

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN LİNEERLEŞTİRİLMİŞ
CRANK-NICOLSON ŞEMASI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema TAŞTEKİN

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

HAZİRAN 2026

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN LİNEERLEŞTİRİLMİŞ
CRANK-NICOLSON ŞEMASI**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sema TAŞTEKİN
(36233614009)**

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

HAZİRAN 2026

**İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ**

**KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN LİNEERLEŞTİRİLMİŞ
CRANK-NICOLSON ŞEMASI**

**Tezi Hazırlayan: Sema TAŞTEKİN
Yüksek Lisans Tezi**

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her adımında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her zaman yanımda hissettiğim, bana yol göstererek yardımcı olan başta kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, MATLAB programlarının yazılımında ve karşılaştığım sorunların çözümlenmesinde desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocalarım Prof. Dr. Yusuf UÇAR ve Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya, ders ve tez yazım sürecinde moral ve motivasyonunu güler yüzüyle hiçbir zaman eksik etmeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN'a, tezin yazım sürecinde karşılaştığım problemlerin çözümünde görüşlerinden oldukça yararlandığım ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, bu tez çalışması boyunca bölümde bana her türlü imkanı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanım Sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN olmak üzere tüm öğretim üyesi hocalarıma, çalışmalarım süresince her daim manevi destek veren ve birçok fedakarlık yapan sevgili eşim Mehmet TAŞTEKİN'e, varlıklarıyla bana güç ve ilham veren biricik çocuklarım Yusuf ve Eymen'e, bugüne kadar okuma ve öğrenme sevgime her zaman destek olan sevgili babam Ahmet YAPICI ile annem Sıddıka YAPICI'ya ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kuramoto-Sivashinsky Denkleminin Çözümü İçin Lineerleştirilmiş Crank-Nicolson Şeması” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sema TAŞTEKİN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin İçeriği ve Model Problem	1
1.2 Kaynak Taraması	3
2. KLASİK SONLU FARKLAR VE TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Klasik Sonlu Farklar Yöntemi.....	6
2.1.1 Ağırlıklı averaj sonlu fark yaklaşımı	8
2.1.2 Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı.....	8
2.2 Temel Kavramlar	9
2.2.1 Lokal kesme hatası (LKH)	9
2.2.2 Tutarlılık	10
2.2.3 Kararlılık.....	10
2.2.3.1 von-Neumann kararlılık testi	10
2.2.4 Yakınsaklık	11
2.2.4.1 Lax'ın denklik teoremi	11
3. KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİ İÇİN SONLU FARK ŞEMASI.....	12
3.1 Richtmyer Lineerleştirmeli Crank-Nicolson Tipi Sonlu Fark Şeması	12
3.2 Şemanın LKH ve Yakınsaklık Mertebesi	17
3.3 Şemanın Kararlılık Analizi.....	21
4. SAYISAL DENEYLER VE SONUÇLAR	24
4.1 Test Problem 1	25
4.2 Test Problem 2	29
4.3 Test Problem 3	33
5. BULGULAR, ÖNERİLER VE SONUÇ	34
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	39

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 : Kısmi Türevlere Sonlu Fark Formülleri.....	7
Çizelge 4.1 : Problem 1' in $k = 0.01$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).....	26
Çizelge 4.2 : Problem 1' in $h = 0.1$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).....	26
Çizelge 4.3 : Problem 1' in $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).....	27
Çizelge 4.4 : Problem 1' in $h = 0.4$ ve $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).....	27
Çizelge 4.5 : Problem 1'in yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).....	28
Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $k = 0.01$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).....	30
Çizelge 4.7 : Problem 2'nin $h = 0.125$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).....	31
Çizelge 4.8 : Problem 2'nin $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).....	31
Çizelge 4.9 : Problem 2'nin yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).....	32

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 4.1** : Problem 1'in $h \equiv \Delta x = 0.1$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan yaklaşık (–) ve tam ($\circ$) çözümlerinin 2-boyutlu grafikleri. 29
- Şekil 4.2** : Problem 2'nin $h \equiv \Delta x = 0.5$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan yaklaşık (–) ve tam ($\circ$) çözümlerinin 2-boyutlu grafikleri 32
- Şekil 4.3** : Problem 3'ün $h \equiv \Delta x = 0.6$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için $t = 5$ ve $t = 20$ zamanlarında hesaplanan yaklaşık çözümlerinin grafikleri..... 33

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

x	: Konum Değişkeni
t	: Zaman Değişkeni
$h \equiv \Delta x$	: Konum Adım Uzunluğu
$k \equiv \Delta t$	: Zaman Adım Uzunluğu
(x_m, t_n)	: Mesh (Grid) Noktası
$U(x_m, t_n)$	: Tam Çözüm
U_m^n	: Yaklaşık Çözüm
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
KS	: Kuramoto-Sivashinsky
gKS	: Genelleştirilmiş Kuramoto-Sivashinsky
L_2	: Ortalama Karekök Hata Normu
L_∞	: Maksimum Mutlak Hata Normu
GRE	: Göreceli Hata Normu
$Mertebe(L_2)$	: L_2 Normundaki Yakınsaklık Mertebesi
$Mertebe(L_\infty)$	: L_∞ Normundaki Yakınsaklık Mertebesi
$CPU(s)$	: Central Processing Unit (Merkezi İşlem Birimi)
LKH	: Lokal Kesme Hatası

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LİNEERLEŞTİRİLMİŞ CRANK-NICOLSON ŞEMASI

SEMA TAŞTEKİN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

39+viii sayfa

2026

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Belirli başlangıç-sınır şartları ile verilen 1-boyutlu non-lineer Kuramoto-Sivashinsky (KS) tipi kısmi diferansiyel denkleminin Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark yöntemi ile yaklaşık çözümlerini bulmayı amaçlayan bu yüksek lisans tezi 5 bölümden oluşmaktadır.

Bölüm 1’de önce model problem olarak ele alınacak olan KS denklemi kısaca tanıtıldıktan sonra çözümleri ile ilgili literatürdeki mevcut çalışmalardan bahsedildi.

Bölüm 2’de özellikle tezde kullanılacak olan klasik sonlu farklar yöntemleri ile birlikte bazı gerekli tanım ve kavramlara yer verildi.

Bölüm 3’te KS denklemi ile verilen model problemin Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması çıkartıldı. Ayrıca bu bölümde şemanın von-Neumann yöntemi ile şartsız kararlı olduğu gösterildi ve lokal kesme hatası ile birlikte yakınsaklık mertebesi hesaplandı.

Bölüm 4’de sunulan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinden emin olmak için 2 tanesi tam çözüme sahip olan 3 test problem ele alındı. Şemadan hesaplanan sonuçlar kendi içerisinde ve literatürde var olan diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu kapsamda L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile $CPU(s)$ işlemci süreleri hesaplandı. Ayrıca yaklaşık sonuçların sürekliliğini ve ele alınan problemin doğru fiziksel davranışlarını sergilediklerini göstermek için bazı grafikler verildi.

Son bölüm olan Bölüm 5’de ise elde edilen sayısal sonuçlar genel olarak değerlendirildi ve tez boyunca ulaşılan bulgular ışığında gelecek çalışmalara yönelik kısa bir öneri sunuldu.

Anahtar Kelimeler: Kuramoto-Sivashinsky Denklemi, Crank-Nicolson Sonlu Farklar Yaklaşımı, Richtmyer Lineerleştirme Tekniği, Hata Normları, Lokal Kesme Hatası, Yakınsaklık Mertebesi, von-Neumann Kararlılık Analizi

ABSTRACT

Master Thesis

THE LINEARIZED CRANK-NICOLSON SCHEME FOR THE SOLUTION OF THE KURAMOTO-SIVASHINSKY EQUATION

Sema TAŞTEKİN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

39+viii pages

2026

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

This master's thesis aims to find approximate solutions of a one-dimensional nonlinear Kuramoto-Sivashinsky (KS) type partial differential equation with given initial-boundary conditions using the Richtmyer linearized Crank-Nicolson type finite difference method. The thesis consists of five chapters.

In Chapter 1, a brief introduction to the KS equation which is considered as the model problem followed by a review of existing studies in the literature regarding its solutions.

In Chapter 2, the classical finite difference methods with some necessary definitions and concepts to be used in the thesis are briefly presented.

In Chapter 3, the Richtmyer linearized Crank-Nicolson type finite difference scheme for the model problem given by the KS equation is derived. Additionally, in this chapter, the unconditional stability of the scheme was demonstrated using the von-Neumann method and its convergence order together with the local truncation error was calculated.

In Chapter 4, three test problems, two of which possess exact solutions, in order to verify the accuracy and reliability of the presented scheme. The results obtained from the scheme are compared both internally and with the results reported by other researchers in the literature. In this context, the L_2 , L_∞ and GRE error norms, as well as $CPU(s)$ processor times, are calculated. Furthermore, some graphs are provided to demonstrate the continuity of the approximate results and to show that they exhibit the correct physical behavior of the problem.

In the final chapter which is Chapter 5, the numerical results obtained are generally evaluated, and a brief suggestion for future studies is made in light of the findings reached throughout the thesis.

Keywords: Kuramoto-Sivashinsky Equation, Crank-Nicolson Finite Differences Approximation, Richtmyer Linearization Technique, Error Norms, Local Truncation Error, Convergence Order, von-Neumann Stability Analysis

1. GİRİŞ

1.1 Tezin İçeriği ve Model Problem

Günümüzde fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok alanda karşılaşılan fenomenler genellikle matematiksel olarak modellenir. Bu tip olaylar çoğunlukla lineer veya non-lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerle (KDD) sonuçlanır. Lineer KDD'lerin genellikle kapalı formda analitik çözümlerini bulmak mümkündür. Ancak non-lineer KDD'lerin analitik çözümlerini bulmak çoğu zaman mümkün değildir ya da son derece sınırlıdır.

İçinde yaşadığımız doğadaki gerçek fiziksel olaylar incelendiğinde, lineer modellerin yetersiz kaldığı durumların sayısı oldukça fazladır. Akışkanlar mekaniğinden kuantum fiziğine, biyolojik sistemlerden malzeme bilimine kadar pek çok alanda karşılaşılan problemler non-lineer KDD'lerle ifade edilmektedir. Bu denklemler, bilinmeyen fonksiyonun veya türevlerinin çarpımlarını, kuvvetlerini ya da daha karmaşık non-lineer terimlerini içermekte ve böylece sistemin kendi kendisiyle etkileşimini modelleyebilmektedir. Non-lineer denklemleri önemli kılan temel etken, lineer sistemlerde gözlemlenemeyen zengin fiziksel davranışları ortaya koyabilmeleridir. Örneğin, Navier-Stokes denklemleri ile tanımlanan türbülanslı akışlar, Korteweg-de Vries denkleminin çözümü olarak ortaya çıkan soliton dalgaları, Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov denklemi ile modellenen reaksiyon-difüzyon süreçleri ve Einstein'ın alan denklemleriyle ifade edilen kütleçekimsel fenomenler, non-lineerliğin doğrudan bir sonucudur. Bu sistemlerde gözlemlenen çatallanma, kaotik davranış ve kararlılık değişimleri gibi niteliksel özellikler, lineer teorinin açıklama kapasitesinin ötesinde kalmaktadır [1].

Non-lineer KDD'leri incelemek zordur. Genel olarak bu tip denklemler için iyi çalışan bir teknik yoktur. Bu nedenle her bir denklem ayrı bir problem olarak ele alınır. Denklemlerde non-lineer terimlerin varlığı nedeniyle bu tip denklemlerin analitik çözümleri yalnızca bazı başlangıç-sınır koşulları ve parametreler için mevcuttur. Bu gibi durumlarda bu tip denklemlerin çözümü için yaklaşık yöntemlerin kullanımı vazgeçilmezdir. Son yıllarda bilim insanları non-lineer KDD'leri çözmek için çeşitli yaklaşık yöntemler geliştirmiş ve uygulamışlardır. Bu yöntemler çözümün sayısal olarak yaklaşık değerlerini verir. Farklı uygulama alanları için uygun olan çeşitli teknikleri içerir. Bu bağlamda yaklaşık yöntemlerin genel amacı non-lineer

veya çok karmaşık olan problemleri çözmek ve ayrıca bilgisayar ortamında uygulanabilir yeni algoritmalar geliştirmektir.

Non-lineer KDD'lerle verilen herhangi bir başlangıç ve sınır değer probleminin sayısal olarak yaklaşık değerlerini bulmak için literatürde mevcut olan yaklaşık yöntemlerin başlıcaları

- Sonlu Farklar Yöntemi
- Sonlu Elemanlar Yöntemi
- Sonlu Hacimler Yöntemi
- Spektral Yöntemler

dir. Bu yöntemler uygulama alanına ve çözülmesi gereken problemin yapısına göre seçilir. Her bir yöntem kendine özgü avantaj ve dezavantajlar sunar; nihai seçim, çözüm gereksinimlerine, istenen hassasiyete ve mevcut hesaplama kaynaklarına bağlıdır. Bu tez çalışmasında literatürde sıklıkla kullanılan sonlu farklar yöntemi ele alınacaktır.

Bu çalışmada, 1970'lerin sonlarında Yoshiki Kuramoto [2,3] ve Gregory Sivashinsky [4]'nin birbirinden habersiz olarak sundukları ve daha sonra Kuramoto-Sivashinsky (KS) denklemi olarak adlandırılan denklemin literatürde en çok bilinen ve çalışılan

$$U_t + \alpha U_{xx} + \beta U_{xxxx} + \gamma U U_x = 0, a \leq x \leq b, t \geq 0$$

olarak verilen 1-boyutlu formu ele alındı. Bu denklem

$$U_t + \alpha U_{xx} + \beta U_{xxxx} + \frac{\gamma}{2} (U^2)_x = 0, a \leq x \leq b, t \geq 0$$

olarak da yazılabilir. Denklem görünürdeki sadeliğine karşın son derece zengin dinamik davranışlar sergileyen dördüncü mertebeden non-lineer bir KDD dir. Denklemin içerdiği her bir terim farklı bir fiziksel mekanizmayı temsil etmekte ve bu terimlerin etkileşimi sistemin karmaşık dinamik yapısını ortaya çıkarmaktadır. Denkleminde görülen her bir terimin fiziksel bir anlamı vardır. Şöyleki α, β ve γ keyfi sabitler olmak üzere U_t terimi incelenen fiziksel büyüklüğün zaman içindeki değişim hızını, U_{xx} terimi büyük ölçeklerdeki kararsızlıkları, U_{xxxx} terimi küçük ölçeklerdeki sönümlemeyi ve non-lineer $U U_x$ terimi ise enerji aktarımını ifade eder.

