O_K olsun. O_K nın bir Z -tabanına tamlık tabanı denir.

TEOREM 2.4.2. θ nın sağladığı polinom

$\theta^3 + s\theta^2 + q\theta + n = 0$, $(s, q, n \in Z)$ ve n nın diskriminantı D_θ olsun. $K = Q(\theta)$ kübik cismindeki her cebirsel tam eleman; A, B, C tamsayı olmak üzere, $\omega = (A\theta^2 + B\theta + C)/D_\theta$ biçimindedir.

İspat : ω , $Q(\theta)$ nun cebirsel tam bir elemanı olsun.

$\alpha, \beta, \gamma \in Q$ olmak üzere, $\omega = \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma$ nın eşlenikleri $\omega' = \alpha\theta'^2 + \beta\theta' + \gamma$ ve $\omega'' = \alpha\theta''^2 + \beta\theta'' + \gamma$ dır.

$$S(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = \alpha s_2 + \beta s_1 + \gamma s_0$$

$$S(\omega\theta) = \omega\theta + \omega'\theta' + \omega''\theta'' = \alpha s_3 + \beta s_2 + \gamma s_1$$

$$S(\omega\theta^2) = \omega\theta^2 + \omega'\theta'^2 + \omega''\theta''^2 = \alpha s_4 + \beta s_3 + \gamma s_2$$

Burada S ve s nin katsayıları, cebirsel tamsayıların simetrik fonksiyonlarıdır, bundan dolayıda tamsayıdırlar.

Elemanter simetrik fonksiyonlar yardımıyla;

$$s_0 = 3, s_1 = -s, s_2 = s^2 - 2q, s_3 = -s^3 + 3sq - 3n,$$

$s_4 = s^4 - 3s^2q + 4sn - qs^2 + 2q^2$ buluruz. θ nın diskriminantı D_θ olmak üzere

$$\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \end{vmatrix} = s^2q^2 + 18spn - 4q^3 - 4s^3n - 27n^2 = D_\theta \text{ dir.}$$

O halde α, β ve γ nın paydaları D_θ nın bölenleridir. Buradan da,

$$\omega = (A\theta^2 + B\theta + C)/D_\theta, (A, B, C \in \mathbb{Z}) \text{ elde ederiz.}$$

elde ederiz.

$Q(\theta)$ nın cebirsel tam elemanları içinde aşağıdaki şekilde üç farklı durum vardır.

(i) θ ya göre sabit, bu durumda $\omega = \frac{c}{D_\theta}$

(ii) θ ya göre lineer, bu durumda $\omega = (b'\theta + c')/D_\theta$

(iii) θ ya göre kuadratik, bu durumda $\omega = (a''\theta^2 + b''\theta + c'')/D_\theta$

(i) deki elemanlar içinde, sıfırdan farklı, mutlak değerce en küçük c yi D_θ olarak alalım ve onu ω_1 ile gösterelim. Bu takdirde $\omega_1 = 1$ dir. (ii) deki elemanlar içinde en küçük b' ye b'_0 dersek ve onu ω_2 ile gösterirsek $\omega_2 = (b'_0\theta + c'_0)/D_\theta$ dir. (iii) deki elemanlar içinde en küçük a'' ve a''_0 dersek ve onu ω_3 ile gösterirsek $\omega_3 = (a''_0\theta^2 + b''_0\theta + c''_0)/D_\theta$ dir.

TEOREM 2.4.3. $[K:Q] = 3$ olsun. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ yukarıdaki biçimde olmak üzere, K nın bir tamlık tabanıdır.

İspat : Her $\omega \in K$ için $\omega = u\omega_1 + v\omega_2 + \gamma\omega_3$ ($u, v, \gamma \in \mathbb{Z}$) olduğunu göstermeliyiz.

a, b, c tamsayı olmak üzere $\omega = (a\theta^2 + b\theta + c)/D_\theta$ olsun. a , ya sıfırdır yada a'' ile bölünür. Şayet bölünmeseydi, ω_3 ün katlarını ω dan çıkararak yada toplayarak a'' den daha küçük olan a ile, K' da (iii) tipinde bir eleman elde edebilirdik. Halbuki a'' , en küçük a'' idi. Çelişki. O halde a sıfır değilse, $a = \gamma a''$ ($\gamma \in \mathbb{Z}$) dir. Buradan

$$\begin{aligned}\omega - \gamma\omega_3 &= (a\theta^2 + b\theta + c)/D_\theta - (\gamma a''\theta^2 + b''\gamma\theta - c''\gamma)/D_\theta \\ &= (b_0 - b''\gamma)\theta - c''\gamma)/D_\theta\end{aligned}$$

olup, bu eleman ya (i) biçiminde yada (ii) biçimindedir. Aynı şekilde ω_2 nin katlarını $\omega - \gamma\omega_3$ den çıkararak yada toplayarak b'' den daha küçük bir b ile K da (ii) biçiminde bir eleman elde edebiliriz. Halbuki b'_0 en küçük b' idi. O halde b sıfır değilse $b = vb'_0$ ($v \in \mathbb{Z}$) dir. Buradan da $u \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\omega - \gamma\omega_3 - v\omega_2 = u, \quad (u, v, \gamma \in \mathbb{Z})$$

elde ederiz. Yani $\{1 = \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ K nın bir tamlık tabanıdır.

SONUÇ 2.4.4. $[K:Q] = n$ ve $\{x_1, \dots, x_n\}$, K nın O_K da kapsanan bir Q tabanı olsun. Eğer $D(x_1, \dots, x_n)$ kare

çarpansız ise $\{x_1, \dots, x_n\}$ K nın bir tamlık tabanıdır.

İspat : $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ tamlık tabanı olsun.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z}) \text{ dir. Teorem 2.3.6. dan}$$

$$D(x_1, \dots, x_n) = (\det(a_{ij}))^2 D(\omega_1, \dots, \omega_n), \text{ buradan}$$

$\det(a_{ij}) = \pm 1$ olmalıdır. Böylece $\{x_1, \dots, x_n\}$ bir tamlık tabanıdır.

ÖRNEK 2.4.5. θ nın sağladığı polinom $x^3 - x - 1$ olsun. Bu polinom $\mathbb{Q}$ -üzerinde asaldır. $K = \mathbb{Q}(\theta)$ diyelim.

$\{1, \theta, \theta^2\}$ K nın bir $\mathbb{Q}$ -tabanıdır. θ cebirsel tamdır.

$D_\theta = D(1, \theta, \theta^2) = 4 - 27 = -23$ olduğundan, $\{1, \theta, \theta^2\}$ aynı zamanda K nın bir tamlık tabanıdır.

TANIM 2.4.6. $[K:\mathbb{Q}] = n$ ve $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ bir tamlık tabanı olsun. $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $\omega_i^{(j)} = \delta_i(\omega_j)$, ω_i lerin eşlenikleri olmak üzere,

$$D(\omega_1, \dots, \omega_n) = (\det \delta_i(\omega_j))^2$$

ne cismin diskriminantı denir ve D_K ile gösterilir.

