

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Melike AY

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

MANİSA-2013

KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Melike AY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: .../.../2013

Tezin Savunulduğu Tarih: .../.../2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA-2013

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca bana danışmanlık eden, beni yönlendiren, her türlü olanağı sağlayan, bilimsel destekleriyle bana yol gösteren, her adımda bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Mustafa KAZAZ' a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmalarım sırasında değerli fikirleriyle bana yardımcı olan Sayın Hocam Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olup bu günlere gelmeme yardımcı olan ve her zaman yanımda olacak aileme teşekkürlerimi sunarım.

Melike AY
Celal Bayar Üniversitesi, 2013

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
GİRİŞ.....	v
BÖLÜM 1: TEMEL KAVRAMLAR	
1. Temel Tanım ve Teoremler.....	1
BÖLÜM 2: ÖKLİD UZAYINDA APOLLONIOUS EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ	
2.1 $\mathbb{R}^2$ Öklid Düzleminde Apollonious Eğrileri.....	4
2.2 $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Apollonious Eğrileri ve Yüzeyleri.....	12
2.3 $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayının $z = sy$ Düzleminde Apollonious Eğrileri.....	18
BÖLÜM 3: S^2 BİRİM KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ	
3. S^2 Birim Küre Yüzeyi Üzerinde Apollonius Eğrileri.....	24
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	54

ÖZET

S^2 Birim Küre Yüzeyi üzerinde Apollonius Eğrileri ile ilgili olan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, vektörler ile ilgili bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde, eğriler ile ilgili çalışmamızda esas alınan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında ve $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ düzleminde Apollonius eğrileri ve yüzeyleri verilmiştir, ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca, bu uzaylardaki Apollonius eğrileri ve yüzeyleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid düzleminde ve 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Apollonius eğrilerine benzer olarak, S^2 birim küre yüzeyi üzerinde küresel Apollonius eğrileri tanımlanmış ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca, bu uzaylardaki Apollonius eğrileri ve yüzeyleri ile ilgili örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlar herhangi bir küre yüzeyi üzerinde de geçerlidir.

ABSTRACT

This study which is related to the Apollonius curves in S^2 unit sphere spaces consists of three chapters.

In the first chapter, basic concepts of vektors are mentioned. Also in this chapter, some definitions and theorems of curves which are essential for our study are mentioned.

In the second chapter, Apollonius curves ve spaces are defined in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, Euclidean space $\mathbb{R}^3$ and plane $z = sy$ of Euclidean space $\mathbb{R}^3$ and the related theorems are given and proved. Furthermore, the examples of Apollonius curves and surfaces are given in these spaces.

In the third chapter, As similar of Apollonius curves which are defined in the Euclidean plane and in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, spherical Apollonius curves in S^2 unit sphere spaces are defined and the related theorems are given and proved. Furthermore, the examples of Apollonius curves and surfaces are given in these spaces.

GİRİŞ

Apollonius çemberi, büyük geometrici olarak bilinen Yunan matematikçi Pergalı (Antalya' da Murtana olarak bilinen yer) Apollonius (M.Ö. 262- M.Ö. 190) dan sonra bu ismi almıştır. $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde, $P(a_1, a_2)$ ve $Q(b_1, b_2)$ farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan $X(x_1, x_2)$ noktalarının geometrik yerinin, $m = n$ ise $[PQ]$ doğru parçasının orta dikme doğrusu ve $m \neq n$ ise bir çember olduğu bilinir. Bu geometrik yer $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterilir ve Apollonius çemberi (veya Apollonian çemberi) olarak bilinir. Bu önemli geometrik özellik, matematiksel fizik, optik ve elektrik alanlarında bazı problemlerin çözümünde kullanılır. Bu çalışmada bu önemli kavramlar, S^2 birim küre yüzeyi üzerinde verilmiştir. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde P ve Q farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerine Apollonius küresel eğrisi adı verilir ve $Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterilir. P ve Q noktalarına karşılık gelen $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörlerinin birbirine dik olduğu ve dik olmadığı durumlardaki geometrik yerler elde edilmiştir. Eğer $m = n$ ise $Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ Apollonius küresel eğrisi küre yüzeyi üzerinde bir düzlemsel eğri (yani bir büyük çember) ve $m \neq n$ ise düzlemsel olmayan bir eğri belirtir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, vektörler ve eğriler teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. [3, 4]

Tanım 1.1. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ iki vektör olsun.

Bu iki vektörün iç çarpımı

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

ile tanımlanan bir reel sayıdır. Bu vektörlerin vektörel çarpımı ise

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

olarak tanımlanan yeni bir vektördür.

Bir $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün uzunluğu (veya normu)

$$|\vec{p}| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

olarak tanımlanır. Eğer $|\vec{p}| = 1$ ise $\vec{p}$ vektörüne birim vektör denir.

Tanım 1.2. $\mathbb{R}^3$ öklid uzayında $P(a_1, a_2, a_3)$ ve $Q(b_1, b_2, b_3)$ iki nokta olsun. Bu iki noktayı birleştiren vektör $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ ile verilir. P ve Q noktaları arasındaki uzaklık

$$d(P, Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (q_i - p_i)^2}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir P noktasını O başlangıç noktası ile birleştirildiğimizde elde edilen $\overline{OP}$ vektörüne P noktasının konum vektörü (yer vektörü) adı verilir ve $\vec{p}$ ile gösterilir.

İç çarpım ve vektörel çarpım ile ilgili aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

- (a) $|\vec{p}|^2 = \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle$;
- (b) $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$, burada θ , $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri arasındaki açıdır;
- (c) $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin dik olmasıdır;
- (d) Eğer $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri lineer bağımsız ise bu takdirde $\vec{p} \times \vec{q}$ vektörü $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin her ikisine de diktir;
- (e) $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri paralel (yani, lineer bağımlı) ise bu takdirde $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$ dır. Özellikle, $\vec{p} \times \vec{p} = \vec{0}$ dır;

Şimdi, 3-boyutlu uzayında eğri kavramını verelim.

Tanım 1.3. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, bir $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in I$, diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ de bir eğri denir.

Tanım 1.4. $X'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), x_3'(t_0))$ vektörüne $X(t_0)$ noktasında X eğrisinin teğet vektörü (veya hız vektörü) ve $|X'(t_0)|$ değerine de hızı denir. Eğer her $t \in I$ için $X'(t) \neq 0$ ise X eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 1.5. $t \in [a, b]$ olmak üzere bir $X(t)$ eğrisinin yay-uzunluğu $s(t) = \int_a^t |X'(t)| dt$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.6. Eğer $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ yay-uzunluğu parametrelili (yani, birim hızlı) bir eğri ise bu takdirde X in eğriliği $\kappa(s) = |X''(s)|$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.7. Bir $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin (birim hızlı olması gerekmez) birim teğet vektörü

$$T(t) = \frac{X'(t)}{|X'(t)|},$$

asli normal vektörü

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

ve

binormal vektörü

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.8. $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere X eğrisinin burulması

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.1. $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri (birim hızlı olması gerekmez) olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{X'(t)}{|X'(t)|}, \\ B(t) &= \frac{X'(t) \times X''(t)}{|X'(t) \times X''(t)|}, \\ N(t) &= B(t) \times T(t), \\ \kappa(t) &= \frac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^3}, \\ \tau(t) &= \frac{\langle X'(t) \times X''(t), X'''(t) \rangle}{|X'(t) \times X''(t)|^2} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.9. Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemsel eğri denir.

Tanım 1.10. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir.

Teorem 1.2. Eğriliği $\kappa > 0$ olan bir $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir düzlemsel eğri olması için gerek ve yeter koşul $\tau = 0$ olmasıdır.

Teorem 1.3. Bir $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi bir çemberdir (veya çember parçasıdır) ancak ve ancak eğrilik $\kappa > 0$ sabittir ve $\tau = 0$ dır. Özellikle, birim çemberin eğriliği $\kappa = 1$ dir.

BÖLÜM 2

ÖKLİD UZAYINDA APOLLONIUS EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ

Bu bölümde $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında ve $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ düzleminde Apollonius eğrileri ve yüzeyleri verilmiştir. $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde ve $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ düzleminde Apollonius eğrileri çemberler ve doğrulardan oluşur. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında ise Apollonius yüzeyleri küreler ve düzlemlerden oluşur. [1]

2.1. $\mathbb{R}^2$ ÖKLİD DÜZLEMİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ

Öklid düzleminde $P(a_1, a_2)$ ve $Q(b_1, b_2)$ farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = m : n$ oranını sağlayan $X(x, y)$ noktalarının geometrik yerinin $\frac{m}{n} = 1$ iken $[PQ]$ doğru parçasının orta dikme doğrusu ve $\frac{m}{n} \neq 1$ iken bir çember belirtir. Bu geometrik yer $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterilir ve Apollonius çemberi olarak bilinir.

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}^2$ de $P(a_1, a_2)$ ve $Q(b_1, b_2)$ farklı iki nokta ve m, n tamsayılar olsun. Bu taktirde; $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = m : n$ oranını sağlayan $X(x, y)$ noktalarının geometrik yeri;

i) $\frac{m}{n} = 1$ ise

$$y - \left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right) = - \left(\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2} \right) \quad (2.1.1)$$

doğrusudur.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$ ise

$$\left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} \right)^2 + \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} \right)^2 = \frac{m^2}{(n^2 - m^2)^2} [(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)] \quad (2.1.2)$$

denklemleri ile verilen Apollonius çemberidir.

iii) $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi M merkezli ve r yarıçaplı bir çember ise

$$|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{MQ}| = r^2 \quad (2.1.3)$$

dir.

İspat: i) $\mathbb{R}^2$ öklid düzleminde $P(a_1, a_2)$ ve $Q(b_1, b_2)$ iki farklı nokta ve $\frac{m}{n} = 1$, yani $m = n$

olsun. $X(x, y)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere;

$|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ den $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Buradan,

$$\overrightarrow{PX} = (x - a_1, y - a_2) \text{ ve } \overrightarrow{QX} = (x - b_1, y - b_2) \text{ dir.}$$

Şimdi düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \quad \text{ve} \quad |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2} \quad \text{olacağından gerekli}$$

işlemler yapılırsa

$$y - \left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right) = - \left(\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2} \right)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$ noktasından geçen ve eğimi $-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$

olan $[PQ]$ doğru parçasının orta dikme doğrusunu verir.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$, yani $m \neq n$ olsun. $X(x, y)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta

olmak üzere;

$$\frac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{QX}|} = \frac{m}{n} \text{ den } n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}| \text{ olur. Buradan } n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2 \text{ dir. Şimdi,}$$

$$\overrightarrow{PX} = (x - a_1, y - a_2) \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{QX} = (x - b_1, y - b_2)$$

olduğundan;

$$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \quad \text{ve} \quad |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}$$

dir. Böylece gerekli işlemler yapılırsa;

$$\left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2 = \frac{n^2 m^2}{(n^2 - m^2)^2} [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]$$

Apollonius çemberi elde edilir.

iii) $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$, (ii) de verilen M merkezli ve r yarıçaplı Apollonius çemberi olsun.

$$\text{Dolayısıyla } M = \left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}, \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right) \text{ ve } r^2 = \frac{n^2 m^2}{(n^2 - m^2)^2} [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]$$

dir. Buradan,

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2}$$

ve

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MP}| |\overrightarrow{MQ}| &= \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1 - n^2 a_1 + m^2 a_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2 - n^2 a_2 + m^2 a_2}{n^2 - m^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1 - n^2 b_1 + m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2 - n^2 b_2 + m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{m^2(a_1-b_1)}{n^2-m^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2(a_2-b_2)}{n^2-m^2}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{n^2(a_1-b_1)}{n^2-m^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2(a_2-b_2)}{n^2-m^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{m^4 n^4 \left[(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2\right]^2}{(n^2-m^2)^4}} \\
&= \frac{m^2 n^2 \left[(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2\right]}{(n^2-m^2)^2} \\
&= r^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

NOT: $\frac{m}{n} = 1$ ise bu taktirde; $n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yeri;

$[PQ]$ doğru parçasını dik açıyla iki eşit parçaya bölen bir ℓ doğrusudur. Bu geometrik yerin ∞ noktasını da içerdiğini kabul edersek, bu taktirde geometrik yeri genişletilmiş $\ell \cup \{\infty\}$

doğrusu olarak düşünebiliriz. Bu kabul ile $\frac{m}{n}$ nin her pozitif değeri bir genelleştirilmiş çember

verir. O halde; $\frac{m}{n}$ nin her pozitif değeri için bir Apollonius çemberi elde edilir. Bütün böyle

çemberlerin ailesi P ve Q noktaları ile tanımlanan Apollonius çemberleri ailesi olarak bilinir.