Bir periyodik dalga için κ dalga sayısı olmak üzere dalga boyu $\lambda = 2\pi/\kappa$ olarak tanımlanır. Eğer,

- $\kappa \rightarrow 0$ iken $\lambda \rightarrow \infty$ olup bu durum büyük ölçek olarak nitelendirilir.
- $\kappa \rightarrow \infty$ iken $\lambda \rightarrow 0$ olup bu durum küçük ölçek olarak adlandırılır.

KS denklemi temelde enerjinin uzun dalga boylarına enjekte edildiği, kısa dalga boylarında sönmüldüğü ve doğrusal olmayan terimlerin bu iki zıt etkiyi dengeleyerek kendiliğinden organize olan kaotik ve karmaşık uzay-zamansal desenler ürettiği sistemleri tanımlar. Bu denklem plazma fiziği, akışkanlar mekaniği, yanma teorisi, malzeme bilimi/nanoteknoloji, kimyasal tepkime sistemleri, makine öğrenmesi, havacılık/akış kontrolü, proses kontrolü ve biyoloji gibi bir çok alanda kullanılmaktadır [5].

Bu çalışmada,

$$U_t + \alpha U_{xx} + \beta U_{xxxx} + \frac{\gamma}{2} (U^2)_x = 0, (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (1.1.1)$$

olarak verilen 1-boyutlu non-lineer KS denklemi

$$U(x, 0) = f(x), x \in [a, b] \quad (1.1.2)$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(a, t) &= g_1(t), U(b, t) = g_2(t) \\ U_x(a, t) &= h_1(t), U_x(b, t) = h_2(t) \end{aligned}, t \geq 0 \quad (1.1.3)$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Burada $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olup $f(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ verilen düzgün fonksiyonlardır.

1.2 Kaynak Taraması

KS denklemini çözmek için günümüze kadar bir çok bilim insanı çeşitli analitik/yarı-analitik ve yaklaşık yöntemler geliştirmiş ve uygulamışlardır. Kullanılan başlıca yaklaşık teknikler sonlu farklar, sonlu elemanlar, spektral yöntemler ve bunların hibrit uygulamalarıdır. Denklemin çözümleri üzerine yapılan çalışmaların bazıları şunlardır:

Khater ve Temsah [6], genelleştirilmiş KS denkleminin çözümü için El-Gendi yöntemi [7–9] olarak bilinen Chebyshev spektral kolokasyon yöntemlerini geliştirdiler. Lai ve Ma [10], gKS denkleminin çözümünde Lattice Boltzmann yöntemini tercih etmişlerdir. Uddin vd. [11], çalışmalarında KS denklemlerinin sayısal çözümünü bulmak için radyal taban fonksiyonlarına (RBF) dayalı ağsız (mesh-free) yöntem uyguladılar. Haq vd. [12], gKS denkleminin sayısal çözümü için multi kuadrik, Gauss ve ters multi kuadrik radyal taban fonksiyonlarına dayanan

ağız çizgiler yöntemini önerdiler. Mittal ve Arora [13], KS denkleminin sayısal çözümü için beşinci derece B-spline kolokasyon yöntemini kullandılar. Ye vd. [14], KS denkleminin çözümü için yüksek mertebeden moment yöntemine dayanan bir kafes Boltzmann modeli geliştirdiler. Lakestani ve Dehghan [15], gKS denkleminin çözümü için sonlu farklar ve kolokasyon yöntemlerine dayanan sayısal bir teknik sundular. Dong ve Lan [16], KS denkleminin uzaysal periyodik sabit çözümlerini dinamik sistemler perspektifinden sistematik bir şekilde incelediler. Acan ve Keskin [17], KS denkleminin sayısal çözümü için indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini kullandılar. Ganei vd. [18], KS denkleminin sayısal çözümü ve analizi için kübik Hermite kolokasyon yöntemini sundular. Rashidinia ve Jokar [19], gKS denkleminin çözümü için polinom ölçekleme fonksiyonlarını kullanan kolokasyon yöntemi ile birleştirilmiş sonlu fark formülü üzerine temellenmiş bir yaklaşık çözüm tekniği önerdiler. Ersoy ve Dang [20], KS denkleminin sayısal çözümü için üstel kübik B-spline kolokasyon yöntemini kullandılar. Mittal ve Dahiye [21], KS denkleminin sayısal çözümü için beşinci derece B-spline fonksiyonlarına dayalı bir diferansiyel kuadratur tekniği geliştirdiler. Hepson [22], KS denkleminin yaklaşık çözümleri için trigonometrik kübik B-spline kolokasyon yöntemini kullandı. Dhiman ve Thamsir [23], KS tipi denklemleri çözmek için yeniden modifiye edilmiş beşinci derece B-spline kolokasyon yöntemini önerdiler. Sing vd. [24], KS denkleminin çözümünde kompakt sonlu farklar yöntemini tercih ettiler. Yiğit ve Bayram [25], KS denkleminin çözümünde diferansiyel kuadratur yöntemine dayalı bir sayısal ayırık türev tekniği önerdiler. Iqbal vd. [26], KS denkleminin sayısal çözümü için beşinci dereceden B-spline fonksiyonlarını kullanan yeni bir yaklaşım sundular. Bhatt ve Chowdhury [27], uygun başlangıç ve sınır koşulları altında KS denkleminin uzay-zamansal çözüm profilini incelemek amacıyla sayısal bir şema geliştirdiler ve uyguladılar. Hepson [28], bu çalışmada gKS denkleminin sayısal çözümleri için kuartik B-spline trigonometrik Galerkin sonlu elemanlar şemasını verdi. Hosseini [29], KS denkleminin çözümünde varyasyonel yineleme yöntemini ele aldı. Shallu ve Kukreja [30], KS denkleminin çözümünde iyileştirilmiş quintic B-spline ekstrapolasyonlu kolokasyon yöntemini tercih ettiler. Hepson ve Yiğit [31], KS modelinin sayısal çözümü için kuartik trigonometrik gerilim B-spline fonksiyonlarını kullanan bir hibrit kolokasyon şeması önerdiler. Kumari ve Kukreja [37], KS denklemini çözmek için septik Hermit kolokasyon yöntemini sundu. Wang ve Wu [32], doğrusal stokastik KS denkleminin ters problemini çözmek için regüle edilmiş bir optimizasyon yöntemini ve bu yöntemin sayısal uygulamasını sundular. Mohanty ve Sharma [33], KS denklemi ile Fisher-Kolmogorov denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için üstel yaklaşım formunda yeni bir kompakt 2-seviyeli kapalı sayısal yöntem önerdiler. Kaur ve

Joshi [34], KS denkleminin sayısal çözümü için kuintik üniform cebirsel hiperbolik ve kuintik üniform cebirsel trigonometrik gerilim B-spline fonksiyonlarını kullanan diferansiyel kuadratur yöntemine dayanan yeni bir yaklaşım sundular.

Bu tez çalışmasının temel amacı, başlangıç-sınır şartlarıyla verilen 1-boyutlu non-lineer KS denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Richtmyer lineerleştirme tekniği yardımıyla Crank-Nicolson tipi bir sonlu fark şeması sunmaktır. Yöntem, denklemden görülen türevlerin Taylor seri açılımlarından elde edilen sonlu fark formülleriyle yer değiştirilerek sürekli problemi ayrıklaştırmakta ve cebirsel bir denklem sistemine dönüştürmektedir. Türevler yerine yazılacak olan sonlu fark formüllerinin doğası gereği ağ uzunluklarının küçültülmesiyle bu süreçte oluşan hatalar azaltılabilmektedir. Yöntem, programlama ve uygulama kolaylığı nedeniyle mühendislik ve çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Tezin diğer bölümleri ise şu şekilde planlandı: Bölüm 2’de tezde kullanılacak klasik sonlu farklar ile bazı temel kavramlardan bahsedildi. Bu çalışmanın esasını teşkil eden Bölüm 3’te ele alınan model problemin Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması oluşturuldu. Ayrıca bu bölümde, şemanın von-Neumann yöntemiyle koşulsuz kararlılığı gösterildi ve lokal kesme hatasıyla birlikte yakınsaklık mertebesi hesaplandı. Bölüm 4’de ise şemanın doğruluğu ve güvenilirliğini göstermek için 2 tanesi tam çözüme sahip 3 test problem ele alındı. Tam çözümü mevcut olan problemler için sunulan şemadan hesaplanan L_2 , L_∞ ve GRE hata büyüklükleri kendi içinde ve ayrıca diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Ayrıca bu bölümde $CPU(s)$ işlemci süreleri ve yaklaşık yakınsaklık mertebeleri hesaplandı. Tezin son bölümü olan Bölüm 5’de ise bulgular ve önerilerle birlikte kısa bir sonuç verildi.

2. KLASİK SONLU FARKLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan klasik sonlu fark yöntemleri ile birlikte bazı temel kavramlar verildi. Bu bölümün hazırlanmasında [35] no'lu kaynak esas alındı.

2.1 Klasik Sonlu Farklar Yöntemi

Doğada karşılaşılan fiziksel olaylar her zaman karşımıza lineer olarak çıkmaz, bunların çoğu non-lineerdir. Non-lineer denklemlerin analitik çözümünü bulmak kolay değildir. Bunun için yaklaşık yöntemler geliştirilmiştir. Yani denklemin tam çözümü yerine, yakın çözümler üreten literatürde mevcut yaklaşık çözüm teknikleri kullanılır.

Bu tez çalışmasında mevcut literatürde oldukça sıklıkla kullanılan, uygulanması ve programlanması diğer yaklaşık yöntemlere kıyasla daha kolay olan sonlu farklar yöntemi ele alınacaktır. Bunlar içerisinde açık, kapalı ve Crank-Nicolson olarak bilinen klasik sonlu fark yöntemleri geniş uygulama alanlarına sahiptir. Bu tezde açık ve kapalı yöntemlerin ortalama alınmasıyla elde edilen Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi kullanılacaktır.

x ve t sırasıyla konumsal ve zamansal değişkenleri göstermek üzere $U = U(x, t)$ bilinmeyenli

$$U_t = F(x, t; U, U_x, U_{xx}, U_{xxx}) \quad (2.1.1)$$

1-boyutlu lineer veya non-lineer kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemin tanımlı olduğu bir $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde belirli başlangıç ve sınır şartlarıyla verildiğini kabul edelim. Böyle bir problemin Crank-Nicolson sonlu farklar yöntemi ile çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir.

Bölgenin Ayırıştırılması: Verilen çözüm bölgesi genellikle dikdörtgensel veya karesel olacak biçimde düzgün geometrik kafeslere bölünür. Her bir kafesin kesiştiği yerler ağ, mesh veya grid noktalar olarak adlandırılır. Yaklaşık çözümler sadece bu düğüm noktalarında aranır. Bunun için $x \in [a, b]$ konum aralığı $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m < x_{m+1} < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m = (b - a) / M$ olacak şekilde eşit alt aralıklara; benzer şekilde $t \in [0, T]$ zaman aralığı da $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ ve $k = t_{n+1} - t_n = T / N$ olacak şekilde eşit alt aralıklara bölünür. Her m ve n noktası için (x_m, t_n) grid (mesh) noktası olarak kabul edilir. Böylece çözüm bölgesi dikdörtgensel ($h \neq k$) veya karesel ($h = k$) eş kafeslere ayrılmış olur.

Bu tez boyunca (x_m, t_n) grid noktasında denklemin tam çözümü $U(x_m, t_n)$ ile yaklaşık çözümü ise U_m^n ile gösterilecektir. Yani $U_m^n \sim U(x_m, t_n)$ dir.

Türevlere Fark Yaklaşımları: Problemde görülen x ve t değişkenlerine göre kısmi türevler Çizelge 2.1’de verilen Taylor seri açılımlarından kolayca elde edilen sonlu fark formülleriyle değiştirilir. Bu çalışmada t ’ye göre birinci basamaktan türev yerine $O(k)$ mertebeden ileri fark formülü, x ’e göre birinci, ikinci ve dördüncü basamaktan türevleri yerine $O(h^2)$ mertebeden sırasıyla merkezi ve simetrik fark yaklaşımları kullanıldı. Daha yüksek doğrulukta yaklaşık çözümleri elde etmek için türevler yerine daha yüksek mertebeden kesme hatalarını içeren fark formülleri de kullanılabilir. Ancak bu durumda hesaplama maliyetinin artacağı unutulmamalıdır.