Cismin diskriminantı, tamlık tabanının seçilişine bağlı değildir. Kübik cisimlerde çalıştığımız için $[K:\mathbb{Q}] = 3$ durumunu inceleyelim. $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ve $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ iki tamlık tabanı olmak üzere

$$\theta = a_0 + a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2, \quad \theta^2 = b_0 + b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 \text{ olsun.}$$

$$D(1, \theta, \theta^2) = \begin{vmatrix} 1 & \theta & \theta^2 \\ 1 & \theta' & \theta'^2 \\ 1 & \theta'' & \theta''^2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 & b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 \\ 1 & a_1 (\omega_1' - \omega_1) + a_2 (\omega_2' - \omega_2) & b_1 (\omega_1' - \omega_1) + b_2 (\omega_2' - \omega_2) \\ 1 & a_1 (\omega_1'' - \omega_1) + a_2 (\omega_2'' - \omega_2) & b_1 (\omega_1'' - \omega_1) + b_2 (\omega_2'' - \omega_2) \end{vmatrix}^2$$

$$= (a_1 b_2 ((\omega_1' - \omega_1) (\omega_2'' - \omega_2) - (\omega_1'' - \omega_1) (\omega_2' - \omega_2)) - a_2 b_1 ((\omega_1' - \omega_1) (\omega_2'' - \omega_2) - (\omega_2' - \omega_2) (\omega_1'' - \omega_1)))^2$$

ve $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \mp 1$ olduğundan,

$$D(1, \theta, \theta^2) = ((\omega_1' - \omega_1) (\omega_2'' - \omega_2) - (\omega_1'' - \omega_1) (\omega_2' - \omega_2))^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_2 \\ 1 & \omega_1' & \omega_2' \\ 1 & \omega_1'' & \omega_2'' \end{vmatrix}^2 = D_K$$

TEOREM 2.4.7. (Stickelberger Teoremi). $[K:Q] = n$ ve $K = Q(\theta)$, K nin diskriminantı D_K olsun. Bu takdirde ya $D_K \equiv 0 \pmod{4}$ yada $D_K \equiv 1 \pmod{4}$ dür.

İspat : $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ K nin bir tamlık tabanı olsun.

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$, $\omega_i^{(j)} = \delta_i(\omega_j)$, ω_i nin eşleniği olmak

üzere,

$$D_K \equiv D(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv (\det \delta_i(\omega_j))^2$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_1(\omega_1) & \delta_1(\omega_2) & \dots & \delta_1(\omega_n) \\ \delta_2(\omega_1) & \delta_2(\omega_2) & \dots & \delta_2(\omega_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_n(\omega_1) & \delta_n(\omega_2) & \dots & \delta_n(\omega_n) \end{vmatrix}^2$$

$$= \left(\sum_{\substack{(1, \dots, n) \\ (\eta_1, \dots, \eta_n) \text{ çift}}} \omega_1^{(\eta_1)} \dots \omega_n^{(\eta_n)} - \sum_{\substack{(1, \dots, n) \\ (\eta_1, \dots, \eta_n) \text{ tek}}} \omega_1^{(\eta_1)} \dots \omega_n^{(\eta_n)} \right)^2$$

$$= (M-N)^2 = (M+N)^2 - 4MN$$

K_0 , Q nun K yı kapsayan minimal normal genişlemesi ise M ve N , O_{K_0} na aittir. $M+N$ ve MN K_0 nun otomorfizmaları altında değişmediğinden $M+N$ ve MN tamsayıdır. O halde $D_K \equiv 0 \pmod{4}$ veya $D_K \equiv 1 \pmod{4}$ dür.

BÖLÜM 3

KÜBİK CİSİMLER

3.1. Diskriminantla, 3 ncü Dereceden Asal f Poli- nomunun Galois Grubu Arasındaki İlişki:

Bu kısımda F cismi, Q nun cisim genişlemesi olarak alınmıştır.

TANIM 3.1.1. $\text{Gal}(E_f/F)$ grubuna, f nin F üzerindeki Galois grubu denir ve $\text{Gal}_F(f)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 3.1.2. $f(x) = x^3 - 1$ için, $\text{Gal}_Q(f)$ yi bulalım.
 f nin C deki kökleri, $1, \omega, \omega^2$, ($\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$) olduğundan,
 $E_f = Q(\omega)$ dır. $\text{Gal}(Q(\omega)/Q)$ nun elemanları iki tane ve bunlar; $1: \delta_0: \omega \rightarrow \omega$, $\delta: \omega \rightarrow \omega^2$ ile belirlidirler. Şu halde $\text{Gal}_Q(f) = \{1, \delta\}$ dır.

TEOREM 3.1.3. H , $\text{Gal}(E/F)$ nin bir alt grubu olsun.
 $F(H) = \{x \in E/\delta \in H \text{ için, } \delta(x) = x\}$, E nin F yi kapsayan bir alt cisimidir. Bu isme H nin sabit cismi denir.

İspat : $F(H) \subset E$ olduğu açıktır. Her $\delta \in H$ için δ bir F -otomorfizma olduğundan, her $a \in F$ için $\delta(a) = a$ dır. Buradan $F \subset F(H)$ bulunur. Şimdi $F(H)$ nin bir cisim olduğunu gösterelim.

$x, y \in F(H)$ ise her $\delta \in H$ için $\delta(x) = x$ ve $\delta(y) = y$ olduğundan, $\delta(x \mp y) = \delta(x) \mp \delta(y) = x \mp y$ ve $x, y \in F(H)$, $y \neq 0$ ise $\delta(xy^{-1}) = \delta(x)\delta(y^{-1}) = \delta(x)\delta(y)^{-1} = xy^{-1}$ olduğundan $x \mp y$ ve $xy^{-1} \in F(H)$ elde edilir. Şu halde $F(H)$ bir cisimdir.

F bir cisim ve $y_1, \dots, y_n$ n-bilinmeyen olsun. Her δ otomorfizması tarafından sabit bırakılan $F(y_1, \dots, y_n)$ nin elemanları (simetrik fonksiyonlar) kümesini K ile gösterelim.

TEOREM 3.1.4. $s_1, \dots, s_n$; $y_1, \dots, y_n$ nin i-nci elementer simetrik fonksiyonları olsunlar. $y_1, \dots, y_n$ nin F cismi üzerinde simetrik her fonksiyonu, elementer simetrik fonksiyonların bir rasyonel fonksiyonudur. Yani $K = F(s_1, \dots, s_n)$ dir. Ayrıca $F(y_1, \dots, y_n)$, $K = F(s_1, \dots, s_n)$ nin n-nci mertebeden bir Galois genişlemesi ve Galois grubu s_n ye izomorftur.

İspat : [1]. Teorem 3.4.1.

SONUÇ 3.1.5. Her sonlu grup, bir Galois grubuna izomorftur.

İspat : n-nci mertebeden bir sonlu grup, Teorem 115. e göre, s_n nin bir alt grubuna izomorftur. Teorem 3.64 e göre s_n , bir $F(y_1, \dots, y_n)/F(s_1, \dots, s_n)$ genişlemesinin Galois grubudur. Teorem 3.1.3. e göre, alt grubunda bir Galois genişlemesi karşılık gelir.

TEOREM 3.1.6. F bir cisim, θ nin sağladığı polinom $f = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$ olmak üzere θ nin diskriminantı D_θ olsun. $\delta \in s_n$ çift permütasyonsa, $(\delta \in A_n)$, $\sqrt{D_\theta} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)$ diskriminantı $(\theta_i$ ler θ nin eşleniği), δ altında sabit kalır. $\delta \in s_n$ tek permütasyonsa, $(\delta \notin A_n)$, $\sqrt{D_\theta}$ nin işareti değişir.

İspat : $\delta \in A_n$ olsun. Şu halde δ , çift sayıda 2-li-nin (transpozisyon) çarpımıdır. $i < j$, (ij) 2-lisi altında $\theta_i - \theta_j$ çarpanı $\theta_{\delta(i)} - \theta_{\delta(j)} = -(\theta_i - \theta_j)$ çarpanına dönüşür ve diğer çarpanlar değişmez. Şu halde, $\delta \in A_n$ ise, $\delta(\sqrt{D_\theta}) = \sqrt{D_\theta}$ ve $\delta \notin A_n$ ise $\delta(\sqrt{D_\theta}) = -\sqrt{D_\theta}$ dır.