$\frac{m}{n}$ değeri $(0, \infty)$ aralığı boyunca artarken karşılık gelen çemberlerde Apollonius ailesi arasında dizilir.

$0 < \frac{m}{n} < 1$ olduğunda $|\overrightarrow{PX}| < |\overrightarrow{QX}|$ olur. Dolayısıyla X , P ye Q dan daha

yakındır. Bu durumda $\frac{m}{n}$ nin bu değerlerine karşılık gelen çemberler ℓ doğrusuna göre P

ile aynı taraftadır. $\frac{m}{n}$ nin 0 a yakın değerleri için $n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ küçüktür ve böylece

karşılık gelen çemberler P ye daha yakındır. $\frac{m}{n}$, 1 e yaklaştıkça çemberler büyür ve ℓ ye

daha yakın olmaya başlar. $\frac{m}{n} = 1$ olduğunda ise karşılık gelen çember genişletilmiş $\ell \cup \{\infty\}$

doğrusudur.

$\frac{m}{n} > 1$ olduğunda $|\overrightarrow{PX}| > |\overrightarrow{QX}|$ olur. Bu durumda X , Q ya P den daha yakındır.

$\frac{m}{n}$ nin bu değerlerine karşılık gelen çemberler ℓ doğrusuna göre Q ile aynı tarafta

olacaktır. $\frac{m}{n}$, 1 den itibaren artarken $|\overrightarrow{QX}| = \left(\frac{n}{m}\right) |\overrightarrow{PX}|$ ifadesi küçülür ve karşılık gelen çemberler daralır ve Q ya yakın olmaya başlar.

Yukarıdaki tartışmalar ışığında, bazen P ve Q noktalarını $\frac{m}{n} = 0$ ve $\frac{m}{n} = \infty$

durumlarına karşılık gelen nokta çemberleri olarak ifade etmek daha uygun olur. Bu varsayım ile düzlemin her bir noktası Apollonius ailesi ile bağlantılı tek bir çembere aittir.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}^2$ öklid düzleminde $P(-1,0)$ ve $Q(2,0)$ nokta çemberleri ile tanımlı Apollonius ailesi için $(1,0)$ noktasından geçen ailedeki çemberin denklemini bulalım.

Çözüm: $X(x,y)$ noktası $n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ olacak şekilde bir nokta olsun. Buradan

$n^2 |\overrightarrow{PX}|^2 = m^2 |\overrightarrow{QX}|^2$ yazılabilir.

$$\overrightarrow{PX} = (x+1, y) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x-2, y) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

olduğundan

$$n^2 [(x+1)^2 + y^2] = m^2 [(x-2)^2 + y^2]$$

elde edilir. $\frac{m}{n}$ nin her bir değeri için bu denklem Apollonius çemberlerine karşılık gelen bir

denklemdir. $(1,0)$ noktası Apollonius çemberi üzerinde olacağından bu denklemi sağlar. O halde,

$$n^2 [(1+1)^2 + 0^2] = m^2 [(1-2)^2 + 0^2]$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa $4n^2 = m^2$ ve dolayısıyla $2n = m$ bulunur. Yani, $\frac{m}{n} = 2$

bulunur. Böylece $(1,0)$ noktasından geçen çemberin denklemi,

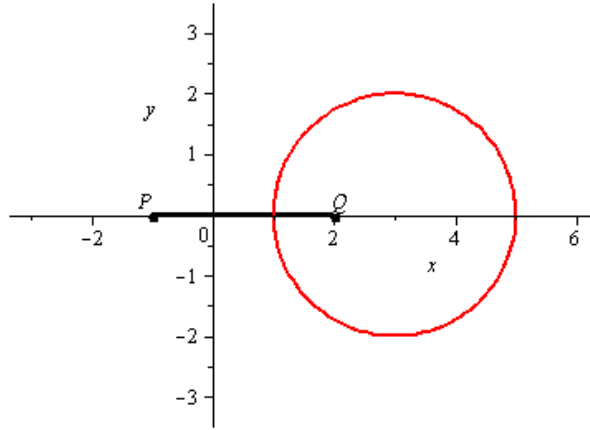
$$(x+1)^2 + y^2 = 4[(x-2)^2 + y^2]$$

dir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 4$$

denklemini bulunur. (Şekil 2.1.1.)



Şekil 2.1.1.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^2$ öklid düzleminde $P(-1,0)$ ve $Q(0,2)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = 1:1$ olacak şekildeki $X(x,y)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x,y)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$\frac{m}{n} = 1$ ise $|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ olup buradan $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Şimdi,

$$\overrightarrow{PX} = (x+1, y) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x, y-2) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

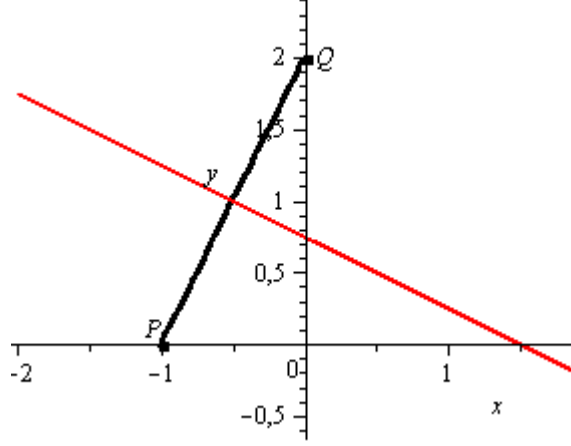
eşitlikleri kullanılırsa

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$x + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

doğru denklemi elde edilir. (Şekil 2.1.2.)



Şekil 2.1.2.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{R}^2$ öklid düzleminde $P(-1, 0)$ ve $Q(0, 2)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = 2 : 1$ olacak şekildeki $X(x, y)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x, y)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olsun. $n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$

den $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2$ dir. $m = 2n$,

$$\overrightarrow{PX} = (x+1, y) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x, y-2) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

olduğundan, $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = 4n^2|\overrightarrow{QX}|^2$ ve dolayısıyla $|\overrightarrow{PX}|^2 = 4|\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Böylece,

$$(x+1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-2)^2]$$

dir. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 4y + 4),$$

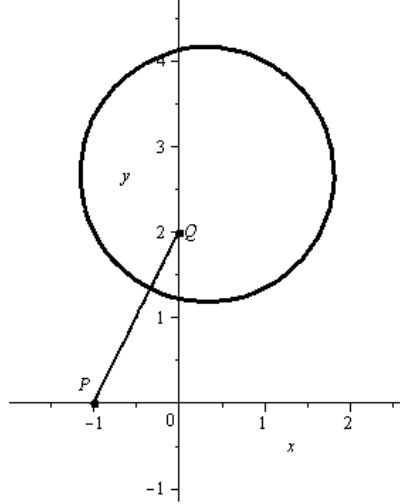
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16y - 16 = 0$$

$$-3x^2 - 3y^2 + 2x + 16y - 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}y + 5 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

denklemleri ile verilen Apollonius çemberi elde edilir. (Şekil 2.1.3.)



Şekil 2.1.3.

Örnek 2.1.4. $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$, Örnek 2.1.3. de verilen M merkezli ve r yarıçaplı Apollonius

çemberi olsun. Buradan; $M\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ve $r = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ dir. Bu durumda

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{9}}$$

ve

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

dir. Böylece,

$$|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\frac{80}{9}} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{20}{9} = r^2$$

olduğu görülür.

2.2. $\mathbb{R}^3$ ÖKLİD UZAYINDA APOLLONIUS EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında P ve Q farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = m : n$ oranını sağlayan X noktalarının geometrik yeri bir yüzeydir. Bu yüzeye Apollonius yüzeyi denir ve $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterilir. $\frac{m}{n} = 1$ iken $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi bir düzlem, $\frac{m}{n} \neq 1$ iken $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi bir küredir. [1]

Teorem 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ öklid uzayında $P(a_1, a_2, a_3)$ ve $Q(b_1, b_2, b_3)$ farklı iki nokta ve m, n tamsayılar olsun. Bu taktirde, $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = m : n$ oranını sağlayan X noktalarının $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ geometrik yeri;

i) $\frac{m}{n} = 1$ ise

$$x(b_1 - a_1) + y(b_2 - a_2) + z(b_3 - a_3) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} = 0 \quad (2.2.1)$$

denklemini ile verilen düzlemdir.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$ ise

$$\left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(z - \frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2}\right)^2 = \frac{n^2 m^2}{(n^2 - m^2)^2} \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right] \quad (2.2.2)$$

denklemini ile verilen küre yüzeyidir.

iii) $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi (ii) de verilen M merkezli ve r yarıçaplı bir küre ise

$$|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{MQ}| = r^2 \quad (2.2.3)$$

dir.