Çizelge 2.1 : Kısmi Türevlere Sonlu Fark Formülleri

Kısmi Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Tipi	Mertebe
U_t	$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$	İleri	$O(k)$
U_x	$\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h}$	Merkezi	$O(h^2)$
U_{xx}	$\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$	Simetrik	$O(h^2)$
U_{xxxx}	$\frac{U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n}{h^4}$	Simetrik	$O(h^2)$

Cebirsel Denklem Sistemi ve Matris Formu: Problemde görülen türevler yerine Çizelge 2.1’deki fark formülleri yazılır ve sonra gerekli cebirsel işlemlerle birlikte düzenlemeler yapılırsa ele alınan başlangıç ve sınır değer problemi cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur. Eğer verilen sınır şartları Neumann ve/veya Robin tipi şartlar ise bu süreç esnasında problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen hayali değerler olarak bilinen U değerleri elimine edilir. Ele alınan kısmi diferansiyel denklem eğer lineer ise başlangıç-sınır değer problemi lineer cebirsel, aksi halde yani non-lineer ise non-lineer cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanır. Non-lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümü, lineer sistemlere kıyasla oldukça zordur ve bu tür sistemler için genellikle Newton–Raphson veya sabit nokta iterasyon yöntemleri gibi sayısal yöntemlerin kullanılması gerekir. Bu tezde non-lineer bir başlangıç-sınır değer probleminin lineer cebirsel bir denklem sistemi ile sonuçlandırılması hedeflendiğinden denklemde görülen non-lineer terimler daha sonra verilecek olan Richtmyer tipi lineerleştirme yaklaşımı kullanılarak lineerleştirildi. Elde edilen lineer cebirsel denklem sistemlerinin katsayılar matrisi türevler için kullanılan yaklaşımlardaki nokta sayısına eşit olan üçlü ve beşli bant matrisleri gibi seyrek matrislerdir. Bu durum bilgisayarda bellek kullanımı ve hesaplama maliyeti açısından önemli avantaj sağlar.

Yakınsaklık Analizi: Lineer cebirsel denklem sisteminden elde edilen çözümler hangi şartlar altında ele alınan başlangıç ve sınır değer probleminin tam çözümüne yakın kalır. Bu durum yakınsaklık analizi olarak bilinir. Yakınsaklık için daha sonra verilecek olan Lax'ın eşdeğerlik teoremi kullanıldı.

Çözüm Yöntemi: Yukarıdaki hazırlıklardan sonra lineer cebirsel denklem sistemi Gauss eleme veya LU ayrıştırması gibi direkt çözüm yöntemleri yardımıyla çözülür ve böylece mesh noktalarında ele alınan orijinal problemin yaklaşık çözümleri elde edilir.

2.1.1 Ağırlıklı averaj sonlu fark yaklaşımı

(2.1.1) denkleminde U_t yerine

$$U_t = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı U , U_x , U_{xx} ve U_{xxx} türevleri yerine, $\theta \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U &= \theta U_m^{n+1} + (1 - \theta) U_m^n \\ U_{xx} &= \frac{1}{h^2} [\theta (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + (1 - \theta) (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)] \\ U_x &= \frac{1}{2h} [\theta (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) + (1 - \theta) (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)] \\ U_{xxx} &= \frac{1}{h^4} \left[\theta (U_{m+2}^{n+1} - 4U_{m+1}^{n+1} + 6U_m^{n+1} - 4U_{m-1}^{n+1} + U_{m-2}^{n+1}) + \right. \\ &\quad \left. (1 - \theta) (U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n) \right] \end{aligned}$$

ağırlıklı yaklaşımları yazılırsa (2.1.1) ile verilen KDD'nin ağırlıklı sonlu fark şeması elde edilir. Buradan açıkca

- Eğer $\theta = 0$ ise denklemin açık sonlu fark şeması elde edilir. Bu şema şartlı kararlı olup $O(k) + O(h^2)$ mertebeden doğruluğa sahiptir.
- Eğer $\theta = 1$ ise denklemin kapalı sonlu fark şeması elde edilir. Bu şema koşulsuz kararlı olup doğruluk mertebesi $O(k) + O(h^2)$ dir.
- Eğer $\theta = 1/2$ ise denklemin Crank-Nicolson sonlu fark şeması elde edilir. Şema koşulsuz kararlı olup doğruluk mertebesi $O(k^2) + O(h^2)$ dir.

2.1.2 Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı

Richtmyer lineerleştirme tekniği temel olarak non-lineer fark denklemlerini lineer hale getirmek için Amerikalı fizikçi Robert D. Richtmyer tarafından önerilmiştir [36]. Bu çalışmada ele alınacak olan $U = U(x, t)$ bilinmeyenli non-lineer bir KDD' in sonlu farklar yöntemi

yardımıyla konum ve zaman değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırılmış fark denkleminde görülen $(n+1)$. zaman adımındaki $(U^2)_m^{n+1}$ biçimindeki non-lineer terimleri lineerleştirmek için

$$(U^2)_m^{n+1} = (U^2)_m^n + 2U_m^n (U_m^{n+1} - U_m^n) \quad (2.1.2)$$

olarak verilen Richtmyer yaklaşımı kullanıldı. Bu yaklaşım, $(U^2)_m^{n+1} = U^2(x_m, t_n + k)$ fonksiyonu $(x_m, t_n + k)$ noktası civarında Taylor serisine açılır ve $\frac{\partial U}{\partial t}(x_m, t_n)$ yerine $\frac{U(x_m, t_n + k) - U(x_m, t_n)}{k}$ ileri fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} U^2(x_m, t_n + k) &= U^2(x_m, t_n) + k \frac{\partial U^2}{\partial t}(x_m, t_n) + O(k^2) \\ &= U^2(x_m, t_n) + k \frac{\partial U^2}{\partial t}(x_m, t_n) \frac{\partial U}{\partial t}(x_m, t_n) + O(k^2) \\ &= U^2(x_m, t_n) + k 2U(x_m, t_n) \left[\frac{U(x_m, t_n + k) - U(x_m, t_n)}{k} \right] + O(k^2) \\ &= U^2(x_m, t_n) + 2U(x_m, t_n) [U(x_m, t_n + k) - U(x_m, t_n)] + O(k^2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte keyfi bir (x_m, t_n) mesh noktasında $O(k^2)$ hatası ihmal edilirse $(U^2)_m^{n+1}$ non-lineer terim

$$(U^2)_m^{n+1} = (U^2)_m^n + 2U_m^n (U_m^{n+1} - U_m^n)$$

olarak yazılabilir. Böylece $(U^2)_m^{n+1}$ non-lineer terimi lineerleştirilmiş olur.

2.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda yine tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verildi.

2.2.1 Lokal kesme hatası (LKH)

Sonlu fark yöntemlerinde, bir kısmi diferansiyel denkleminde bulunan türevler yaklaşık sonlu fark formülleri ile değiştirildiğinde, tam çözüm ile sonlu fark yaklaşımı arasında bir fark oluşur. İşte bu farka lokal kesme hatası adı verilir. Daha somut bir ifadeyle, LKH tam çözümün fark denkleminde yerine konulmasıyla elde edilen bir büyüklüktür.

(m, n) -inci düğüm noktasındaki bir fark denklemi genel olarak $F(U_m^n) = 0$ biçiminde yazılabilir. Böylece LKH, $U(x_m, t_n)$ denklemin tam çözümü olmak üzere,

$$T_{m,n}(U) = F(U(x_m, t_n))$$

olarak tanımlanır. Yani, fark denkleminde U_m^n yerine $U(x_m, t_n)$ konulduğunda elde edilen büyüklük (x_m, t_n) mesh noktasındaki LKH'nın mertebesini verir. Eğer tam çözüm fark denklemini tam olarak sağlasaydı, bu hata sıfır olurdu; ancak genellikle durum böyle değildir. Peki bu hata nasıl hesaplanır? Bunun için Taylor seri açılımlarından yararlanılır. Böylece LKH, h ve k 'nin kuvvetleri ve $U(x_m, t_n)$ 'nin çeşitli mertebeden kısmi türevleri cinsinden bir eşitlik elde edilir. Bu eşitlikte h ve k 'nin en düşük kuvvetlerini içeren terimlerin bulunduğu kısım LKH'nın esas kısmı olarak adlandırılır ve LKH'nın mertebesini verir. LKH, sonlu fark yönteminin tutarlılığını belirlemek için kullanılan temel kavramdır.

2.2.2 Tutarlılık

Eğer $h, k \rightarrow 0$ iken LKH da sıfıra gidiyorsa, yöntem tutarlıdır denir. Tutarlılık, bir yaklaşık yöntemin doğru sonuca yakınsaması için olmazsa olmaz koşullarından biridir. Bu hata, şu soruların yanıtını verir: Kullanılan sonlu fark yöntemi, tam çözüme ne kadar doğrulukta yaklaşık çözümler üretiyor? Adım büyüklükleri iyileştirildiğinde hata hangi hızda azalıyor? Bunların sağlanması için herhangi bir sonlu fark şeması geliştirildiğinde yapılması gereken ilk işlerden biri, LKH'yi hesaplamak ve yöntemin tutarlı olup olmadığını kontrol etmektir.

2.2.3 Kararlılık

Kararlılık, zaman arttıkça hataların sınırlı kalmasıdır. Ancak bu durumda sonlu fark şeması kararlı olacaktır. Aksi takdirde fark şemasıyla çözüm üretirken, başlangıç verisinde ya da adımlarda oluşan küçük sayısal hatalar çözüm boyunca kontrolden çıkıp büyüyorsa bu kararsızlık demektir. Lineer fark şemalarının kararlılığı incelenirken kullanılan en yaygın yöntemler von-Neumann (Fourier yöntemi) ve matris kararlılık analizleridir. Burada sadece aşağıdaki von-Neumann kararlılık testi kısaca verildi.

2.2.3.1 von-Neumann kararlılık testi

Bir sonlu fark şeması, başlangıç koşullarında yapılan küçük değişikliklerin veya yuvarlama hatalarının, yaklaşık çözümde sınırsız bir şekilde büyümemesi durumunda kararlı olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle, kararlı bir şemada, hatalar zaman içinde kontrollü kalır veya sönümlenir. von-Neumann kararlılık analizi sonlu fark yöntemlerinin kararlılığının incelenmesinde lineer problemler için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, adını matematikçi John von-Neumann'dan almıştır ve temel olarak hata terimlerinin Fourier serisine

açılması prensibine dayanır. Bir lineer fark şemasının bu yöntemle kararlılığı incelenirken şemanın genel satırında U_m^n yerine, ξ amplikasyon faktörü, λ dalga sayısı, h konum adım büyüklüğü ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$U_m^n = \xi^n e^{i\lambda mh}$$

yazılır ve gerekli bir takım cebirsel işlemler yapılarak büyüme faktörü ξ hesaplanır. Eğer $|\xi| \leq 1$ koşulu sağlanıyorsa şema kararlıdır, aksi halde yani $|\xi| > 1$ ise hatalar büyür ve şema kararsızdır denir.

2.2.4 Yakınsaklık

Yakınsaklık, bir sonlu fark şemasının ürettiği yaklaşık çözümün, adım büyüklükleri sıfıra yaklaşırken, kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne yaklaşmasıdır. Matematiksel olarak, U_m^n yaklaşık çözüm ve $U(x_m, t_n)$ tam çözüm olmak üzere $\lim_{h,k \rightarrow 0} \|U_m^n - U(x_m, t_n)\| = 0$ koşulunu sağlıyorsa şema yakınsaktır. Yakınsaklık, bir yaklaşık yöntemin güvenilirliğini gösteren en temel ölçüttür. Eğer bir şema yakınsak değilse, adım büyüklükleri ne kadar küçültülürse küçültülsün, yaklaşık çözümün gerçek çözüme yaklaşacağının garantisi yoktur. Yakınsaklığı incelemek genellikle kolay değildir. Bunun için Lax'ın eşdeğerlilik teoreminden yararlanılır. Bu teorem sayesinde, yakınsaklığı doğrudan göstermek yerine, daha kolay incelenen tutarlılık ve kararlılık koşulları kontrol edilir.

2.2.4.1 Lax'ın denklik teoremi

Sayısal çözüm yöntemlerinde, bir lineer fark şemasının ürettiği sonuçların gerçek çözüme yakınsayıp yakınsamadığı sorusu her zaman merkezi bir öneme sahiptir. Bu soruya cevap arayan Lax'ın eşdeğerlilik teoremi, sayısal analiz literatürünün temel taşlarından biridir. Bu teoreme göre lineer bir başlangıç-sınır değer problemi için bir sonlu fark şemasının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şemanın hem tutarlı hem de kararlı olmasıdır.

3. KURAMOTO-SIVASHINSKY DENKLEMİ İÇİN SONLU FARK ŞEMASI

Bu bölüm, tezin temel özgün kısmını oluşturmaktadır. Burada (1.1.1)-(1.1.3) denklemleriyle verilen

$$U_t + \alpha U_{xx} + \beta U_{xxxx} + \frac{\gamma}{2} (U^2)_x = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} U(a, t) &= g_1(t), \quad U(b, t) = g_2(t) \\ U_x(a, t) &= h_1(t), \quad U_x(b, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Crank–Nicolson tipi bir sonlu fark şeması geliştirildi. Bu çalışmayı literatürde bulunan diğer çalışmalardan ayıran en önemli yönü, KS denkleminde görülen $(U^2)_x$ non-lineer teriminin, mevcut çalışmalardan farklı olarak Richtmyer tipi yaklaşım ile lineerleştirilmiş olmasıdır. Ayrıca bu bölümde, önerilen şemanın LKH ile birlikte yöntemin yakınsaklık yani doğruluk mertebesi de hesaplandı.

3.1 Richtmyer Lineerleştirmeli Crank–Nicolson Tipi Sonlu Fark Şeması

Bu kısımda, 1-boyutlu zamana bağlı 4. mertebeden non-lineer KS denklemi ile verilen yukarıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için geliştirilen Richtmyer lineerleştirmeli Crank–Nicolson tipi sonlu fark şeması verildi.