TEOREM 3.1.7. $f \in F[x]$ olsun.

(i) $\text{Gal}_F(f) \subset A_n$ olması için gerek ve yeter şart $D_\theta \in F$ nin, F deki bir elemanın karesi olmasıdır.

(ii) $\text{Gal}_F(f) \not\subset A_n$ ise, f nin F üzerindeki parçalanmış cismi E_f , $F(\sqrt{D_\theta})$ cismini kapsar. $F(\sqrt{D_\theta})$, $\text{Gal}_F(f) \cap A_n$ nin sabit cisimidir.

İspat : (i) $D_\theta \in F$ dir. Çünkü D_θ simetrik fonksiyon olduğundan, elementer simetrik fonksiyonların, dolayısıyla $a_i \in F$ lerin bir rasyonel fonksiyonudur.

$\text{Gal}_F(f) \subset A_n$ ise önceki teoreme göre, her $\delta \in \text{Gal}_F(f)$ için $\delta(\sqrt{D_\theta}) = \sqrt{D_\theta}$. Şu halde Galois teori-

sinden $\sqrt{D_0} \in F$, yani D_0 , F de karedir. Tersine D_0 F de kare olsun. $\delta \in \text{Gal}_F(f)$, fakat $\delta \notin A_n$ olsa önceki teoreme göre $\delta(\sqrt{D_0}) = -\sqrt{D_0}$ olurdu. Bu ise $\sqrt{D_0} \in F$ ile çelişirdi. O halde $\text{Gal}_F(f) \subset A_n$ dir.

(ii) $\text{Gal}_F(f) \not\subset A_n$ olsun ve $H = \text{Gal}_F(f) \cap A_n$ diyelim. Şu halde H , $\text{Gal}_F(f)$ nin bir öz alt grubudur. $(\text{Gal}_F(f):H) = 2$ olduğunu gösterelim. $\delta, \tau \in \text{Gal}_F(f)$, fakat $\delta, \tau \notin H$ alalım. Şu hade $\delta, \tau \notin A_n$ dir. $(S_n:A_n) = 2$ olduğundan $\delta^{-1}\tau \in A_n$ olur. $\delta, \tau \in \text{Gal}_F(f)$ olduğundan, $\delta^{-1}\tau \in \text{Gal}_F(f)$ ve $\delta^{-1}\tau \in H = \text{Gal}_F(f) \cap A_n$ bulunur. Buradan, $\text{Gal}_F(f) = H \cup \delta H$, ($\delta \in \text{Gal}_F(f) - H$) yani $(\text{Gal}_F(f):H) = 2$ elde edilir. Galois teorisinin temel teoreminden, H alt grubunun sabit cismi, F nin 2-nci dereceden bir genişlemesidir ve bu genişleme $F(\sqrt{D_0})$ yı kapsar. Şu halde, $H = \text{Gal}_F(f) \cap A_n$ nin sabit cismi, $F(\sqrt{D_0})$ dir.

SONUÇ 3.1.8. θ nın sağladığı 3-ncü dereceden asal polinom $f(x) \in F[x]$ ve θ nın diskriminantı D_0 olsun. Bu takdirde

(i) D_0 , F de bir kare ise $\text{Gal}_F(f) \cong Z_3$ dür.

(ii) D_0 , F de bir kare değil ise $\text{Gal}_F(f) \cong S_3$ dür.

İspat :

(i) D_0 , F de bir kare ise, yukarıdaki teoremden $\text{Gal}_F(f) \subset A_3$ ve $\text{Gal}(f)$, S_3 ün mertebesi en az 3

olan bir alt gurubu olduğundan,

$$\text{Gal}_F(f) = A_3 \cong Z_3$$

bulunur.

(ii) D_0 , F de bir kare değil ise, $\text{Gal}_F(f) \not\subset A_3$ ve $\text{Gal}_F(f)$, S_3 ün en az 3 elemanlı bir alt grubu olduğundan,

$$\text{Gal}_F(f) \cong S_3$$

3.2. Cismin Diskriminantı ile Cisim Arasındaki İlişki

TANIM 3.2.1. $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ tam-sayı katsayılı ikili kübik form olsun.

$$H(x,y) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= (b^2 - 3ac)x^2 + (bc - 9ad)xy + (c^2 - 3bd)y^2 \quad (1)$$

ifadesine f nin kuadratik kovaryantı,

$$G(x,y) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix}$$

$$= -(27a^2d - 9abc + 2b^3)x^3 + (18ac^2 - 27abd - 3b^2c)x^2y \\ + (-18b^2d + 27acd + 3bc^2)xy^2 + (27ad^2 - 9bcd + 2c^3)y^3$$

ifadesine de f nin kübik kovaryantı denir.

TEOREM 3.2.2. $f(x,y)$ tamsayı katsayılı ikili kübik form G ve H , f nin kuadratik ve kübik kovaryantları f nin diskriminantıda D_f olsun. Bu takdirde $G^2 + 27D_f f^2 = 4H^3$ eşitliği vardır.

İspat : $f(x,y) = ax^3 + dy^3$ ikili kübik formunu düşünelim. Bu formun diskriminantı $D_f = -27a^2d^2$ dir. $H(x,y) = -9adxy$ ve $G(x,y) = 27ad(ax^3 - dy^3)$ olduğundan

$$G^2 + 27D_f f^2 = (27ad(ax^3 - dy^3))^2 + 27(-27a^2d^2)(-9adxy)$$

$$= 4H^3$$

TEOREM 3.2.3. $q, n, \bar{q}, \bar{n} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$z^3 = qz + n \quad (3)$$

$$\omega^3 = \bar{q}\omega + \bar{n} \quad (4)$$

asal iki kübik polinom (3) ün diskriminantı D , (4) ün diskriminantı $\bar{D}$ olsun. Eğer

$$(i) D = k^2 \bar{D} \quad , \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ve}$$

(ii) D_1 kare çarpansız, $D = D_1 \Delta^2$, $\bar{D} = D_1 \bar{\Delta}^2$ olmak üzere $D_1 u_1^3 - q \bar{q} u_1 + (\Delta \bar{n} \mp \bar{\Delta} n)/2 = 0$ denkleminin en az bir tane rasyonel kökü varsa, bu iki kübik polinom aynı cisim belirtir.

İspat : (3) den (4) e transformasyon fonksiyonu $\omega = \phi(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ olsun. Örnek 2.1.2. deki gibi ω nın sağladığı polinom aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\omega = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

$$\omega z = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z = \beta z^2 + (\alpha q + \gamma)z + \alpha n$$

$$\omega z^2 = \alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 = (\alpha q + \gamma) z^2 + (\alpha n + \beta q) z + \beta n$$

buradan,

$$\begin{aligned} \alpha z^2 + \beta z + \gamma - \omega &= 0 \\ \beta z^2 + (\alpha q + \gamma - \omega) z + \alpha n &= 0 \\ (\alpha q + \gamma - \omega) z^2 + (\alpha n + \beta q) z + \beta n &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Sıfır haricinde çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

Determinant hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} &\omega^3 (-3\gamma - 2\alpha q) \omega^2 + (4\alpha q \gamma + 3\gamma^2 + \alpha^2 q^2 - 3\alpha \beta n - \beta^2 q) \omega \\ &+ (\alpha^2 \beta n q + 3\alpha \beta n \gamma + \beta^2 q \gamma - \beta^3 n - \alpha^3 n^2 - \gamma^3 - 2\alpha q \gamma^2 - \gamma \alpha^2 q^2) = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.

