



T.C.

**BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KÜÇÜK KATLILIKLI ARF SAYISAL
YARIGRUPLARIN ÖZEL BOŞLUKLARI**

Burak Yasin YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

**Nisan-2019
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Burak Yasin YALÇIN tarafından hazırlanan “Küçük Katlılıklı Arf Sayısal Yarıgrupların Özel Boşlukları” adlı tez çalışması 26/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy çokluğu ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Sedat İLHAN

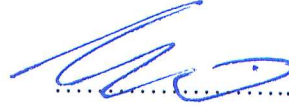
Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.


Doç. Dr. Bahattin İŞCAN
FBE Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Burak Yasin YALÇIN

Tarih: 21.05.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜÇÜK KATLILIKLI ARF SAYISAL YARIGRUPLARIN ÖZEL BOŞLUKLARI

Burak Yasin YALÇIN

**Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

2019, 49 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

Prof. Dr. Sedat İLHAN

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Bu çalışmada, sayısal yarıgruplar ve Arf sayısal yarıgrupları hakkında temel bilgilere yer verilmiştir. Küçük katlılık Arf sayısal yarıgrupları üzerine çalışılmıştır. Verilen küçük katlılık Arf sayısal yarıgruplarının özel boşlukları bulunarak, bu boşluklar bu sayısal yarıgrupumuzun üreteçleri cinsinden ifade edilmiştir. Verilen küçük katlılık Arf sayısal yarıgrubu kapsayan tüm Arf sayısal yarıgrupları bulundu ve elde edilen Arf sayısal yarıgrupların hangi formda olduğu belirlendi.

Anahtar Kelimeler: Arf sayısal yarıgrup, Özel başluklar, Pseudo-Frobenius kümesi, Sayısal yarıgrup

ABSTRACT

MS THESIS

**THE SPECIAL GAPS OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS WITH SMALL
MULTIPLICITY**

Burak Yasin YALÇIN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Assist. Prof. Dr. Meral SUER

2019, 49 Pages

Jury

Assist. Prof. Dr. Meral SÜER

Prof. Dr. Sedat İLHAN

Assist. Prof. Dr. Veyis TURUT

In this study, main preliminaries about numerical semigroups and Arf numerical semigroups were given and Arf numerical semigroups with small multiplicity were investigated. To find the special gaps of Arf numerical semigroups with small multiplicity, we have expressed these gaps in terms of the generators of this numerical semigroups. All Arf numerical semigroups containing a given Arf numerical semigroup with small multiplicity are found and the form of obtained Arf numerical semigroups are determined.

Keywords: Arf numerical semigroup, Numerical semigroups, Psuedo-Frobenius set, Special gaps.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli desteği, emeği ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER'e şükranlarımı sunarım.

Çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli eşim Ayşegül YALÇIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Burak Yasin YALÇIN
BATMAN-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER TABLOSU	1
1. GİRİŞ	2
2. TANIMLAR VE TEOREMLER.....	4
3. ARF SAYISAL YARIGRUPLARI	11
3.1. Küçük Katlılıklı Arf Sayısal Yarıgrupları	13
4. ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ ÖZEL BOŞLUKLARI	16
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	47
5.1 Sonuçlar	47
5.2 Öneriler	47
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\langle A \rangle$	A ile üretilen yarıgrup
$\rightarrow$	İşaretin yönündeki sayıdan sonraki tüm tam sayılar kümenin elemanı
$\leq_s$	S sayısal yarıgrubunda kısmi sıralama bağıntısı
$Ap(S, n)$	S sayısal yarıgrubunun n elemanına göre Apery kümesi
$e(S)$	S sayısal yarıgrubunun gömme boyutu
$F(S)$	S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı
$FH(S)$	S sayısal yarıgrubunun temel boşluklarının kümesi
$g(S)$	S sayısal yarıgrubunun cinsi
$H(S)$	S sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesi
$I(S)$	S sayısal yarıgrubunun ileticisi
$m(S)$	Sayısal yarıgrubun katlılığı
$Maximals \leq_s A$	A kümesinde kısmi sıralama bağıntısına göre maksimal elemanları
MGB	Maksimal gömme boyutlu
$\text{mod } m$	Modülo m
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tam sayılar
$PF(S)$	S sayısal yarıgrubunun Pseudo-Frobenius sayılarının kümesi
$SH(S)$	S sayısal yarıgrubunun özel boşluklarının kümesi
$t(S)$	S sayısal yarıgrubun tipi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

ŞEKİLLER TABLOSU

Şekil 4.1. $S = \langle 3, 10, 11 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu.....	18
Şekil 4.2. $S = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu.....	22
Şekil 4.3. $S = \langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu	29
Şekil 4.4. $S = \langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu	46

1. GİRİŞ

Sayısal yarıgruplar, cebirde tekrar önem kazanmış ve özellikle cebirsel geometri de uygulama alanı bulmuş bir konudur. Sayısal yarıgrupları tanımlaya çalışırsak; sıfırı kapsayan ve negatif olmayan tamsayıların, tümleyeni sonlu olan toplamsal kapalı bir alt kümesidir. Sayısal yarıgruplar değişmeli monoidlerdir ve bu sebeple sayısal monoidler olarak da adlandırılırlar.

Sayısal yarıgrupların kavramının tarihsel gelişimine bakacak olursak ilk olarak 19. Yüzyılda Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester tarafından ele alınmıştır. Tarihte “Frobenius bozuk para problemi” ve aynı zamanda, “Frobenius’un lineer diofant denklemi” olarak da adlandırılan bu problem ilk olarak “ortak bir bölene sahip olmayan bozuk paraları kullanılarak elde edilemeyen en büyük para miktarı nedir?” sorusuyla ifade edilmiştir. Yani, temel olarak “ a ve b negatif olmayan tamsayılar, p ile q sayıları 1 den büyük ve aralarında asal olmak üzere; $ap + bq$ lineer kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük tam sayı nedir?” sorusu tarihte Frobenius problemi olarak bilinir. p ve q gibi iki adet sayı için bu problemin çözümü; $pq - p - q$ olarak belirlidir. Bu sayı $F(S)$ ile temsil edilmiştir(Rosales ve Branco, 2011). Bu şekilde iki sayı için $[0, F(S)]$ aralığındaki sayılardan p ve q sayılarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilen ve yazılamayan sayıların eşit sayıda ve tam olarak $\frac{F(S)+1}{2}$ adet olduğu belirtilmiş ve bununla ilgili teoremin ispatı yine Sylvester (1884) tarafından yapılmıştır.

Sayısal yarıgruplar çalışması, pozitif tamsayı katsayılı homojen olmayan lineer denklemin negatif olmayan çözümlerine denktir. Böylece sayısal yarıgruplar literatürde geniş ölçüde ele alınmış klasik bir problemidir. Bu klasik çizginin ardından iki değişmez, sayısal yarıgruplarda önemli rol oynar. Bunlar Frobenius sayısı ve cinstir. Ayrıca, birçok eserde bir boyutlu analitik indirgenemez yerel halkaların değerler yarıgruplarının ele alındığını görebiliriz. Bu anlamda önemli rol oynayan sayısal yarıgrupların bazı değişmezleri ortaya çıkar: katlılık, gömme boyutu, cinsi, tipi, ileticisi, Apéry kümesi, pseudo-Frobenius sayısı v.b.

Günümüz matematikçileri Arf sayısal yarıgruplarının özellikleri, onların genel denklemi ile ilgilenmektedirler.

Bu çalışmamızda, sayısal yarıgruplar ile ilgili olan çalışmalar hakkında bilgi vereceğiz.

Tezin 2. Bölümünde yarıgrup ve sayısal yarıgrubun literatür özetini yapıp bu konu hakkında sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler hakkında ön bilgiler verilmiştir.

Tezin 3. Bölümünde Arf sayısal yarıgruptan ve özellikle küçük katlılık (katlılığı 6 ya kadar olan) Arf sayısal yarıgruplar hakkında bilgiler verilmiştir.

Tezin 4. Bölümünde küçük katlılık Arf sayısal yarıgrupların özel boşluklarından bahsedip bu özel boşluklarının kümesindeki hangi elemanların bir önceki küme ile birleşim işlemi uygulandığında yeni bir Arf sayısal yarıgrup elde edildiği ve sonucunda hangi formda bir Arf sayısal yarıgrubu olacağı açıklanmıştır.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde ilk olarak, çalışmamız için gerekli temel tanım ve teoremlerden bahsedip sayısal yarıgruplarla ilgili temel özellikler hakkında bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.1. A boştan farklı bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı bir

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

fonksiyonuna, A içinde bir *ikili işlem* denir.

Örnek 2.2. En çok bilinen ikili işlem örnekleri tamsayıların toplama ve çarpma işlemidir.

Tanım 2.3. A boştan farklı bir küme ve $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ ise, $*$ işleminin *birleşme özelliği* vardır denir.

Tanım 2.4. A boştan farklı bir küme ve $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $x \in A$ için $x * a = a * x = x$ olacak şekilde bir $a \in A$ var ise a elemanı $*$ işleminin *birim elemanı* denir.

Tanım 2.5. A boş olmayan bir küme olsun. Bu kümede birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli cebirsel yapılara *yarıgrup* denir.

Tanım 2.6. $\langle A, * \rangle$ bir yarıgrup olsun. $K \subseteq A$ olmak üzere her $x, y \in K$ için $x * y \in K$ oluyorsa K ya A nın bir *alt yarı grubu* denir.

Örnek 2.7. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ cebirsel yapısı, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ yarı grubunun bir alt yarı grubudur.

Tanım 2.8. A bir yarıgrup olsun. Bu kümede birim eleman varsa bu kümeye *monoid* denir. Bu tezde birim elemanı 0 ile göstereceğiz.

Tanım 2.9. Boştan farklı bir H kümesi alalım. $H \subseteq A$ olacak şekilde A monoidi alalım. Eğer $0 \in H$ ve her $a, b \in H$ için $a + b \in H$ olur ise H kümesine A kümesinin *alt monoidi* denir.

Tanım 2.10. $S, \mathbb{N}$ kümesinin her $a, b \in S$ için $a + b \in S$ ve $0 \in S$ olacak şekilde bir alt küme olsun. Eğer $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu ise S ye sayısal yarıgrup denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 2.11. $S = \{0, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur.

S kümesinin toplama işlemine göre kapalı olduğu $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 13\}$ sonlu küme olup tanımdan sayısal yarıgrup olduğu görülür.

Tanım 2.12. Tanım 2.10. de bahsettiğimiz $\mathbb{N} \setminus S$ kümesine *sayısal yarıgrubunun boşlukları* denir ve $H(S)$ ile gösterilir. Bu kümenin eleman sayısına da S nin cinsi denir ve $g(S)$ ile gösterilir.

Örnek 2.13. Örnek 2.11. deki sayısal yarıgrubu ele alacak olursak $H(S) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 13\}$ olur. Bu S sayısal yarıgrubunun $H(S)$ kümenin dışındaki tüm sayılar, bu kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Örneğin; $27 = 1.11 + 4.4 = 1.15 + 3.4 = \dots$ gibi.