İspat: i) $\frac{m}{n} = 1$, yani $m = n$ olsun. $X(x, y, z)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere;

$|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ olacağından $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Buradan,

$$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} \quad \text{ve} \quad |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2}$$

olduğundan, gerekli işlemler yapılırsa

$$x(b_1 - a_1) + y(b_2 - a_2) + z(b_3 - a_3) + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2} = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklem, $[PQ]$ doğru parçasının orta noktasından geçen ve bu doğru parçasına dik olan düzlemi verir.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$, yani $m \neq n$ olsun. $X(x, y, z)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir nokta

olmak üzere;

$n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ den $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Bu eşitlikte parantezler açılır ve gerekli

düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} &\left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2 + \left(z - \frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2 m^2}{(n^2 - m^2)^2} \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem, $M = \left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}, \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}, \frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2}\right)$ merkezli ve

$$r = \left| \frac{nm}{n^2 - m^2} \right| \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \text{ yarıçaplı küreyi ifade eder.}$$

iii) $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$, (ii) de verilen M merkezli ve r yarıçaplı bir küre olsun. Bu taktirde;

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - a_3\right)^2}$$

ve

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - b_3\right)^2}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{MP}| |\overrightarrow{MQ}| &= \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - a_3\right)^2} \\
&\quad \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - b_3\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{m^2 n^2 \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right]}{(n^2 - m^2)^2}\right)^2} \\
&= \frac{m^2 n^2 \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right]}{(n^2 - m^2)^2} \\
&= r^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ öklid uzayında $P(1, -3, 4)$ ve $Q(2, -2, 3)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = 1:1$ olacak şekildeki $X(x, y, z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x, y, z)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ düzlemi üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ olduğundan $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ dir.

$$\overrightarrow{PX} = (x-1, y+3, z-4) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x-2, y+2, z-3) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$$

olduğundan;

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2$$

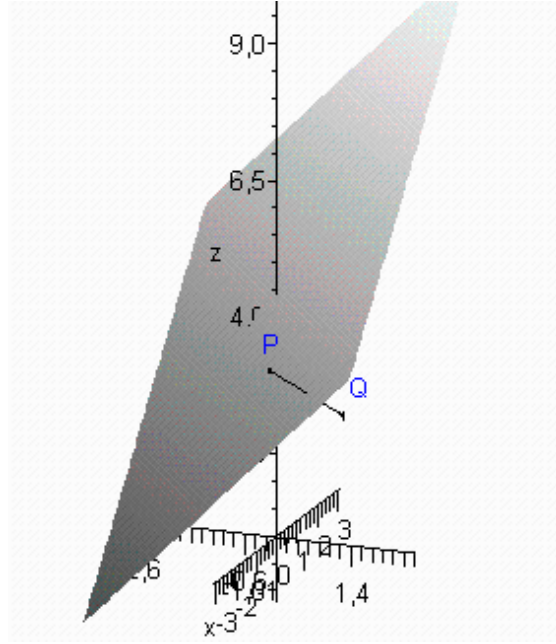
dır. Buradan karele açılırsa

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 - x^2 + 4x - 4 - y^2 - 4y - 4 - z^2 + 6z - 9 = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$x + y - z + \frac{9}{2} = 0$$

düzlem denklemi elde edilir. (Şekil 2.2.1.)



Şekil 2.2.1.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{R}^3$ öklid uzayında $P(1, -3, 4)$ ve $Q(2, -2, 3)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = 3 : 1$ olacak şekildeki $X(x, y, z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x, y, z)$, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ den $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2$ yazılabilir. Yani, $|\overrightarrow{PX}|^2 = 9|\overrightarrow{QX}|^2$ dir.

$$\overrightarrow{PX} = (x-1, y+3, z-4) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x-2, y+2, z-3) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$$

olduğundan; $|\overrightarrow{PX}|^2 = 9|\overrightarrow{QX}|^2$ eşitliğinden

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 9[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2]$$

dır. Buradan kareler açılırsa

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 - 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9) = 0$$

elde edilir. Şimdi gerekli düzenlemeler yapılırsa

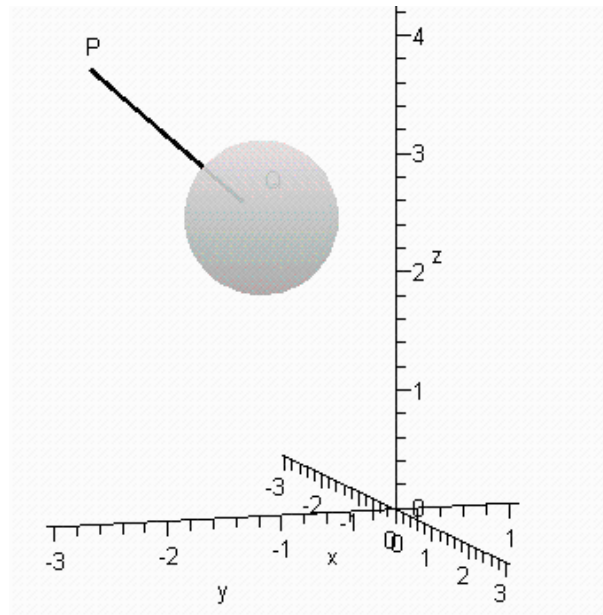
$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{19}{4}x + \frac{15}{4}y - \frac{23}{4}z + \frac{127}{8} = 0$$

bulunur. Bu ise

$$\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{15}{8}\right)^2 + \left(z - \frac{23}{8}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

eşitliği ile verilen küre yüzeyidir. Böylece, $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyinin $M\left(\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}, \frac{23}{8}\right)$

merkezli ve $r = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ yarıçaplı küreyi gösterir. (Şekil 2.2.2.)



Şekil 2.2.2.

Örnek 2.2.3. $Ap\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ yüzeyi, Örnek 2.2.2. de verilen M merkezli ve r yarıçaplı

Apollonious küresi olsun. Buradan; $M\left(\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}, -\frac{22}{8}\right)$ ve $r = \frac{\sqrt{3}}{8}$ dir. Bu durumda

$$|\overline{MP}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - a_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - a_3\right)^2} = \sqrt{\frac{243}{64}}$$

ve

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\left(\frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2} - b_2\right)^2 + \left(\frac{n^2 a_3 - m^2 b_3}{n^2 - m^2} - b_3\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{64}}$$

dır. Buradan

$$|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\frac{243}{64}} \cdot \sqrt{\frac{3}{64}} = \frac{27}{64} = r^2$$

olduğu görülür.

2.3. $\mathbb{R}^3$ ÖKLİD UZAYININ $z = sy$ DÜZLEMİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ ($s \in \mathbb{R}$) düzleminde P ve Q farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = m : n$ oranını sağlayan X noktalarının geometrik yeri bir eğridir. Bu eğriyi $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterelim. Eğer $\frac{m}{n} = 1$ ise $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi, $z = sy$ düzleminde bir doğru belirtir ve eğer $\frac{m}{n} \neq 1$ ise $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi $z = sy$ düzleminde bir çember belirtir. Bu çembere Apollonius çemberi denir. [1]

Teorem 2.3.1. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ düzleminde $P(a_1, a_2, a_3)$ ve $Q(b_1, b_2, b_3)$ farklı iki nokta ve m, n tamsayılar olsun. Bu durumda,

i) $\frac{m}{n} = 1$ ise $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi, $z = sy$ düzleminde

$$\left(y - \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = -\frac{1}{1 + s^2} \left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\right) \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right) \quad (2.3.1)$$

denklemini ile verilen bir doğru belirtir.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$ ise $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi, $z = sy$ düzleminde

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + (1 + s^2) \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2 \\ & = \frac{m^2 n^2}{(n^2 - m^2)^2} \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (sa_2 - sb_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

ile verilen bir çember belirtir.

İspat: i) $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = sy$ düzleminde $P(a_1, a_2, a_3)$ ve $Q(b_1, b_2, b_3)$ farklı iki

nokta ve $\frac{m}{n} = 1$, yani $m = n$ olsun. $X(x, y, z)$, $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi

bir nokta olmak üzere; $|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ olacağından $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Buradan, P ve Q

noktaları $z = sy$ düzleminde olduğundan $a_3 = sa_2$ ve $b_3 = sb_2$ dir. Böylece,

$$\overrightarrow{PX} = (x - a_1, y - a_2, sy - sa_2) \text{ ve } \overrightarrow{QX} = (x - b_1, y - b_2, sy - sb_2)$$

ve dolayısıyla

$$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (sy - sa_2)^2}$$

ve

$$|\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (sy - sb_2)^2}$$

dır. Bu eşitlikler $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ eşitliğinde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $z = sy$ düzleminde

$$\left(y - \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = -\frac{1}{1 + s^2} \left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\right) \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$$

doğru denklemi elde edilir.

ii) $\frac{m}{n} \neq 1$ olsun. $X(x, y, z)$, $Ap^{E^3}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olmak

üzere, $\frac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{QX}|} = \frac{m}{n}$ ifadesinden $n|\overrightarrow{PX}| = m|\overrightarrow{QX}|$ olur. Buradan $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2$

yazılabilir. Diğer taraftan, P ve Q noktaları $z = sy$ düzleminde olduğundan $a_3 = sa_2$ ve $b_3 = sb_2$ dir. Buradan;

$$\overrightarrow{PX} = (x - a_1, y - a_2, sy - sa_2) \text{ ve } \overrightarrow{QX} = (x - b_1, y - b_2, sy - sb_2)$$

ve dolayısıyla

$$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (sy - sa_2)^2}$$

ve

$$|\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (sy - sb_2)^2}$$

dır. Bu eşitlikler $n^2|\overrightarrow{PX}|^2 = m^2|\overrightarrow{QX}|^2$ ifadesinde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$x^2 + (1 + s^2)y^2 + 2x\left(\frac{m^2b_1 - n^2a_1}{n^2 - m^2}\right) + 2y(1 + s^2)\left(\frac{m^2b_2 - n^2a_2}{n^2 - m^2}\right) + \frac{n^2a_1 - m^2b_1}{n^2 - m^2} + \frac{1 + s^2}{n^2 - m^2}(n^2a_2^2 - m^2b_2^2) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$\left(x - \frac{n^2 a_1 - m^2 b_1}{n^2 - m^2}\right)^2 + (1 + s^2) \left(y - \frac{n^2 a_2 - m^2 b_2}{n^2 - m^2}\right)^2 = \frac{m^2 n^2}{(n^2 - m^2)^2} \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (s a_2 - s b_2)^2 \right]$$

denklemleri elde edilir. Bu ise $z = sy$ düzleminde bir çember belirtir.