ω^2 li terimin katsayısının sıfır olması için,
 $\gamma = -\frac{2}{3} \alpha q$ olmalıdır. γ nın bu değeri, denklemde yerine yazılır ve ω nın katsayısını $-\bar{q}$ ye, sabit terimi de $-\bar{n}$ ye eşitlersek,

$$(\alpha^2 q^2 + 9\alpha n \beta + 3\beta^2 q) - 3\bar{q} = 0 \quad (5)$$

$$[27n\beta^3 + 18q^2\beta^2\alpha + 27qn\beta\alpha^2 + (27n^2 - 2q^3)\alpha^3] - 27\bar{n} = 0 \quad (6)$$

elde ederiz.

$$H(x,y) = \alpha^2 q^2 + 9\alpha n \beta + 3\beta^2 q \quad \text{ve}$$

$$G(x,y) = 27n\beta^3 + 18q^2\beta^2\alpha + 27qn\beta\alpha^2 + (27n^2 - 2q^2)\alpha^3,$$

(1) ve (2) den $x = \beta$, $y = \alpha$ için, $f(x,y) = x^3 - qxy^2 - ny^3$ ikili kübik formunun, kuadratik ve kübik kovaryantlarıdır.

Teorem 3.2.2. den, $27Df^2 = 4H^3 - G^2$ ve $\bar{D} = 4\bar{q}^3 - 27\bar{n}^2$ gözönüne alınarak,

$$D[f(\beta, \alpha)]^2 = \bar{D} \quad (7)$$

bulunur. O halde (3) ve (4) aynı cisimdeyse, D ve $\bar{D}$ bir kare çarpan kadar farklıdır.

D_1 kare çarpansız olmak üzere, $D = D_1\Delta^2$, $\bar{D} = D_1\bar{\Delta}^2$ ($\Delta, \bar{\Delta} \in \mathbb{Z}$) alırsak, (7) den

$$f(\beta, \alpha) \mp \sqrt{\bar{D}/D} = f(\beta, \alpha) \mp (\bar{\Delta}/\Delta) = 0 \quad (8)$$

bulunur. (5), (6) ve (8) den β yı yok edersek, yani

$$-(27n\beta^3 + 18q^2\beta^2\alpha + 27qn\beta\alpha^2 + (27n^2 - 2q^3)\alpha^3 - 27\bar{n}) + 27n(f(\beta, \alpha) \mp \sqrt{\bar{D}/D} + 6\alpha q((\alpha^2q^2 + 9\alpha n\beta + 3\beta^2q) - 3\bar{q})) = 0$$

Buradan da,

$$8\alpha^3q^3 - 54\alpha^3n^2 - 18\alpha q\bar{q} + 27\bar{n} + 27(\bar{\Delta}/\Delta)n = 0$$

buluruz. $\alpha = \frac{3u_1}{\Delta}$ alırsak,

$$D_1u_1^3 - q\bar{q}u_1 + (\Delta\bar{n} \mp \bar{\Delta}n)/2 = 0 \quad (9)$$

denklemini elde ederiz.

$$[\beta((\alpha^2q^2 + 9\alpha n\beta + 3\beta^2q) - 3\bar{q}) - 3q(f(\beta, \alpha) \mp \sqrt{\bar{D}/D})]q - 3\alpha n((\alpha^2q^2 + 9\alpha n\beta + 3\beta^2q) - 3\bar{q}) = 0 \quad \text{eşitliğinden,}$$

$$\beta(\alpha^2\Delta^2D_1 - 3q\bar{q}) + 9\alpha\bar{q}n \mp 3(\bar{\Delta}/\Delta)q^2 = 0 \quad \text{bulunur. Eğer}$$

$$\beta = v/\Delta, \quad \gamma = v/\Delta, \quad \alpha = u/\Delta \quad \text{alırsak,}$$

$$u = 3u_1 ; \quad v = \frac{\mp q^2 \bar{\Delta} \mp 9 \bar{q} n u_1}{3D_1 u_1^2 - q \bar{q}} , \quad y = -2qu_1$$

elde ederiz.

Eğer u_1 , (9) un bir katlı kökü ise, $3D_1 u_1^2 - q \bar{q} = 0$ dir. Fakat (9) un iki katlı kökü varsa, 3 ncü kök rasyonel olur. Gerçektende; u_1, u_1', u_1'' ; (9) un kökleri ve $u_1 = u_1'$ olsun. $2u_1 + u_1'' = 0$ ve $u_1^2 u_1'' = \frac{m}{n}$ dir. Buradan $u_1'' = \frac{m}{nu_1^2}$, $3D_1 u_1^2 - q \bar{q} = 0$ olduğundan $u_1^2 = \frac{q \bar{q}}{3D_1}$ dir. Yerine koyarsak $u_1'' = \frac{3mD_1}{nq \bar{q}} \in Q$ dur.

ÖRNEK 3.2.4.

$$z^3 = -3z - 2 \tag{10}$$

$$\omega^3 = -21\omega + 326 \tag{11}$$

İki kübik polinom olsun. Bu polinomlar, aynı cismi belirtir. Çünkü, (10) un diskriminantı D ve (11) in diskriminantı $\bar{D}$ olmak üzere, $D = -216$, $\bar{D} = -216.116^2$ dir. O halde $\bar{D} = 116^2.D$, $D = D_1 \Delta^2$, $\bar{D} = D_1 \bar{\Delta}^2$ dersek, $D_1 = -6$; $\Delta = 6$; $\bar{\Delta} = 696$ olur. $q = -3$, $\bar{q} = -21$, $n = -2$, $\bar{n} = 326$ ve (9) dan

$$-6u_1^3 - 63u_1 + \frac{6 \cdot 326 \mp 696 \cdot 2}{2} = 0$$

denklemini elde ederiz. $u_1 = 6$, bu denklemin bir köküdür. O halde bu iki polinom aynı cismi belirtir. (10) dan (11) e transformasyon fonksiyonunu bulalım:

$$u = 3u_1; \quad v = \frac{7q^2\bar{\Delta} + 9\bar{q}nu_1}{3D_1u_1^2 - q\bar{q}}; \quad y = -2qu_1$$

ve $\alpha = \frac{u}{\Delta}; \quad \beta = \frac{v}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{y}{\Delta}$ eşitliklerinden,

$\alpha = 3, v = 12, \beta = 2, y = 36, \gamma = 6$ elde ederiz.

O halde, $\omega = \phi(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 3z^2 + 2z + 6$ dir.

$z^3 = -3z - 2$ olmak üzere ω nın sağladığı kübik polinom da,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 - \omega \\ 2 & -(3 + \omega) & -6 \\ -(3 + \omega) & -12 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dan}$$

$\omega^3 = -21\omega + 326$ olarak bulunur.

TANIM 3.2.5. m herhangi bir tamsayının kübü olmak üzere, $\mathbb{Q}(m^{1/3}), (m \in \mathbb{Q})$ cebirsel sayı cismine, pür kübik cisim denir.

TEOREM 3.2.6. Bir kübik cismin pür olması için gerek ve yeter şart kübik cismin diskriminantının k pozitif tamsayı olmak üzere, $-3k^2$ biçiminde olmasıdır.

İspat : $K = \mathbb{Q}(\theta)$ pür kübik cisim olsun. θ nın sağladığı asal monik polinom $x^3 - m = 0$ dir. Teorem 2.2.7. den θ yı cebirsel tam olarak alabiliriz. O halde θ nın sağladığı polinomundiskriminantı ile cismin diskriminantı aynı olacağından, $D_K = -27m^2 = -3.9m^2$ bulunur.