Tanım 2.14. A bir yarıgrup ve K onun boştan farklı bir altküme olsun. A nın K yı kapsayan en küçük alt yarıgrubuna K nın *ürettiği yarıgrup* denir. Bu durumda K kümesine de A nın *üreteçler kümesi* denir ve $A = \langle K \rangle$ yazılır. Özel olarak $K = \{n_1, n_2, \dots, n_p\} \subseteq A$ alınırsa $A = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$ yazılır. Eğer $A = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$ olacak şekilde A nın $K = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ kümesinden küçük bir küme bulunamıyorsa $K = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ kümesine A nin *minimal üreteç sistemi* denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 1999).

Tanım 2.15. S bir yarıgrup ve $B \subset S$ olsun. Her $s \in S$ elemanı $B = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ kümesinin elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa, yani $s = t_1 k_1 + t_2 k_2 + \dots + t_n k_n$ ($t_i \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$), B kümesine S nin *üreteçler kümesi* denir ve $S = \langle B \rangle$ yazılır. Eğer S sayısal yarıgrubu, B kümesinin herhangi bir özalt kümesi ile üretileniyorsa B ye *minimal üreteç sistemi* denir. Minimal üreteç sisteminin eleman sayısına da S sayısal yarıgrubunun *gömme boyutu* denir ve $e(S)$ ile gösterilir (Rosales ve ark., 2011).

Örnek 2.16. $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sistemi $B = \{5, 7, 9\}$ ve $e(S) = 3$ tur. Yani $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$ olarak yazılır.

Tanım 2.17. S bir sayısal yarıgrup olsun. S sayısal yarıgrubunu oluşturan üreteçlerin en küçük elemanına S nin *katlılığı* denir ve $m(S)$ ile gösterilir.

Örnek 2.18. $S = \langle 5, 7, 8, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman S nin katlılığı $m(S) = 5$ olur.

Tanım 2.19. S sayısal yarıgrup olmak üzere $m(S) = e(S)$ oluyorsa, S sayısal yarıgruba (*maksimal gömme boyutlu*) MGB-yarıgrup denir (Rosales, 1996).

Yardımcı Teorem 2.20. K boştan farklı sonlu bir küme ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $S = \langle K \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.
- ii. $obeb(K) = 1$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: i. $\Rightarrow$ ii. $\langle K \rangle$ sayısal bir yarıgrup ve $obeb(K) = d$ olsun eğer $k \in \langle K \rangle$ ise $d \mid k$ elde edilir. $\mathbb{N} \setminus \langle K \rangle$ sonlu olduğundan $\langle K \rangle$ sayısal yarıgrubunda öyle bir x elemanı vardır ki ; $d \mid x$ ve $d \mid x+1$ olur. Bu da $d = 1$ olmasını gerektirir.

ii. $\Rightarrow$ i. $obeb(K) = 1$ olsun. O zaman $z_1 k_1 + \dots + z_n k_n = 1$ olacak şekilde $z_1, z_2, \dots, z_n$ ve $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ bulunabilir. Bu eşitliği $z_{i1} a_{i1} + \dots + z_{ik} a_{ik} = 1 - z_{j1} a_{j1} - \dots - z_{jl} a_{jl}$ şeklinde

düzenlersek $s \in \langle K \rangle$ için, $s+1 \in \langle K \rangle$ bulunabilir demektir. Eğer $n \geq (s-1)s + (s-1)$ ise $n \in \langle K \rangle$ olur. Üstelik $n = qs + r$, $0 \leq r < s$ olacak şekilde q ve r tamsayılar bulunabilir. $n \geq (s-1)s + (s-1)$ eşitliğinden $r \leq s-1 \leq q$ elde edilir. Buradan $n = (rs + r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle K \rangle$ bulunur. Yani $\langle K \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.20. S sayısal yarıgrup olsun. Bu yarıgrupun üreteçlerinin $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ lineer kombinasyonu şeklinde yazılamayan en büyük tamsayıya sayısal yarıgrupunun *Frobenius Sayısı* denir ve $F(S)$ ile gösterilir. Frobenius sayısı, S sayısal yarıgrupunun boşluklarının kümesinin en büyük elemanına eşittir (İlhan, 2010).

Örnek 2.21. $S = \langle 5, 12, 13, 14 \rangle = \{0, 5, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$ yarıgrubu için $H(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 16, 21\}$ olup $F(S) = 21$ elde edilir.

Tanım 2.22. S sayısal yarıgrup olsun. Bu sayısal yarıgrup için $x+n \in S$ ve $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde en küçük x tamsayısına, S nin ilercisi denir ve $I(S)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $I(S) = F(S) + 1$ olur.

Örnek 2.23. Örnek 2.21 deki sayısal yarıgrubu ele alırsak $I(S) = 22$ olur.

Tanım 2.24. S bir sayısal yarıgrup olsun ve $x \notin S$ olacak şekilde bir x tamsayısı alalım. Bu durumda $s \in S \setminus \{0\}$ ve $x+s \in S$ oluyorsa x tam sayısına S nin bir *pseudo-Frobenius* sayısı denir. S nin tüm pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ nin eleman sayısına S nin *tipi* denir ve $t(S)$ ile gösterilir. Pseudo-Frobenius sayılarının kümesinin en büyük elemanı bu sayısal yarıgrupunun Frobenius sayısına eşittir.

Örnek 2.25. $S = \langle 7, 8, 10, 12, 13, 19 \rangle = \{0, 7, 8, 10, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $H(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11\} \not\subseteq S$ şeklindedir. Bu durumda;

$$x = 1 \notin S \text{ ve } 10 \in S \text{ iken } 1+10 = 11 \notin S \text{ olup } 1 \notin PF(S) \text{ çıkar.}$$

$x = 2 \notin S$ ve $7 \in S$ iken $2+7=9 \notin S$ olup $2 \notin PF(S)$ çıkar.

$x = 3 \notin S$ ve $8 \in S$ iken $3+8=11 \notin S$ olup $3 \notin PF(S)$ çıkar.

$x = 4 \notin S$ ve $7 \in S$ iken $4+7=11 \notin S$ olup $4 \notin PF(S)$ çıkar.

Ayrıca; $s \in S$, $x \geq 5$ ve $x \in H(S)$ olmak üzere $x+s > F(S)$ olup $x+s \in S$ bulunur ve böylece $PF(S) = \{5, 6, 9, 11\}$ yazılır. Bu durumda, S nin tipi $t(S) = 4$ olur. Ayrıca $F(S) = 11$ olup $PF(S)$ kümesinin en büyük elemanıdır.

Tanım 2.26. S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu S sayısal yarıgrubu üzerinde $\leq_s$ bağıntısını, $a, b \in S$ için, $a \leq_s b \Leftrightarrow b - a \in S$ şeklinde tanımlarsak bu bağıntıya *kısmi sıralama bağıntısı* denir.

Teorem 2.27. $obeb(a, b) = 1$ olan a ve b pozitif tam sayılar verilsin. O zaman

- $F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$,
- $g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}$ (Sylvester, 1884).

Örnek 2.28. $S = \langle 3, 7 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. Burada

$a = 3$ ve $b = 7$ olmak üzere, $F(S) = 3 \cdot 7 - 3 - 7 = 11$ ve $g(S) = \frac{3 \cdot 7 - 3 - 7 + 1}{2} = 6$ olur.

Tanım 2.29. S bir sayısal yarıgrup ve n , S sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı bir elemanı olmak üzere, S nin n ye göre *Apery kümesi*

$$Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$$

şeklinde tanımlanır (Rosales ve Branco, 2011).

Yardımcı Teorem 2.30. S bir sayısal yarıgrup ve n , S sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı bir elemanı olsun. $\omega(i)$, S sayısal yarıgrubunun $\text{mod } n$ ye göre i ye denk olan en küçük elemanını göstermek üzere, $Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\} = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n-1)\}$ şeklindedir (Rosales ve Branco, 2011).

İspat: $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ alalım. O halde her $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $i + kn \in S$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ bulunur. Bu şekilde yazılan en küçük sayıya $\omega(i)$ dersek, $\omega(i) \in Ap(S, n)$ elde edilir. Buradan $\{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n-1)\} \subseteq Ap(S, n)$ olur. Şimdi bir $x \in Ap(S, n)$ alalım. O halde Apery kümesinin tanımına göre $x - n \notin S$ dir. Yani x , S sayısal yarıgrubunun bu özellikteki en küçük elemanıdır. Ayrıca $\text{mod } n$ ye göre $\{1, 2, \dots, n-1\}$ kümesinin elemanlarından birine denk olacağından $x \in \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n-1)\}$ olur. Böylece sonuca varılır.

Teorem 2.31. S bir sayısal yarıgrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. O halde

- $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$
- $g(S) = \frac{1}{n} (\sum_{w \in Ap(S, n)} w) - \frac{n-1}{2}$ (Selmer, 1977).

İspat: Apery kümesinin tanımından $(\max Ap(S, n)) - n \notin S$ olduğu aşıkardır. Eğer $x > (\max Ap(S, n)) - n$ oluyorsa o halde $x + n > (\max Ap(S, n))$ olur. $w \in Ap(S, n)$ olacak şekilde bir w elemanı alırsak $\text{mod } n$ ye göre x e denk olmalıdır. Eğer $w < x + n$ ise bu durumda olacak şekilde $x = w + kn$ bir k pozitif tamsayısı vardır ve sonuç olarak $x - n = w + (k-1)n$ elemanı S kümesine aittir.

Her $w \in Ap(S, n)$ için, eğer w ile $i \text{ mod } n$ ye göre denk ve $i \in \{0, \dots, n-1\}$, o halde negatif olmayan bir k_i için $w = k_i n + i$ olur. Yardımcı Teorem 2.30. den $Ap(S, n) = \{w(0) = 0, w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, \dots, w(n-1) = k_{n-1} n + n - 1\}$.

Bir x tamsayısı $w(i) \text{ mod } n$ ye göre denk ve S kümesinin elemanıysa ancak ve ancak $w(i) \leq x$. Buradan

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \dots + k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} ((k_1 n + 1) + \dots + (k_{n-1} n + n - 1)) - \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{1}{n} (\sum_{w \in Ap(S, n)} w) - \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Eğer $S = \langle a, b \rangle$ olan bir sayısal yarıgrup ise o zaman $Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}$ olur.

Tanım 2.32. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer her $x \in H(S)$ için $\{2x, 3x\} \subset S$ oluyorsa, x elemanına S nin bir *temel boşluğu* denir. S nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(S)$ ile gösterilir(Sylvester, 1884).

Örnek 2.33. $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu alalım. Bu kümenin boşlukları $H(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ şeklindedir. $H(S)$ nin elemanlarını ele aldığımızda sadece $x=6$ ve $x=10$ için $FH(S) = \{6, 10\}$ bulunur.

Tanım 2.34. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer her $x \in PF(S)$ için $2x \in S$ oluyorsa x elemanına S nin bir *özel boşluğu* denir ve S nin tüm özel boşluklarının kümesi $SH(S) = \{x \in PF(S); 2x \in S\}$ ile gösterilir(Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 2.35. $S = \langle 5, 7, 11 \rangle = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ olsun. Bu sayısal yarıgrupta $PF(S) = \{13, 9\}$ ve $SH(S) = \{13, 9\}$ şeklindedir.

Burada $\{9\} \cup S = \{0, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ ve $\{13\} \cup S = \{0, 5, 7, 10, \rightarrow\}$ şeklinde yeni bir sayısal yarıgruplar elde edilir.