Örnek 2.3.1. a) $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = 0$ düzleminde $P(1, 2, 0)$ ve $Q(2, 3, 0)$ farklı iki nokta olsun. $|\overrightarrow{PX}| : |\overrightarrow{QX}| = 1 : 1$ olacak şekilde bu düzlem üzerindeki $X(x, y, z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x, y, z)$, $Ap^{\mathbb{R}^3} \left(P, Q; \frac{m}{n} \right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olsun. $m = 1, n = 1$

olduğundan $|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{QX}|$ dır ve buradan $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ yazılabilir. Şimdi,

$$\overrightarrow{PX} = (x - 1, y - 2, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX} = (x - 2, y - 3, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{QX}| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}$$

dır. Buradan $|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{QX}|^2$ eşitliğinden

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

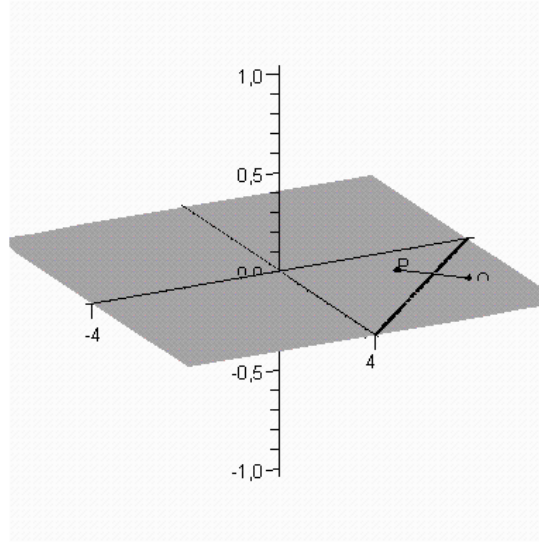
ve buradan da

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$x + y - 4 = 0$$

doğru denklemi elde edilir. (Şekil 2.3.1.(a))



Şekil 2.3.1.(a)

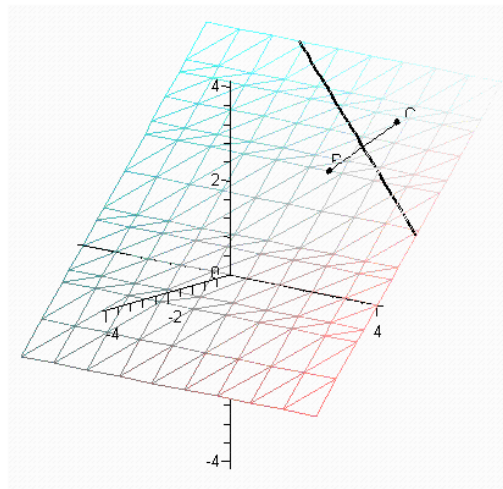
b) $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z = y$ düzleminde $P(1, 2, 2)$ ve $Q(2, 3, 3)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overline{PX}| : |\overline{QX}| = 1:1$ olacak şekilde bu düzlem üzerindeki $X(x, y, z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: (2.3.1) formülünde verilenler yerine yazılırsa istenen geometrik yerin $z = y$ düzleminde

$$y + \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} = 0$$

doğrusu olduğu görülür.(Şekil 2.3.1.(b))



Şekil 2.3.1.(b)

Örnek 2.3.2. a) $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z=0$ düzleminde $P(1,2,0)$ ve $Q(2,3,0)$ farklı iki nokta olsun. $|\overrightarrow{PX}|:|\overrightarrow{QX}|=2:1$ olacak şekilde bu düzlem üzerindeki $X(x,y,z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $X(x,y,z)$, $Ap^{\mathbb{R}^3}\left(P,Q;\frac{m}{n}\right)$ eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu durumda, $n|\overrightarrow{PX}|=m|\overrightarrow{QX}|$ yazılabilir. Buradan her iki tarafın karesi alınırsa $n^2|\overrightarrow{PX}|^2=m^2|\overrightarrow{QX}|^2$ elde edilir. $m=2$, $n=1$ olduğundan $|\overrightarrow{PX}|^2=4|\overrightarrow{QX}|^2$ dir. Bu eşitlikte

$$\overrightarrow{PX}=(x-1,y-2,0)\Rightarrow |\overrightarrow{PX}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

ve

$$\overrightarrow{QX}=(x-2,y-3,0)\Rightarrow |\overrightarrow{QX}|=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4[(x-2)^2+(y-3)^2]$$

dir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4-4(x^2-4x+4+y^2-6y+9)=0$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4-4x^2+16x-16-4y^2+24y-36=0$$

$$-3x^2+14x-3y^2+20y-47=0$$

$$x^2+y^2-\frac{14}{3}x-\frac{20}{3}y+\frac{47}{3}=0$$

bulunur. Bu ise $z=0$ düzleminde, merkezi $M\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$ ve yarıçapı $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ olan

$$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

çemberidir. (Şekil 2.3.2.(a))

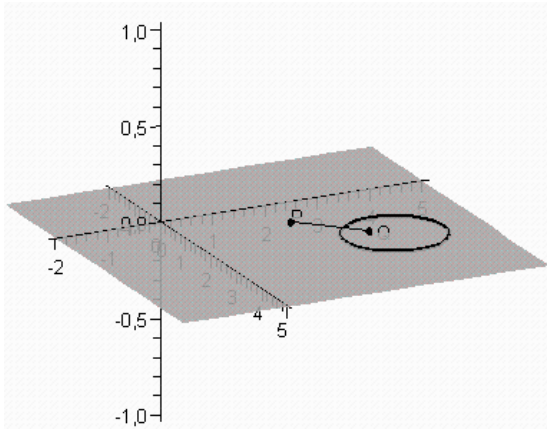
b) $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının $z=y$ düzleminde $P(1,2,2)$ ve $Q(2,3,3)$ farklı iki nokta olsun.

$|\overrightarrow{PX}|:|\overrightarrow{QX}|=2:1$ olacak şekilde bu düzlem üzerindeki $X(x,y,z)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

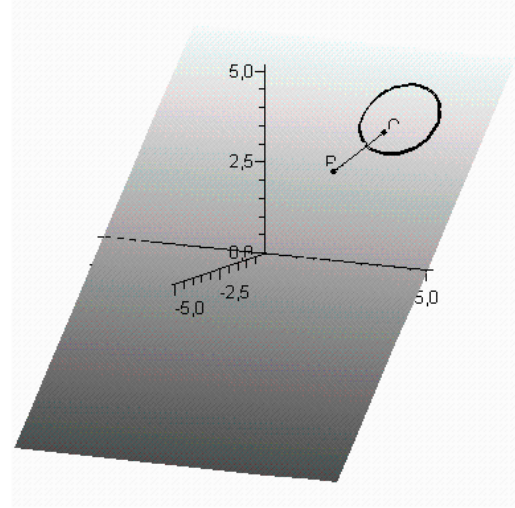
Çözüm: (2.3.2.) formülünde verilenler yerine yazılırsa istenen geometrik yerin, $z = y$ düzleminde yatan

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + 2\left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

çemberdir. (Şekil 2.3.2.(b))



Şekil 2.3.2.(a)



Şekil 2.3.2.(b)

BÖLÜM 3

S^2 BİRİM KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIUS EĞRİLERİ

Bu bölümde, Öklid düzleminde ve 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Apollonius eğrilerine benzer olarak, S^2 birim küre yüzeyi üzerinde Apollonius küresel eğrileri tanımlanmış ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Aynı kavramlar herhangi bir küre yüzeyi üzerinde de geçerlidir.

Birim küre yüzeyi üzerinde verilen herhangi iki $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ noktasına karşılık gelen $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörlerinin birbirine dik olduğu ve dik olmadığı durumlardaki geometrik yerler elde edilmiştir.

Tanım 3.1. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ iki farklı nokta olsun. Bu takdirde, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos d = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ dir. Bu durumda, bu noktalar arasındaki d uzaklığı $d(P, Q) = \cos^{-1}(\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)$ ile verilir.

Tanım 3.2. S^2 birim küresi üzerinde P ve Q farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) tamsayılar olmak üzere; $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan küre yüzeyi üzerindeki

$X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerine Apollonius küresel eğrisi adı verilir ve $Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ Apollonius küresel eğrisi küre yüzeyi üzerinde bir düzlemsel eğri (yani bir büyük çember) ve $m \neq n$ ise düzlemsel olmayan bir eğri belirtir.

Teorem 3.1. S^2 birim küresi üzerinde $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ farklı iki nokta ve m, n ($n \neq 0$) pozitif tamsayılar olsun. Eğer $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri dik değil iseler bu takdirde $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının $Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right)$ geometrik yeri;

i) Eğer $m = n$ ise

$$\vec{x}(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)} \vec{p} + \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)} \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}} \vec{r}$$

ile verilen $\widehat{PQ}$ yayının orta dikme büyük çemberidir.

ii) Eğer $m \neq n$ ise

$$\vec{x}(\beta) = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} \vec{p} + \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(k\beta) \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2}} \vec{r}$$

ile verilen düzlemsel olmayan bir eğridir.

İspat:

i) $m = n$ olsun. Bu takdirde,

$$Ap^{S^2}\left(P, Q; \frac{m}{n}\right) = \left\{ X(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid d(X, P) = d(X, Q) \right\}$$

kümesini bulmamız gerekir. $\vec{r}$ vektörünü

$$\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = (r_1, r_2, r_3)$$

olarak tanımlayalım. Bu takdire $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in S^2$ vektörleri lineer bağımsız olurlar.

Şimdi, $d(X, P) = \alpha$, $d(X, Q) = \beta$, $d(X, R) = \theta$ diyelim. $d(X, P) = d(X, Q)$

olduğundan $\alpha = \beta$ dır. Diğer taraftan, S^2 birim küresi üzerinde herhangi bir X noktasının konum vektörü için

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3$$

yazabiliriz. Buradan $\vec{x}$ vektörü ile sırasıyla, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ vektörlerinin iç çarpımları alınır

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{p} \rangle = \lambda_1 + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle = \cos \alpha, \\ \langle \vec{x}, \vec{q} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{q} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 = \cos \beta, \\ \langle \vec{x}, \vec{r} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \lambda_3 = \cos \theta \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Yani,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle &= \cos \alpha \\ \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 &= \cos \beta \\ \lambda_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

denklem sistemini elde edilir. Şimdi (3.1) denklem sistemden bilinmeyen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini bulalım. Küre üzerinde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$\delta = d(P, Q) = \cos^{-1}(\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)$$

dersek

$$\cos \delta = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$$

olur. Bu eşitlik (3.1) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \cos \delta &= \cos \alpha \\ \lambda_1 \cos \delta + \lambda_2 &= \cos \beta \\ \lambda_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

bulunur. (3.2) denklem sisteminin birinci denklemi $-\cos \delta$ ile çarpılır ve ikinci denklemi ile taraf tarafa toplanır

$$\lambda_2 (1 - \cos^2 \delta) = \cos \beta - \cos \alpha \cos \delta$$

elde edilir. Buradan da

$$\lambda_2 = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta}$$

bulunur. Şimdi bu değer $\lambda_1 = \cos \alpha - \lambda_2 \cos \delta$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos \alpha - \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} \cos \delta \\ \lambda_1 &= \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos^2 \delta - \cos \beta \cos \delta + \cos \alpha \cos^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta} \\ \lambda_1 &= \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, $\alpha = \beta$ olduğundan $\cos \alpha = \cos \beta$ dir. Böylece,

$$\lambda_1 = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos \delta)}{(1 - \cos \delta)(1 + \cos \delta)} = \frac{\cos \alpha}{(1 + \cos \delta)}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos \delta)}{(1 - \cos \delta)(1 + \cos \delta)} = \frac{\cos \alpha}{(1 + \cos \delta)}$$

elde edilir, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos \alpha}{(1 + \cos \delta)} = \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)}$ dir.