Şimdi de $K(\theta)$ bir kübik cisim ve onun diskriminan-

$t_1, k > 0$ olmak üzere, $D_K = -3k^2$ olsun. θ nin sağladığı asal ve monik polinom $(p, q$ tamsayı)

$$\theta^3 + p\theta + q = 0 \quad (12)$$

olsun. K nin bir Q -tabanı olarak $\{1, \theta, \theta^2\}$ yi alabiliriz. Her $\alpha \in K$ için $(a, b, c \in Q)$, $\alpha = a + b\theta + c\theta^2$ dir. a, b, c leri öyle bulacağız ki $\alpha^3 \in Q$ olsun.

$D_\theta = -4p^3 - 27q^2 = D_K = -3k^2$ olduğundan $4p^3 + 27q^2 = 3k^2$
 $\theta, \theta', \theta''$ (12) nin kökleri olmak üzere, kökler arasında Tanım 1.17 den,

$$\theta + \theta' + \theta'' = 0$$

$$\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 = -2p$$

$$\theta\theta'\theta'' = -q$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha &= (a + b\theta + c\theta^2) + (a + b\theta' + c\theta'^2) + (a + b\theta'' + c\theta''^2) \\ &= 3a + b \cdot 0 + c \cdot (-2p) = 3a - 2cp \end{aligned} \quad (13)$$

$$\alpha^2 = (a^2 - 2bcq) + (2ab - 2bcp - c^2q)\theta + (b^2 + 2ac - c^2p)\theta^2$$

olduğundan,

$$\Sigma\alpha^2 = 3(a^2 - 2bcq) - 2p(b^2 + 2ac - c^2p) \quad (14)$$

α nin sağladığı $\alpha^3 + M\alpha^2 + N\alpha + S = 0$ kübik polinomunda $M = 0$ olması için, $\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0$ ve $N = 0$ olması için de, $\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = 0$ olmalıdır.

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = (\alpha + \alpha' + \alpha'')^2 - 2(\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'') = 0$$

olduğundan $\Sigma\alpha^2 = 0$ elde edilir. (12), (13) ve son eşitlikten

$$c^2p^2 - 9bcq - 3b^2p = 0 \quad (15)$$

bulunur. Bu denklem b ve c ye göre kuadratikdir. Diskriminantına d dersek,

$$d = 12p^3 + 81q^2 = 3(4p^3 + 27q^2) = 9k^2$$

dir. Böylece (15) in kökleri rasyoneldir.

$$\frac{c}{b} = \frac{3(3q \mp k)}{2p} \quad \text{ve (13) ün kullanılmasıyla,}$$

$$a = \frac{3q + k}{p} b, \quad c = \frac{3(3q \mp k)}{2p^2} b \quad (16)$$

$$A = a^2 - 2bcq; B = 2ab - 2bcp - c^2q; C = b^2 + 2ac - c^2p$$

olmak üzere, $\alpha^2 = A + B\theta + C\theta^2$ dir.

$$\alpha^3 = (aA - bqC - cqB) + (aB + bA - bpC - cpB - cqC)\theta + (ac + bB + cA - cpC)\theta^2.$$

$$\Sigma \alpha = 0 \quad \text{ve} \quad \Sigma \alpha^2 = 0 \quad \text{olduğundan,}$$

$$aB + bA - bpc - cpB - cqC = 0,$$

$$ac + bB + cA - cpC = 0$$

buradanda $\alpha^3 = aA - bqC - cqB$ bulunur. (16) ve A,B,C nin değerlerinin α^3 de yerine konmasıyla,

$$\alpha^3 = \frac{6(3q + k)^2 k^3 b^3}{8p^6} \in \mathbb{Q}$$

elde edilir.

Aksine olarak, ω, ω^2 birin 3 ncü primitif kökü olmak üzere;

$$\theta = a6^{1/3} (3q + k)^{2/3} + b6^{2/3} (3q + k)^{1/3}$$

$$\theta' = a\omega 6^{1/3} (3q + k)^{2/3} + b\omega^2 6^{2/3} (3q + k)^{1/3}$$

$$\theta'' = a\omega^2 6^{1/3} (3q + k)^{2/3} + b\omega 6^{2/3} (3q + k)^{1/3}$$

alırsak, $\Sigma\theta = 0$, $\Sigma\theta^2 = 36ab(3q + k)$ ve

$\theta\theta'\theta'' = 6((3q + k)^2 a^3 + 36(3q + k)b^3)$ dir. $\Sigma\theta^2 = -2p$

$\theta\theta'\theta'' = -q$ olması içinde, $a = \frac{p}{3(3q + k)}$, $b = -\frac{1}{6}$

olmalıdır.

3.3. Kübik Cisimlerde İndisler

$K \in Q(\theta)$ n-nci dereceden bir sayı cismi ve M , θ cebirsel tam elemanı ile üretilmiş Z modül, O_K da tamlık halkası olsun. $\{\omega_1 = 1, \dots, \omega_n\}$, O_K nin; $\{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}$ M nin tabanı olmak üzere;

$$\theta^j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i \quad (0 \leq j \leq n-1, a_{ij} \in Z)$$

olsun. Birinci tabandan ikinci tabana geçiş matrisine

$A = (a_{ij})$ diyelim. $\{\omega'_1 = 1, \dots, \omega'_n\}$, O_K nin;

$\{1, \theta', \dots, \theta'^{n-1}\}$ de M nin başka bir tabanı olsunlar.

$$\theta'^j = \sum_{i=1}^n a'_{ij} \omega'_i, \quad (a'_{ij} \in Z)$$

geçiş matrisinde $A_1 = (a'_{ij})$ diyelim.

$$\omega_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \omega'_i, \quad \theta'^j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij} \theta^i, \quad (c_{ij}, d_{ij} \in Z).$$

ve $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$ dersek, $A_1 = CAD$ dir.

$C = D^{-1}$ olduğu göz önüne alınarak

$|\det A_1| = |\det D^{-1}| |\det A| |\det D| = |\det A|$ bulunur.

TEOREM 3.3.1. $[K:Q] = n$ ve M, O_K da kapsanan bir Z -modül olsun. $(O_K:M)$ indeksi; O_K nin herhangi bir tabanından, M nin bir tabanına geçiş matrisinin determinantının mutlak değerine eşittir.

İspat : $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, O_K nin bir tabanı olsun.

Teorem 1.16 dan

$$\mu_1 = c_{11}\omega_1 + c_{12}\omega_2 + \dots + c_{1n}\omega_n ,$$

$$\mu_2 = c_{22}\omega_2 + \dots + c_{2n}\omega_n ,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mu_n = c_{nn}\omega_n$$

$c_{ij} \in Z$, $c_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde, M nin bir $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ tabanı vardır. $|\det A|$, taban seçiminin bağımsız ve $|\det A| = c_{11}c_{22}\dots c_{nn}$ dir.

$$x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n , (0 \leq x_i < c_{ii}, 1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

elemanlarının, M nin O_K içindeki koset temsilcilerinin bir tam kümesini teşkil ettiklerini gösterelim.