Önerme 2.36. S bir sayısal yarıgrup ve $x \in H(S)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. $x \in SH(S)$
- ii. $S \cup \{x\}$ bir sayısal yarıgruptur.

Yardımcı Teorem 2.37. S ve T iki sayısal yarıgrup ve $S \subset T$ olsun. O halde $S \cup \{\max(T \setminus S)\}$ bir sayısal yarıgruptur ve aynı zamanda $\max(T \setminus S) \in SH(S)$ dir.

3. ARF SAYISAL YARIGRUPLARI

Tanım 3.1. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer her $x, y, z \in S$ için $x \geq y \geq z$ olmak üzere, $x + y - z \in S$ özelliği sağlanıyorsa S sayısal yarıgrubuna *Arf sayısal yarıgrup* denir (Rosales ve ark., 2004). Başka bir şekilde tanımlarsak, her $x, y \in S$ için $x \geq y$ iken $2x - y \in S$ oluyorsa S sayısal yarıgrubuna *Arf sayısal yarıgrup* denir. (Garcia-Sanchez ve ark., 2017)

Örnek 3.2. $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 8, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun Arf sayısal yarıgrup olduğunu gösterelim;

$$x = 3, y = 3 \text{ iken } 2 \cdot 3 - 3 = 3 \in S$$

$$x = 6, y = 3 \text{ iken } 2 \cdot 6 - 3 = 9 \in S$$

$$x = 6, y = 6 \text{ iken } 2 \cdot 6 - 6 = 6 \in S$$

$$x = 8, y = 3 \text{ iken } 2 \cdot 8 - 3 = 15 \in S$$

$$x = 8, y = 6 \text{ iken } 2 \cdot 8 - 6 = 10 \in S$$

$$x = 8, y = 8 \text{ iken } 2 \cdot 8 - 8 = 8 \in S \text{ buluruz. Ayrıca, } x \geq 8 \text{ iken}$$

her zaman $x - y \geq 8$ olacağından $2 \cdot x - y \in S$ çıkar. Böylece, S bir Arf sayısal yarıgrup olur.

Yardımcı Teorem 3.3. k bir pozitif tamsayı olmak üzere, $S = \{0, k, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu daima Arf sayısal yarıgruptur. (Rosales ve ark., 2004)

Yardımcı Teorem 3.4. S bir sayısal yarıgrup olsun ve x bir pozitif tam sayı olsun. O halde $(x + S) \cup \{0\}$ Arf sayısal yarıgruptur ancak ve ancak S Arf sayısal yarıgruptur.

Yardımcı Teorem 3.5. S , bir sayısal yarıgrup olsun. O halde, $S' = \{x + y - z : x, y, z \in S, x \geq y \geq z\}$ kümesi $\mathbb{N}$ 'nin toplama işlemine göre kapalı bir alt kümesidir ve $S \subseteq S'$ şeklindedir (Rosales ve ark., 2004).

İspat: $x \in S$ olsun. O zaman $x + x - x \in S'$ olduğu ve $S \subseteq S'$ iken $S' \subseteq \mathbb{N}$ olduğu açıktır. Şimdi $a, b \in S'$ alırsak S' kümesinin tanımından, $x_k \geq y_k \geq z_k$, $k \in \{1, 2\}$ ve

$a = x_1 + y_1 - z_1$, $b = x_2 + y_2 - z_2$ olmak üzere $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ vardır. Buradan, $a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$ elde edilir. Açıkça, $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \in S$ ve $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$ olduğu görülebilir. Bu da $a + b \in S'$ demektir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Önerme 3.6. S bir sayısal yarıgrup ve $x \in S$ olsun. O halde S , Arf sayısal yarıgruptur, ancak ve ancak $S' = (x + S) \cup \{0\}$ Arf sayısal yarıgruptur (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: S bir Arf sayısal yarıgrup olsun. O halde S maksimal gömme boyutuna sahiptir. Buradan da S' sayısal yarıgrup olduğu ve $x \in S' \setminus \{0\}$ öyle ki $S = (x + S') \cup \{0\}$ olur. Eğer $S \neq \mathbb{N}$ ise $S \subsetneq S'$ olur ki S' Arf sayısal yarıgruptur. Bu yaptığımız yöntemi S' için tekrar ettirecek olursak S'' Arf sayısal yarıgrubunu elde ederiz ve $y \in S'' \setminus \{0\}$ öyle ki $S' = (y + S'') \cup \{0\}$. $\mathbb{N} \setminus S$ nin bu şekilde çok fazla eleman elde edilebilir ve bu şekilde Arf sayısal yarıgruplarının sabit bir yükseliş zinciri elde edilmiş olur: $S_0 = S \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$ ve $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$ öyle ki $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$ olur.

Örnek 3.7. $S = \langle 4, 11, 13, 14 \rangle = \{0, 4, 8, 11, \rightarrow\}$ şekilde Arf sayısal yarıgrubu olsun. $5 \in S'$ için $S' = (5 + S) \cup \{0\} = \{0, 9, 13, 16, \rightarrow\}$ yarıgrubunun Arf sayısal yarıgrup olduğunu gösterelim:

$$x = 9, y = 9 \text{ iken } 2 \cdot 9 - 9 = 9 \in S$$

$$x = 13, y = 9 \text{ iken } 2 \cdot 13 - 9 = 17 \in S$$

$$x = 13, y = 13 \text{ iken } 2 \cdot 13 - 13 = 13 \in S$$

$$x = 16, y = 9 \text{ iken } 2 \cdot 16 - 9 = 23 \in S$$

$$x = 16, y = 13 \text{ iken } 2 \cdot 16 - 13 = 19 \in S$$

$$x = 16, y = 16 \text{ iken } 2 \cdot 16 - 16 = 16 \in S \text{ çıkar. Ayrıca,}$$

$x \geq 16$ iken $x \geq y$ olduğundan her zaman $2 \cdot x - y \geq 16$ eşitsizliği sağlanır ve $2 \cdot x - y \in S$ olduğu görülür. Böylece $S' = \{0, 9, 13, 16, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu Arf olur.

3.1. Küçük Katlıklılı Arf Sayısal Yarıgrupları

Önerme 3.1.1. Herhangi bir Arf sayısal yarıgrup, maksimum gömme boyutuna sahiptir. Böylece, eğer S katlılığı m olan bir Arf sayısal yarıgrup ise, o zaman S nin minimal üreteç sistemi $(Ap(S, m) \setminus \{0\}) \cup \{m\}$ kümesi olur. Ayrıca, $Ap(S, m)$ kümesinin en büyük elemanı $I(S) + m - 1$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Önerme 3.1.2. Katlılığı 1 olan sayısal yarıgrup sadece $\mathbb{N}$ kümesidir. Öte yandan, $\mathbb{N}$ bir Arf sayısal yarıgruptur.

Önerme 3.1.3. Katlılığı 2 olan bütün sayısal yarıgruplar aynı zamanda Arf sayısal yarıgrubudur. Eğer S sayısal yarıgrubunun ileticisini $I(S) = I$ alırsak $S = \langle 2, I+1 \rangle$ ile gösterilir. Bu çalışma için Garcia-Sanchez ve ark., (2017) nin aşağıdaki önermeleri çok önemli olacaktır.

Önerme 3.1.4. $I \geq 3$ ve $I \not\equiv 1 \pmod{3}$ olacak şekilde bir I tam sayısı verilsin. O zaman katlılığı 3 ve ileticisi I olan S Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir.

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{3}$ ise, o zaman $S = \langle 3, I+1, I+2 \rangle$
 - ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{3}$ ise, o zaman $S = \langle 3, I, I+2 \rangle$
- şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark., 2017).

Önerme 3.1.5. Katlılığı 4 ve ileticisi I olan S , Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir.

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{4}$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I}{4}$ ise, o zaman $S = \langle 4, 4k+2, I+1, I+3 \rangle$
 - ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{4}$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{4}$ ise, o zaman $S = \langle 4, 4k+2, I+1, I+3 \rangle$
 - iii. Eğer $I \equiv 3 \pmod{4}$ ise, o zaman $S = \langle 4, I, I+2, I+3 \rangle$
- şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark., 2017).

Önerme 3.1.6. Katlılığı 5 ve ileticisi I olan S , Arf sayısal yarıgrubu aşağıdakilerden biridir.

- i. Eğer $I \equiv 0(\text{mod } 5)$ ise, o zaman
 - a) $S = \langle 5, I-2, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ya da
 - b) $S = \langle 5, I+1, I+2, I+3, I+4 \rangle$.
- ii. Eğer $I \equiv 2(\text{mod } 5)$ ise, o zaman $S = \langle 5, I, I+1, I+2, I+4 \rangle$,
- iii. Eğer $I \equiv 3(\text{mod } 5)$ ise, o zaman $S = \langle 5, I, I+1, I+3, I+4 \rangle$,
- iv. Eğer $I \equiv 4(\text{mod } 5)$ ise, o zaman
 - a) $S = \langle 5, I-2, I, I+2, I+4 \rangle$ ya da
 - b) $S = \langle 5, I, I+2, I+3, I+4 \rangle$
 şeklindedir (Garcia-Sanchez ve ark., 2017).

Önerme 3.1.7. Katlılığı 6 ve ileticisi I olan S , Arf sayısal yarıgrubu olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $I \equiv 0(\text{mod } 6)$ ise, o zaman
 - a) $S = \langle 6, I+1, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$,
 - b) $S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$,
 - c) $S = \langle 6, 6t+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$,
 - d) $S = \langle 6, 6t+4, 6t+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ biçimindedir.
 (Burada, $t = 1, 2, \dots, \frac{I}{6}-1$ dir.)
- ii. Eğer $I \equiv 2(\text{mod } 6)$ ise, o zaman
 - a) $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$,
 - b) $S = \langle 6, 6v+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$,
 - c) $\langle 6, 6v+4, 6v+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ biçimindedir.
 (Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}$, $v = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}-1$ dir.)
- iii. Eğer $I \equiv 3(\text{mod } 6)$ ise, o zaman $u = 1, 2, \dots, \frac{I-3}{6}$ olmak üzere,

$S = \langle 6, 6u + 3, I + 1, I + 2, I + 4, I + 5 \rangle$ biçimindedir.

iv. Eğer $I \equiv 4 \pmod{6}$ ise, o zaman

$$a) S = \langle 6, 6u + 2, 6u + 4, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle,$$

$b) S = \langle 6, 6u + 4, 6u + 8, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$ biçimindedir.

(Burada, $u = 1, 2, \dots, \frac{I-4}{6}$ dır.)

v. Eğer $I \equiv 5 \pmod{6}$ ise, o zaman $u = 1, 2, \dots, \frac{I-5}{6}$ olmak üzere,

$$a) S = \langle 6, I, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5 \rangle,$$

$b) S = \langle 6, 6u + 3, I, I + 2, I + 3, I + 5 \rangle$ biçimindedir (Garcia-Sanchez ve ark., 2017).

4. ARF SAYISAL YARIGRUPLARININ ÖZEL BOŞLUKLARI

Bu bölüm tezimizin özgün kısmını oluşturmakta ve burada bulduğumuz sonuçları daha öncesinde Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinde *The special gaps of Arf numerical semigroups with small multiplicity* başlığı ile yayınlanmıştır(Suer ve Yalcin, 2018).