Şimdi, λ_3 in değerini bulalım.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1 + \lambda_3 r_1, \lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 r_2, \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3 + \lambda_3 r_3)$$

şeklinde yazabiliriz. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 q_1^2 + \lambda_3^2 r_1^2 + 2(\lambda_1 p_1 \lambda_2 q_1 + \lambda_1 p_1 \lambda_3 r_1 + \lambda_2 q_1 \lambda_3 r_1) + \\ &\lambda_1^2 p_2^2 + \lambda_2^2 q_2^2 + \lambda_3^2 r_2^2 + 2(\lambda_1 p_2 \lambda_2 q_2 + \lambda_1 p_2 \lambda_3 r_2 + \lambda_2 q_2 \lambda_3 r_2) + \\ &\lambda_1^2 p_3^2 + \lambda_2^2 q_3^2 + \lambda_3^2 r_3^2 + 2(\lambda_1 p_3 \lambda_2 q_3 + \lambda_1 p_3 \lambda_3 r_3 + \lambda_2 q_3 \lambda_3 r_3) = 1\end{aligned}$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}&\lambda_3^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \lambda_3 [2\lambda_2 (q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3) + 2\lambda_1 (p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3)] + \\ &2\lambda_1 \lambda_2 (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + \lambda_1^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \lambda_2^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - 1 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise λ_3 'e göre ikinci dereceden bir denklem belirtir. Buradan,

$\|\vec{p}\| = 1, \|\vec{q}\| = 1, \|\vec{r}\| = 1$ ve $\vec{p} \perp \vec{r}, \vec{q} \perp \vec{r}$ olduğu kullanılırsa

$$\lambda_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1 = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)}$$

dir. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)}$ değerleri λ_3 de yerine yazılırsa

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}}$$

bulunur. Sonuç olarak, $1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle} \geq 0$ koşulunu sağlayan α değerleri için

$$\vec{x}(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)} \vec{p} + \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)} \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}} \vec{r}$$

vektörü tek bir α parametresine indirgemiş olur. Bu ise istenen eğriyi verir.

ii) Şimdi $m \neq n$ olsun. Bu takdirde

$$Ap^{S^2} \left(P, Q; \frac{m}{n} \right) = \left\{ X(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid d(X, P) : d(X, Q) = m : n \right\}$$

kümesini bulacağız. $\vec{r}$ vektörünü

$$\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = (r_1, r_2, r_3)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\vec{p}$, $\vec{q}$ ve $\vec{r}$ vektörleri lineer bağımsız olur.

Şimdi, $d(X, P) = \alpha$, $d(X, Q) = \beta$, $d(X, R) = \theta$ ve $k = \frac{m}{n}$ diyelim. Böylece, $\alpha = k\beta$

olur. S^2 birim küresi üzerinde herhangi bir X noktasının $\vec{x}$ konum vektörünü

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\vec{x}$ vektörü ile sırasıyla, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ vektörlerinin iç çarpımları alınır

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{p} \rangle = \lambda_1 + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle = \cos \alpha \\ \langle \vec{x}, \vec{q} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{q} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 = \cos \beta \\ \langle \vec{x}, \vec{r} \rangle &= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \lambda_3 = \cos \theta \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. Böylece elde edilen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle &= \cos \alpha \\ \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 &= \cos \beta \\ \lambda_3 &= \cos \theta \end{aligned}$$

denklem sistemini çözerek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerini bulalım. Küre üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$$\delta = d(P, Q) = \cos^{-1}(\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle) \text{ dersek, } \cos \delta = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \text{ olur. Buradan}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \cos \delta &= \cos \alpha \\ \lambda_1 \cos \delta + \lambda_2 &= \cos \beta \\ \lambda_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.3) denklem sisteminin ikinci denklemi $-\cos \delta$ ile çarpılır ve birinci denklemi ile taraf tarafa toplanır

$$\lambda_1 (1 - \cos^2 \delta) = \cos \alpha - \cos \beta \cos \delta$$

elde edilir. Buradan da $\lambda_1 = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta}$ bulunur. Şimdi $\alpha = k\beta$ olduğundan

$\cos \alpha = \cos(k\beta)$ dır. Böylece

$$\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2}$$

yazılabilir. Bu değer $\lambda_2 = \cos \beta - \lambda_1 \cos \delta$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \cos \beta - \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} \cos \delta \\ \lambda_2 &= \frac{\cos \beta - \cos \beta \cos^2 \delta - \cos(k\beta) \cos \delta + \cos \beta \cos^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta} \\ \lambda_2 &= \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) \cos \delta}{1 - \cos^2 \delta} = \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak λ_3 değerini bulalım. $\vec{x}$ vektörünü

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1 + \lambda_3 r_1, \lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 r_2, \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3 + \lambda_3 r_3)$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan, $\|\vec{x}\| = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 q_1^2 + \lambda_3^2 r_1^2 + 2(\lambda_1 p_1 \lambda_2 q_1 + \lambda_1 p_1 \lambda_3 r_1 + \lambda_2 q_1 \lambda_3 r_1) + \\ &\lambda_1^2 p_2^2 + \lambda_2^2 q_2^2 + \lambda_3^2 r_2^2 + 2(\lambda_1 p_2 \lambda_2 q_2 + \lambda_1 p_2 \lambda_3 r_2 + \lambda_2 q_2 \lambda_3 r_2) + \\ &\lambda_1^2 p_3^2 + \lambda_2^2 q_3^2 + \lambda_3^2 r_3^2 + 2(\lambda_1 p_3 \lambda_2 q_3 + \lambda_1 p_3 \lambda_3 r_3 + \lambda_2 q_3 \lambda_3 r_3) = 1 \end{aligned}$$

dir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 < \vec{p}, \vec{q} > + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1 = 0$$

λ_3 ' e göre ikinci dereceden denklemi elde edilir. Buradan λ_1 ve λ_2 nin değerleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(k\beta) \cos \beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2}}$$

bulunur. Böylece, $1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} \geq 0$ koşulunu

sağlayan β değerleri için

$$\begin{aligned} \vec{x}(\beta) = & \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} \vec{p} + \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} \vec{q} \\ & \mp \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2}} \vec{r} \end{aligned}$$

vektörü tek bir β parametresine indirgemiş olur. Bu ise istenen eğriyi verir.

Örnek 3.1. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ iki nokta olsun.

$d(P, X):d(Q, X)=1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = (1, 0, 0)$ dir. Diğer taraftan

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0.0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $\cos\delta = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \frac{1}{2}$ dir. Şimdi, $\vec{x}$ vektörü

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda_2 \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda_3 (1, 0, 0) \\ &= \left(\lambda_3, \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.1.1 (i) dan $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos\alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}$ ve $\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{2\cos^2\alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}}$

olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}\cos\alpha$ ve $\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha}$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\vec{x}(\alpha) &= \frac{2}{3} \cos \alpha \vec{p} + \frac{2}{3} \cos \alpha \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} \vec{r} \\ &= \left(\mp \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \right)\end{aligned}$$

dır. $\vec{x}(\alpha)$ eğrisinin xz – düzleminde yatan büyük çember olduğu açıktır. Burada,

$1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha \geq 0$ ve dolayısıyla, $\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ olmalıdır. Ayrıca, bu α değerleri için

“Maple 15” programı ile aşağıdaki hesaplama bu eğrinin eğriliğinin $\kappa = 1$ ve burulmasının $\tau = 0$ olduğunu gösterir.

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
> RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/((nrm(xp(Xt,Xtt)))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[(sqrt(1-4/3*(cos(alpha)*cos(alpha)))), 0, 2*((sqrt(3))/3)*cos(alpha)];
```

$$X := \left[\frac{1}{3} \sqrt{9 - 12 \cos(\alpha)^2}, 0, \frac{2}{3} \sqrt{3} \cos(\alpha) \right]$$

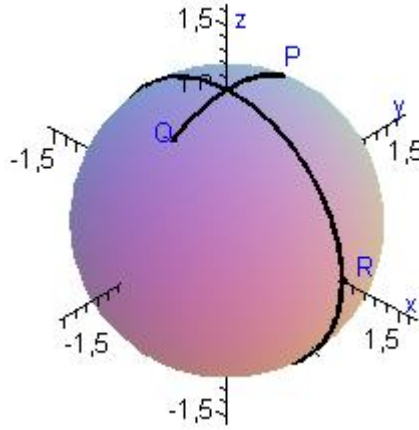
```
> curv(X);
```

$$\kappa = 1$$

```
> tor(X);
```

$$\tau = 0$$

Böylece, $\kappa = 1$ ve $\tau = 0$ olması eğrimizin bir düzlem eğrisi olduğunu gösterir. Bu eğri xz – düzleminde yatan büyük çemberdir. (Şekil 3.1.)



Şekil 3.1.

Örnek 3.2. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(1,0,0)$ ve $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ iki nokta olsun. Bu durumda, $d(P, X):d(Q, X)=1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P(1,0,0)$ ve $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bulunur. Bu

durumda, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ olduğundan $\cos \delta = \frac{1}{3}$ bulunur. Diğer taraftan,

$X \in S^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \lambda_3 \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2, \frac{2}{3}\lambda_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3, \frac{2}{3}\lambda_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 3.1.1 (i) den

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos \alpha}{(1 + \cos \delta)} = \frac{3}{4} \cos \alpha$$

ve

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}} = \mp \sqrt{1 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\vec{x}(\alpha) &= \frac{3}{4} \cos \alpha \vec{p} + \frac{3}{4} \cos \alpha \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha} \vec{r} \\ &= \left(\cos \alpha, \frac{1}{2} \cos \alpha \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - 3 \cos^2 \alpha}, \frac{1}{2} \cos \alpha \mp \frac{1}{2} \sqrt{2 - 3 \cos^2 \alpha} \right)\end{aligned}$$

dır.

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
>
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
>
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
>
> RETURN(tau=(simplify(dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/((nrm(xp(Xt,Xtt)))^2,symbolic)));
> end:
> X1:=[cos(alpha), (1/2)*cos(alpha)+(1/2)*(sqrt(2-3*(cos(alpha)*cos(alpha)))),
1/2*cos(alpha)-(1/2)*(sqrt(2-3*(cos(alpha)*cos(alpha))))];X2:=[cos(alpha),
(1/2)*cos(alpha)-(1/2)*(sqrt(2-3*(cos(alpha)*cos(alpha)))), 1/2*cos(alpha)+(1/2)*(sqrt(2-
3*(cos(alpha)*cos(alpha))))];
```

$$X1 := \left[\cos(\alpha), \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \sqrt{2 - 3 \cos(\alpha)^2}, \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \sqrt{2 - 3 \cos(\alpha)^2} \right]$$

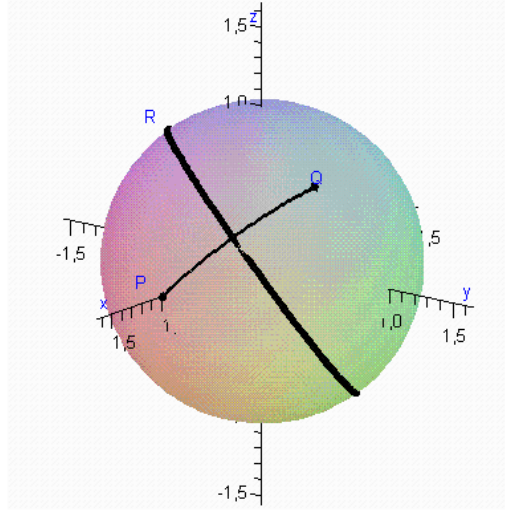
```
> curv(X1);
```

$$\kappa = 1$$

```
> tor(X1);
```

$$\tau = 0$$

bulunur. Böylece, eğrimiz α parametresine bağlı olan düzlemsel bir eğridir, Yani bir büyük çember belirtir. (Şekil 3.2.)



Şekil 3.2.

Örnek 3.3. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ iki nokta olsun.

$d(P, X) : d(Q, X) = 2 : 1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = (1, 0, 0)$ bulunur.

Ayrıca, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olduğundan $\cos \delta = \frac{1}{2}$

bulunur.