$\alpha = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$, $(a_i \in Z)$ O_K nin keyfi bir elemanı olsun. a_1 i c_{11} ile bölerek, $a_1 = c_{11}q_1 + x_1$, $(0 \leq x_1 < c_{11})$ diyelim. O zaman

$$\alpha - q_1\mu_1 - x_1\omega_1 = a'_2\omega_2 + \dots + a'_n\omega_n$$

dır. a'_2 yü c_{22} ile bölerek, $a'_2 = c_{22}q_2 + x_2$,

$(0 \leq x_2 < c_{22})$ diyelim.

$$\alpha - q_1\mu_1 - q_2\mu_2 - x_1\omega_1 - x_2\omega_2 = a_3''\omega_3 + \dots + a_n''\omega_n.$$

dır. Aynı düşünceyle devam ederek sonunda,

$$\alpha - q_1\mu_1 - \dots - q_n\mu_n - x_1\omega_1 - \dots - x_n\omega_n = 0,$$

$(q_i, x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_i \leq c_{ii})$ elde ederiz. $q_1\mu_1 + \dots + q_n\mu_n$, M ye ait olduğundan, α ve $x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n$ M nin aynı kosetindedir. O halde, M nin O_K içindeki her koseti (1) biçiminde bir gösterime sahiptir. (1) biçimindeki değişik elemanlar, M nin O_K içindeki farklı kosetlerindedir. Aksini kabul edelim. Farzedelim ki (1) biçimindeki $x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n$ ve $x'_1\omega_1 + \dots + x'_n\omega_n$ gibi iki farklı elemanın farkı, M de olsun. $x \neq x'$ için en küçük indeksi s ile gösterelim. Bu takdirde

$$(x_s - x'_s)\omega_s + \dots + (x_n - x'_n)\omega_n = b_1\mu_1 + \dots + b_n\mu_n$$

elde ederiz. $\mu_1, \dots, \mu_n$ yerine, ω_1 cinsinden değerleri yazılarak katsayılar eşitlenirse; $b_1 = 0, \dots, b_{s-1} = 0$ ve $c_{ss}b_s = x_s - x'_s$ olduğu görülür. Fakat $0 < |x_s - x'_s| < c_{ss}$ olduğundan $c_{ss}b_s = x_s - x'_s$ olması imkansızdır.

Böylece (1) biçimindeki elemanlar, M nin O_K içindeki koset temsilcilerinin bir tam sistemini teşkil ederler. O halde

$$|\det A| = c_{11}c_{22}\dots c_{nn} = (O_K:M)$$

dir.

TANIM 3.3.2. $(O_K:M) = |\det A|$ ne, θ nın O_K içinde-
ki indeksi denir ve $\text{Ind}(\theta)$ ile gösterilir.

SONUÇ 3.3.3. $a_1, a_2, \dots, a_n$, Q üzerinde lineer ba-
ğımsız cebirsel elemanlar, M, a_i lerle üretilmiş Z -modül
ve $(O_K:M) = m$ ise,

$$D_{K/Q}(a_1, \dots, a_n) = m^2 D_K$$

dır.

İspat : [4]. Sonuç 2.6.

TEOREM 3.3.4. $Q(\theta)$ kübik cisminin tamlarının in-
disleri homojen ikili kübik formula ifade edilen tamsa-
yıdırlar.

İspat : $\{\omega_1 = 1, \omega_2, \omega_3\}$ bir tamlık tabanı ve $\alpha, Q(\theta)$
nın herhangi bir cebirsel tam elemanı olsun.

$\alpha = r.\omega_1 + s\omega_2 + t\omega_3$ ($r, s, t \in Z$) yazabiliriz.

$\bar{\alpha} = \alpha - r = s\omega_2 + t\omega_3$ dır.

$$\omega_2^2 = c\omega_1 + d\omega_2 + e\omega_3$$

$$\omega_3^2 = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3$$

$\omega_2\omega_3 = f\omega_1 + g\omega_2 + h\omega_3$ ise, bu değerleri $\bar{\alpha}$ de yerine
koyarsak

$$\bar{\alpha}^2 = (cs^2 + 2fst + it^2)\omega_1 + (ds^2 + 2gst + jt^2)\omega_2 + (es^2 + 2hst + kt^2)\omega_3$$

elde ederiz. Sonuç 3.3.3. den,

$$D_{\alpha} = (\text{Ind}(\alpha))^2 D_K \quad (2)$$

dır. α ile $\bar{\alpha}$ nin indeksi aynı olduğundan

$$\text{Ind}(\alpha) = \text{Ind}(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{D_{\bar{\alpha}}}}{\sqrt{D_K}} = \frac{|1, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2|}{|1, \omega_2', \omega_3''|}$$

Determinant özelliklerinden;

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\alpha) &= \begin{vmatrix} & s & & t \\ ds^2 + 2gst + jt^2 & & es^2 + 2hst + kt^2 \end{vmatrix} \\ &= es^3 + (2h - d)s^2t + (k - 2g)st^2 - jt^3 \end{aligned} \quad (3)$$

elde ederiz. Bu forma, $Q(\theta)$ cisminin indis formu denir.

TANIM 3.3.5. $a_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_0$ polinomunda, eğer bir p asal tamsayısı için $p|a_{n-1}, \dots, p|a_0$ ve $p^2 \nmid a_0$ şartları sağlanıyorsa bu polinoma p -Eisenstein polinom denir.

TEOREM 3.3.6. ϕ , p -Eisenstein polinomun kökü olmak üzere $K = Q(\theta)$ olsun. Bu takdirde $p \nmid \text{Ind}(\theta)$ dir.

İspat : θ nın sağladığı minimal p -Eisenstein polinom $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, ($a_i \in \mathbb{Z}$) olsun.

Bu takdirde $p|a_{n-1}, p|a_{n-1}, \dots, p|a_0$ ve $p^2 \nmid a_0$ dir.

$$\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\theta^n = -(a_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + a_0). \text{ Bu ise } p|\theta^n \text{ demektir.}$$

O halde θ^n/p cebirsel tamdır. Ayrıca $N_{K/Q}(\theta) = (-1)^{n-1}a_0$ ve $p^2 \nmid a_0$ olduğundan $p^2 \nmid N_{K/Q}(\theta)$ dir.

Şimdi kabul edelimki $p|\text{Ind}(\theta)$ olsun. Bu takdirde

O_K da; $b_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere b_i lerin hepsi birden p ile bölünmezken $\zeta = (b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1})p$ biçiminde bir cebirsel tam eleman bulabiliriz.

$p|b_1, \dots, p|b_{j-1}, p \nmid b_j, p \nmid b_{j+1}$ yani $p \nmid b_j$ için minimal indis j olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\mu &= (b_j\theta^j + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1})p^{-1} \\ &= \zeta - \left(\frac{b_0}{p} + \frac{b_1}{p}\theta + \dots + \frac{b_{j-1}}{p}\theta^{j-1}\right)\end{aligned}$$

de cebirsel tamdır.

$$\begin{aligned}\gamma &= b_j\theta^{n-1}p^{-1} \\ &= \mu\theta^{n-j-1} - \theta^n(b_{j+1} + b_{j+2}\theta + \dots + b_n\theta^{n-j-2})p^{-1}\end{aligned}$$

de cebirsel tamdır. Böylece

$$p^n N_{K/Q}(\gamma) = N_{K/Q}(p\gamma) = N_{K/Q}(b_j\theta^{n-1}) = b_j^n N_{K/Q}(\theta)^{n-1}$$

ve

$$p^2 \nmid N_{K/Q}(\theta)$$

olduğu gözönüne alınarak $p|b_j$ bulunur. Halbuki $p \nmid b_j$ idi. O halde $p \nmid \text{ind}(\theta)$ dir.

TEOREM 3.3.7. a, b aralarında asal, kare çarpansız pozitif tamsayılar ve $m = ab^2$ olmak üzere $K = \mathbb{Q}(m^{1/3})$ pür kübik cisminin

(i) $m \not\equiv 1, 8 \pmod{9}$ ise; $D_K = -3^3(ab)^2$ ve bir tamlık

tabanı $\{1, m^{1/3}, (m^{2/3})b^{-1}\}$ alınabilir.