Bu çalışmada daha önce ispatlanmış olan S bir Arf sayısal yarıgrup olmak üzere $F(S) \cup S$ nin de yine bir Arf sayısal yarıgrup olduğu ve $S \subset F(S) \cup S$ olduğu gösterilmiştir.(Rosales ve ark., 2009) Bu bölümde, katlılığı 6 ya kadar olan S Arf sayısal yarıgruplarının özel boşlukları kümesi $SH(S)$ ’yi elde edip, $x \in SH(S)$ için $\{x\} \cup S$ kümesinin hangi formda Arf sayısal yarıgrup olduğunu belirleyeceğiz.

Tanım 4.1. S bir sayısal yarıgrup ve $g \notin S$ olsun. O zaman $S \cup \{g\}$ bir sayısal yarıgrup ise g ’ye S nin özel boşluğu denir, S nin tüm özel boşluklarının kümesi $SH(S)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle S bir sayısal yarıgrup $H(S) = \mathbb{N} \setminus S$ olmak üzere, $SH(S) = \{x \in H(S), \text{ her } s \in S \setminus \{0\} \text{ için } 2x \in S \text{ ve } x + s \in S\}$ yazılır(Rosales ve ark., 2003).

Yardımcı Teorem 4.2. Eğer S bir Arf sayısal yarıgrup ve katlılığı $m > 1$ ise, o zaman

$$i. \text{Maximals} \leq_s Ap(S, m) = Ap(S, m) \setminus \{0\},$$

$$ii. PF(S) = \{w - m : w \in Ap(S, m) \setminus \{0\}\}$$

şeklindedir(Froberg ve ark.,1987).

Önerme 4.3. İleticisi $I(S) = I$ ve katlılığı 2 olan Arf sayısal yarıgruplar $S = \langle 2, I+1 \rangle$ şeklindedir. Bu durumda, $SH(S) = \{I-1\}$ ve $\{I-1\} \cup S = \langle 2, I-1 \rangle$ olur.

Teorem 4.4. S , Önerme 3.1.4 deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{3}$ ve $S = \langle 3, I+1, I+2 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{I-1\} & , I=3 \text{ ise} \\ \{I-2, I-1\} & , I>3 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} \{2\} & , I=3 \text{ ise} \\ \{I-2, I-1\} & , I>3 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

- ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{3}$ ve $S = \langle 3, I, I+2 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{I-1\} & , I=5 \text{ ise} \\ \{I-3, I-1\} & , I>5 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} \{4\} & , I=5 \text{ ise} \\ \{I-3, I-1\} & , I>5 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde olur.

İspat: Öncelikle Önerme 3.1.4 deki tüm sayısal yarıgrupların Arf sayısal yarıgrup olduğu belirlidir. Bu durumda;

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{3}$ ve $I > 3$ için $S = \langle 3, I+1, I+2 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 3) = \{0, I+1, I+2\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{I-2, I-1\}$ olur. Buradan

$$I \geq 6$$

$$2I \geq I+6$$

$$2(I-2) \geq I+2$$

ve

$$2(I-1) \geq I+4$$

$$2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Böylece $SH(S) = \{I-1, I-2\}$ olur. Ayrıca $I=3$ için $S = \langle 3, 4, 5 \rangle$ olur ve $SH(S) = \{2\}$ olarak elde ederiz. Bundan dolayı

$$SH(S) = \begin{cases} \{2\} & , I=3 \text{ ise} \\ \{I-2, I-1\} & , I>3 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- ii. Eğer $I \equiv 0 \pmod{3}$, $S = \langle 3, I, I+2 \rangle$ ve $I > 5$ ise, o zaman $Ap(S, 3) = \{0, I, I+2\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{I-1, I-3\}$ olur. Böylece

$$I \geq 8$$

$$2I \geq I+8$$

$$2(I-3) \geq I+2$$

ve

$$2(I-1) \geq I+6$$

$$2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-3, I-1 \in SH(S) \text{ bulunur.}$$

Böylece $SH(S) = \{I-3, I-1\}$ olur. Ayrıca $I=5$ için $S = \langle 3, 5, 7 \rangle$ ve $SH(S) = \{4\}$ olarak elde ederiz. Sonuç olarak

$$SH(S) = \begin{cases} \{4\} & , I=5 \text{ ise} \\ \{I-3, I-1\} & , I>5 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.5. S , Önerme 3.1.4 deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{3}$, $S = \langle 3, I+1, I+2 \rangle$ ise, o zaman $I>3$ için $\{I-1\} \cup S = \langle 3, I-1, I+1 \rangle$ gibi bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir bu da Önerme 3.1.4[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur. Özel olarak $I=3$ için $\{I-1\} \cup S = \{2\} \cup S = \langle 2, 3 \rangle$ şeklindeki katlılığı 2 olan bir Arf sayısal yarıgruptur.
- ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{3}$ ve $S = \langle 3, I, I+2 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 3, I-1, I \rangle$ gibi bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir bu da Önerme 3.1.4[i] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.6. S kümesi $S = \langle 3, 10, 11 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup olsun. S , Önerme 3.1.4[i] gibi bir Arf sayısal yarıgruptur. Bu sayısal yarıgrubun özel boşluğu $SH(S) = \{8\}$ dir. Böylece $\{8\} \cup S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlemi tekrar edersek $SH(\{8\} \cup S) = \{7\}$ ve $\{8\} \cup S$ den $\{7, 8\} \cup S = \langle 3, 7, 8 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlem benzer şekilde tekrarlayarak aşağıdaki grafik elde edilir. Şekil 4.1 den anlaşılacağı üzere elde ettiğimiz kümeler birer Arf sayısal yarıgrupturlar.

$$\begin{aligned}
& S = \langle 3, 10, 11 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{8\} \\
& \langle 3, 8, 10 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{7\} \\
& \langle 3, 7, 8 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{5\} \\
& \langle 3, 5, 7 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{4\} \\
& \langle 3, 4, 5 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{2\} \\
& \langle 2, 3 \rangle \\
& \quad \downarrow \cup \{2\} \\
& \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Şekil 4.1. $S = \langle 3, 10, 11 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu

Yukarıdaki Şekil 4.1 den anlaşılacağı üzere $\langle 3, 10, 11 \rangle$ sayısal yarı grubunu kapsayan Arf sayısal yarı gruplarının zinciri aşağıdaki gibidir:

$$\langle 3, 10, 11 \rangle \subset \langle 3, 8, 10 \rangle \subset \langle 3, 7, 8 \rangle \subset \langle 3, 5, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N}$$

Teorem 4.7. S , Önerme 3.1.5 deki gibi bir sayısal yarı grup olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{4}$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I}{4}$ için $S = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{4k - 2, I - 1\} & , I = 4 \text{ ise} \\ \{4k - 2, I - 3, I - 1\} & , I > 4 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} \{2, 3\} & , I = 4 \text{ ise} \\ \{4k - 2, I - 3, I - 1\} & , I > 4 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde olur.

- ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{4}$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{4}$ için $S = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ ise, o zaman $SH(S) = \{4k - 2, I - 3, I - 1\}$ olur.

- iii. Eğer $I \equiv 3 \pmod{4}$ için $S = \langle 4, I, I + 2, I + 3 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{I - 2, I - 1\} & , I = 7 \text{ ise} \\ \{I - 4, I - 2, I - 1\} & , I > 7 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} \{5, 6\} & , I = 7 \text{ ise} \\ \{I - 4, I - 2, I - 1\} & , I > 7 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde olur.

İspat: Öncelikle Önerme 3.1.5 deki tüm sayısal yarıgrupların Arf sayısal yarıgrup olduğu belirlidir. Bu durumda;

- i. Eğer $I \equiv 0(\text{mod } 4)$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I}{4}$ için $S = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ ise, o zaman dolayısıyla $Ap(S, 4) = \{0, 4k + 2, I + 1, I + 3\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{4k - 2, I - 3, I - 1\}$ olur. Buradan

$$I \geq 4$$

$$2I \geq I + 4$$

$$2(I - 1) \geq I + 5$$

$$2(I - 1) \in S$$

$$I - 1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Ayrıca eğer $I = 4$ ise, o zaman $I - 3 = 1$, $2 \cdot 1 = 2 \notin S$ ve $2 \notin SH(S)$ olur ve $I > 4$ ise, o zaman

$$I \geq 8$$

$$2I \geq I + 8$$

$$2(I - 3) \geq I + 2$$

$$2(I - 3) \in S$$

$$I - 3 \in SH(S)$$

çıkar ve $2(4k - 2) = 4(2k - 1) \in S$, $4(2k - 1) \in SH(S)$ olur. Böylece

$$SH(S) = \begin{cases} \{2, 3\} & , I = 4 \text{ ise} \\ \{4k - 2, I - 3, I - 1\} & , I > 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- ii. Eğer $I \equiv 2(\text{mod } 4)$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{4}$ için $S = \langle 4, 4k + 2, I + 1, I + 3 \rangle$ ise, o zaman dolayısıyla $Ap(S, 4) = \{0, 4k + 2, I + 1, I + 3\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{4k - 2, I - 3, I - 1\}$ olur. Bu durumda

$$I \geq 6$$

$$2I \geq I + 6$$

$$2(I - 3) \geq I$$

ve

$$2(I - 1) \geq I + 4$$

$$2(I - 3), 2(I - 1) \in S$$

$$I-3, I-1 \in SH(S)$$

çıkar ve $2(4k-2) = 4(2k-1) \in S$, $4(2k-1) \in SH(S)$ elde edilir. Böylece $SH(S) = \{4k-2, I-3, I-1\}$ olarak elde edilir.

- iii. Eğer $I \equiv 3 \pmod{4}$ için $S = \langle 4, I, I+2, I+3 \rangle$ ise, o zaman S Arf sayısal yarıgruptur, dolayısıyla $Ap(S, 4) = \{0, I, I+2, I+3\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{I-4, I-2, I-1\}$ olur. Burada

$$I \geq 7$$

$$2I \geq I+7$$

$$2(I-1) \geq I+5$$

ve

$$2(I-2) \geq I+3$$

$$2(I-1), 2(I-2) \in S$$

$$I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Ayrıca eğer $I = 7$ ise, o zaman $I-4 = 3$, $2 \cdot 3 = 6 \notin S$ ve $6 \notin SH(S)$ olur ve $I > 7$ ise, o zaman

$$I \geq 11$$

$$2I \geq I+11$$

$$2(I-4) \geq I+3$$

$$2(I-4) \in S$$

$$I-4 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Buradan da

$$SH(S) = \begin{cases} \{5, 6\} & , I = 7 \text{ ise} \\ \{I-4, I-2, I-1\} & , I > 7 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.8. S , Önerme 3.1.5 deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim. O halde

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{4}$ ve $k = 1, 2, \dots, \frac{I}{4}$ için $S = \langle 4, 4k+2, I+1, I+3 \rangle$ ise, o zaman

$(4k-2) \cup S$ ve $(I-1) \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur. Yani

$$(4k-2) \cup S = \begin{cases} \langle 2, I+1 \rangle & , k = 1 \text{ ise} \\ \langle 4, 4k-2, I+1, I+3 \rangle & , k > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$k=1$ için katlılığı 2 ve $k>1$ için Önerme 3.1.5[i] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

$$(I-1) \cup S = \begin{cases} \langle 4, 4k+2, I-1, I+1 \rangle & , k \neq \frac{I}{4} \text{ ise} \\ \langle 4, I-1, I+1, I+2 \rangle & , k = \frac{I}{4} \text{ ise} \end{cases}$$

sayısal yarıgrubu, $k \neq \frac{I}{4}$ için Önerme 3.1.5 [ii] ve $k = \frac{I}{4}$ için Önerme 3.1.5 [iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur. Özel olarak, eğer $I=4$ alırsak $(I-1) \cup S = \langle 4, 4k+2, I-1, I+1 \rangle = \langle 3, 4, 5 \rangle$ Önerme 3.1.4[i] formunda bir Arf sayısal yarıgrup olur.