Bu bağlamda (1.1.1) ile verilen KS denkleminin Crank–Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa [35]

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \alpha \frac{(U_{xx})_m^{n+1} + (U_{xx})_m^n}{2} + \beta \frac{(U_{xxxx})_m^{n+1} + (U_{xxxx})_m^n}{2} + \frac{\gamma}{2} \frac{[(U^2)_x]_m^{n+1} + [(U^2)_x]_m^n}{2} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte n ve $(n+1)$ -inci zaman adımlarındaki x 'e göre birinci, ikinci ve dördüncü mertebeden türevler yerine Çizelge 2.1'de verilen $O(h^2)$ mertebeden simetrik fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa, $n=0(1)N$ ve $m=1(1)M-1$ olmak üzere, konum ve zaman yönünde tamamen ayrıklaştırılmış

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \alpha \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2h^2} \\ & + \beta \frac{U_{m+2}^{n+1} - 4U_{m+1}^{n+1} + 6U_m^{n+1} - 4U_{m-1}^{n+1} + U_{m-2}^{n+1} + U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n}{2h^4} \\ & + \frac{\gamma}{2} \frac{(U^2)_{m+1}^{n+1} - (U^2)_{m-1}^{n+1} + (U^2)_{m+1}^n - (U^2)_{m-1}^n}{4h} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

non-lineer fark şeması bulunur. Burada n zaman adımını, m uzay düğüm noktasını, k zaman adım büyüklüğünü ve h uzay adım büyüklüğünü göstermektedir. Bu denklem, (x_{m-1}, t_{n+1})

ve (x_{m+1}, t_{n+1}) düğüm noktalarında $(U^2)^{n+1}$ terimleri içermesi sebebiyle non-lineer bir denklemdir. Non-lineer cebirsel denklem sistemlerinin genellikle Newton–Raphson veya sabit nokta iterasyonu gibi yaklaşık yöntemlerle çözülmesi mümkün olmakla birlikte, bu tür yaklaşımlar her zaman adımında ek hesaplama maliyeti ve yakınsama problemi getirmektedir. Bu çalışmada, bu zorluklarla karşılaşmamak için (3.1.1) ile verilen ayrıklaştırılmış şemada $(n+1)$. zaman adımındaki non-lineer terimlerin lineerleştirilmesi amaçlanmıştır. Bunun için Bölüm 2’de (2.1.2) ile verilen

$$(U^2)_m^{n+1} = (U^2)_m^n + 2U_m^n (U_m^{n+1} - U_m^n) + O(k^2) \cong (U^2)_m^n + 2U_m^n (U_m^{n+1} - U_m^n)$$

Richtmyer lineerleştirme tekniği kullanıldı. Bu yaklaşım (3.1.1) de yerlerine yazılır ve kısalığın hatırı için $W_m = U_m^{n+1} - U_m^n$ kullanılırsa bir takım cebirsel işlemlerden sonra, $n = 0(1)N$ ve $m = 1(1)M - 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{r\beta}{h^2} W_{m-2} + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_{m-1}^n \right) W_{m-1} + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2} \right) W_m \\ & + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_{m+1}^n \right) W_{m+1} + \frac{r\beta}{h^2} W_{m+2} \\ & = -\frac{2r\beta}{h^2} U_{m-2}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_{m-1}^n \right) U_{m-1}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2} \right) U_m^n \\ & - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_{m+1}^n \right) U_{m+1}^n - \frac{2r\beta}{h^2} U_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

lineer sonlu fark şeması elde edilir. (3.1.2) denkleminde

$m = 1$ için;

$$\begin{aligned} & \frac{r\beta}{h^2} W_{-1} + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_0^n \right) W_0 + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2} \right) W_1 \\ & + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_2^n \right) W_2 + \frac{r\beta}{h^2} W_3 \\ & = -\frac{2r\beta}{h^2} U_{-1}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_0^n \right) U_0^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2} \right) U_1^n \\ & - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_2^n \right) U_2^n - \frac{2r\beta}{h^2} U_3^n \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$m = 2$ için;

$$\begin{aligned}
& \frac{r\beta}{h^2}W_0 + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_1^n\right)W_1 + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}\right)W_2 \\
& + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_3^n\right)W_3 + \frac{r\beta}{h^2}W_4 \\
& = -\frac{2r\beta}{h^2}U_0^n - \left(+2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_1^n\right)U_1^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2}\right)U_2^n \\
& + \left(-2r\alpha + \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_3^n\right)U_3^n - \frac{2r\beta}{h^2}U_4^n
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$m = 3(1)M - 3$ için;

$$\begin{aligned}
& \frac{r\beta}{h^2}W_{m-2} + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{m-1}^n\right)W_{m-1} + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}\right)W_m \\
& + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_{m+1}^n\right)W_{m+1} + \frac{r\beta}{h^2}W_{m+2} \\
& = -\frac{2r\beta}{h^2}U_{m-2}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{m-1}^n\right)U_{m-1}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2}\right)U_m^n \\
& - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_{m+1}^n\right)U_{m+1}^n - \frac{2r\beta}{h^2}U_{m+2}^n
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$m = M - 2$ için;

$$\begin{aligned}
& \frac{r\beta}{h^2}W_{M-4} + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-3}^n\right)W_{M-3} + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}\right)W_{M-2} \\
& + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_{M-1}^n\right)W_{M-1} + \frac{r\beta}{h^2}W_M \\
& = -\frac{2r\beta}{h^2}U_{M-4}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-3}^n\right)U_{M-3}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2}\right)U_{M-2}^n \\
& - \left(2r\alpha - 8\frac{r}{h^2}\beta + \frac{k\gamma}{2h}U_{M-1}^n\right)U_{M-1}^n - \frac{2r\beta}{h^2}U_M^n
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$m = M - 1$ için;

$$\begin{aligned}
& \frac{r\beta}{h^2}W_{M-3} + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-2}^n\right)W_{M-2} + \left(2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}\right)W_{M-1} \\
& + \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_M^n\right)W_M + \frac{r\beta}{h^2}W_{M+1} \\
& = -\frac{2r\beta}{h^2}U_{M-3}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-2}^n\right)U_{M-2}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2}\right)U_{M-1}^n \\
& - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_M^n\right)U_M^n - \frac{2r\beta}{h^2}U_{M+1}^n
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

dir. $m = 1$ ve $m = M - 1$ için ortaya çıkan $U_{-1}^n, U_{M+1}^n, W_{-1}$ ve W_{M+1} hayali değerler, problemde verilen sınır şartlarından elde edilen

$$\begin{aligned} U_{-1}^n &= U_1^n - 2hh_1(t_n), \\ U_{M+1}^n &= U_{M-1}^n + 2hh_2(t_n), \\ W_{-1} &= W_1 + 2h[h_1(t_n) - h_1(t_{n+1})], \\ W_{M+1} &= W_{M-1} + 2h[h_2(t_{n+1}) - h_2(t_n)] \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla kolayca yok edilir. Bunlarla birlikte başlangıç şartından elde edilen

$$\begin{aligned} U_0^n &= g_1(t_n), \\ U_M^n &= g_2(t_n), \\ W_0 &= g_1(t_{n+1}) - g_1(t_n), \\ W_M &= g_2(t_{n+1}) - g_2(t_n) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılır ve gerekli bir takım matematiksel düzenlemeler yapılırsa (3.1.3)-(3.1.7) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin $(M - 1)$ bilinmeyenli $(M - 1)$ tane lineer cebirsel denklemle sonuçlanan Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması matris formunda

$$AW = B$$

olarak elde edilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_{M-4M-5} & a_{M-4M-5} & a_{M-4M-4} & a_{M-4M-3} & a_{M-4M-2} \\ & & & & & & & a_{M-3M-5} & a_{M-3M-4} & a_{M-3M-3} & a_{M-3M-2} & a_{M-3M-1} \\ & & & & & & & & a_{M-2M-4} & a_{M-2M-3} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} \\ & & & & & & & & & a_{M-1M-3} & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & \cdots & W_{M-4} & W_{M-3} & W_{M-2} & W_{M-1} \end{bmatrix}^T$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_{M-4} & b_{M-3} & b_{M-2} & b_{M-1} \end{bmatrix}^T$$

olup A matrisinin girişleri:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 - 2r\alpha + \frac{7r\beta}{h^2}, \\ a_{12} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_2^n, \\ a_{13} &= \frac{r}{h^2}\beta, \\ a_{21} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_1^n, \\ a_{22} &= 2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}, \\ a_{23} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_3^n, \\ a_{24} &= \frac{r}{h^2}\beta \\ a_{i,i-2} &= \frac{r}{h^2}\beta, i = 3(1)M-3 \\ a_{i,i-1} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{i-1}^n, i = 3(1)M-3 \\ a_{i,i} &= 2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}, i = 3(1)M-3 \\ a_{i,i+1} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_{i+1}^n, i = 3(1)M-3 \\ a_{i,i+2} &= \frac{r}{h^2}\beta, i = 3(1)M-3 \\ a_{M-2,M-4} &= \frac{r}{h^2}\beta, \\ a_{M-2,M-3} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-3}^n \\ a_{M-2,M-2} &= 2 - 2r\alpha + \frac{6r\beta}{h^2}, \\ a_{M-2,M-1} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_{M-1}^n \\ a_{M-1,M-3} &= \frac{r}{h^2}\beta, \\ a_{M-1,M-2} &= r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}U_{M-2}^n, \\ a_{M-1,M-1} &= 2 - 2r\alpha + \frac{7r\beta}{h^2} \end{aligned}$$

ve B matrisinin girişleri:

$$\begin{aligned} b_1 &= \left(4r\alpha - \frac{14r\beta}{h^2}\right)U_1^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h}U_2^n\right)U_2^n - \frac{2r\beta}{h^2}U_3^n + \frac{2hr\beta}{h^2}[h_1(t_{n+1}) + h_1(t_n)] \\ &\quad - \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2}\right)g_1(t_n) - \left[r\alpha + \frac{4r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h}g_1(t_n)\right][g_1(t_{n+1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_1^n \right) U_1^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2} \right) U_2^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_3^n \right) U_3^n \\
&\quad - \frac{2r\beta}{h^2} U_4^n - \frac{r\beta}{h^2} \cdot [g_1(t_{n+1}) + g_1(t_n)] \\
b_j &= - \frac{2r\beta}{h^2} U_{j-2}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_{j-1}^n \right) U_{j-1}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2} \right) U_j^n \\
&\quad - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} U_{j+1}^n \right) U_{j+1}^n - \frac{2r\beta}{h^2} U_{j+2}^n, j = 3(1)M-3 \\
b_{M-2} &= - \frac{2r\beta}{h^2} U_{M-4}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_{M-3}^n \right) U_{M-3}^n + \left(4r\alpha - \frac{12r\beta}{h^2} \right) U_{M-2}^n \\
&\quad - \left(2r\alpha - 8\frac{r}{h^2}\beta + \frac{k\gamma}{2h} U_{M-1}^n \right) U_{M-1}^n - \frac{r}{h^2} \beta [g_2(t_{n+1}) + g_2(t_n)] \\
b_{M-1} &= - \frac{2r\beta}{h^2} U_{M-3}^n - \left(2r\alpha - \frac{8r\beta}{h^2} - \frac{k\gamma}{2h} U_{M-2}^n \right) U_{M-2}^n + \left(4r\alpha - \frac{14r\beta}{h^2} \right) U_{M-1}^n \\
&\quad - \left(r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} \right) g_2(t_n) - \left[r\alpha - \frac{4r\beta}{h^2} + \frac{k\gamma}{2h} g_2(t_n) \right] g_2(t_{n+1}) - \frac{2r\beta}{h} [h_2(t_{n+1}) + h_2(t_n)]
\end{aligned}$$

dir. Böylece bu tezde hedeflenen lineer yapıdaki yaklaşık şema başarıyla elde edilmiş olur. Sunulan bu şema lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan klasik direkt yöntemlerden biri yardımıyla herhangi bir iterasyon gerektirmeksizin kolayca çözülür.

Bu kısımda kullanılan lineerleştirme stratejisi 1-boyutlu non-lineer KS denkleminin yaklaşık çözümlerine literatürdeki mevcut çalışmalardan farklı yeni bir yaklaşım sunmakta olup, tezin özgün katkısını oluşturmaktadır.

3.2 Şemanın LKH ve Yakınsaklık Mertebesi

(x_m, t_n) düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denklemin herhangi bir sonlu fark yaklaşımı $F(U_m^n) = 0$ formunda ifade edilebilir. Bu düğüm noktasında sonlu fark yaklaşımının LKH, kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü $U(x_m, t_n)$ olmak üzere $T_{m,n}(U) = F(U(x_m, t_n))$ eşitliğinden h ve k 'nın kuvvetleri ile (x_m, t_n) düğüm noktasında hesaplanan tam çözüm U 'nun kısmi türevlerine bağlı olarak kolayca bulunur. LKH, sonlu fark yaklaşımının kısmi diferansiyel denklemin çözümüne ne ölçüde yaklaştığını gösteren bir büyüklüktür.