(ii) $m \equiv 1 \pmod{9}$ ise; $D_K = -3(ab)^2$ ve bir tamlık tabanı $\{m^{1/3}, (m^{2/3})b^{-1}, (1 + m^{1/3} + m^{2/3})/3\}$ alınabilir.

(iii) $m \equiv 8 \pmod{9}$ ise; $D_K = -3(ab)^2$ ve bir tamlık tabanı $\{m^{1/3}, (m^{2/3})b^{-1}, (1 - m^{1/3} + m^{2/3})/3\}$ alınabilir.

İspat : $\theta = m^{1/3}$ diyelim. θ nın sağladığı polinom $f(x) = x^3 - m$ dir. Örnek 2.3.11. den θ nın diskriminantı $D_\theta = -3^3 m^2$ dir. $x^3 - m$, a nın her p asal böleni için p -Eisenstein polinom olduğundan Teorem 3.3.6. dan her $p|a$ asal tamsayısı için, $p \nmid \text{Ind}(\theta)$ dır. (2) den $D_\theta = (\text{Ind}(\theta))^2 D_K$ dır. Bu eşitlik gözönüne alınır; $3|a$ ise, $3^3 a^2 | D_K$ ve $3 \nmid a$ ise, $a^2 | D_K$ dır.

$\theta_1 = \frac{\theta^2}{b}$ diyelim. θ_1 de cebirsel tam ve sağladığı polinom $x^3 - a^2 b = 0$ dır. Bu polinom b nin her p asal böleni için p -Eisenstein polinomdur. $D_{\theta_1} = -3^3 (a^2 b)^2$ dir. θ için yaptığımızı, θ_1 için tekrarlırsak:

$3|b$ ise, $3^3 b^2 | D_K$ ve $3 \nmid b$ ise, $b^2 | D_K$ dır. O halde $D_K = -3^N (ab)^2$ biçimindedir. $3|m$ ise, $N = 3$, $3 \nmid m$ ise, $N = 1$ olabilir.

(i) $m \not\equiv 1, 8 \pmod{9}$ olsun. $m^3 \not\equiv m \pmod{9}$ dur. $(x + m)^3 - m = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3 - m$ polinomu 3-Eisenstein polinomdur. $\theta - m$; bu polinomun köküdür. $3 \nmid \text{Ind}(\theta - m) = \text{Ind}(\theta)$ olduğundan $-3^3 | D_K$ bulunur. Böyle-

lece $D_K = -3^3(ab)^2$ dir.

(ii) $m \equiv 1 \pmod{3}$ olsun. $\zeta = (1 + \theta + \theta^2)/3$ diyelim.

ζ nin sağladığı polinom $\zeta^3 = a_2\zeta^2 + a_1\zeta + a_0$ olsun.

$-a_2 = \text{Tr}_{K/Q}(\zeta) = \zeta + \zeta' + \zeta''$ dir. $\text{Tr}_{K/Q}(\theta) = \text{Tr}_{K/Q}(\theta^2) = 0$ olduğundan $\text{Tr}_{K/Q}(\zeta) = 1$ dir. O halde $a_2 = -1$ dir.

$-a_0 = N_{K/Q}(\zeta) = \zeta\zeta'\zeta''$ dir.

$$\begin{aligned} N_{K/Q}(\zeta) &= \frac{1}{27} N_{K/Q}(1 + \theta + \theta^2) \\ &= \frac{1}{27} \frac{N_{K/Q}(\theta^3 - 1)}{N_{K/Q}(\theta - 1)} = \frac{1}{27} \frac{N_{K/Q}(m - 1)}{N_{K/Q}(\theta - 1)} \end{aligned}$$

$\theta - 1$ in sağladığı minimal polinom $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - m = 0$

ve $N_{K/Q}(\theta - 1) = m - 1$ olduğundan $N_{K/Q}(\zeta) = \frac{1}{27} (m - 1)^2$ dir. Buradan $a_0 = -\frac{1}{27} (m - 1)^2$ bulunur.

$$a_1 = \zeta\zeta' + \zeta\zeta'' + \zeta'\zeta'' = \frac{3 - 3m}{9} = -\frac{m - 1}{3} \text{ dir. O halde}$$

ζ nin sağladığı polinom,

$$\zeta^3 - \zeta^2 - \frac{(m - 1)}{3} \zeta - \frac{(m - 1)^2}{3^3} = 0$$

dir. $9 \mid m - 1$ olduğundan ζ nin bütün katsayıları tamsayıdır. O halde ζ cebirsel tamdır.

$$[1, \theta, \theta^2] \subset [1, \theta, \frac{1 + \theta + \theta^2}{3}] \subset O_K$$

ve $(O_K : [1, \theta, \theta^2]) = \text{ind}(\theta)$, $(O_K : [1, \theta, \frac{1 + \theta + \theta^2}{3}]) = 3$

oldüğundan $\text{ind}(\theta) = ([1, \theta, \frac{1 + \theta + \theta^2}{3}] : [1, \theta, \theta^2]) \cdot 3$

O halde $3 \mid \text{Ind}(\theta)$ dir. $D_\theta = (\text{Ind}\theta)^2 D_K$ dan da,
 $D_K = -3(ab)^2$ bulunur.

(iii) $m \equiv 8 \pmod{9}$ olsun. $\zeta = \frac{1 - \theta + \theta^2}{3}$ alarak
ve (ii) deki gibi düşünerek istenen sonuç bulunur.

ÖRNEK 3.3.8. Teorem 3.3.7. de (i) ve (ii) durumundaki indeksleri hesaplayalım.

(i) $m \not\equiv 1, 8 \pmod{9}$ olsun. Bu durumda tamlık tabanı,
 $\omega_1 = 1, \omega_2 = (a^2b)^{1/3}, \omega_3 = (ab^2)^{1/3}$ dür.
 $\alpha \in K = \mathbb{Q}(\theta)$ alalım. $\alpha = r\omega_1 + s\omega_2 + t\omega_3, (r, s, t \in \mathbb{Z})$
dir.

$$\omega_2^2 = a(ab^2)^{1/3} = c + d(a^2b)^{1/3} + e(ab^2)^{1/3}$$

olduğundan, $c = d = 0, e = a$ dir.

$$\omega_3^2 = b(a^2b)^{1/3} = i + j(a^2b)^{1/3} + k(ab^2)^{1/3}$$

olduğundan, $i = k = 0, j = b$ dir.

$$\omega_2\omega_3 = ab = f + g(a^2b)^{1/3} + h(ab^2)^{1/3}$$

olduğundan, $g = h = 0, f = ab$ dir.

Bu değerler (3) de yerine konursa,

$$\text{Ind}(\alpha) = as^3 - bt^3$$

bulunur.