- ii. Eğer $I \equiv 2(\text{mod } 4)$ ve $k=1, 2, \dots, \frac{I-2}{4}$ için $S = \langle 4, 4k+2, I+1, I+3 \rangle$ ise, o zaman $(4k-2) \cup S$ ve $(I-1) \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur. Böylece,

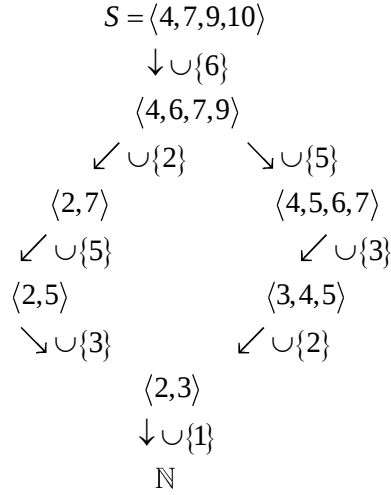
$$(4k-2) \cup S = \begin{cases} \langle 2, I+1 \rangle & , k=1 \text{ ise} \\ \langle 4, 4k-2, I+1, I+3 \rangle & , k \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

sayısal yarıgrubunda $k=1$ için katlılığı 2 ve $k \neq 1$ için Önerme 3.1.5[ii] formunda olan bir Arf sayısal yarıgruptur ve $(I-1) \cup S = \langle 4, 4k+2, I-1, I+1 \rangle$ sayısal yarıgrubu Önerme 3.1.5[i] formunda bir Arf sayısal yarıgrup olur.

- iii. Eğer $I \equiv 3(\text{mod } 4)$ için $S = \langle 4, I, I+2, I+3 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 4, I-1, I, I+2 \rangle$ kümesi Önerme 3.1.5[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgrup olur.

Örnek 4.9. S kümesi $S = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup olsun. S , Önerme 3.1.5[iii] gibi bir Arf sayısal yarıgruptur. Bu sayısal yarıgrubun özel boşluğu $SH(S) = \{6\}$ dir. Böylece $\{6\} \cup S = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlemi tekrar edersek $SH(\{6\} \cup S) = \{2, 5\}$ ve $\{6\} \cup S$ den $\{5\} \cup (\{6\} \cup S) = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle$ ve $\{2\} \cup (\{6\} \cup S) = \langle 2, 7 \rangle$ şeklinde yeni Arf sayısal yarıgrupları elde edilir. Bu işlem benzer şekilde tekrarlanarak aşağıdaki grafik elde edilir. Şekil 4.2 den anlaşılacağı üzere elde ettiğimiz kümeler birer Arf sayısal

yarıgrupturlar.



Şekil 4.2. $S = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu

Yukarıdaki Şekil 4.2 den anlaşılacağı üzere $S = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunu kapsayan Arf sayısal yarıgruplarının zinciri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \langle 4, 7, 9, 10 \rangle &\subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
 \langle 4, 7, 9, 10 \rangle &\subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 2, 7 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Teorem 4.10. S , Önerme 3.1.6 daki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I-2, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{6, 7, 9\} & , I = 10 \text{ ise} \\ \{I-7, I-4, I-3, I-1\} & , I > 10 \text{ ise} \end{cases}$$

- ii. Eğer $I \equiv 0 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I+1, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{3, 4\} & , I = 5 \text{ ise} \\ \{I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I > 5 \text{ ise} \end{cases}$$

- iii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{4, 6\} & , I = 7 \text{ ise} \\ \{I-5, I-4, I-3, I-1\} & , I > 7 \text{ ise} \end{cases}$$

iv. Eğer $I \equiv 3 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+3, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{4, 6, 7\} & , I = 8 \text{ ise} \\ \{I-5, I-4, I-2, I-1\} & , I > 8 \text{ ise} \end{cases}$$

v. Eğer $I \equiv 4 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I-2, I, I+2, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{6, 8\} & , I = 9 \text{ ise} \\ \{I-7, I-5, I-3, I-1\} & , I > 9 \text{ ise} \end{cases}$$

vi. Eğer $I \equiv 4 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise bu durumda,

$$SH(S) = \begin{cases} \{6, 7, 8\} & , I = 9 \text{ ise} \\ \{I-5, I-3, I-2, I-1\} & , I > 9 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.6 daki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgrup olduğu belirlidir. Bu durumda;

i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{5}$ ve $S = \langle 5, I-2, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I-2, I+1, I+2, I+4\}$ olduğu aşikardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-7, I-4, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 10$$

$$2I \geq I+10$$

$$2(I-4) \geq I+2$$

ve

$$2(I-3) \geq I+4$$

ve

$$2(I-1) \geq I+8$$

$$2(I-4), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-4, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Ayrıca eğer $I=10$ ise, o zaman $I-7=3$, $2 \cdot 3=6 \notin S$ ve $6 \notin SH(S)$ olur ve $I > 10$ ise, o zaman

$$I \geq 15$$

$$2I \geq I+15$$

$$2(I-7) \geq I+1$$

$$2(I-7) \in S$$

$$I-7 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da } SH(S) = \begin{cases} \{6, 7, 9\} & , I = 10 \text{ ise} \\ \{I-7, I-4, I-3, I-1\} & , I > 10 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- ii. Eğer $I \equiv 0 \pmod{5}$ ve $S = \langle 5, I+1, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I+1, I+2, I+3, I+4\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-4, I-3, I-2, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 5$$

$$2I \geq I+5$$

$$2(I-2) \geq I+1$$

ve

$$2(I-1) \geq I+3$$

$$2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I = 5$ ise, o zaman $I-4 = 1$ ve $I-3 = 2$ olur ve $2 \cdot 1 = 2 \notin S$ ve $2 \cdot 2 = 4 \notin S$ olur. Böylece $1, 2 \notin SH(S)$ olur ve ayrıca $I > 5$ ise, o zaman

$$I \geq 10$$

$$2I \geq I+10$$

$$2(I-4) \geq I+2$$

ve

$$2(I-3) \geq I+4$$

$$2(I-4), 2(I-3) \in S$$

$$I-4, I-3 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Bu durumda, } SH(S) = \begin{cases} \{3, 4\} & , I = 5 \text{ ise} \\ \{I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I > 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- iii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I, I+1, I+2, I+4\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-5, I-4, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 7$$

$$2I \geq I+7$$

$$2(I-3) \geq I+1$$

ve

$$2(I-1) \geq I+5$$

$$2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-3, I-1 \in SH(S).$$

Eğer $I=7$ ise, o zaman $I-5=2$ ve $I-4=3$ olur ve $2 \cdot 2=4 \notin S$, $2 \cdot 3=6 \notin S$ olur ve $2, 3 \notin SH(S)$ olur ayrıca eğer $I > 7$ ise, o zaman

$$I \geq 12$$

$$2I \geq I+12$$

$$2(I-5) \geq I+2$$

ve

$$2(I-4) \geq I+4$$

$$2(I-5), 2(I-4) \in S$$

$$I-5, I-4 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Bu durumda, } SH(S) = \begin{cases} \{4, 6\} & , I=7 \text{ ise} \\ \{I-5, I-4, I-3, I-1\} & , I > 7 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- iv. Eğer $I \equiv 3 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I, I+1, I+3, I+4\}$ olduğu aşikardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-5, I-4, I-2, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 8$$

$$2I \geq I+8$$

$$2(I-4) \geq I$$

ve

$$2(I-2) \geq I+4$$

ve

$$2(I-1) \geq I+6$$

$$2(I-4), 2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-4, I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I=8$ ise, o zaman $I-5=3$, $2 \cdot 3=6 \notin S$ ve $3 \notin SH(S)$ olur ayrıca $I > 8$ ise, o zaman

$$I \geq 13$$

$$2I \geq I+13$$

$$2(I-5) \geq I+3$$

$$2(I-5) \in S$$

$$I-5 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Bu durumda, } SH(S) = \begin{cases} \{4, 6, 7\} & , I=8 \text{ ise} \\ \{I-5, I-4, I-2, I-1\} & , I>8 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- v. Eğer $I \equiv 4 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I-2, I, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I-2, I, I+2, I+4\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-7, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 9$$

$$2I \geq I+9$$

$$2(I-3) \geq I+3$$

ve

$$2(I-1) \geq I+7$$

$$2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I=9$ ise, o zaman $I-7=2$ ve $I-5=4$ iken $2 \cdot 2=4 \notin S$ ve $2 \cdot 4=8 \notin S$ olur ve $2, 4 \notin SH(S)$ dir ayrıca $I>9$ ise, o zaman

$$I \geq 14$$

$$2I \geq I+14$$

$$2(I-7) \geq I$$

ve

$$2(I-5) \geq I+4$$

$$2(I-7), 2(I-5) \in S$$

$$I-7, I-5 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Bu durumda, } SH(S) = \begin{cases} \{6, 8\} & , I=9 \text{ ise} \\ \{I-7, I-5, I-3, I-1\} & , I>9 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- vi. Eğer $I \equiv 4 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 5) = \{0, I, I+2, I+3, I+4\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I-5, I-3, I-2, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 9$$

$$2I \geq I+9$$

$$2(I-3) \geq I+3$$

ve

$$2(I-2) \geq I+5$$

ve

$$2(I-1) \geq I+7$$

$$2(I-3), 2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-3, I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I=9$ ise, o zaman $I-5=4$, $2 \cdot 4=8 \notin S$ ve $4 \notin SH(S)$ olur ve ayrıca $I > 9$ ise, o zaman

$$I \geq 14$$

$$2I \geq I+14$$

$$2(I-5) \geq I+4$$

$$2(I-5) \in S$$

$$I-5 \in SH(S).$$

$$\text{Bu durumda, } SH(S) = \begin{cases} \{6, 7, 8\} & , I=9 \text{ ise} \\ \{I-5, I-3, I-2, I-1\} & , I>9 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

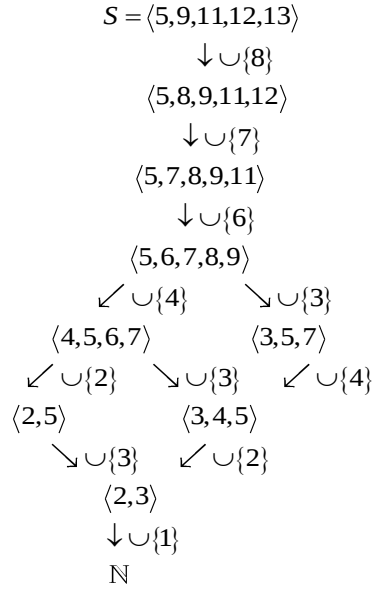
Sonuç 4.11. S , Önerme 3.1.6 daki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim. O halde