$m = 2, n = 1$ olduğundan $\alpha = 2\beta$ dir. Böylece $\cos \alpha = \cos 2\beta$ dir. Şimdi $\vec{x}$ vektörü

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} = \left(\lambda_3, \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.1.1 (ii) den

$$\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} = \frac{\cos 2\beta - \frac{1}{2} \cos \beta}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cos 2\beta - \frac{2}{3} \cos \beta,$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} = \frac{\cos \beta - \frac{1}{2} \cos 2\beta}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cos \beta - \frac{2}{3} \cos 2\beta$$

ve

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2}}$$

$$= \mp \sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\beta - \frac{4}{3}\cos^2 2\beta + \frac{4}{3}\cos\beta.\cos 2\beta}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\vec{x}(\beta) = \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2} \vec{p} + \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2} \vec{q}$$

$$\mp \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2}} \vec{r}$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\vec{x}(\beta) = \left(\mp \sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\beta - \frac{4}{3}\cos^2 2\beta + \frac{4}{3}\cos 2\beta \cos\beta}, \cos\beta - \cos 2\beta, \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\beta + \cos 2\beta) \right)$$

elde edilir.

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
>
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
>
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
>
> RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[sqrt(1-4/3*cos(beta)*cos(beta)-
4/3*cos(2*beta)*cos(2*beta)+4/3*cos(2*beta)*cos(beta)), cos(beta)-
cos(2*beta),sqrt(3)/3*(cos(beta)+cos(2*beta))];
```

$$X := \left[\frac{1}{3} \sqrt{9 - 12 \cos(\beta)^2 - 12 \cos(2\beta)^2 + 12 \cos(2\beta) \cos(\beta)}, \right. \\ \left. \cos(\beta) - \cos(2\beta), \frac{1}{3} \sqrt{3} (\cos(\beta) + \cos(2\beta)) \right]$$

> curv(X);

κ

$$= \frac{1}{8} \left| \left(-64 \cos(\beta)^9 + 432 \cos(\beta)^8 - 1776 \cos(\beta)^6 \right. \right. \\ \left. \left. + 1728 \cos(\beta)^5 - 648 \cos(\beta)^4 + 96 \cos(\beta)^3 - 1 \right)^{1/2} / \right. \\ \left. \left(\cos(\beta)^{3/2} (\cos(\beta)^3 - 3 \cos(\beta) + 1)^{3/2} \right) \right|$$

> tor(X);

$$\tau = \left(\left(8 \cos(\beta)^6 - 72 \cos(\beta)^5 + 60 \cos(\beta)^4 - 20 \cos(\beta)^3 \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \cos(\beta) - 1 \right) \right. \\ \left. \sqrt{-3 - 48 \cos(\beta)^4 + 24 \cos(\beta)^3 + 36 \cos(\beta)^2 - 12 \cos(\beta)} \right. \\ \left. \sqrt{3} \right) / \left(64 \cos(\beta)^9 - 432 \cos(\beta)^8 + 1776 \cos(\beta)^6 \right. \\ \left. - 1728 \cos(\beta)^5 + 648 \cos(\beta)^4 - 96 \cos(\beta)^3 + 1 \right)$$

dır. Örneğin, $\beta = \pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

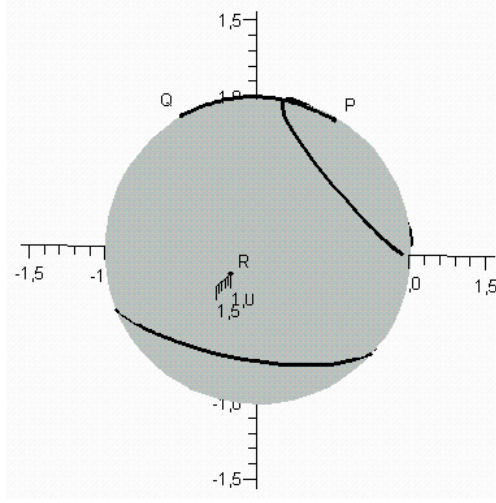
> evalf(subs(beta=Pi/3,curv(X)));

$\kappa = 1.999999999$

> evalf(subs(beta=Pi/3,tor(X)));

$\tau = 0.0000816496580$

olarak elde edilir. Bu ise eğrimizin düzlemsel olmayan küresel bir eğri olduğunu gösterir. (Şekil 3.3.)



Şekil 3.3.

Örnek 3.4. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(1,0,0)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ iki nokta olsun.

$d(P, X):d(Q, X) = 2:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P=(1,0,0)$ ve $Q=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

bulunur. Diğer taraftan, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dır. Dolayısıyla $\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

bulunur. $m=2$, $n=1$ olduğundan $\alpha = 2\beta$ dır. Böylece $\cos \alpha = \cos 2\beta$ dır. Şimdi, $\vec{x}$ vektörü

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_2, \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_3, \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_3 \right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Teorem 3.1.1 (ii) den

$$\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} = \frac{\cos 2\beta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \beta}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cos 2\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta,$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2} = \frac{\cos \beta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2\beta}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\beta$$

ve

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p}, \vec{q} >}{1 - (< \vec{p}, \vec{q} >)^2}}$$

$$= \mp \sqrt{1 - \frac{3}{2}\cos^2\beta - \frac{3}{2}\cos^2 2\beta + \sqrt{3}\cos\beta\cos 2\beta}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\vec{x}(\beta) = \left(\cos 2\beta, \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos\beta - \frac{1}{2}\cos 2\beta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{3}{2}\cos^2\beta - \frac{3}{2}\cos^2 2\beta + \sqrt{3}\cos\beta\cos 2\beta}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos\beta - \frac{1}{2}\cos 2\beta \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{3}{2}\cos^2\beta - \frac{3}{2}\cos^2 2\beta + \sqrt{3}\cos\beta\cos 2\beta} \right)$$

dır.

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
> RETURN(tau=abs(simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[cos(2*beta), (3/(2*sqrt(3)))*cos(beta)-1/2*cos(2*beta)+(1/(sqrt(2)))*(sqrt(1-
3/2*(cos(beta)*cos(beta))-
3/2*(cos(2*beta)*cos(2*beta))+sqrt(3)*cos(beta)*cos(2*beta))),(3/(2*sqrt(3)))*cos(beta)-
1/2*cos(2*beta)-1/(sqrt(2))*(sqrt(1-3/2*(cos(beta)*cos(beta))-
3/2*(cos(2*beta)*cos(2*beta))+sqrt(3)*cos(beta)*cos(2*beta)))];
```

$$X := \left[\cos(2\beta), \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos(\beta) - \frac{1}{2} \cos(2\beta) \right. \\
+ \frac{1}{4} \sqrt{2} \\
\sqrt{4 - 6 \cos(\beta)^2 - 6 \cos(2\beta)^2 + 4 \sqrt{3} \cos(\beta) \cos(2\beta)}, \\
\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos(\beta) - \frac{1}{2} \cos(2\beta) \\
- \frac{1}{4} \sqrt{2} \\
\left. \sqrt{4 - 6 \cos(\beta)^2 - 6 \cos(2\beta)^2 + 4 \sqrt{3} \cos(\beta) \cos(2\beta)} \right]$$

> **curv(X);**

κ

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3} \left| \left((1 + 24 \cos(\beta)^9 \sqrt{3} - 243 \cos(\beta)^8 \right. \right. \\
+ 1008 \cos(\beta)^6 - 648 \sqrt{3} \cos(\beta)^5 + 486 \cos(\beta)^4 \\
- 48 \sqrt{3} \cos(\beta)^3)^{1/2} (-1 - 12 \cos(\beta)^4 + 4 \sqrt{3} \cos(\beta)^3 \\
+ 9 \cos(\beta)^2 - 2 \sqrt{3} \cos(\beta))^{3/2} \Big) / \\
\left((-1 - 9 \cos(\beta)^2 - 6 \sqrt{3} \cos(\beta) \right. \\
+ 1728 \cos(\beta)^{11} \sqrt{3} - 3264 \cos(\beta)^9 \sqrt{3} + 2160 \cos(\beta)^{10} \\
- 324 \cos(\beta)^8 + 2268 \sqrt{3} \cos(\beta)^7 - 702 \sqrt{3} \cos(\beta)^5 \\
+ 96 \sqrt{3} \cos(\beta)^3 - 1728 \cos(\beta)^{12} - 495 \cos(\beta)^6 \\
+ 189 \cos(\beta)^4)^{1/2} \cos(\beta)^{3/2} (3 \cos(\beta)^3 - 9 \cos(\beta) \\
+ 2 \sqrt{3})^{3/2} \Big) \Big|$$

> **tor(X);**

τ

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2} \left| \left((-2 - 24 \cos(\beta)^4 + 8 \sqrt{3} \cos(\beta)^3 + 18 \cos(\beta)^2 \right. \right. \\
- 4 \sqrt{3} \cos(\beta))^{1/2} (1 - 6 \cos(\beta)^6 + 27 \sqrt{3} \cos(\beta)^5 \\
- 45 \cos(\beta)^4 + 10 \sqrt{3} \cos(\beta)^3 - 3 \sqrt{3} \cos(\beta)) \Big) / (1 \\
+ 24 \cos(\beta)^9 \sqrt{3} - 243 \cos(\beta)^8 + 1008 \cos(\beta)^6 \\
- 648 \sqrt{3} \cos(\beta)^5 + 486 \cos(\beta)^4 - 48 \sqrt{3} \cos(\beta)^3) \Big|$$

bulunur. Örneğin, $\beta = \pi/4$ değeri için κ ve τ değerleri

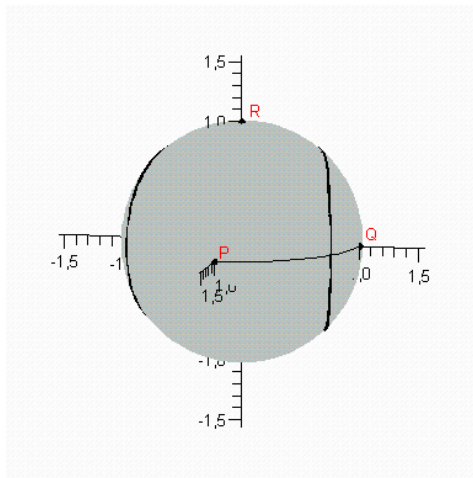
> evalf(subs(beta=Pi/4,curv(X)));

$\kappa = 1.582768671$

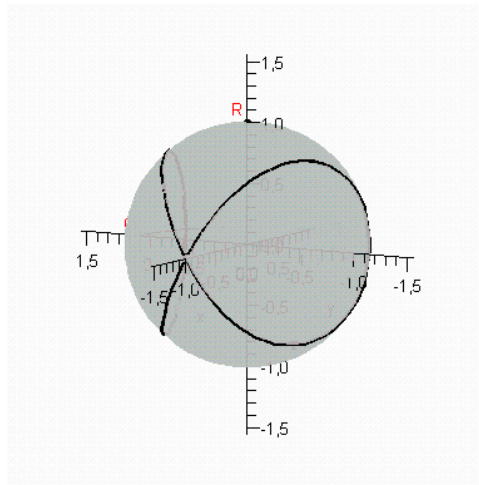
> evalf(subs(beta=Pi/4,tor(X)));

$\tau = 0.08184988501$

olarak elde edilir. Bu ise eğrinin düzlemsel olmayan bir eğri olduğu görülür. (Şekil 3.4.(a), Şekil 3.4.(b))



Şekil 3.4.(a)



Şekil 3.4.(b)

Teorem 3. 2. $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ birim küre üzerinde farklı iki nokta ve $n \neq 0$ olmak üzere m, n tamsayılar olsun. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri dik ise, $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan küre üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yeri;

i) Eğer $m = n$ ise

$$\vec{x}(\alpha) = \cos \alpha \vec{p} + \cos \alpha \vec{q} \mp \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} \vec{r}$$

ile verilen $\widehat{PQ}$ yayının orta dikme büyük çemberidir.

ii) Eğer $m \neq n$ ise

$$\vec{x}(\beta) = \cos(k\beta) \vec{p} + \cos \beta \vec{q} \mp \sqrt{1 - \cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta} \vec{r}$$

ile verilen düzlemsel olmayan bir eğridir.