(ii) $m \equiv 1 \pmod{9}$ olsun. Bu durumda $\omega_1 = (ab^2)^{1/3},$
 $\omega_2 = (a^2b)^{1/3}, \omega_3 = (1 + (ab^2)^{1/3} + b(a^2b)^{1/3})/3$ bir

tamlık tabanıdır.

$$[(ab^2)^{1/3}, (a^2b)^{1/3}, \frac{1 + (ab^2)^{1/3} + b(a^2b)^{1/3}}{3}]$$

$$= [1, (a^2b)^{1/3}, \frac{1 + (ab^2)^{1/3} + (a^2b)^{1/3}}{3}]$$

olduğundan,

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = (a^2b)^{1/3}, \omega_3 = \frac{1 + (ab^2)^{1/3} + (a^2b)^{1/3}}{3}$$

alabiliriz.

$$\omega_2^2 = a(ab^2)^{1/3} = c + d(a^2b)^{1/3} + e(1 + (ab^2)^{1/3} + (a^2b)^{1/3})/3$$

dan, $c = -a$, $d = -a$, $e = 3a$ bulunur.

$$\omega_3^2 = \frac{(1 + 2ab) + (2 + a)(ab^2)^{1/3} + (2 + b)(a^2b)^{1/3}}{9}$$

$$= i + j(a^2b)^{1/3} + k \left(\frac{1 + (ab^2)^{1/3} + (a^2b)^{1/3}}{3} \right)$$

dan, $k = \frac{2 + a}{3}$, $j = \frac{b - a}{9}$, $i = \frac{2ab - a - 1}{9}$ bulunur.

$$\omega_2\omega_3 = \frac{ab + (a^2b)^{1/3} + a(ab^2)^{1/3}}{3}$$

$$= f + g(a^2b)^{1/3} = h \frac{(1 + (ab^2)^{1/3} + (a^2b)^{1/3})}{3}$$

dan $h = a$, $g = \frac{1 - a}{3}$, $f = \frac{ab - a}{3}$ bulunur. $2h - d = 3a$

ve $k - 2g = a$ dir. Bu değerler (3) de yerine konursa,

$\text{Ind}(\alpha) = 3as^3 + 3as^2t + ast^2 + [(a - b)/9]t^3$ dir.

Düzenleyerek

$9 \cdot \text{Ind}(\alpha) = a(3s + t)^3 - bt^3$ elde ederiz.

$ab^2 \equiv \mp 1 \pmod{9}$ olsun. $3 \nmid b$ dir. $b \equiv 1 \pmod{3}$ veya

$b \equiv 2 \pmod{3}$, $b \equiv 1 \pmod{3}$ olsun. $b^2 \equiv 1 \pmod{9}$ ve

$1 \equiv ab^2 \equiv a \pmod{9}$. Buradanda $a^2 \equiv b^2 \pmod{9}$ dir.

$b \equiv 2 \pmod{3}$ olsun. $b^2 \equiv 4 \pmod{9}$ ve $1 \equiv ab^2 \equiv 4a \pmod{9}$
 O halde $7 \equiv a \pmod{9}$, $4 \equiv a^2 \pmod{9}$ dır. Buradanda
 $a^2 \equiv b^2 \pmod{9}$ dır. $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan $9 \mid (a-b)$

TEOREM 3.3.9. Yeteri kadar büyük bir N pozitif tamsayısı verildiğinde, her tamının indeksi N den daha büyük olan bir $Q((ab^2)^{1/3})$ pür kübik cismi bulmak mümkündür.

İspat : İndeks form ya $ax^3 - by^3$ yada $(ax^3 - by^3)/9$ biçiminde olduğundan, $I = \text{Ind}(\alpha) = ax^3 - by^3$ formu sayısal olarak, $9N$ e eşit veya ondan daha küçük bir tamsayıyla temsil edilmeyecek şekilde, aralarında asal ve kare çarpansız a, b değerlerinin bulunması ispat için yeterlidir!

$a \equiv 2 \pmod{7}$, $b \equiv 0 \pmod{7}$ ise, $I \equiv 2x^3 \equiv 0, \mp 2 \pmod{7}$ dir. Böylece $I \neq \mp 1$ dir.

$a \equiv 1 \pmod{13}$, $b \equiv 0 \pmod{13}$ ise, $I \equiv x^3 \equiv 0, \mp 1, \mp 5 \pmod{13}$ olduğundan $I \neq \mp 2$ dir.

$I \neq \mp 5$ olması için, $a \equiv 1 \pmod{19}$, $b \equiv 0 \pmod{19}$ aldığımızda $I \equiv 0, \mp 1, \mp 7, \mp 8 \pmod{19}$ bulunur. En küçük mümkün değer olan ∓ 5 i de hariç tuttuğumuzdan $I \neq \mp 3, \mp 4$ dür.

$I = \mp n$ yi hariç tutmak için, önceden kullanılmayan ve n yi bölmeyen bir $p = 3k + 1$ asalını alalım.

$a \equiv r \pmod{p}$, $b \equiv 0 \pmod{p}$ olsun. Burada r yi öyle almalıyız ki, rx^3 , $\pmod{p}$ ye göre $\mp n$ ye denk olmamalıdır.

Bu takdirde $I = ax^3 - by^3 = \mp n$ olacak şekilde bir x bulamayacağımızdan $I \neq \mp n$ olacaktır.

Bu kongrüanslar; çin kalan teoreminden a ve b çözümlerine sahiptir. Modül olarak kullanılan asalların çarpımını $b = p_1 p_2 \dots p_n$ olarak alalım. Kabul edilen şartları sağlayan bir asal olarak da a yı alabiliriz. a üzerindeki sınırlama; $(b, r) = 1$ olmak üzere $(bn + r)$ aritmetik dizisindedir.

ÖRNEK 3.3.10. Bir tam elemanın indeksi 31 den daha büyük olan kübik cismi bulalım. $a = 31$, $b = 7.13 = 91$ için, $ab^2 \not\equiv 1, 8 \pmod{9}$ olduğundan $I = \text{ind}(\alpha) = 31x^3 - 91y^3$ dür. I , sayısal olarak 31 den daha küçük herhangi bir tamsayıyı göstermediğinden:

$$\begin{aligned} 31x^3 - 31y^3 &\equiv 0, \mp 3 \pmod{7} = 0, \mp 1, \mp 5 \pmod{13} \\ &\equiv 0, \mp 1, \mp 2, \mp 4, \mp 8, \mp 16 \pmod{31} \end{aligned}$$

dır. $x = 1$, $y = 0$ için $\text{ind}(\alpha) = 31$ bulunur.

$\alpha^3 - 87451 = 0$ dır. O halde $Q(87451^{1/3})$ pür kübik cismindeki minimum indeks 31 dir.

KAYNAKLAR

- 1- Çallıalp, F., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Ondokuzmayıs Üniversitesi Basımevi, Samsun, 1986
- 2- Borevich, Z.I ve Shafarevich, I.R., Numbers Theory, Academic Press Mathematics 20, London, 1966
- 3- Samuel, P., Theorie Algebrique des Numbers, Hermann Cie, Paris, 1967
- 4- Warkiewicz, W., Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers, Warszawa, 1974
- 5- Ireland, K. ve Rösen, M., A classical introduction to modern number theory, Springer-Verlag, New York, Heildberg, Berlin, 1981
- 6- Delone, B.N ve Faddeev, D.K., The theory of irrationalities of the third degree, Am.Math.Soc. transl. of math. monographs 10, Providence USA, 1964
- 7- Mordell, L.J., Diophantine equations, Academic Press, London and New York, 1969
- 8- Carlitz, L., "A remark on cubics" Amer.Math. Monthly, 1966
- 9- Hall, M., "Indices in cubic Fields" Bull. Amer.Math. Soc., 1937

ÖZGEÇMİŞ

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Yapıcı 1958 yılında Ankara İlinin Nallıhan İlçesinde doğdu. 1976 yılında Ankara Başkent Lisesinden, 1982 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1985 yılında Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde Araştırma görevlisi olarak başladığı göreve halen devam etmektedir.



T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi



Bülent SAVAŞLI

Atatürk Bulvarı Batı Han
NO:151 Kat: 9 NO: 905
Bakanlıklar-ANKARA

TEL: 117 02 17