- i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{5}$ için $S = \langle 5, I-2, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-2, I-1, I+1, I+2 \rangle$ Önerme 3.1.6[iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.
- ii. Eğer, $I \equiv 0 \pmod{5}$ ve $I > 5$ için $S = \langle 5, I+1, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-2\} \cup S = \langle 5, I-2, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ve $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-1, I+1, I+2, I+3 \rangle$ Arf

sayısal yarıgruptur. Burada $\{I-2\} \cup S$ Önerme 3.1.6[i-a] formunda, $\{I-1\} \cup S$ Önerme 3.1.6[iv-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur. Eğer $I=5$ ise, o zaman $\{I-2\} \cup S$ Önerme 3.1.4 [ii] formunda $\{I-1\} \cup S$ ise Önerme 3.1.5[i] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- iii. Eğer $I \equiv 2(\text{mod } 5)$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-1, I, I+1, I+2 \rangle$ Önerme 3.1.6[i-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.
- iv. Eğer $I \equiv 3(\text{mod } 5)$ için $S = \langle 5, I, I+1, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-1, I, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.6[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.
- v. Eğer $I \equiv 4(\text{mod } 5)$ için $S = \langle 5, I-2, I, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-2, I-1, I, I+2 \rangle$ Önerme 3.1.6[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.
- vi. Eğer $I \equiv 4(\text{mod } 5)$ için $S = \langle 5, I, I+2, I+3, I+4 \rangle$ ise, o zaman $\{I-2\} \cup S = \langle 5, I-2, I, I+2, I+3 \rangle$ ve $\{I-1\} \cup S = \langle 5, I-1, I, I+2, I+3 \rangle$ Arf sayısal yarıgruptur. Burada $\{I-2\} \cup S$ Önerme 3.1.6[iv-a] formunda ve $\{I-1\} \cup S$ Önerme 3.1.6[iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.12. S kümesi $S = \langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup olsun. S , Önerme 3.1.6[iv] şeklinde bir Arf sayısal yarıgruptur. Bu sayısal yarıgrubun özel boşluğu $SH(S) = \{8\}$ dir. Böylece $\{8\} \cup S = \langle 5, 8, 9, 11, 12 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlemi tekrar edersek $SH(\{8\} \cup S) = \{7\}$ ve $\{8\} \cup S$ den $\{7\} \cup (\{8\} \cup S) = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlem benzer şekilde tekrarlanarak aşağıdaki Şekil 4.3 elde edilir. Şekilden anlaşılacağı üzere elde ettiğimiz kümeler birer Arf sayısal yarıgrupturlar.



Şekil 4.3. $S = \langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu

Yukarıdaki Şekil 4.3 ten anlaşılacağı üzere $\langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle$ sayısal yarıgrupunu kapsayan Arf sayısal yarıgruplarının zincirleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle \subset \langle 5, 8, 9, 11, 12 \rangle \subset \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle \subset \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle \subset \langle 5, 8, 9, 11, 12 \rangle \subset \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle \subset \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 5, 9, 11, 12, 13 \rangle \subset \langle 5, 8, 9, 11, 12 \rangle \subset \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle \subset \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \subset \langle 3, 5, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Teorem 4.13. S , Önerme 3.1.7[i] deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer

$$t = 1, 2, \dots, \frac{I}{6} - 1 \text{ ve } I \equiv 0 \pmod{6},$$

- i. Eğer $S = \langle 6, I+1, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{3, 4, 5\} & , I = 6 \text{ ise} \\ \{I-5, I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I > 6 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{4, I-5, I-3, I-1\} & , t = 1 \text{ ise} \\ \{6t-4, 6t-2, I-5, I-3, I-1\} & , t > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

- iii. Eğer $S = \langle 6, 6t+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \{6t-3, I-5, I-4, I-2, I-1\} \text{ olur.}$$

iv. Eğer $S = \langle 6, 6t + 4, 6t + 8, I + 1, I + 3, I + 5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{8, I - 5, I - 3, I - 1\} & , t = 1 \text{ ise} \\ \{6t - 2, 6t + 2, I - 5, I - 3, I - 1\} & , t > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.7[i] deki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgrupudur.

i. Eğer $I \equiv 0 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, I + 1, I + 2, I + 3, I + 4, I + 5\}$ olduğu aşikardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{I - 5, I - 4, I - 3, I - 2, I - 1\}$ olduğu görülür. Buradan

$$I \geq 6$$

$$2I \geq I + 6$$

$$2(I - 3) \geq I$$

ve

$$2(I - 2) \geq I + 2$$

ve

$$2(I - 1) \geq I + 4$$

$$2(I - 3), 2(I - 2), 2(I - 1) \in S$$

$$I - 3, I - 2, I - 1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I = 6$ ise, o zaman $I - 5 = 1$ ve $I - 4 = 2$ dir. Burada $2 \cdot 1 = 2 \notin S$, $2 \cdot 2 = 4 \notin S$ iken $1, 2 \notin SH(S)$ olur. Ayrıca eğer $I > 6$ ise, o zaman

$$I \geq 12$$

$$2I \geq I + 12$$

$$2(I - 5) \geq I + 2$$

ve

$$2(I - 4) \geq I + 4$$

$$2(I - 5), 2(I - 4) \in S$$

$$I - 5, I - 4 \in SH(S).$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{3, 4, 5\} & , I = 6 \text{ ise,} \\ \{I - 5, I - 4, I - 3, I - 2, I - 1\} & , I > 6 \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- ii. Eğer $I \equiv 0 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6t-4, 6t-2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $I > 6$ ve $t=1$ ise, o zaman $6t-4=2$, $2 \cdot 2=4 \notin S$ ve $6t-4=2 \notin SH(S)$ olur. Eğer $I > 6$ ve $t > 1$ ise, o zaman $6t-4 > 2$ ve $2(6t-4) = 6(2t-2) + 4 = 6k + 4 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, k = 2t-2)$ ve $6t-4 \in SH(S)$ olur. Benzer şekilde $2(6t-2) = 6(2t-1) + 2 = 6m + 2 \in S (\exists m \in \mathbb{N}, m = 2t-1)$ ve $6t-2 \in SH(S)$ olur. Böylece,

$$I \geq 12$$

$$2I \geq I+12$$

$$2(I-5) \geq I+2$$

ve

$$2(I-3) \geq I+6$$

ve

$$2(I-1) \geq I+10$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{4, I-5, I-3, I-1\} & , t=1 \text{ ise} \\ \{6t-4, 6t-2, I-5, I-3, I-1\} & , t>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- iii. Eğer $I \equiv 0 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6t+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, 6t+3, I+1, I+2, I+4, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6t-3, I-5, I-4, I-2, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $t \geq 1$ ise, o zaman $6t-3 \geq 3$ ve $2 \cdot (6t-3) = 6 \cdot (2t-1) = 6k \in S (\exists k \in \mathbb{N}, k = 2t-1)$ ve $6t-3 \in SH(S)$ olur.

Böylece,

$$I \geq 12$$

$$2I \geq I+12$$

$$2(I-5) \geq I+2$$

ve

$$2(I-4) \geq I+4$$

ve

$$2(I-2) \geq I+8$$

ve

$$2(I-1) \geq I+10$$

$$2(I-5), 2(I-4), 2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-4, I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Buradan da, $SH(S) = \{6t-3, I-5, I-4, I-2, I-1\}$ olarak elde edilir.

- iv. Eğer $I \equiv 0 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6t+4, 6t+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, 6t+4, 6t+8, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6t-2, 6t+2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $t=1$ ise, o zaman $6t-2=4$ ve $6t+2=8$, $2 \cdot 4=8 \notin S$ ve $2 \cdot 8=16 \in S$ olur. Bu durumda $4 \notin SH(S)$ ve $8 \in SH(S)$ olduğu görülür. Eğer $t>1$ ise, o zaman $6t-2>4$ ve $2(6t-2)=6(2t-2)+8=6k+8 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, k=2t-2)$ ve $6t-2 \in SH(S)$ olur. Benzer şekilde $2(6t+2)=6(2t)+4=6m+4 \in S (\exists m \in \mathbb{N}, m=2t)$ ve $6t+2 \in SH(S)$ olur. Böylece,

$$I \geq 12$$

$$2I \geq I+12$$

$$2(I-5) \geq I+2$$

ve

$$2(I-3) \geq I+6$$

ve

$$2(I-1) \geq I+10$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{8, I-5, I-3, I-1\} & , t=1 \text{ ise} \\ \{6t-2, 6t+2, I-5, I-3, I-1\} & , t>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.14. S , Önerme 3.1.7.[i] deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

Eğer $t = 1, 2, \dots, \frac{I}{6} - 1$ ve $I \equiv 0 \pmod{6}$ ise, o halde

- i. Eğer $S = \langle 6, I+1, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ve $I = 6$ ise, o zaman $\{3\} \cup S = \langle 3, 7, 8 \rangle$ Önerme 3.1.4[i] formunda, $\{4\} \cup S = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle$ Önerme 3.1.5[ii] formunda ve $\{5\} \cup S = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$ Önerme 3.1.6[i-b] formunda Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $S = \langle 6, I+1, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ve $I > 6$ ise, o zaman $\{I-3\} \cup S = \langle 6, I-3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-c] formunda, $\{I-2\} \cup S = \langle 6, I-2, I+1, I+2, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-d] formunda ve $\{I-1\} \cup S = \langle 6, I-1, I+1, I+2, I+3, I+4 \rangle$ Önerme 3.1.7[v-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I-1, I+1, I+3 \rangle$ o halde Önerme 3.1.7[iv-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $t = 1$ ise, o zaman $\{4\} \cup S = \langle 4, 6, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.5[i] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $t > 1$ ise, o zaman $\{6t-2\} \cup S = \langle 6, 6t-2, 6t+2, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-d] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- iii. Eğer $S = \langle 6, 6t+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$\{6t-3\} \cup S = \begin{cases} \langle 3, I+1, I+2 \rangle & , t = 1 \text{ ise} \\ \langle 6, 6t-3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle & , t > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Arf sayısal yarıgruptur. Burada $t = 1$ ise, o zaman Önerme 3.1.4[i] formunda, $t > 1$ ise, o zaman Önerme 3.1.7[i-c] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

$\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6t+3, I-1, I+1, I+2, I+4 \rangle$ ise, o zaman Önerme 3.1.7[v-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- iv. Eğer $S = \langle 6, 6t+4, 6t+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6t+2\} \cup S = \langle 6, 6t+2, 6t+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-b] formunda ve

$\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6t+4, 6t+8, I-1, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.7[iv-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Teorem 4.15. S , Önerme 3.1.7[ii] deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Burada

$u = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}$, $v = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6} - 1$ ve $I \equiv 2 \pmod{6}$ iken,

i. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{4, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

ii. Eğer $S = \langle 6, 6v+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \{6v-3, I-6, I-4, I-3, I-1\} \text{ olur.}$$

iii. Eğer $S = \langle 6, 6v+4, 6v+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{8, I-5, I-3, I-1\} & , v=1 \text{ ise} \\ \{6v-2, 6v+2, I-5, I-3, I-1\} & , v>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.7[ii] deki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}$, $v = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6} - 1$ ve $I \equiv 2 \pmod{6}$ iken,

i. Eğer $I \equiv 2 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem

4.2. den de $PF(S) = \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Burada

$u=1$ ise, o zaman $2(6 \cdot 1 - 4) = 4 \notin S$ olur. Eğer $u \neq 1$ ise, o zaman

$2(6u-4) = 6(2u-2) + 4 \in S$ ve $6u-4 \in SH(S)$ olur. Benzer şekilde

$2(6u-2) = 6(2u-1) + 2 = 6k+2 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, k=2u-1)$ ve $6u-2 \in SH(S)$ olur.

Diğer taraftan

$$I \geq 8$$

$$2I \geq I+8$$

$$2(I-5) \geq I-2$$

ve

$$2(I-3) \geq I+2$$

ve

$$2(I-1) \geq I+6$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{4, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

ii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6v+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, 6v+3, I, I+2, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2.

den de $PF(S) = \{6v-3, I-6, I-4, I-3, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $2(6v-3) = 6(2v-1) = 6k \in S$ ($\exists k \in \mathbb{N}, k = 2v-1$) ise, o zaman

$6v-3 \in SH(S)$ olur. Diğer taraftan,

$$I \geq 14$$

$$2I \geq I+14$$

$$2(I-6) \geq I+2$$

ve

$$2(I-4) \geq I+6$$

ve

$$2(I-3) \geq I+8$$

ve

$$2(I-1) \geq I+12$$

$$2(I-6), 2(I-4), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-6, I-4, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \{6v-3, I-6, I-4, I-3, I-1\}$$

olarak elde edilir.

iii. Eğer $I \equiv 2 \pmod{6}$ için $S = \langle 6, 6v+4, 6v+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, 6v+4, 6v+8, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem

4.2. den de $PF(S) = \{6v-2, 6v+2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Burada $v=1$

ise, o zaman $2(6 \cdot 1 - 2) = 8 \notin S$ olur. Ayrıca eğer $v \neq 1$ ise, o zaman

$2(6v-2) = 6(2v-1) + 2 = 6n + 2 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2v-1)$ ve $6v-2 \in SH(S)$ olur. Benzer şekilde, $2(6v+2) = 6(2v) + 4 = 6m + 4 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, m = 2v)$ ve $6v+2 \in SH(S)$ olur. Diğer taraftan,

$$I \geq 14$$

$$2I \geq I + 14$$

$$2(I-5) \geq I + 4$$

ve

$$2(I-3) \geq I + 8$$

ve

$$2(I-1) \geq I + 12$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{6v+2, I-5, I-3, I-1\} & , v=1 \text{ ise} \\ \{6v-2, 6v+2, I-5, I-3, I-1\} & , v>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.16. S , Önerme 3.1.7[ii] deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6}$, $v = 1, 2, \dots, \frac{I-2}{6} - 1$ ve $I \equiv 2 \pmod{6}$ iken,

- i. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ Arf sayısal yarıgruptur ve ayrıca $u = \frac{I-2}{6}$ için de $\{I-5\} \cup S$ Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $u=1$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S = \{4\} \cup S = \langle 4, 6, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.5[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq 1$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S = \langle 6, 6u-2, 6u+2, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-c] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u = \frac{I-2}{6}$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 6, I-1, I, I+1, I+2, I+3 \rangle$ ise, o halde

Önerme 3.1.7[i-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq \frac{I-2}{6}$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I-1, I+1, I+3 \rangle$ ise, o

halde Önerme 3.1.7[i-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $I=8$ ise, o zaman $\{I-5\} \cup S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ Önerme 3.1.2.[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $I > 8$ ve $u = \frac{I-2}{6}$ ise, o zaman

$\{I-5\} \cup S = \langle 6, 6u-3=I-5, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o halde Önerme 3.1.7[ii-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6v+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6v-3\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ birer Arf sayısal yarıgrubudur.

Burada $v=1$ ise, o zaman $\{6v-3\} \cup S = \{3\} \cup S = \langle 3, I, I+2 \rangle$ Önerme 3.1.4[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $v \neq 1$ ise, o zaman $\{6v-3\} \cup S = \langle 6, 6v-3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Diğer taraftan $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6v+3, I-1, I, I+2, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- iii. Eğer $S = \langle 6, 6v+4, 6v+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6v+2\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ birer Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $\{6v+2\} \cup S = \langle 6, 6v+2, 6v+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur. Diğer taraftan $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6v+4, 6v+8, I-1, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.7[i-d] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Teorem 4.17. S , Önerme 3.1.7[iii] deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Burada

$u = 1, 2, \dots, \frac{I-3}{6}$ ve $I \equiv 3 \pmod{6}$ iken,

Eğer $S = \langle 6, 6u+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{6u-3, I-4, I-2, I-1\} & , I=9 \text{ ise} \\ \{6u-3, I-5, I-4, I-2, I-1\} & , I>9 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.7[iii] deki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-3}{6}$ ve $I \equiv 3 \pmod{6}$ iken,

Eğer $I \equiv 3 \pmod{6}$ ve $S = \langle 6, 6u+3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, 6u+3, I+1, I+2, I+4, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6u-3, I-5, I-4, I-2, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $2(6u-3) = 6(2u-1) = 6t \in S$ ($\exists k \in \mathbb{N}, t = 2u-1$) ise, o zaman $6u-3 \in SH(S)$

olur. Diğer taraftan $I=9$ ise, o zaman $I-5=4$, $2 \cdot 4=8 \notin S$ ve $I-5=4 \notin SH(S)$ olur.

Ayrıca eğer $I > 9$ ise, o zaman

$$I > 9$$

$$2I > I+9$$

$$2(I-5) > I-1$$

ve

$$2(I-4) > I+1$$

ve

$$2(I-2) > I+5$$

ve

$$2(I-1) > I+7$$

$$2(I-5), 2(I-4), 2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-4, I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{3, 5, 7, 8\} & , I = 9 \text{ ise} \\ \{6u-3, I-5, I-4, I-2, I-1\} & , I \neq 9 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.18. S , Önerme 3.1.7[iii] deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

Burada $\{6u-3\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgrubudur. Eğer $u=1$

ise, o zaman $\{6u-3=3\} \cup S = \langle 3, I+1, I+2 \rangle$ Önerme 3.1.4[i] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq 1$ ise, o zaman $\{6u-3\} \cup S = \langle 6, 6u-3, I+1, I+2, I+4, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u = \frac{I-3}{6}$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 6, I-1, I, I+1, I+2, I+4 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq \frac{I-3}{6}$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = S = \langle 6, 6u+3, I-1, I+1, I+2, I+4 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Teorem 4.19. S , Önerme 3.1.7[iv] deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-4}{6}$ ve $I \equiv 4 \pmod{6}$ iken,

i. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{6u-2=4, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+4, 6u+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{6u+2=8, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-2, 6u+2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.7[iv] deki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-4}{6}$ ve $I \equiv 4 \pmod{6}$ iken,

i. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $u=1$ ise, o zaman $2(6u-4) = 2(6 \cdot 1 - 4) = 2 \cdot 2 = 4 \notin S$ ve $2 \notin SH(S)$, $2(6u-2) = 2(6 \cdot 1 - 2) = 2 \cdot 4 = 8 \in S$ ve $4 \in SH(S)$ olur. Ayrıca eğer $u \neq 1$ ise, o

zaman $2(6u-4) = 12u-8 = 6(2u-2)+4 = 6s+4 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, s=2u-2)$ ve

$2(6u-2) = 6(2u-1)+2 = 6t+2 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, t=2u-1)$ ve

$6u-4, 6u-2 \in SH(S)$ olur. Diğer taraftan

$$I \geq 10$$

$$2I \geq I+10$$

$$2(I-5) \geq I$$

ve

$$2(I-3) \geq I+4$$

ve

$$2(I-1) \geq I+8$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{6u-2=4, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-4, 6u-2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+4, 6u+8, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, 6u+4, 6u+8, I+1, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den de $PF(S) = \{6u-2, 6u+2, I-5, I-3, I-1\}$ olduğu görülür.

Burada $u=1$ ise, o zaman $2(6u-2) = 2(6 \cdot 1 - 2) = 2 \cdot 4 = 8 \notin S$ ve

$$2(6u+2) = 2(6 \cdot 1 + 2) = 2 \cdot 8 = 16 \in S \text{ iken } 4 \notin SH(S) \text{ ve } 6u+2 = 8 \in SH(S)$$

olur. Ayrıca eğer $u \neq 1$ ise, o zaman

$$2(6u-2) = 12u-4 = 6(2u-1) + 2 = 6t-1 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, t=2u-1) \text{ ve}$$

$$6u-2 \in SH(S), \quad 2(6u+2) = 6(2u) + 4 = 6m+4 \in S (\exists k \in \mathbb{N}, m=2u) \text{ ve}$$

$6u+2 \in SH(S)$ olur. Diğer taraftan

$$I \geq 10$$

$$2I \geq I+10$$

$$2(I-5) \geq I$$

ve

$$2(I-3) \geq I+4$$

ve

$$2(I-1) \geq I+8$$

$$2(I-5), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-5, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{6u+2=8, I-5, I-3, I-1\} & , u=1 \text{ ise} \\ \{6u-2, 6u+2, I-5, I-3, I-1\} & , u>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.20. S , Önerme 3.1.7 [iv] deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

- i. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u=1$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S = \{4\} \cup S = \langle 4, 6, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.5[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq 1$ ise, o zaman $\{6u-2\} \cup S = \langle 6, 6u-2, 6u+2, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[iv-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Diğer taraftan $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I-1, I+1, I+3 \rangle$ Önerme 3.1.7[ii-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6u+2\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur.

$\{6u+2\} \cup S = \langle 6, 6u+2, 6u+4, I+1, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[iv-a] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u = \frac{I-4}{6}$ ise, o zaman

$$\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6u+3, 6u+4, 6u+8, I+1, I+3 \rangle = \langle 6, I-1, I, I+1, I+3, I+4 \rangle$$

Önerme 3.1.7[iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u \neq \frac{I-4}{6}$ ise, o zaman $\{I-1\} \cup S = \langle 6, 6u+4, 6u+8, I-1, I+1, I+3 \rangle$

Önerme 3.1.7[ii-c] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Teorem 4.21. S , Önerme 3.1.7[v] deki gibi bir sayısal yarıgrup olsun. Burada

$u = 1, 2, \dots, \frac{I-5}{6}$ ve $I \equiv 5 \pmod{6}$ iken,

- i. Eğer $S = \langle 6, I, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I=11 \text{ ise} \\ \{I-6, I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I>11 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$$SH(S) = \begin{cases} \{6u-3, I-4, I-3, I-1\} & , I=11 \text{ ise} \\ \{6u-3, I-6, I-4, I-3, I-1\} & , I>11 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. Öncelikle Önerme 3.1.7[v] deki tüm sayısal yarıgruplar Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $u = 1, 2, \dots, \frac{I-5}{6}$ ve $I \equiv 5 \pmod{6}$ iken,

- i. Eğer $S = \langle 6, I, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman

$Ap(S, 6) = \{0, I, I+2, I+3, I+4, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2.

den $PF(S) = \{I-6, I-4, I-3, I-2, I-1\}$ olduğu görülür. Burada

$$I \geq 11$$

$$2I \geq I+11$$

$$2(I-4) \geq I+3$$

ve

$$2(I-3) \geq I+5$$

ve

$$2(I-2) \geq I+7$$

ve

$$2(I-1) \geq I+9$$

$$2(I-4), 2(I-3), 2(I-2), 2(I-1) \in S$$

$$I-4, I-3, I-2, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I=11$ ise, o zaman $2 \cdot (I-6) = 2 \cdot 5 = 10 \notin S$ ve $5 \notin SH(S)$ olur. Ayrıca

$I>11$ ise, o zaman $2I > I+11$ ve $2(I-6) > I-1$ olur. Böylece $2(I-6) \in S$ ve

$(I-6) \in SH(S)$ olur.