(3.1.1) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımının LKH'nın mertebesi aşağıdaki şekilde bulunur:

LKH'nın tanımından (3.1.1) yaklaşımında U_m^n yerine $U(x_m, t_n)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
T_{m,n} = & \frac{U(x_m, t_n + k) - U(x_m, t_n)}{k} + \alpha \frac{U(x_m - h, t_n + k) - 2U(x_m, t_n + k)}{2h^2} \\
& + \alpha \frac{U(x_m + h, t_n + k) + U(x_m - h, t_n) - 2U(x_m, t_n) + U(x_m + h, t_n)}{2h^2} \\
& + \beta \frac{U(x_m + 2h, t_n + k) - 4U(x_m + h, t_n + k) + 6U(x_m, t_n + k)}{2h^4} \\
& + \beta \frac{-4U(x_m - h, t_n + k) + U(x_m - 2h, t_n + k) + U(x_m + 2h, t_n)}{2h^4} \\
& + \beta \frac{-4U(x_m + h, t_n) + 6U(x_m, t_n) - 4U(x_m - h, t_n) + U(x_m - 2h, t_n)}{2h^4} \\
& + \frac{\gamma(U^2)(x_m + h, t_n + k) - (U^2)(x_m - h, t_n + k)}{4h} \\
& + \frac{\gamma(U^2)(x_m + h, t_n) - (U^2)(x_m - h, t_n)}{4h}
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

bulunur. Bu eşitlikte görülen U ve U^2 fonksiyonlarının (x_m, t_n) noktasındaki Taylor seri açılımları

$$\begin{aligned}
U\{m, (n+1)k\} &= U(x_m, t_n + k) \\
&= U_m^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m^n + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_m^n + \frac{k^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\{(m-1)h, n\} &= U(x_m - h, t_n) \\
&= U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\{(m+1)h, n\} &= U(x_m + h, t_n) \\
&= U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\{(m+2)h, n\} &= U(x_m + 2h, t_n) \\
&= U_m^n + 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{8h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\{(m-2)h, n\} &= U(x_m - 2h, t_n) \\
&= U_m^n - 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{8h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m \right. \\
& + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m \right. \\
& + \dots \\
U \{ (m+2)h, (n+1)k \} & = U(x_m + 2h, t_n + k) \\
& = U_m^n + 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +2)h, (n+1)k\} &= U(x_m+2h, t_n+k) \\ &= U_m^n + 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \\ &\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_m^n + 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \right] \\ &\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_m^n + 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2)h, (n+1)k\} &= U(x_m - 2h, t_n + k) \\ &= U_m^n - 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \\ &\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_m^n - 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \right] \\ &\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_m^n - 2h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{4h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^2 \{(m+1)h, n\} &= U^2(x_m + h, t_n) \\ &= (U^2)_m^n + h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^2 \{(m-1)h, n\} &= U^2(x_m - h, t_n) \\
&= (U^2)_m^n - h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^2 \{(m+1)h, (n+1)k\} &= U^2(x_m + h, t_n + k) \\
&= (U^2)_m^n + h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \\
&\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[(U^2)_m^n + h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\
&\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(U^2)_m^n + h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^2 \{(m-1)h, (n+1)k\} &= U^2(x_m - h, t_n + k) \\
&= (U^2)_m^n - h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \\
&\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[(U^2)_m^n - h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\
&\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(U^2)_m^n - h \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots \right]_m^n \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

olup bunlar (3.2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa LKH

$$\begin{aligned}
T_m^n &= \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} \right]_m^n \\
&\quad + \frac{k}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} \right]_m^n \\
&\quad + k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\beta}{4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{8} \frac{\partial U^2}{\partial x} \right]_m^n \\
&\quad + h^2 \left[\frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{12} \frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} + \frac{\gamma}{120} h^2 \frac{\partial^5 U^2}{\partial x^5} \right]_m^n \\
&\quad + k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} [\dots]_m^n + kh^2 \frac{\partial}{\partial t} [\dots]_m^n
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

olarak elde edilir. U verilen KDD'nin tam çözümü olduğu için

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} \right]_m^n = 0$$

olup (3.2.2) eşitliği

$$T_m^n = k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\beta}{4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{8} \frac{\partial U^2}{\partial x} \right]_m^n + h^2 \left[\frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{12} \frac{\partial^3 U^2}{\partial x^3} + \frac{\gamma}{120} h^2 \frac{\partial^5 U^2}{\partial x^5} \right]_m^n + k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} [\dots]_m^n + kh^2 \frac{\partial}{\partial t} [\dots]_m^n$$

\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{lokal kesme hatasının esas kısmı}}

olur. LKH'nın esas kısmından KS denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımının hata mertebesi

$$O(k^2) + O(h^2)$$

olarak bulunur. Böylece sunulan şemanın yakınsaklık mertebesinin teorik değeri 2'dir.

3.3 Şemanın Kararlılık Analizi

Denklem (1.1.1)' de görülen UU_x non-linear teriminde U yerine C lokal sabiti alınırsa

$$U_t + \alpha U_{xx} + \beta U_{xxxx} + \gamma C U_x = 0$$

denklemini elde edilir. Bu lineerleştirilmiş denklemin Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \alpha \frac{(U_{xx})_m^{n+1} + (U_{xx})_m^n}{2} + \beta \frac{(U_{xxxx})_m^{n+1} + (U_{xxxx})_m^n}{2} + \gamma C \frac{(U_x)_m^{n+1} + (U_x)_m^n}{2} = 0 \quad (3.3.1)$$

olur. Bu eşitlikte kısmi türevler yerine Çizelge 2.1'de verilen uygun sonlu fark formülleri yazılırsa, $n = 0(1)N$ ve $m = 1(1)M - 1$ olmak üzere, (3.3.1) ile verilen lineer KS denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark şeması

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \alpha \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h^2} \\ & + \beta \frac{U_{m+2}^{n+1} - 4U_{m+1}^{n+1} + 6U_m^{n+1} - 4U_{m-1}^{n+1} + U_{m-2}^{n+1} + U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n}{2h^4} \\ & + \gamma C \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{4h} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

olarak elde edilir. Bu lineer yaklaşımın von-Neumann yöntemi ile kararlılığı inceleneceğinden, ξ büyüme faktörü, λ dalga sayısı, h konum adım büyüklüğü ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, şemanın genel satırında U_m^n yerine

$$U_m^n = \xi^n e^{i\lambda m h}$$

eşitliği yazılır ve gerekli bir takım trigonometrik işlemler kullanılırsa ξ güçlendirme faktörü

$$\xi = \frac{1 + A - iB}{1 - A + iB} \quad (3.3.3)$$

olarak bulunur.

Burada

$$A = \left(\frac{2\alpha k}{h^2} - \frac{8\beta k}{h^4} \right) \sin^2\left(\frac{\lambda h}{2}\right) + \frac{2\beta k}{h^4} \sin^2(\lambda h) \quad (3.3.4)$$

ve

$$B = \frac{\gamma C k}{2h} \sin(\lambda h)$$

dır. Kararlılık için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. (3.3.3)' dan

$$\begin{aligned} |\xi| &= \frac{\sqrt{(1+A)^2 + B^2}}{\sqrt{(1-A)^2 + B^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+2A+A^2+B^2}{1-2A+A^2+B^2}} \end{aligned}$$

olup $|\xi| \leq 1$ olması için $A \leq 0$ olmalıdır. (3.3.4) ifadesi

$$A = \frac{2\beta k}{h^4} \left(\frac{\alpha h^2}{\beta} - 4 \right) \sin^2\left(\frac{\lambda h}{2}\right) + \frac{2\beta k}{h^4} \sin^2(\lambda h)$$

olarak yazılabilir. Gerçekten $A \leq 0$ yani

$$\frac{2\beta k}{h^4} \left(\frac{\alpha h^2}{\beta} - 4 \right) \sin^2\left(\frac{\lambda h}{2}\right) + \frac{2\beta k}{h^4} \sin^2(\lambda h) \leq 0$$

mıdır?

4. Bölümde ele alınan 3 test problemde $\beta = 1 > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$\left(\frac{\alpha h^2}{\beta} - 4 \right) \sin^2\left(\frac{\lambda h}{2}\right) + \sin^2(\lambda h) \leq 0$$

olur. Bu eşitsizlik ise

$$4 - \frac{\alpha h^2}{\beta} \geq 4 \cos^2\left(\frac{\lambda h}{2}\right)$$

veya $\max \cos^2 x = 1$ olduğundan

$$4 \geq \frac{\alpha h^2}{\beta}$$

olarak yazılabilir. Test problemlerde

$$\alpha = -1, 1, h > 0, \text{ ve } \beta = 1$$

olup

$$4 \geq \frac{\alpha h^2}{\beta}$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Böylece $A \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. Dolayısıyla (3.3.2) ile verilen lokal lineerleştirmeli Crank-Nicolson sonlu fark şeması şartsız kararlıdır.

4. SAYISAL DENEYLER VE SONUÇLAR

Bu bölümde, Bölüm 3'te sunulan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinden emin olmak için 2 tanesi tam çözüme sahip olan 3 test problem göz önüne alındı. Her bir problem için farklı parametre değerleri kullanılarak hesaplanan sayısal sonuçlar kendi aralarında ve ayrıca literatürde bulunan bazı araştırmacıların farklı yaklaşık yöntemlerle elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırıldı.

Bir sayısal yöntemin performansının değerlendirilmesinde tam çözüm, yaklaşık yöntemlerin doğruluk analizinde referans fonksiyonu olarak kullanılmaktadır. Bundan dolayı elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüme ne ölçüde yaklaştığının nicel olarak ortaya konulması büyük önem taşımaktadır. Bu amaç doğrultusunda, bu tez çalışmasında önerilen sayısal şemanın doğruluğu ve güvenilirliği, farklı ölçme özelliklerine sahip üç ayrı hata normu kullanılarak gösterildi. Bunlar sırasıyla, çözümün toplam enerji hatasını temsil eden L_2 normu, çözüm bölgesi boyunca karşılaşılan maksimum anlık sapmayı ifade eden L_∞ normu ve çözümün bağıl büyüklüğünü dikkate alarak oransal bir karşılaştırma imkanı sunan GRE (Göreceli Hata) normudur. Bu hata normları, (x_m, t_n) grid noktasında denklemin tam çözümü $U(x_m, t_n)$ ve yaklaşık çözümü U_m^n olmak üzere

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{m=0}^{m=M} |(U(x_m, t_n)) - U_m^n|^2}, \quad L_\infty = \max_m |(U(x_m, t_n)) - U_m^n|$$

ve

$$GRE = \frac{\sum_m |(U(x_m, t_n)) - U_m^n|}{\sum_m |U_m^n|}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca sunulan şemanın L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yaklaşık yakınsaklık mertebeleri

$$Mertebe(L) = \log_2 \left[\frac{L(2h, 2k)}{L(h, k)} \right], \quad (L = L_2, L_\infty)$$

şeklinde tanımlanan formülü ile hesaplandı [21]. Elde edilen tüm hesaplamalarda 12. Nesil Intel(R) Core(TM) i5-12450H, 2000 Mhz, 8 çekirdek, 12 mantıksal işlemci, 64 bit işletim sistemine sahip dizüstü bilgisayar ve MATLAB (R2011a) sürümü kullanıldı.

4.1 Test Problem 1

İlk olarak $(x, t) \in [-30, 30] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde (1.1.1) ile verilen KS denklemi $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $\gamma = 1$ parametre değerleri için ele alındı. Bu durumda (1.1.1) denklemi

$$U_t + U_{xx} + U_{xxxx} + UU_x = 0, x \in [-30, 30], t \in [0, T]$$

olup

$$U(x, 0) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [-9 \tanh(\kappa(x - x_0)) + 11 \tanh^3(\kappa(x - x_0))]$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(-30, t) &= g_1(t), \quad U(30, t) = g_2(t) \\ U_x(-30, t) &= 0, \quad U_x(30, t) = 0 \end{aligned}, t \geq 0$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Burada

$$g_1(t) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [-9 \tanh(\kappa(-30 - ct - x_0)) + 11 \tanh^3(\kappa(-30 - ct - x_0))]$$

$$g_2(t) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [-9 \tanh(\kappa(30 - ct - x_0)) + 11 \tanh^3(\kappa(30 - ct - x_0))]$$

olup problemin tam çözümü

$$U(x, t) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [-9 \tanh(\kappa(x - ct - x_0)) + 11 \tanh^3(\kappa(x - ct - x_0))]$$

dir [13]. Burada $U(x, t)$ soliton veya kink-tipi (top kink) dalgayı, c dalga'nın ilerleme hızını (faz hızı) ve/veya asimptotik seviyesini, κ dalga sayısını (wave number) ve x_0 dalga'nın başlangıç konumunu (fazını) ifade eder. Bu problemde $c = 5$, $\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}$, $x_0 = -12$ olarak alındı ve farklı h ve k adım uzunlukları için $x \in [-30, 30]$ konum aralığında $t = 1(1)4$ bitiş zamanına kadar nümerik hesaplamalar gerçekleştirildi. Bu hesaplamalarda (3.1.2) sonlu fark şeması kullanıldı ve iki farklı durum incelendi. Önce $k = 0.01$ zaman adım uzunluğu sabit tutularak h konum adım uzunluğunun $h = 0.4$ 'ten $h = 0.0125$ 'e kadar her seferinde yarılanarak giden 6 farklı değeri ve sonra $h = 0.1$ konum adım uzunluğu sabit tutularak k zaman adım uzunluğunun $k = 0.01$ 'den $k = 0.000625$ 'e kadar her seferinde yine yarılanarak giden 5 farklı değeri için hesaplanan L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ zamanları sırasıyla Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de sergilendi.