İspat 3.1.2. i) Teorem 3.1.1 (i) den $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos \alpha}{(1 + \cos \delta)} = \frac{\cos \alpha}{(1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)}$ ve

$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}}$ olduğunu biliyoruz. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ dik olduklarından $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$ dır.

Böylece , $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos \alpha$ ve $\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha}$ dır. Dolayısıyla

$$\vec{x}(\alpha) = \cos \alpha \vec{p} + \cos \alpha \vec{q} \mp \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} \vec{r}$$

dır. Bu ise küre yüzeyi üzerinde bir büyük çember belirtir.

ii) Teorem 3.1.1 (ii) den $\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2}$, $\lambda_2 = \frac{\cos \beta - \cos(k\beta) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2}$

ve

$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(k\beta) \cos \beta \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{1 - (\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle)^2}}$ olduğunu biliyoruz. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ dik

olduklarından $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\lambda_1 = \cos(k\beta), \lambda_2 = \cos \beta \text{ ve } \lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta}$$

olur. Dolayısıyla

$$\vec{x}(\beta) = \cos(k\beta) \vec{p} + \cos \beta \vec{q} \mp \sqrt{1 - \cos^2(k\beta) + \cos^2 \beta} \vec{r}$$

bulunur.

Örnek 3.5. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(1,0,0)$ ve $Q(0,1,0)$ iki nokta olsun.

$d(P, X) : d(Q, X) = 1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P(1,0,0)$ ve $Q(0,1,0)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan $R(0,0,1)$ bulunur.

Buradan, $\alpha = \beta$ olduğundan $\cos \alpha = \cos \beta$ dır. Şimdi, $\vec{x}$ vektörünü

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1) \\ &= (\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla,

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ dir. Buradan,

$$\lambda_3^2 = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$$

ve buradan da

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

elde edilir. $\lambda_1 = \cos \alpha$ ve $\lambda_2 = \cos \beta$ olup $\cos \alpha = \cos \beta$ olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2$ dir. Buradan,

$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - 2\lambda_1^2} = \mp \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}$ olarak bulunur. O halde;

$$\vec{x}(\alpha) = \left(\cos \alpha, \cos \alpha, \mp \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha} \right)$$

denklemini elde edilir.

Maple 15” programı ile aşağıdaki hesaplama bu eğrinin eğriliğinin $\kappa = 1$ ve burulmasının

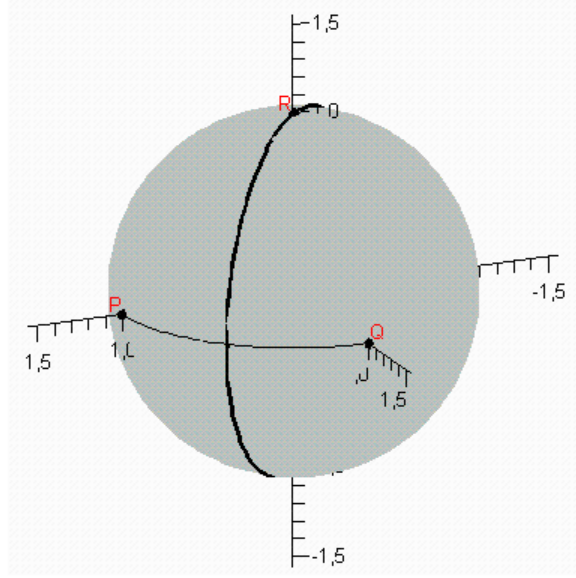
$\tau = 0$ olduğunu gösterir.

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
> RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[cos(alpha),cos(alpha), (sqrt(1-2*((cos(alpha))*cos(alpha))))];
> curv(X);
> tor(X);
```

$$\kappa = 1$$

$$\tau = 0$$

Bu ise eğrimizin bir düzlemsel eğri, yani bir büyük çember olduğunu gösterir. (Şekil 3.5.)



Şekil 3.5.

Örnek 3.6. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(0,0,1)$ ve $Q(0,1,0)$ iki nokta olsun.

$d(P, X) : d(Q, X) = 1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P(0,0,1)$ ve $Q(0,1,0)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan $R(1,0,0)$ dir.

$m = n$ olduğundan $\alpha = \beta$ ve dolayısıyla da $\cos \alpha = \cos \beta$ dir. $\vec{x}$ vektörünü

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{P} + \lambda_2 \vec{Q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 (0, 0, 1) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, \lambda_1) + (0, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, 0, 0) \\ &= (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$

bulunur. Buradan, $\lambda_3^2 = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ ve dolayısıyla $\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$ bulunur.

$\lambda_1 = \cos \alpha$ ve $\lambda_2 = \cos \beta$ olup $\cos \alpha = \cos \beta$ olduğundan, $\lambda_1 = \lambda_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - 2\lambda_1^2} = \mp \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}$$

olarak bulunur. Böylece,

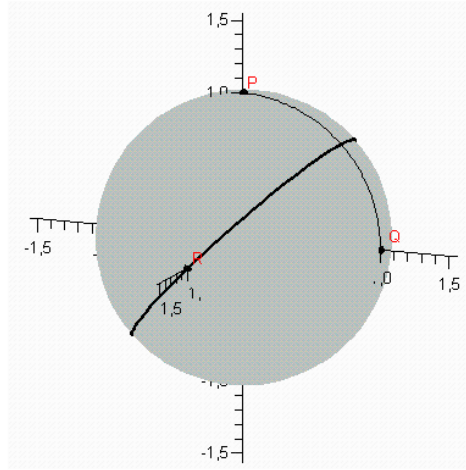
$$\bar{\mathbf{x}}(\alpha) = \left(\mp \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}, \cos \alpha, \cos \alpha \right) \text{ dir. Burada, } 1 - 2\cos^2 \alpha \geq 0 \text{ dir.}$$

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
> RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[(sqrt(1-2*((cos(alpha))*cos(alpha))),cos(alpha),cos(alpha))];
> curv(X);
κ = 1
> tor(X);
τ = 0
```

bulunur. $\kappa=1$, $\tau=0$ olduğundan eğrimiz bir düzlemsel eğri olup, bir büyük çember belirtir.

(Şekil 3.6.)



Şekil 3.6.

Örnek 3.7. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ iki nokta olsun. $d(P, X):d(Q, X)=1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan

$R(0,0,1)$ dir. $m=n$ olduğundan $\alpha = \beta$ olup $\cos \alpha = \cos \beta$ dir. $\vec{x}$ vektörünü

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \lambda_3 (0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1, 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2, -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2, 0\right) + (0, 0, \lambda_3) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 + \lambda_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_3\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla;

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2 = 1 \text{ bulunur. Buradan, } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \text{ ve dolayısıyla}$$

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1 = \cos \alpha$ ve $\lambda_2 = \cos \beta$ olup $\cos \alpha = \cos \beta$ olduğundan; $\lambda_1 = \lambda_2$ bulunur.

Böylece, $\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - 2\lambda_1^2} = \pm \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}$ olarak bulunur. O halde,

$\vec{x}(\alpha) = \left(\sqrt{2} \cos \alpha, 0, \mp \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} \right)$ dır. Burada, $1 - 2 \cos^2 \alpha \geq 0$ dır. Bu eğrinin

xz - düzleminde yatan bir büyük çember olduğu açıktır.

Ayrıca, "Maple 15" programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
> RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[(sqrt(2)*cos(alpha),0,sqrt(1-2*((cos(2*alpha))*cos(2*alpha))))];
```

$$X := \left[\sqrt{2} \cos(\alpha), 0, \sqrt{1 - 2 \cos(2\alpha)^2} \right]$$

```
> curv(X);
```

$$\kappa = 4 \left| \frac{-1 + 6 \cos(\alpha)^2 - 24 \cos(\alpha)^4 + 16 \cos(\alpha)^6}{(1 - 128 \cos(\alpha)^6 + 136 \cos(\alpha)^4 - 40 \cos(\alpha)^2)^{3/2}} \right|$$

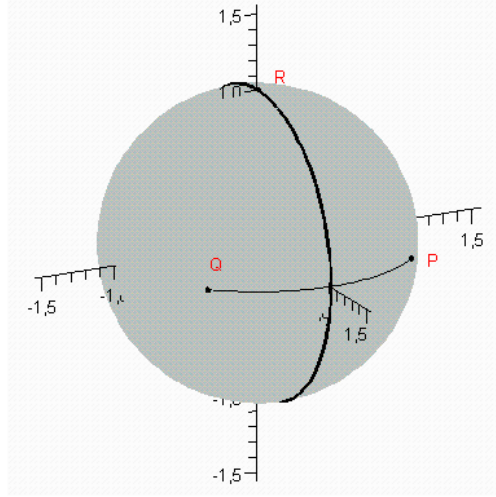
```
> curv(X(t));
```

$$\kappa = 1$$