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I=11 \text{ ise} \\ \{I-6, I-4, I-3, I-2, I-1\} & , I>11 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $Ap(S, 6) = \{0, 6u+3, I, I+2, I+3, I+5\}$ olduğu aşıkardır. Yardımcı Teorem 4.2. den $PF(S) = \{6u-3, I-6, I-4, I-3, I-1\}$ olduğu görülür. Buradan da $2 \cdot (6u-3) = 6(u-1) = 6n \in S (\exists k \in \mathbb{N}, n=u-1)$ ve $6u-3 \in SH(S)$ elde edilir. Diğer taraftan

$$I \geq 11$$

$$2I \geq I+11$$

$$2(I-4) \geq I+3$$

ve

$$2(I-3) \geq I+5$$

ve

$$2(I-1) \geq I+9$$

$$2(I-4), 2(I-3), 2(I-1) \in S$$

$$I-4, I-3, I-1 \in SH(S) \text{ çıkar.}$$

Eğer $I=11$ ise, o zaman $2(I-6) = 2 \cdot 5 = 10 \notin S$ ve $5 \notin SH(S)$ elde edilir.

Ayrıca $I > 11$ ise, o zaman $2I > I+11$, $2(I-6) > I$ olur. Bu durumda $2(I-6) \in S$ ve $(I-6) \in SH(S)$ elde edilir.

$$\text{Buradan da, } SH(S) = \begin{cases} \{6u-3, I-4, I-3, I-1\} & , I=11 \text{ ise} \\ \{6u-3, I-6, I-4, I-3, I-1\} & , I>11 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.22. S , Önerme 3.1.7[v] deki gibi bir sayısal yarıgrup olduğunu kabul edelim.

- i. Eğer $S = \langle 6, I, I+2, I+3, I+4, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{I-2\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur.

Burada $\{I-2\} \cup S = \langle 6, I-2, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ Önerme 3.1.7[v-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Diğer taraftan $\{I-1\} \cup S = \langle 6, I-1, I, I+2, I+3, I+4 \rangle$ Önerme 3.1.7[iv-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

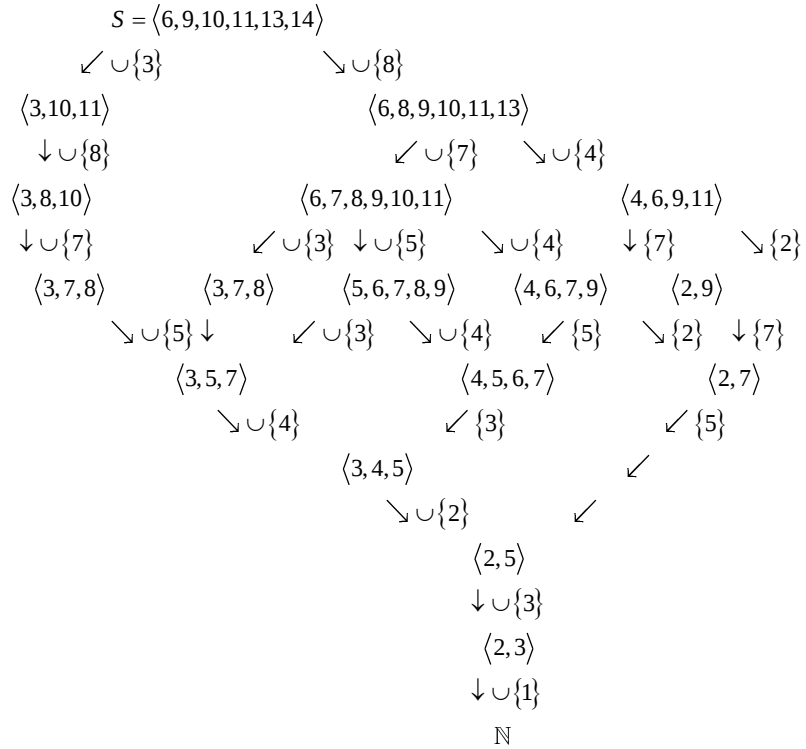
- ii. Eğer $S = \langle 6, 6u+3, I, I+2, I+3, I+5 \rangle$ ise, o zaman $\{6u-3\} \cup S$ ve $\{I-1\} \cup S$ kümeleri birer Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u = 1$ ise, o zaman $\{6u - 3\} \cup S = \langle 3, I, I + 2 \rangle$ Önerme 3.1.4[ii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Eğer $u > 1$ ise, o zaman $\{6u - 3\} \cup S = \langle 6, 6u - 3, I, I + 2, I + 3, I + 5 \rangle$ Önerme 3.1.7[v-b] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Diğer taraftan $\{I - 1\} \cup S = \langle 6, 6u + 3, I - 1, I, I + 2, I + 3 \rangle$ Önerme 3.1.7[iii] formunda bir Arf sayısal yarıgruptur.

Örnek 4.23. S kümesi $S = \langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup olsun. S , Önerme 3.1.7.[iii] şeklinde bir Arf sayısal yarıgruptur. Bu sayısal yarıgrupun özel boşluğu $SH(S) = \{3, 8\}$ dir. Böylece $\{8\} \cup S = \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle$ ve $\{3\} \cup S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlemi tekrar edersek $SH(\{8\} \cup S) = \{7\}$ ve $(\{8\} \cup S)$ den $\{7\} \cup (\{8\} \cup S) = \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle$ şeklinde yeni bir Arf sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu işlem benzer şekilde tekrarlanarak aşağıdaki Şekil 4.4 elde edilir. Şekil 4.4 den anlaşılacağı üzere elde ettiğimiz kümeler Arf sayısal yarıgruptur.



Şekil 4.4. $S = \langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle$ i Kapsayan Tüm Arf Sayısal Yarıgruplar Tablosu

Yukarıdaki Şekil 4.4 ten anlaşılacağı üzere $\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle$ sayısal yarıgrubunu kapsayan Arf sayısal yarıgruplarının zincirleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 3, 10, 11 \rangle \subset \langle 3, 8, 10 \rangle \subset \langle 3, 7, 8 \rangle \subset \langle 3, 5, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \subset \langle 3, 7, 8 \rangle \subset \langle 3, 5, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \subset \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \subset \langle 3, 5, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \subset \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle \subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 2, 7 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 4, 6, 9, 11 \rangle \subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 2, 7 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 4, 6, 9, 11 \rangle \subset \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 7, 9 \rangle \subset \langle 4, 5, 6, 7 \rangle \subset \langle 3, 4, 5 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N} \\
&\langle 6, 9, 10, 11, 13, 14 \rangle \subset \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle \subset \langle 4, 6, 9, 11 \rangle \subset \langle 2, 9 \rangle \subset \langle 2, 7 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle \subset \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{N}
\end{aligned}$$

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada katlılılığı 6 ya kadar olan Arf sayısal yarıgrubunun özel boşluklarının kümesinin genel bir denklemini yazmaya çalıştık. Sonrasında ise bu özel boşluklarının hangi elemanlarının bu küme ile birleşim işlemi yapıldığında yeni bir Arf sayısal yarıgrubu oluşturduğunu ve yeni oluşan Arf sayısal yarıgruplarının kümesinin hangi formda bir Arf sayısal yarıgrup oluşturduğunu göstermiş olduk.

5.2 Öneriler

Bu çalışmamızda katlılılığı 6 ya kadar olanları inceledik katlılılığı 6 dan büyük Arf sayısal yarıgrupları için ise bu işlemler yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Arf, C., 1949, Une interpretation algebrique de la suite des orderes de multiplicité d'une branche algebrique, *Proc. London Math. Soc.*, 50(2), 256-287.
- Barucci, V., Dobbs, D. E. ve Fontana, M., 1997, Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domain, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 598, 13-25.
- Froberg, R. , Gottlieb, C. ve Haggkvist, R., 1987, On numerical semigroups, *Semigroups Forum*, 35, 63-83.
- Garcia-Sanchez, P.A., Heredia, B.A., Karakaş, H.İ. ve Rosales, J.C., 2017, Parametizing Arf numerical semigroups. *J. Algebra Appl.*, 16(11), 31.
- İlhan, S., 2010, “An Approach to Numerical Semigroups”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* , 39(3):411-415
- Rosales, J.C., 1996, On numerical semigroups, *Semigroup Forum*, 52, 307-318
- Rosales, J.C. ve Branco, M.B., 2002, Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, *J. Pure Appl. Algebra*, 171(2-3),303-314.
- Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I. ve Jimenez-Madrid, J.A., 2003, The oversemigroups of a numerical semigroup, *Semigroup Forum*, 67, 145-158.
- Rosales, J.C., García-Sánchez, P.A., García-García, J.I. ve Branco, M.B., 2004, Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra*, 276, 3–12
- Rosales, J.C. ve Garcia-Sanchez, P.A., 2009, Numerical semigroups, *Springer*, New York, 181.
- Rosales, J.C. ve Branco, M.B., 2011, “The Frobenius Problem for Numerical Semigroups with Multiplicity Four”, *Semigroup Forum*, 83, 468-478.
- Rosales, J.C., Garcia-Sanchez P.A., 1999, Finitely generated commutative monoids, *Nova Science Publishers*, New York, 185.
- Selmer, E.S., 1977, “On a Linear Diophantine Problem of Frobenius”, *J.Reine Angrew Math.*, 293-294, 1-17
- Suer, M., Yalcin, B.Y., 2018, *The special gaps of Arf numerical semigroups with small multiplicity*, BAUN Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(2), 437-459
- Sylvester, J.J., 1884, “Mathematical Questions with Their Solutions”, *Educaitonal Times*, 41, 171-178

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Burak Yasin YALÇIN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Çarşamba – 14.11.1989
Telefon : 0 507 706 99 49
Faks :
e-mail : burakyasin_yalcin@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ünye M.R.G. A.Öğretmen Lisesi, Ünye, Ordu	2007
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	2012
Yüksek Lisans :		
Doktora :		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2012-2015	Terme S.Y.D.V.	İnceleme Görevlisi
2015-	Ahmedi Hani Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen

UZMANLIK ALANI Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

1. Yalçın, B.Y., Süer, M., 2018, The special gaps of some Arf numerical semigroups, EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciences-III, Mardin-Türkiye, 143.
2. Suer, M. Yalcin, B.Y., 2018, The special gaps of Arf numerical semigroups with small multiplicity, BAUN Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(2), 437-459.