Çizelge 4.1 : Problem 1' in $k = 0.01$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).

t		$h = 0.4$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
1	L_2	0.303531e-2	0.774438e-3	0.211464e-3	0.711260e-4	0.363698e-4	0.278316e-4
	L_∞	0.192365e-2	0.505801e-3	0.138639e-3	0.468432e-4	0.241637e-4	0.186083e-4
	GRE	0.284277e-4	0.724696e-5	0.198453e-5	0.666848e-6	0.340259e-6	0.260011e-6
	$CPU(s)$	0.151629	0.271976	1.162485	6.974626	63.760740	250.941059
2	L_2	0.495447e-2	0.126457e-2	0.345074e-3	0.115804e-3	0.589592e-4	0.449647e-4
	L_∞	0.321286e-2	0.762539e-3	0.208434e-3	0.702504e-4	0.360435e-4	0.276415e-4
	GRE	0.612700e-4	0.136851e-4	0.374283e-5	0.125439e-5	0.635797e-6	0.483164e-6
	$CPU(s)$	0.133723	0.276300	1.403985	7.920150	80.059375	553.890900
3	L_2	0.625024e-2	0.159806e-2	0.436120e-3	0.146232e-3	0.743224e-4	0.566041e-4
	L_∞	0.335690e-2	0.873784e-3	0.238815e-3	0.804969e-4	0.413024e-4	0.316823e-4
	GRE	0.774051e-4	0.198256e-4	0.542461e-5	0.181605e-5	0.918109e-6	0.695871e-6
	$CPU(s)$	0.121777	0.405805	2.081350	11.648885	75.455132	480.797386
4	L_2	0.699078e-2	0.179123e-2	0.489037e-3	0.163946e-3	0.832973e-4	0.634247e-4
	L_∞	0.327123e-2	0.849729e-3	0.232753e-3	0.786196e-4	0.405009e-4	0.311681e-4
	GRE	0.987235e-4	0.254524e-4	0.696660e-5	0.233162e-5	0.117737e-5	0.891339e-6
	$CPU(s)$	0.151421	0.480855	2.653189	15.211532	94.591134	697.588001

Çizelge 4.2 : Problem 1' in $h = 0.1$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).

t		$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.0025$	$k = 0.00125$	$k = 0.000625$
1	L_2	0.211464e-3	0.193446e-3	0.188964e-3	0.187845e-3	0.187565e-3
	L_∞	0.138639e-3	0.126554e-3	0.123534e-3	0.122780e-3	0.122591e-3
	GRE	0.198453e-5	0.181708e-5	0.177524e-5	0.176479e-5	0.176217e-5
	$CPU(s)$	0.666764	1.370281	2.614152	5.096666	10.307431
2	L_2	0.345074e-3	0.315835e-3	0.308559e-3	0.306742e-3	0.306288e-3
	L_∞	0.208434e-3	0.190282e-3	0.185747e-3	0.184614e-3	0.184330e-3
	GRE	0.374283e-5	0.342880e-5	0.335096e-5	0.333150e-5	0.332663e-5
	$CPU(s)$	1.345984	2.621825	5.235693	10.331324	20.694397
3	L_2	0.436120e-3	0.399249e-3	0.390072e-3	0.387780e-3	0.387208e-3
	L_∞	0.238815e-3	0.217935e-3	0.212863e-3	0.211614e-3	0.211302e-3
	GRE	0.542461e-5	0.496883e-5	0.485574e-5	0.482748e-5	0.482041e-5
	$CPU(s)$	1.961320	5.031317	10.355157	27.593883	37.864399
4	L_2	0.489037e-3	0.447715e-3	0.437431e-3	0.434863e-3	0.434222e-3
	L_∞	0.232753e-3	0.212265e-3	0.207375e-3	0.206153e-3	0.205847e-3
	GRE	0.696660e-5	0.638492e-5	0.623975e-5	0.620345e-5	0.619438e-5
	$CPU(s)$	3.516980	6.786743	13.017209	25.735691	48.827130

Çizelgeler incelendiğinde, h ve k değerleri küçüldükçe L_2 , L_∞ ve GRE hata normlarının da azaldığı görülmektedir. Bu durum, yaklaşık sonuçların gerçek sonuca giderek yaklaştığını göstermekte olup kullanılan sonlu fark şemasının teorik beklentilerinin bir sonucudur. Başka bir deyişle h ve k değerleri azaltıldıkça elde edilen yaklaşık çözüm, tam çözüme yakınsamaktadır. Ancak çizelgelerde verilen $CPU(s)$ zamanlarından da açıkça görüleceği üzere bu yakınsama

hesaplama maliyetini önemli ölçüde artırmaktadır. Daha küçük adım uzunlukları, daha fazla işlem yükü ve dolayısıyla daha uzun çalışma süresi anlamına gelmektedir. Bu nedenle, doğruluk ile hesaplama maliyeti arasında bir denge kurularak h ve k değerleri makul ölçülerde seçilmelidir. Ayrıca $k = \Delta t = 0.01$ sabit alınarak $t = 1(1)4$ bitiş zamanlarında hesaplanan GRE hata normları $M = 200, 300, 400$ konum bölüntü sayıları için [13] ve [23]'de verilenler ile Çizelge 4.3'te; $M = 150$ için [10, 13, 20, 21, 23, 28, 30]'de; $M = 100$ için [26]'da ve $k = \Delta t = 0.001$, $M = 50$ için [37]'de verilen sonuçlarla Çizelge 4.4'te karşılaştırıldı. Hesaplanan GRE hata değerlerinin kabul edilebilir seviyede küçük olmasına rağmen karşılaştırmaların yapıldığı referanslarda kullanılan çeşitli sonlu eleman yöntemleri ile elde edilen sonuçlar kadar iyi olmadığı görülmektedir. Bu da sonlu elemanlar yönteminin üstünlüğünün kaçınılmaz doğal bir sonucudur.

Çizelge 4.3 : Problem 1' in $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$).

t	Yöntem	GRE		
		$M = 200$	$M = 300$	$M = 400$
1	Mevcut	$1.5996e-3$	$7.2470e-4$	$4.1836e-4$
	[13]	$2.1335e-4$	$1.2335e-4$	$6.6956e-5$
	[23]	-	$4.5761e-5$	$2.8714e-5$
2	Mevcut	$3.0235e-3$	$1.3685e-3$	$5.6241e-3$
	[13]	$3.0874e-4$	$1.6780e-4$	$9.6417e-5$
	[23]	-	$4.0193e-5$	$2.8313e-5$
3	Mevcut	$4.3706e-3$	$1.9826e-3$	$1.1433e-3$
	[13]	$3.9500e-4$	$2.0791e-4$	$1.0947e-4$
	[23]	-	$5.0135e-5$	$3.0294e-5$
4	Mevcut	$5.6241e-3$	$2.5452e-3$	$1.4689e-3$
	[13]	$4.8448e-4$	$2.5018e-4$	$1.2600e-4$
	[23]	-	$6.2745e-5$	$3.7783e-5$

Çizelge 4.4 : Problem 1' in $h = 0.4$ ve $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -12$, $-30 \leq x \leq 30$)

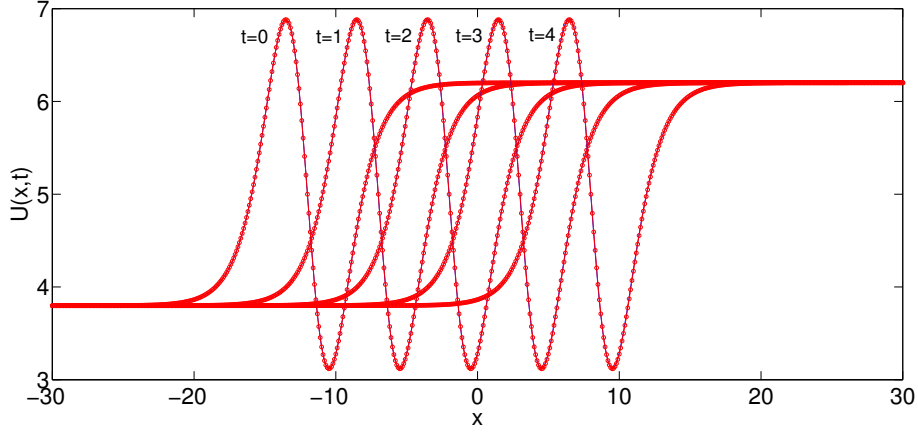
Yöntem	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
Mevcut	$2.8428e-3$	$5.3200e-3$	$7.7405e-3$	$9.8723e-3$
[13]	$3.8173e-4$	$5.5114e-4$	$7.0398e-4$	$8.6366e-4$
[10]	$6.7923e-4$	$1.1503e-3$	$1.5941e-3$	$2.0075e-3$
[21]	$2.3986e-4$	$2.9855e-3$	$3.6254e-3$	$4.3300e-3$
[23]	$1.8111e-4$	$1.9264e-4$	$2.4797e-4$	$2.9873e-4$
[28]	$2.2135e-5$	$4.1690e-5$	$6.0879e-5$	$7.7538e-5$
[20]	$3.3290e-4$	$5.5636e-4$	$8.7489e-4$	$1.2516e-3$
[30]	$2.2482e-5$	$3.9889e-5$	$5.5110e-5$	$6.7441e-5$
[37]($k = 0.001$, $M = 50$)	$1.7727e-5$	$2.7460e-5$	$3.4621e-5$	$4.3647e-5$
[26]($k = 0.01$, $M = 100$)	$2.5000e-5$	$4.5700e-5$	$6.3500e-5$	$7.8600e-5$

Bu çizelgelere ek olarak $h = k$ adım uzunluklarının 0.2'den 0.0125'e kadar yarılanarak küçülen 5 farklı değeri için $t = 1(1)4$ bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ve bu normlarda hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebeleri ile birlikte $CPU(s)$ değerleri Çizelge 4.5'te listelendi. Çizelgeye bakıldığında $h = k$ değerlerinin küçülmesi durumunda artan $CPU(s)$ zaman değerleriyle L_2 ve L_∞ hata normlarının gittikçe küçüldüğü ve ayrıca bu hata normlarında elde edilen yaklaşık doğruluk mertebelerinin teorik değeri olan 2'nin oldukça yakın civarında olduğu görülmektedir. Bu bulgular önerilen şemanın beklenen yakınsaklık davranışını sergilediğini açıkça ortaya koymaktadır.

Çizelge 4.5 : Problem 1'in yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -12, -30 \leq x \leq 30$).

t	$h = k$	L_2	Mertebe(L_2)	L_∞	Mertebe(L_∞)	CPU
1	0.2	1.085690e+0	-	7.784655e-1	-	0.060478
	0.1	2.694367e-1	2.010593	1.843657e-1	2.078006	0.123365
	0.05	6.712348e-2	2.005056	4.517000e-2	2.029133	1.041094
	0.025	1.676569e-2	2.001305	1.123549e-2	2.029133	10.873595
	0.0125	4.190427e-3	2.000342	2.805099e-3	2.007301	126.912914
2	0.2	1.876530e+0	1.526975	1.255339e+0	1.242256	0.079239
	0.1	4.417378e-1	2.086805	2.805365e-1	2.161816	0.318390
	0.05	1.087699e-1	2.021910	6.746977e-2	2.055875	2.819838
	0.025	2.709262e-2	2.392931	1.670082e-2	2.014322	17.421433
	0.0125	6.766769e-3	2.001360	4.164665e-3	2.003646	245.731327
3	0.2	2.494776e-0	-	1.561538e+0	-	0.090259
	0.1	5.614914e-1	2.151574	3.290031e-1	2.246794	0.435166
	0.05	1.371973e-1	2.033011	7.778680e-2	2.080503	4.240959
	0.025	3.411549e-2	2.007753	1.916731e-2	2.020277	25.662647
	0.0125	8.517103e-3	2.001992	4.774404e-3	2.005255	383.855327
4	0.2	2.946728e+0	1.415558	1.714831e+0	1.305752	0.107154
	0.1	6.336577e-1	2.217338	3.335270e-1	2.362190	0.577923
	0.05	1.539605e-1	2.041143	7.711853e-2	2.112654	5.579943
	0.025	3.823957e-2	2.009422	1.890180e-2	2.028548	36.418597
	0.0125	9.543754e-3	2.002437	4.701171e-3	2.215381	653.467134

Sunulan sayısal yöntemin süreklilik özelliğini ve tam çözümle uyumunu görsel olarak sergilemek amacıyla $k = 0.01$ zaman adımı ve $M = 600$ konum bölüntü sayısı için $t = 1, 2, 3, 4$ bitiş zamanlarında hesaplanan yaklaşık çözümler ile birlikte tam çözümün 2-boyutlu grafikleri Şekil 4.1'de verildi. Şekilden yaklaşık çözümlere ait eğriler ile tam çözüme ait eğrilerin birbirine olağanüstü derecede yakın olduğu hatta her iki eğrinin neredeyse üst üste binmesi nedeniyle ayırt edilemediği görülmektedir. Bu bulgular, Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson sonlu fark şemasının KS denklemi ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünü yüksek bir doğrulukla temsil ettiğini açıkça göstermektedir.



Şekil 4.1 : Problem 1'in $h \equiv \Delta x = 0.1$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan yaklaşık (—) ve tam (o) çözümlerinin 2-boyutlu grafikleri.

4.2 Test Problem 2

İkinci test problem olarak, $(x, t) \in [-50, 50] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde tanımlı (1.1.1) ile verilen KS denklemi, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ ve $\gamma = 1$ parametre seçimiyle incelendi. Bu durumda (1.1.1) denklemi

$$U_t - U_{xx} + U_{xxx} + UU_x = 0, x \in [-50, 50], t \in [0, T]$$

olup

$$U(x, 0) = c + \frac{15}{19\sqrt{19}} [-3 \tanh(\kappa(x - x_0)) + \tanh^3(\kappa(x - x_0))]$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(-50, t) &= c + \frac{15}{19\sqrt{19}} [-3 \tanh(\kappa(-50 - ct - x_0)) + \tanh^3(\kappa(-50 - ct - x_0))] \\ U(50, t) &= c + \frac{15}{19\sqrt{19}} [-3 \tanh(\kappa(50 - ct - x_0)) + \tanh^3(\kappa(50 - ct - x_0))] \\ U_x(-50, t) &= 0, U_x(50, t) = 0 \end{aligned} \quad , t \geq 0$$

sınır şartlarıyla ele alındı.

Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = c + \frac{15}{19\sqrt{19}} [-3 \tanh(\kappa(x - ct - x_0)) + \tanh^3(\kappa(x - ct - x_0))]$$

dir.

Bu problemde $x \in [-50, 50]$, $c = 5$ (dalganın ilerleme hızını belirleyen sabit), $\kappa = 1/2\sqrt{19}$ (dalga sayısı olarak adlandırılan ve başlangıç profilin dikliğini kontrol eden parametre) ve $x_0 = -25$ (başlangıç anında dalganın merkezinin başlangıç noktasına göre konumu) alındı [13].

İlk olarak $t = 6(2)12$ bitiş zamanlarında $k = 0.01$ zaman adım uzunluğu sabit tutularak h uzay adım uzunluğunun $h = 0.5$ 'den $h = 0.03125$ 'e kadar her defasında yarılanarak küçülen 5 farklı değeri ve sonra $h = 0.125$ konum adım uzunluğu sabit tutularak k zaman adım uzunluğunun $k = 0.01$ 'den $k = 0.000625$ 'e kadar her seferinde yine yarılanarak küçülen 5 farklı değeri için sunulan şemadan hesaplanan L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ zamanları sırası ile Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7'de sergilendi. Çizelgelerden uzay ve zaman adım büyüklüklerindeki azalmanın önerilen sonlu fark şemasının beklenen yakınsama özelliğini destekleyerek L_2 , L_∞ ve GRE hata normlarında düzenli bir iyileşmeye yol açtığı açıkça görülmektedir. Bunlarla birlikte adım uzunluklarının her birinin giderek küçülmesi problemin çözüm bölgesindeki toplam düğüm noktası sayısını arttırmakta ve buna paralel olarak şemanın hesaplama yükü ile çalışma zamanını veren $CPU(s)$ işlemci sürelerini önemli ölçüde yükseltmektedir. Dolayısıyla, doğruluktan çok fazla ödün vermeden hesaplama yükünü sınırlamak adına, h ve k parametre değerleri elden geldiğince makul değerler seçilmelidir.

Ayrıca bu problemin $k = \Delta t = 0.01$ sabit alınarak, $M = 150$ ve $M = 200$ konum bölüntü sayıları için $t = 6(2)12$ bitiş zamanlarında hesaplanan GRE hata normları diğer araştırmacıların [10, 13, 21–24, 26, 30, 37] bulduğu sonuçlarla Çizelge 4.8' te karşılaştırıldı. Çizelgeden hesaplanan GRE hata değerleri yeterince küçük olmasına rağmen karşılaştırmaların yapıldığı referanslarda kullanılan çeşitli sonlu eleman yöntemleriyle elde edilen sonuçlar kadar iyi olmadığı görülmektedir. Bu da sonlu elemanlar yönteminin beklenen üstünlüğünün doğal bir sonucudur.

Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $k = 0.01$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).

t		$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$
6	L_2	0.663816e-4	0.168508e-4	0.446039e-5	0.136354e-5	0.591393e-6
	L_∞	0.276429e-4	0.703252e-5	0.186236e-5	0.569104e-6	0.246504e-6
	GRE	0.599973e-6	0.152798e-6	0.406757e-7	0.126099e-7	0.559372e-8
	$CPU(s)$	0.492972	1.693127	9.855793	55.876326	378.546295
8	L_2	0.808375e-4	0.205186e-4	0.543127e-5	0.166038e-5	0.719984e-6
	L_∞	0.334126e-4	0.850267e-5	0.225171e-5	0.688077e-6	0.298060e-6
	GRE	0.725013e-6	0.184676e-6	0.491281e-7	0.151920e-7	0.670708e-8
	$CPU(s)$	0.679315	2.380722	12.917214	65.079129	539.614353
10	L_2	0.929511e-4	0.235919e-4	0.624496e-5	0.190953e-5	0.828529e-6
	L_∞	0.382043e-4	0.972416e-5	0.257520e-5	0.786927e-6	0.340913e-6
	GRE	0.826700e-6	0.210574e-6	0.560182e-7	0.173499e-7	0.768388e-8
	$CPU(s)$	0.667689	2.844161	16.066100	94.849171	656.983847
12	L_2	0.102997e-3	0.261964e-4	0.730213e-5	0.326310e-5	0.268391e-5
	L_∞	0.422349e-4	0.107519e-4	0.284738e-5	0.252200e-5	0.254909e-5
	GRE	0.882950e-6	0.227164e-6	0.647841e-6	0.246155e-7	0.146453e-7
	$CPU(s)$	0.793183	3.832700	19.421785	105.132791	1020.889669

Çizelge 4.7 : Problem 2'nin $h = 0.125$ için L_2 , L_∞ ve GRE hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).

t		$k = 0.01$	$k = 0.005$	$k = 0.0025$	$k = 0.00125$	$k = 0.000625$
6	L_2	0.446039e-5	0.421353e-5	0.415189e-5	0.413649e-5	0.413263e-5
	L_∞	0.186236e-5	0.175959e-5	0.173394e-5	0.172752e-5	0.172592e-5
	GRE	0.406757e-7	0.384370e-7	0.378790e-7	0.377395e-7	0.377046e-7
	$CPU(s)$	9.424389	19.631666	36.145682	67.723718	230.613015
8	L_2	0.543127e-5	0.513057e-5	0.505549e-5	0.503672e-5	0.503203e-5
	L_∞	0.225171e-5	0.212734e-5	0.209631e-5	0.208855e-5	0.208661e-5
	GRE	0.491281e-7	0.464200e-7	0.457430e-7	0.455738e-7	0.455315e-7
	$CPU(s)$	13.088476	25.108306	49.982668	95.074347	304.096658
10	L_2	0.624496e-5	0.589914e-5	0.581279e-5	0.579121e-5	0.578581e-5
	L_∞	0.257520e-5	0.243285e-5	0.239736e-5	0.238849e-5	0.238627e-5
	GRE	0.560182e-7	0.529315e-7	0.521624e-7	0.519701e-7	0.519220e-7
	$CPU(s)$	15.926473	31.802654	60.853269	117.223938	384.839021
12	L_2	0.730213e-5	0.694402e-5	0.685503e-5	0.683282e-5	0.682727e-5
	L_∞	0.284738e-5	0.268989e-5	0.265064e-5	0.264082e-5	0.263837e-5
	GRE	0.647841e-7	0.615680e-7	0.607640e-7	0.605630e-7	0.605128e-7
	$CPU(s)$	19.708085	36.896296	75.476074	185.188134	459.157626

Çizelge 4.8 : Problem 2'nin $k = 0.01$ için GRE hata normları ($c = 5$, $x_0 = -25$, $-50 \leq x \leq 50$).

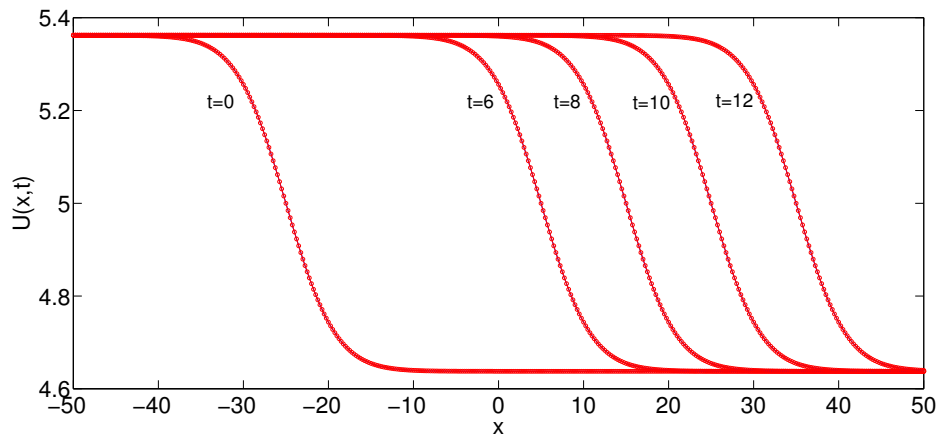
Yöntem	$t = 6$	$t = 8$	$t = 10$	$t = 12$
$Mevcut(k = 0.01, M = 200)$	5.9997e-5	7.2501e-5	8.2670e-5	8.8295e-5
[13]($k = 0.01, M = 200$)	6.5093e-6	7.1315e-6	7.3103e-6	8.7766e-6
[10]($k = 0.01, M = 200$)	7.8808e-6	9.5324e-6	1.0891e-5	1.1793e-5
[22]($k = 0.01, M = 200$)	9.34e-6	1.57e-5	2.37e-5	3.33e-5
[23]($k = 0.01, M = 200$)	1.9615e-7	1.9381e-7	1.8891e-7	1.8388e-7
$Mevcut(k = 0.01, M = 150)$	1.0614e-4	1.28347e-4	1.4627e-4	1.5629e-4
[21]($k = 0.01, M = 150$)	3.5910e-6	4.2874e-6	5.0912e-6	3.7896e-6
$Mevcut(k = 0.001, M = 200)$	5.9706e-5	7.2148e-5	8.2262e-5	8.7860e-5
[37]($k = 0.001, M = 40$)	6.2688e-7	6.5453e-7	6.8669e-7	1.4297e-6
[30]($k = 0.001, M = 100$)	3.1682e-7	3.8735e-7	4.4815e-7	5.8566e-7
[26]($k = 0.01, M = 100$)	3.00e-7	3.62e-7	4.14e-7	4.43e-7
[24]($k = 0.001, M = 200$)	6.5092e-6	7.1315e-6	7.3103e-6	8.7766e-6

Bu çizelgelere ek olarak $h = k$ adım uzunluklarının 0.5'ten 0.03125'e kadar yarılanarak azalan 5 farklı değeri için $t = 6(2)12$ bitiş zamanlarında elde edilen L_2 , L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ değerleri ve bu normlarda hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebeleri Çizelge 4.9'da rapor edildi. Çizelgeye bakıldığında, h ve k değerlerinin küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ hata normlarının gittikçe küçüldüğü, ayrıklaştırılmış noktalarda bu normlarda hesaplanan yaklaşık doğruluk mertebelerinin tam değeri olan 2'ye oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Bu bulgular uygulanan sayısal yöntemin doğruluğu ve güvenilirliğine dair güçlü delillerdir.

Çizelge 4.9 : Problem 2'nin yakınsaklık mertebeleri ve $CPU(s)$ işlemci süreleri
($c = 5, x_0 = -25, -50 \leq x \leq 50$).

t	$h = k$	L_2	Mertebe (L_2)	L_∞	Mertebe (L_∞)	CPU
6	0.5	$8.699978e-2$	-	$3.440451e-2$	-	0.058751
	0.25	$2.245727e-2$	1.953829	$9.337896e-3$	1.881428	0.223095
	0.125	$5.631936e-3$	1.995779	$2.349695e-3$	1.990624	0.894668
	0.0625	$1.408590e-3$	1.999379	$5.876287e-4$	1.999496	9.254545
	0.03125	$3.522096e-4$	1.999745	$1.469127e-4$	2.000275	110.065000
8	0.5	$1.070753e-1$	-	$4.162284e-2$	-	0.060031
	0.25	$2.746796e-2$	1.962804	$1.132784e-2$	1.877502	0.171426
	0.125	$6.866682e-3$	2.000064	$2.843956e-3$	1.993901	1.204873
	0.0625	$1.715907e-3$	2.000064	$7.105932e-4$	2.000803	11.951172
	0.03125	$4.289650e-4$	2.000039	$1.776118e-4$	2.000296	148.352548
10	0.5	$1.241055e-1$	-	$4.745411e-2$	-	0.066823
	0.25	$3.169304e-2$	1.969329	$1.298398e-2$	1.869800	0.193101
	0.125	$7.903453e-3$	2.003611	$3.255195e-3$	1.995916	1.256821
	0.0625	$1.973667e-3$	2.001604	$8.128083e-4$	2.001756	15.075598
	0.03125	$4.933478e-4$	2.000201	$2.031240e-4$	2.000554	187.383634
12	0.5	$1.384375e-1$	-	$5.225277e-2$	-	0.073754
	0.25	$3.522428e-2$	1.974592	$1.437910e-2$	1.861534	0.199563
	0.125	$8.764641e-3$	2.006832	$3.601609e-3$	1.997259	1.421847
	0.0625	$2.195705e-3$	1.996981	$8.988513e-4$	2.00248	18.561932
	0.03125	$5.964982e-4$	1.880094	$2.464887e-4$	1.866560	218.805147

Bunların yanı sıra farklı bitiş zamanlarında Şekil 4.2'de hesaplanan yaklaşık ve tam çözümlerin 2-boyutlu grafikleri çizildi. Şekilden her bir bitiş zamanında hesaplanan yaklaşık çözümlerin tam değerlerine oldukça yakın olduğu, grafiklerinin neredeyse üst üste binmesi nedeniyle ayırt edilemediği, $t = 0$ başlangıç anında $x_0 = -25$ noktasında konumlanmış keskin şok profilli dalganın zaman ilerledikçe pozitif x yönünde hareket ettiği ve çözüm profilinin neredeyse şeklini bozmadan genel formunu koruduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 4.2 : Problem 2'nin $h \equiv \Delta x = 0.5$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için farklı t zamanlarında hesaplanan yaklaşık (—) ve tam (o) çözümlerinin 2-boyutlu grafikleri

4.3 Test Problem 3

Son test problem olarak, (1.1.1) ile verilen KS denkleminde parametreler $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ ve konum-zaman çözüm bölgesi $(x, t) \in [-30, 30] \times [0, T]$ olarak seçildi. Bu durumda (1.1.1) denklemi

$$U_t + U_{xx} + U_{xxxx} + UU_x = 0, x \in [-30, 30], t \in [0, T]$$

olup

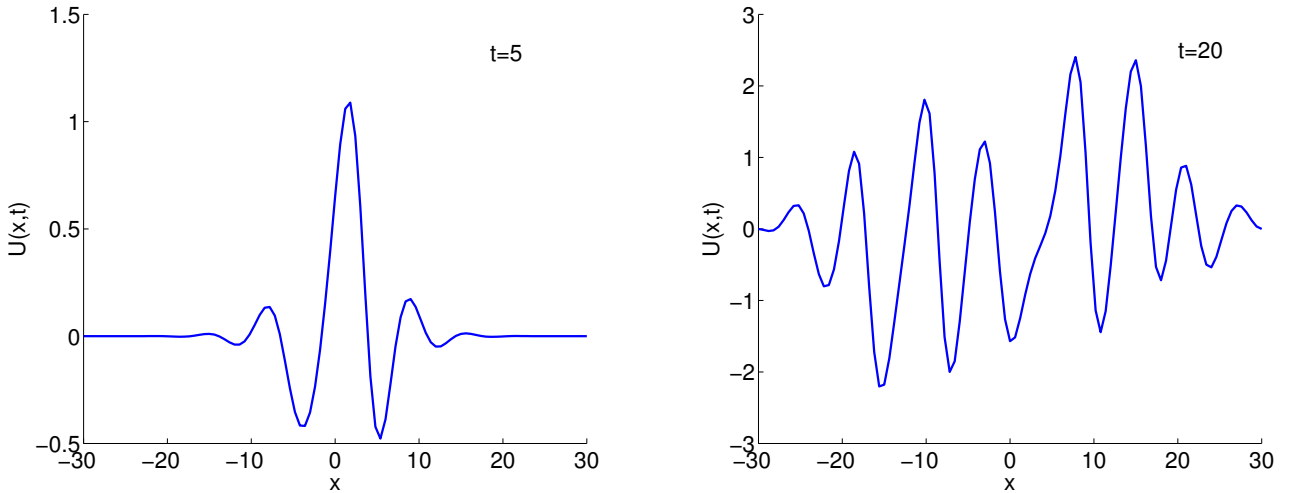
$$U(x, 0) = e^{-x^2}$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(-30, t) &= 0, \quad U(30, t) = 0 \\ U_x(-30, t) &= 0, \quad U_x(30, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

homojen Dirichlet sınır şartlarıyla incelendi [13].

Bilindiği kadarıyla bu problemin tam çözümü mevcut değildir. Bundan dolayı bu problem için sunulan şemadan elde edilen çözümlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için zaman adımı $k = \Delta t = 0.01$ ve $M = 100$ eşit aralıklı düğüm noktası için konum bölgesi $[-30, 30]$ üzerinde $t = 5$ ve $t = 20$ zamanlarında sunulan şemadan elde edilen yaklaşık çözümlerin grafikleri Şekil 4.3’de verildi. Bu grafiklerin [13, 21, 37] referanslarında sırasıyla Figure 6 ve Figure 7, Figure 10 ve Figure 11, Figure 4(a) ve Figure 4(b) ile verilen grafiklerle kıyaslandığında benzer fiziksel davranışları sergiledikleri açıkça görülmektedir. Bu bulgular sunulan şemanın doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğini açıkça ortaya koymaktadır.



Şekil 4.3 : Problem 3’ün $h \equiv \Delta x = 0.6$ ve $k \equiv \Delta t = 0.01$ için $t = 5$ ve $t = 20$ zamanlarında hesaplanan yaklaşık çözümlerinin grafikleri

5. BULGULAR, ÖNERİLER VE SONUÇ

Tezin son bölümü olan bu bölümde, 4. Bölümde gerçekleştirilen sayısal deneylerden çıkarılan ana bulgular özetlenmiş, ileride yapılabilecek çalışmalar için bazı öneriler sunulmuş ve kısa bir sonuç verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, belirli başlangıç ve sınır şartları altında tanımlanan ve oldukça güçlü bir doğrusal olmayan karaktere sahip olan 1-boyutlu 4. mertebeden Kuramoto–Sivashinsky (KS) denkleminin yaklaşık çözümlerine ulaşabilmek için Richtmyer lineerleştirme tekniği ile desteklenen, konum ve zaman değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırılmış bir Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması sunuldu. Önerilen şemanın doğruluğu ve güvenilirliği iki tanesi tam çözüme sahip olan üç farklı test problem üzerinde denendi.

Test Problem 1’de $\alpha = 1$ için yapılan hesaplamalar, önerilen şemanın ikinci mertebeden bir yakınsama davranışı sergilediğini göstermiştir. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de uzay ve zaman adımı küçüldükçe tüm hata normlarında (L_2 , L_∞ ve GRE) düzenli bir azalma kaydedilmiştir. Çizelge 4.5’te hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebelerinin teorik değer olan 2’ye oldukça yakın çıkması şemanın beklenen doğruluk seviyesine ulaştığını göstermektedir. Şekil 4.1’de yaklaşık eğrilerle analitik eğrilerin neredeyse ayırt edilemez durumda olması bu bulguyu desteklemektedir.

Test Problem 2’de $\alpha = -1$ için KS denklemin farklı bir fiziksel rejimdeki davranışı incelenmiştir. Hata normlarındaki iyileşme eğilimi birinci probleme benzer şekilde Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7’de gözlenmiştir. Çizelge 4.9’da sunulan yaklaşık yakınsaklık mertebelerinin teorik değer olan 2’ye oldukça yakın olduğu görülmüştür. Şekil 4.2’de, başlangıç profili zaman arttıkça şeklini koruyarak pozitif yönde hareket etmektedir. Bu da tezde kullanılan nümerik şemanın problemde beklenen doğru fiziksel davranışları yansıttığını ortaya koymaktadır.

Tam çözümü mevcut olmayan Gauss başlangıç koşullu Test Problem 3 için elde edilen hesaplamalarda, $t = 5$ anında başlangıçtaki dalga birden çok salınım içeren periyodik bir yapıya dönüşmüş ve $t = 20$ anında ise çözüm daha düzensiz (kaotik-benzeri) bir görünüm kazanmıştır.

Bunlarla birlikte, karşılaştırmalı çizelgelerde verilen sonuçlar çeşitli sonlu eleman tabanlı yöntemler kullanılarak elde edildiğinden sunulan şemadan bulunan sonuçlardan daha küçük hata değerleri ürettiği görülmüştür. Bu durum, açıkça sonlu elemanlar yönteminin üstünlüğünün beklenen doğal bir sonucudur.

Ayrıca bu çalışmada elde edilen bulgular aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Elde edilen sonuçlar sunulan şemanın doğruluğunu ve kararlılığını ortaya koymuştur.
- Şemanın LKH hesaplanmış ve $O(h^2) + O(k^2)$ mertebeden yakınsak olduğu gösterilmiştir.
- L_2 , L_∞ ve GRE hata büyüklükleri ile $CPU(s)$ işlemci süreleri hesaplanmış ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır.
- Hesaplanan sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırıldığında sunulan yöntem daha küçük hata üretmezse de uygulama ve programlama kolaylığı açısından önemli avantajlar sağlamaktadır.

Bu alanda çalışmalar yapan araştırmacılar için ise aşağıdaki öneriler sıralanabilir:

- Farklı lineerleştirme yaklaşımı kullanılabilir.
- Daha yüksek mertebeli sonlu fark yaklaşımları denenebilir.
- Sunulan şema KS denkleminin 2-boyutlu versiyonuna uygulanabilir.

Sonuç olarak, bu tezde sunulan uygulanması ve programlanması kolay olan nümerik şema, KS denklemi dışında başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen diğer non-lineer bazı KDD'lerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında başarıyla kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Grusa, K.U.** (1988). *Mathematical analysis of nonlinear dynamic processes*, 176, Longman Scientific & Technical, Harlow.
- [2] **Kuramoto, Y. ve Tsuzuki, T.** (1976). Persistent Propagation of Concentration Waves in Dissipative Media Far from Thermal Equilibrium, *Progress of Theoretical Physics*, 55(2), 356–369.
- [3] **Kuramoto, Y.** (1978). Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 64, 346–367.
- [4] **Sivashinsky, G.** (1977). Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations, *Acta Astronautica*, 4(11-12), 1177–1206.
- [5] **Nicolaenko, B., Scheurer, B. ve Temam, R.** (1985). Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(2), 155–183.
- [6] **Khater, A. ve Tamsah, R.** (2008). Numerical solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation by Chebyshev spectral collocation methods, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(6), 1465–1472.
- [7] **El-gendi, S.E.** (1969). Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro-Differential Equations, *The Computer Journal*, 12(3), 282–287.
- [8] **Mihaila, B. ve Mihaila, I.** (2002). Numerical approximations using Chebyshev polynomial expansions: El-gendi's method revisited, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(3), 731–746.
- [9] **Akrivis, G. ve Smyrlis, Y.S.** (2004). Implicit-explicit BDF methods for the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Applied Numerical Mathematics*, 51(2-3), 151–169.
- [10] **Lai, H. ve Ma, C.** (2009). Lattice Boltzmann method for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(8), 1405–1412.
- [11] **Uddin, M., Haq, S. ve ul Islam, S.** (2009). A mesh-free numerical method for solution of the family of Kuramoto-Sivashinsky equations, *Applied Mathematics and Computation*, 212(2), 458–469.
- [12] **Haq, S., Bibi, N., Tirmizi, S. ve Usman, M.** (2010). Meshless method of lines for the numerical solution of generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, *Applied Mathematics and Computation*, 217(6), 2404–2413.
- [13] **Mittal, R. ve Arora, G.** (2010). Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(10), 2798–2808.
- [14] **Ye, L., Yan, G. ve Li, T.** (2011). Numerical Method Based on the Lattice Boltzmann Model for the Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Journal of Scientific Computing*, 49(2), 195–210.

- [15] **Lakestani, M. ve Dehghan, M.** (2012). Numerical solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation using B-spline functions, *Applied Mathematical Modelling*, 36(2), 605–617.
- [16] **Dong, C. ve Lan, Y.** (2014). Organization of spatially periodic solutions of the steady Kuramoto–Sivashinsky equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(6), 2140–2153.
- [17] **Acan, O. ve Keskin, Y.** (2015). Approximate solution of Kuramoto–Sivashinsky equation using reduced differential transform method, *AIP Conference Proceedings*, cilt1648, AIP Publishing LLC, s.470003.
- [18] **Ganaie, I.A., Arora, S. ve Kukreja, V.** (2015). Cubic Hermite collocation solution of Kuramoto–Sivashinsky equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 93(1), 223–235.
- [19] **Rashidinia, J. ve Jokar, M.** (2016). Polynomial scaling functions for numerical solution of generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Applicable Analysis*, 96(2), 293–306.
- [20] **Ersoy, O. ve Dag, I.** (2016). The exponential cubic B-spline collocation method for the Kuramoto–Sivashinsky equation, *Filomat*, 30(3), 853–861.
- [21] **Mittal, R.C. ve Dahiya, S.** (2017). A Quintic B-Spline Based Differential Quadrature Method for Numerical Solution of Kuramoto–Sivashinsky Equation, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 18(2), 103–114.
- [22] **Hepson, O.E.** (2018). Generation of the trigonometric cubic B-spline collocation solutions for the Kuramoto–Sivashinsky(KS) equation, *AIP Conference Proceedings*, cilt1978, Author(s), s.470099.
- [23] **Dhiman, N. ve Tamsir, M.** (2018). Re-modified quintic B-spline collocation method for the solution of Kuramoto–Sivashinsky type equations, *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 18(3), 518–533.
- [24] **Singh, B.K., Arora, G. ve Kumar, P.** (2018). A note on solving the fourth-order Kuramoto–Sivashinsky equation by the compact finite difference scheme, *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4), 1581–1589.
- [25] **Yigit, G. ve Bayram, M.** (2019). Polynomial based differential quadrature for numerical solutions of Kuramoto–Sivashinsky equation, *Thermal Science*, 23(Suppl. 1), 129–137.
- [26] **Iqbal, M.K., Abbas, M., Nazir, T. ve Ali, N.** (2020). Application of new quintic polynomial B-spline approximation for numerical investigation of Kuramoto–Sivashinsky equation, *Advances in Difference Equations*, 2020(1).
- [27] **Bhatt, H.P. ve Chowdhury, A.** (2020). A high-order implicit–explicit Runge–Kutta type scheme for the numerical solution of the Kuramoto–Sivashinsky equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 98(6), 1254–1273.
- [28] **Ersoy Hepson, O.** (2021). Numerical simulations of Kuramoto–Sivashinsky equation in reaction-diffusion via Galerkin method, *Mathematical Sciences*, 15(2), 199–206.

- [29] **Hosseini, A.** (2021). An efficient numerical method based on Variational iteration method for solving the Kuramoto-Sivashinsky equations, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 39(4), 143–152.
- [30] **Shallu ve Kukreja, V.K.** (2021). An improvised extrapolated collocation algorithm for solving Kuramoto–Sivashinsky equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(3), 1451–1467.
- [31] **Hepson, O.E. ve Yigit, G.** (2022). A numerical scheme for the wave simulations of the Kuramoto–Sivashinsky model via quartic-trigonometric tension B-spline, *Wave Motion*, 114, 103045.
- [32] **Wang, Z. ve Wu, B.** (2023). A numerical method for a backward problem of a linear stochastic Kuramoto-Sivashinsky equation, *Results in Applied Mathematics*, 19, 100383.
- [33] **Mohanty, R.K. ve Sharma, D.** (2024). A new 2-level implicit high accuracy compact exponential approximation for the numerical solution of nonlinear fourth order Kuramoto–Sivashinsky and Fisher–Kolmogorov equations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 62(5), 973–1011.
- [34] **Kaur, N. ve Joshi, V.** (2024). Kuramoto-Sivashinsky equation: Numerical solution using two quintic B-splines and differential quadrature method, *Mathematics and Computers in Simulation*, 220, 105–127.
- [35] **Smith, G.D.** (1992). *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford applied mathematics and computing science series, Clarendon Press, Oxford.
- [36] **Richtmyer, R.D. ve Morton, K.W.** (1994). *Difference methods for initial-value problems*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, Interscience Publ., New York.
- [37] **Kumari, A. ve Kukreja, V.K.** (2023). Study of 4 th order Kuramoto-Sivashinsky equation by septic Hermite collocation method, *Appl. Numer. Math.*, 188(C), 88–105.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Sema TAŞTEKİN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Ön Lisans:** 2021, Anadolu Üniversitesi, Açıköğretim Fakültesi, Adalet Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- Matematik Öğretmeni, 2012-2014 Özel Özcan Anadolu-Anadolu Öğretmen Lisesi.
- Matematik Öğretmeni, 2014-2015 Özel Çınar Eğitim Kurumları.
- Matematik Öğretmeni, 2016-2019 Özel Çamlıca Eğitim Kurumları.
- Matematik Öğretmeni, 2019-2020 Özel Arme Eğitim Kurumları.
- Matematik Öğretmeni, 2022- Devam Ediyor. Milli Eğitim Bakanlığı.