```
> tor(X(t));
```

$$\tau = 0$$

olduğu görülür. Yani eğrimiz bir düzlemsel eğri olup, bir büyük çemberdir. (Şekil 3.7.)



Şekil 3.7.

Örnek 3.8. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(1,0,0)$ ve $Q(0,1,0)$ iki nokta olsun.

$d(P, X) : d(Q, X) = 2 : 1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P(1,0,0)$ ve $Q(0,1,0)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan $R(0,0,1)$ bulunur.

$m = 2, n = 1$ olduğundan $\alpha = 2\beta$ dir. O halde; $\cos \alpha = \cos 2\beta$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1) \\ &= (\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla,

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ bulunur. Buradan,

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1 = \cos \alpha = \cos 2\beta$ ve $\lambda_2 = \cos \beta$ olduğundan, $\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 2\beta}$ dir.

Böylece,

$$\vec{x}(\beta) = \left(\cos 2\beta, \cos \beta, \mp \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 2\beta} \right)$$

denklemini elde edilir. Burada, $1 - \cos^2 \beta - \cos^2 2\beta \geq 0$ olmalıdır.

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
> RETURN(tau=abs(simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[cos(2*beta),cos(beta),sqrt((1-(cos(beta)*cos(beta))-cos(2*beta)*cos(2*beta)))];
```

$$X := \left[\cos(2\beta), \cos(\beta), \sqrt{1 - \cos(\beta)^2 - \cos(2\beta)^2} \right]$$

```
> curv(X);
```

$$\kappa = \frac{3}{2} \sqrt{3} \left| \frac{\sqrt{\cos(\beta)^2 - 4}}{(\cos(\beta)^2 - 3)^{3/2}} \right|$$

```
> tor(X);
```

$$\tau = \left| \frac{\sqrt{-4 \cos(\beta)^2 + 3}}{\cos(\beta)^2 - 4} \right|$$

Örneğin, $\beta = \pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

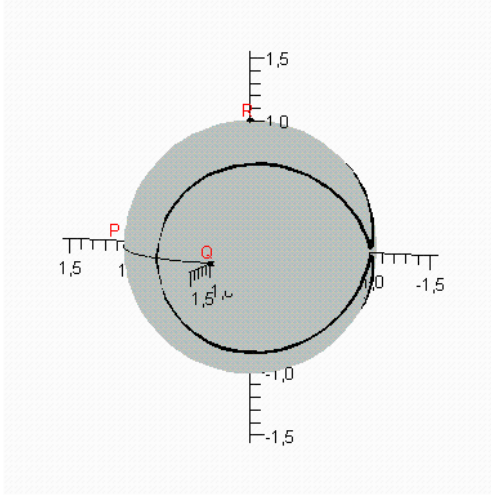
```
> evalf(subs(beta=Pi/3,curv(X)));
```

$$\kappa = 1.103236139$$

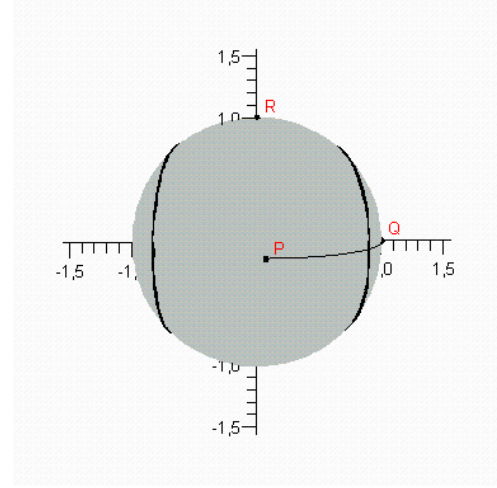
```
> evalf(subs(beta=Pi/3,tor(X)));
```

$$\tau = 0.3771236160$$

bulunur. Buradan; eğrimizin düzlemsel olmayan bir eğri olduğu görülür. (Şekil 3.8. (a), (b))



Şekil 3.8. (a)



Şekil 3.8. (b)

Örnek 3.9. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(0,0,1)$ ve $Q(0,1,0)$ iki nokta olsun.

$d(P, X) : d(Q, X) = 1 : 2$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P(0,0,1)$ ve $Q(0,1,0)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan $R(1,0,0)$ bulunur.

$m=1, n=2$ olduğundan $\beta = 2\alpha$ dır, ve dolayısıyla $\cos 2\alpha = \cos \beta$ dır.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 (0, 0, 1) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, \lambda_1) + (0, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, 0, 0) \\ &= (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)\end{aligned}$$

yazabiliriz. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla, $\lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 = 1$ bulunur.

Buradan,

$$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1 = \cos \alpha$ ve $\lambda_2 = \cos \beta = \cos 2\alpha$ olduğundan, $\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$

olarak bulunur. O halde,

$$\vec{x}(\alpha) = \left(\mp \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}, \cos 2\alpha, \cos \alpha \right) \text{ dir. Buradan;}$$

denklemini elde edilir.

"Maple 15" programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,alpha);
> Xtt:=diff(Xt,alpha);
> Xttt:=diff(Xtt,alpha);
> RETURN(tau=abs(simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[sqrt(1-(cos(alpha)*cos(alpha))-
(cos(2*alpha)*cos(2*alpha))),cos(2*alpha),cos(alpha)];
```

$$X := \left[\sqrt{1 - \cos(\alpha)^2 - \cos(2\alpha)^2}, \cos(2\alpha), \cos(\alpha) \right]$$

```
> curv(X);
```

$$\kappa = \frac{3}{2} \sqrt{3} \left| \frac{\sqrt{\cos(\alpha)^2 - 4}}{(\cos(\alpha)^2 - 3)^{3/2}} \right|$$

```
> tor(X);
```

$$\tau = \left| \frac{\sqrt{-4 \cos(\alpha)^2 + 3}}{\cos(\alpha)^2 - 4} \right|$$

Örneğin, $\alpha = \pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

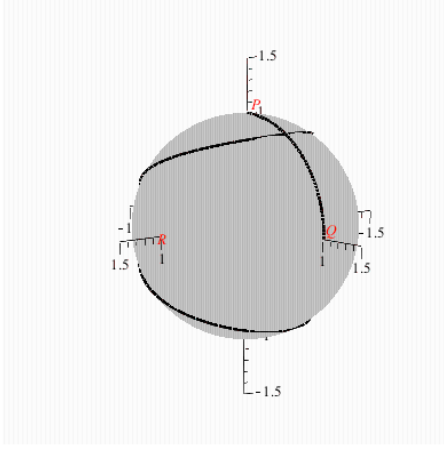
```
> evalf(subs(alpha=Pi/3,curv(X)));
```

$$\kappa = 1.103236139$$

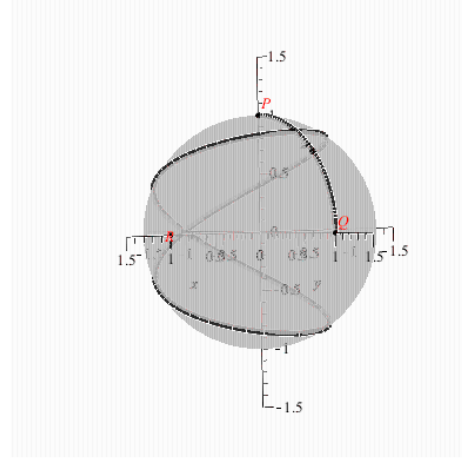
```
> evalf(subs(alpha=Pi/3,tor(X)));
```

$$\tau = 0.3771236160$$

bulunur. Buradan; eğrimizin düzlemsel olmayan bir eğri olduğu görülür. (Şekil 3.9. (a), (b))



Şekil 3.9. (a)



Şekil 3.9. (b)

Örnek 3.10. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ iki nokta olsun. $d(P, X):d(Q, X) = 2:1$ olacak şekilde küre üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım.

Çözüm: $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ noktaları için $\vec{r} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$ olduğundan

$R(0, 0, 1)$ bulunur. $m = 2$, $n = 1$ olduğundan $\alpha = 2\beta$ dir. O halde; $\cos \alpha = \cos 2\beta$ dir.

Şimdi, $\vec{x}$ vektörünü $\vec{p}$, $\vec{q}$ ve $\vec{r}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazalım:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \\ &= \lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \lambda_3 (0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1, 0 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2, -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2, 0 \right) + (0, 0, \lambda_3) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 + \lambda_2), \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_3 \right)\end{aligned}$$

dir. $X \in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$ dir. Dolayısıyla, $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2 = 1$

bulunur. Buradan, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ elde edilir. Böylece,

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1 = \cos \alpha = \cos 2\beta$ ve $\lambda_2 = \cos \beta$ olduğundan;

$\lambda_3 = \mp \sqrt{1 - \cos^2 2\beta - \cos^2 \beta}$ olarak bulunur. O halde;

$$\vec{x}(\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\beta + \cos \beta), \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\beta - \cos \beta), \mp \sqrt{1 - \cos^2 2\beta - \cos^2 \beta} \right)$$

dır. Burada, $1 - \cos^2 2\beta - \cos^2 \beta \geq 0$ sağlanmalıdır.

“Maple 15” programıyla yapılan aşağıdaki hesaplamalardan;

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
> RETURN(tau=(simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2,symbolic)));
> end:
> X:=[(1/sqrt(2))*(cos(2*beta)+cos(beta)),(1/sqrt(2))*(cos(2*beta)-cos(beta)),sqrt(1-
(cos(beta)*cos(beta))-(cos(2*beta)*cos(2*beta)))];
```

$$X := \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos(2\beta) + \cos(\beta)), \frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos(2\beta) - \cos(\beta)), -\sqrt{1 - \cos(\beta)^2 - \cos(2\beta)^2} \right]$$

```
> curv(X);
```

$$\kappa = \frac{3}{2} \sqrt{3} \left| \frac{\sqrt{\cos(\beta)^2 - 4}}{(\cos(\beta)^2 - 3)^{3/2}} \right|$$

```
> tor(X);
```

$$\tau = -\frac{\sqrt{-4 \cos(\beta)^2 + 3}}{\cos(\beta)^2 - 4}$$

elde edilir. Örneğin, $\alpha = \pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

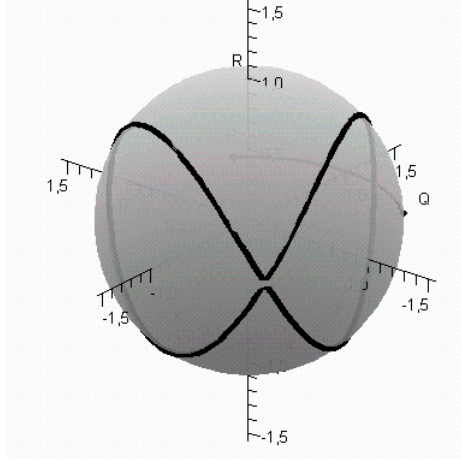
```
> evalf(subs(beta=Pi/3,curv(X)));
```

$$\kappa = 1.103236139$$

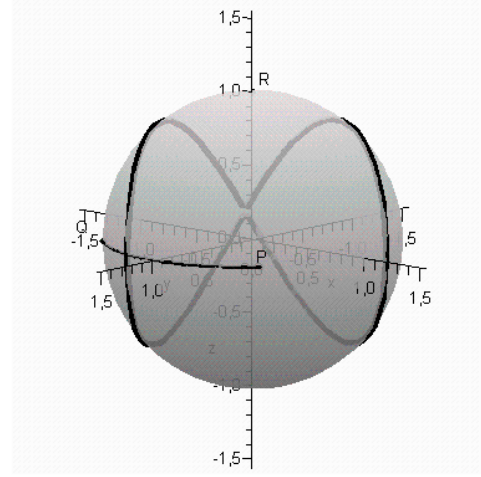
> evalf(subs(beta=Pi/3,tor(X)));

$\tau = 0.377123616;$

bulunur. Bu ise eğrimizin düzlemsel olmayan bir eğri olduğunu gösterir. (Şekil 3.10.(a),(b))



Şekil 3.10. (a)



Şekil 3.10. (b)

KAYNAKLAR

- [1]** Arı, Zehra, Reel ve Dual Uzaylarda Apollonius Eğrileri ve Yüzeyleri, Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2010
- [2]** Altunkaya, Bülent, Küresel Konikler ve Uygulamaları, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2012
- [3]** David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray, Geometry, Cambridge University, 1999
- [4]** Mantred P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Melike AY

Doğum Yeri: Manisa

Doğum Tarihi: 18.01.1986

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: DüNDAR ÇİLOĞLU Anadolu Lisesi

Üniversite: Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü