

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

KÜRESEL GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şermin DURA

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İSTANBUL, 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

KÜRESEL GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şermin DURA

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İSTANBUL, 2007

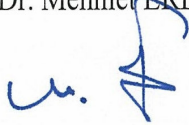
T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

24...09...2007

Enstitümüz Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı yüksek lisans öğrencilerinden 050860004 numaralı *Şermin DURA*'nın "Beykent Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddesine göre hazırlayarak, Enstitümüze teslim ettiği "**KÜRESEL GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR**" başlıklı tezi, Yönetim Kurulumuzun 10.09.2007 tarih ve 2007/11 sayılı toplantısında seçilen ve Fakülte binasında toplanan biz jüri üyeleri huzurunda, ilgili yönetmeliğin (c) bendi gereğince (45) dakika süre ile aday tarafından savunulmuş ve sonuçta adayın tezi/projesi hakkında ~~Oyçokluğu~~/Oybirliği ile ~~Kabul/Red~~ veya ~~Düzeltilme~~ kararı verilmiştir.

İşbu tutanak, 4 nüsha olarak hazırlanmış ve Enstitü Müdürlüğü'ne sunulmak üzere tarafımızdan düzenlenmiştir.

DANIŞMAN
Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN



ÜYE
Prof.Dr. Mahir RESULOV



ÜYE
Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL



YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendimin hazırladığına and içerim. 24/09/2007

Şermin DURA

ÖNSÖZ

Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalında yapmış olduğum yüksek lisans tezimi kısıtlı olan kaynaklar çerçevesinde araştırmaya çalıştım. Bu tezi hazırlarken karşılaştığım en büyük zorluk kaynakların yabancı dilde olmasıydı. Matematik alanında bu kaynakların artması adına yapmış olduğum çalışmanın da faydalı olacağını umuyorum.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde her türlü desteği ve yardımı benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmalarım sırasında bana yardımcı olan saygı değer hocam Prof. Dr. Mahir RESULOV'a ve arkadaşım İbrahim KURBAY'a ayrıca desteklerini benden esirgemeyen sevgili eşim Atasoy DURA ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Şermin DURA

Eylül, 2007

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ.....	
JÜRİ SAYFASI.....	
ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
GİRİŞ	1
1. BÖLÜM	
KÜRESEL GEOMETRİDE TEMEL KAVRAMLAR.....	2
1.1 KÜRESEL GEOMETRİDEKİ TEMEL TANIMLAR.....	2
1.2 KÜRESEL KOORDİNATLAR VE KÜRESEL ÜÇGENLER BAZI SONUÇLAR.....	7
2. BÖLÜM	
DÜZLEM VE KÜRESEL TRİGONOMETRİ.....	14
2.1 DÜZLEM VE KÜRESEL GEOMETRİNİN KARŞILAŞTIRILMASI.....	14
2.2 SİNÜS VE KOSİNÜS BAĞINTILARI.....	19
3. BÖLÜM	
KÜRENİN ALANI VE KÜRESEL PİSAGOR TEOREMİ.....	30
3.1 BÜYÜK ÇEMBERLER ÜSTÜNDE UZAKLIK.....	30
3.2 KÜRENİN ALANI.....	30
4. BÖLÜM	
KÜRESEL GEOMETRİNİN BİR UYGULAMASI.....	37
4.1 SIĞ SUDA DALGA DENKLEMLERİ.....	37
4.2 MOMENTUM DENKLEMİNİN KÜRESEL KOORDİNATINDAKİ YAZILIM FORMU.....	41
5. SONUÇLAR	44
6. KAYNAKLAR	45
7. ÖZGEÇMİŞ	46

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
1	Küresel Açı.....	3
2	Küresel Üçgende Açılar.....	4
3	Küresel Üçgende Karşıt noktalar.....	5
4	Küresel Üçgende Açılar ve Yaylar.....	5
5	Küçük çember.....	6
6	(x, y, z) Koordinatları.....	7
7	Küresel Koordinatlar.....	9
8	Küresel Koordinatlar.....	10
9	(a) B ve C Noktalarının Yer Vektörleri..... (b) D Noktasının Yer Vektörü.....	11
10	Dikler ve Düzlemler.....	16
11	(a) 1.durum: c yi uzatarak.....	18
11	(b) 2.durum: c yi uzatmadan.....	18
12	(a) Öklid hali.....	21
13	(b) Küresel hali.....	21
14	ABC üçgeninin alanı.....	23
15	(a) Öklid ile Küresel Alanların Karşılaştırılması.....	28
16	(b) Öklid ile Küresel Alanların Karşılaştırılması.....	28
17	Öklid ile Küresel Alanların Karşılaştırılması.....	29
18	Büyük Çemberler Üstünde Uzaklık.....	30
19	Kürenin Alanı.....	31
20	Bir Küresel Yüzey Dilimi	32
21	Küresel Üçgenin Alanı.....	33
22	Küresel Dik Üçgen.....	34

KÜRESEL GEOMETRİDE BAZI UYGULAMALAR

Şermin DURA

Özet

Bu çalışmanın amacı Öklidyen olmayan Küresel Geometriyi tanıtır, Düzlem ve Küresel Geometriyi karşılaştırmak, Küresel Geometri ile Hiperbolik Geometri arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları araştırmaktır.

1. Bölümde Küresel Geometrideki temel kavramlar hakkında bilgi verilmiştir.
2. Bölümde Düzlem ve Küresel Trigonometri tanımlanarak, sinüs ve kosinüs bağıntılarının ilişkileri karşılaştırılmıştır.
3. Bölümde Pisagor Teoremi, Küresel Geometri içersinde yapılandırılmıştır.
4. Bölümde ise küresel geometrinin bir uygulaması olarak sığ su dalga denklemleri çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Küresel Geometri, Küresel Trigonometri, Öklidyen Olmayan Geometri, Sığ Suda Dalga Denklemleri.

SOME APPLICATIONS IN SPHERICAL GEOMETRY

Şermin DURA

Abstract

The aim of this thesis is to introduce the Non-Euclidean Spherical Geometry and to compare of Plane and Spherical Geometry by searching the analogies and differences between Spherical Geometry and Hyperbolic geometry.

In the first chapter, about basic concepts on Spherical Geometry information is given.

In the second chapter, Plane and Spherical trigonometry are defined and their connections of sines and cosines relations are compared.

In the third chapter, the Pythagoras theorem in Spherical Geometry is constructed.

In the fourth chapter, as an application of Spherical Geometry the shallow water wave equations are studied.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Trigonometry, Non-Euclidean Geometry, The Shallow Water Wave Equations.

GİRİŞ

Temel düzlem geometri noktalar, çizgiler ve bunların etkileşimlerini konu alırken; Arap ve Yunanlıların eskiye dayanan geometrisi Küresel Geometri ile ilgiliydi (küre olarak nitelendirilen dünyanın geometrisidir). Dünyamızın şeklinin bir küreyi andırması nedeniyle küresel geometri astronomi ve fizikte önemli uygulama alanlarına sahiptir. Bu tez çalışmasında küresel geometriyi tanıtır Öklid ve Hiperbolik Geometri ile aralarındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koymaya çalışacağız ve son bölümde küre üzerinde ki sığ su tabakası üzerinde meydana gelen dalgaların hareket denklemlerini ve çözümlerini bir uygulama olarak sunacağız.

1. BÖLÜM

KÜRESEL GEOMETRİDE TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Küresel Geometrideki Temel Tanımlar

Tanım 1. Üç boyutlu Öklid uzayı R^3 de bir küre, sonlu fakat sınırsız iki boyutlu bir yüzeydir.

Açık olarak üç boyutlu uzayda orijin adı verilen sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi bir küre yüzeyi oluşturur. Bir küre üzerinde bulunan bir çember, o kürenin düzlem ile olan arakesitidir.

Küresel Geometri bir küre yüzeyi üzerinde yapılan geometri olup iki boyutludur ve genel olarak Öklid düzlem geometrisinden farklıdır. Örneğin küre yüzeyi üzerine bir doğru çizemeyiz. Bu farkları ikinci bölümde detaylı şekilde inceleyeceğiz. Bunun yerine burada düzlem geometri deki doğrulara karşılık gelen kürenin yarıçapı ile aynı yarıçapa sahip olan ve büyük çemberler adını vereceğimiz çemberleri göz önüne alacağız.

Büyük çemberlere örnek olarak ekvatoru ve boylam çizgilerini verebiliriz.

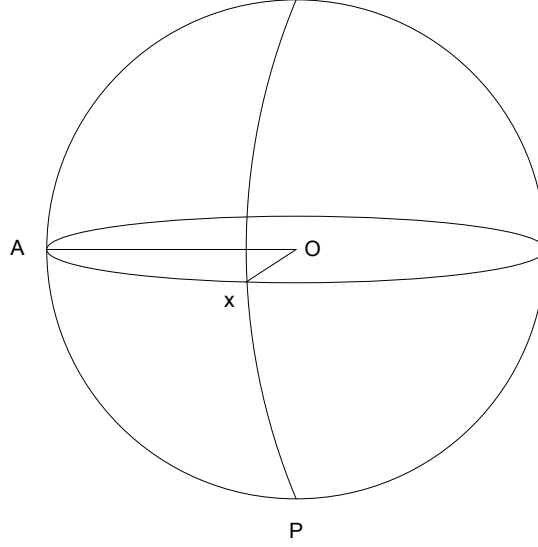
Büyük çemberleri; kürenin merkezinden geçen düzlemlerle küreyi kesmek suretiyle, küre ile düzlemin ara kesit eğrisi olarak elde edebiliriz. Bu büyük çemberlere kürenin jeodezikleri adını verebiliriz. Böylece düzlemde iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı veren doğru parçaları yerine küre yüzeyi üzerindeki farklı iki noktayı birleştiren büyük çember yaylarının uzunluğu küre yüzeyi üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren en kısa uzaklığı verecektir.

Yarıçapı $r > 0$ ve merkezi $(0,0,0)$ noktasında olan bir küre denklemi, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dir.

Eğer yarıçap 1 ise küreye birim küre denir.

Tanım 2. (Küresel Açısı)

Bir küre yüzeyi üzerinde bir noktadan geçen iki büyük çember arasındaki açı, bu büyük çemberlerin üzerinde bulunduğu düzlemler arasındaki açı olarak tanımlanır.



Şekil 1. (küresel açı, $\angle APX = \angle AOX$ dir.)

Tanım 3. (Küresel Üçgen)

Üçü birden aynı büyük çember üzerinde bulunmayan büyük çemberler üzerindeki üç nokta bir küresel üçgen tanımlar.

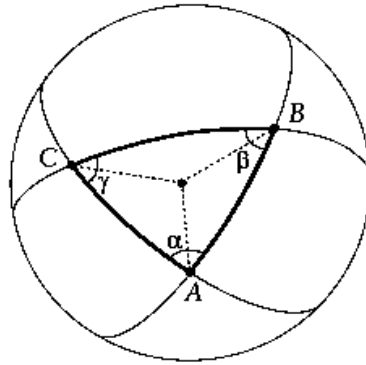
Öyle üç nokta A,B,C ise AB, BC ve CA yaylarının uzunlukları, kürenin birim küre olması durumunda π 'den daha küçük olan yayları alınmalıdır. Çünkü küre yüzeyi üzerinde iki nokta verildiğinde bu noktaları iki tane büyük çember yayı ile birleştirmemiz mümkündür. Bir büyük çemberin uzunluğu 2π olarak düşünüldüğünde, bunun üzerindeki iki nokta karşıt noktalar olmadığı sürece birisi π 'den küçük diğeri π 'den büyük iki yay parçası oluşturur, biz bunlardan π den küçük olanı almalıyız. Diğer taraftan küre üzerinde bir nokta verildiğinde bu noktayı kürenin merkezi ile birleştirdiğimizde uzantısının küreyi deldiği diğer nokta bu noktanın karşıtı olarak adlandırılacaktır. Eğer A ve A' karşıt noktalar ise AA' büyük çember yayının uzunluğu π olur. AA' doğru parçası ise kürenin veya büyük çemberin çapını oluşturur. Küresel üçgeni tanımlarken noktaların herhangi ikisinin karşıt noktalar olmadığına dikkat etmeliyiz.

Ayrıca kenarları jeodezik parçalardan oluşan bir küresel üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğunun, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından daha kısa olacağı

açıktır. Öklid düzleminde bulunan bir üçgenin iç açıları toplamı 180^0 olmasına karşın bir küresel üçgenin iç açıları toplamı 180^0 den daima büyüktür. Bir düzlemsel üçgenin en çok bir dik açısı olabilmesine karşın bir küresel üçgen üç tane dik açıya sahip olabilir.

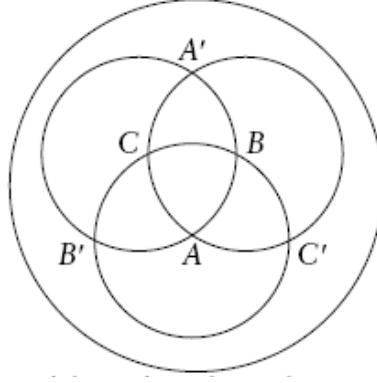
Şimdi küre yüzeyi üzerinde bulunan üç nokta A,B,C olsun ve A,B,C noktalarının oluşturduğu düzlem kürenin merkezinden geçmesin. Bu durumda bu ABC düzlemine paralel olacak şekilde ve kürenin merkezinden geçen bu düzleme paralel bir düzlemi göz önüne alabiliriz. Bu paralel düzlem orijinden geçtiği için küreyi iki eşit yarı-küreye ayıracaktır. Üstelik A,B,C noktalarının oluşturacağı $\triangle ABC$ üçgeni bu yarı-kürelerden sadece birisinde yer alacaktır. Böylece küresel ABC üçgenin her parçası 0 ile π arasında kalacak şekilde sınırlandırılmış olur. Bu durumda üçgenin bulunduğu bölgede açılarının kosinüsleri tek değerli olmasına rağmen sinüsleri tek değerli olmayabilecektir. Bu nedenle küre üzerinde bir açıyı kosinüsleri cinsinden ifade etmeye özen göstereceğiz.

Bu çemberler A,B ve C noktalarında kesiştiğini düşünürsek ABC küresel üçgeni oluşur ve α, β ve γ iç açıları gösterir.(Şekil 2)



Şekil 2. (Küresel Üçgende Açılar)

Eğer üç büyük çemberin kesiştiği noktalara A,B ve C desek A', B' ve C' karşıt noktalardır. Böylece $ABC, A'BC, AB'C, ABC', AB'C', A'BC', A'B'C, A'B'C'$ küresel üçgenleri oluşur.(Şekil 3)

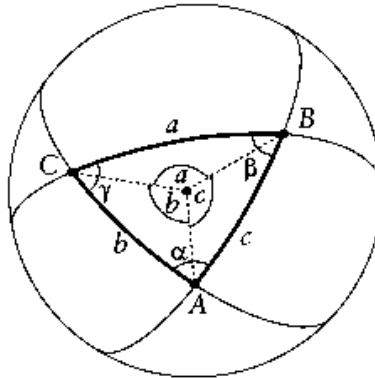


Şekil 3. (Küresel Üçgende karşıt noktalar)

Tanım 4. (Küresel Üçgenin Açıları)

Küresel bir üçgen altı açı belirler: A,B ve C köşelerindeki açılar küresel üçgenin iç açıları yani büyük çemberin teğetleri arasındaki açılardır. Bu açıları α, β ve γ olarak göstereceğiz.

Şekil 4 de görüldüğü gibi BC, CA ve AB yayları aslında birer açıdır. BC yayına a , CA yayına b ve AB yayına da c dersek ve kürenin yarıçapını da 1 olarak düşünürsek; a, b, c merkez açı olur. Bu açılara kenar açılar denir.

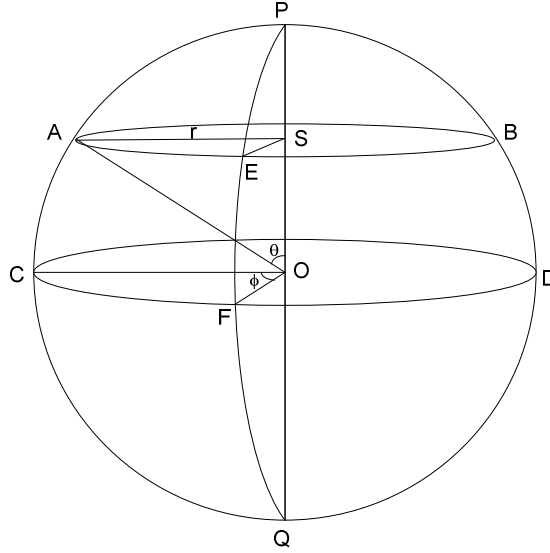


Şekil 4. (Küresel Üçgende Açılar ve Yaylar)

Tanım 5. (Küçük Çemberler)

Kürenin merkezinden geçmeyen bir düzlem ile ara kesitinden elde edeceğimiz çemberlere kürenin küçük çemberleri adı verilir. Küçük çemberin kutup noktaları

küçük çemberin düzlemine dik olan kürenin çapının extremum değerleridir ve bunlar P ve Q ile gösterilmektedir.



Şekil 5.

Buna göre küçük çemberlerin yarıçapı daima kürenin ya da büyük çemberlerin yarıçaplarından küçüktür. Şekil 5’de AB bir küçük çemberi CD ise ona paralel olan bir büyük çemberi göstermektedir. Her iki çember aynı P ve Q kutup noktalarına sahiptir. Şimdi r yarıçaplı bir küçük çember göz önüne alalım. Büyük çemberin bir yayını da $AP = \theta$ ile gösterelim. Düzlemsel AOS üçgenini göz önüne alalım. AB küçük çemberinin noktaları P kutup noktasından sabit uzaklıkta bulunur. Bu nedenle kürenin küçük çemberleri düzlem geometrideki çemberlerin görevini yaparlar. θ küçük çemberlerin noktalarının kutup noktasından aynı yüksekliğe sahip olduklarını kolayca görebiliriz. ϕ ise kutup noktasında yay tarafından belirlenen küresel açıdır. O halde,

$$AS = AO \sin \left(\hat{AOS} \right)$$

yazılabileceğinden $r = \sin \theta$ elde ederiz. Burada $AO = 1$ birim ve $AS = r$ olarak kullandık.

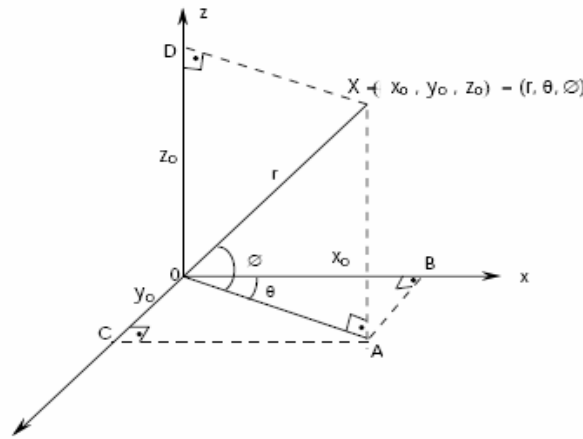
Şimdi AB küçük çemberi üzerinde bir E noktası alalım. P ile E 'yi büyük çember yayı ile birleştirip büyük çemberinin ekvatoru yani CD büyük çemberini kestiği noktayı F ile gösterelim. Bu durumda PE yayının yine θ açısını belirteceği açıktır. APE küresel açısını ϕ ile gösterelim. Yine eş değer olarak $\hat{COF} = \phi$ yazabiliriz. AS , AE küçük çember yayına paralel olduğundan,

$$AE = r \hat{ASE} = \phi \sin \theta$$

yazabiliriz. Burada, bu uzaklığın yani $\phi \sin \theta$ 'nın A ile E arasındaki en küçük uzaklık olmadığına dikkat etmeliyiz. Burada A ile E arasındaki en küçük uzaklık A ile E yi birleştiren büyük çember yayı ile alınacaktır. Böylece bir küçük çember yayı hiçbir zaman bir küresel üçgeni oluşturamayacaktır.

1.2 Küresel Koordinatlar ve Küresel Üçgenler İçin Bazı Sonuçlar

Şimdi birim küre üzerinde bir A noktası kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ile verilsin. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ olduğunu biliyoruz. Aynı noktanın küresel koordinatlarını da (r, θ, ϕ) ile gösterelim. Kolay bazı trigonometrik hesaplarla, yarıçapı r olan bir kürenin üzerinde bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktası alındığında;



Şekil 6. $((x, y, z)$ Koordinatları)

alınan (x_0, y_0, z_0) noktası şekil 6'daki gibi (r, θ, ϕ) şeklindeki koordinatlara sahip olsun. Burada r , X noktasının başlangıç noktasına olan uzaklığıdır ve $r > 0$ dir. θ ise

X noktasını başlangıç noktasına birleştiren doğrunun, xy koordinat düzlemine dik izdüşümü olan doğrunun x eksenine yaptığı açının radyan olarak ölçüsüdür. $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ϕ ise X noktasını başlangıç noktasına birleştiren doğru ile xy -düzlemi arasında kalan açıdır. $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ Şimdi (x_0, y_0, z_0) ile (r, θ, ϕ) arasındaki bağıntıları inceleyelim: OXA dik üçgeninde ;

$$\cos \phi = \frac{OA}{r} \Leftrightarrow OA = r \cos \phi$$

ve

$$\sin \phi = \frac{XA}{r} \Leftrightarrow XA = r \sin \phi$$

dir. Şekilde görüldüğü gibi $XA = |z_0|$ dır. Buradan $z_0 = r \sin \phi$ elde edilir. OAB dik üçgeninde;

$$\cos \theta = \frac{OB}{OA} \Leftrightarrow OB = OA \cos \theta \quad (1.1)$$

olur ve $OA = r \cos \phi$ ifadesini (1) de yerine yazarsak,

$$x_0 = OB = OA \cos \theta = r \cos \phi \cos \theta \quad (1.2)$$

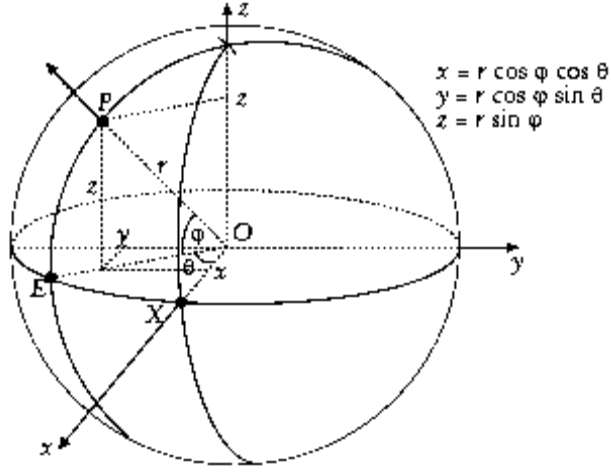
elde edilir. Yine aynı şekilde;

$$\sin \theta = \frac{AB}{OA} \Leftrightarrow AB = OA \sin \theta = r \cos \phi \sin \theta \Rightarrow y_0 = r \cos \phi \sin \theta \quad \text{ve} \quad z_0 = r \sin \phi \quad (1.3)$$

elde edilir. (1.2) ve (1.3) den:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. Bunlara, P noktasının küresel koordinatları denir.



Şekil 7. (Küresel koordinatlar)

Örneğin; küresel koordinatları $\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan noktanın kartezyen koordinatlarını bulalım;

$$x_0 = r \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$y_0 = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$$z_0 = r \cdot \sin \phi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

ten $(0, 1, \sqrt{3})$ bulunur.

Şimdi, kartezyen koordinatları $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ile verilen noktanın küresel koordinatlarını bulalım;

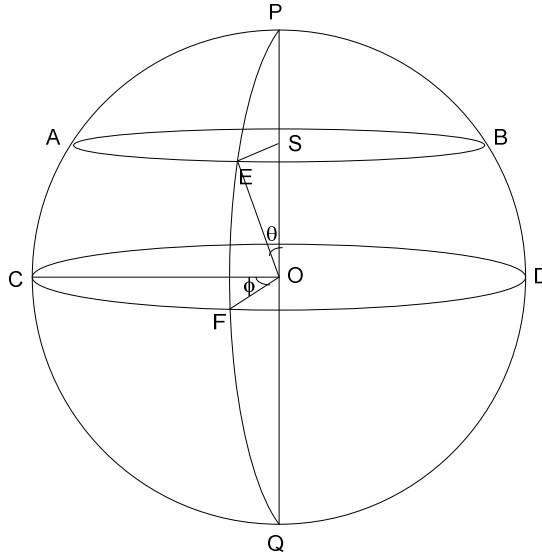
$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{z_0}{r} = \sin^{-1} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\pi}{4} \quad \left(\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad (x_0 > 0, y_0 > 0)$$

Sonuç olarak, noktanın küresel koordinatları $\left(1, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right)$ şeklinde elde edilir.

Şimdi θ ve ϕ yi şekil 8' deki gibi alırsak ve $r = 1$ alırsak;



Şekil 8.

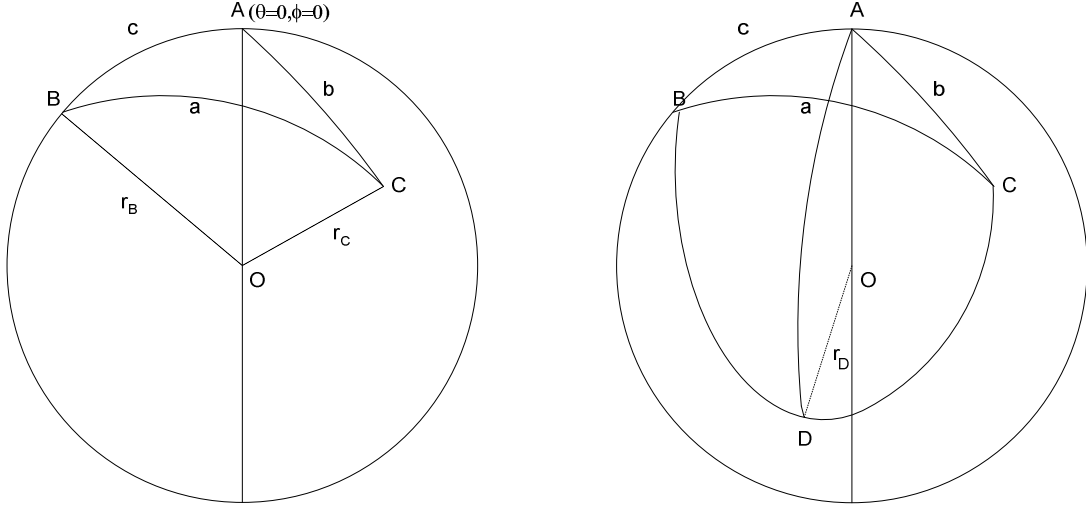
$$x = \sin \theta \cos \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \theta$$

(1.4)

yazabiliriz.

Şimdi küresel geometride önemli rol oynayan dört denklem elde edeceğiz. Birim yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde bir küresel üçgen ABC olsun. AB yayı $\phi = 0$

olacak şekilde referans büyük çemberi olsun. Böylece B noktasının koordinatları $(1,c,0)$ olacaktır. Burada $\theta = c$ ve $\phi = 0$ dır.



Şekil 9. (a) (B ve C noktalarının yer vektörleri) (b)(D noktasının yer vektörü)

A noktası, kürenin $\theta = 0$, $\phi = 0$ olacak şekildeki kutup noktası olarak alınmıştır ve AB yayı $\phi = 0$ düzlemi yani esas meridyen üzerinde yer almaktadır. C noktası ise $\theta = b, \phi = \hat{A}$ şeklinde bir noktadır. Şimdi kürenin merkezine göre B ve C noktalarının yer vektörlerini sırasıyla r_B ve r_C ile gösterelim. Böylece,

$$r_B = (\sin \theta_B \cos \phi_B, \sin \theta_B \sin \phi_B, \cos \theta_B) = (\sin c, 0, \cos c)$$

ve

$$r_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$

yer vektörleri olur. Bu iki yer vektörü arasındaki açı ise büyük çember yayları tarafından oluşturulan küresel üçgenin BC kenarının uzunluğuna eşit olacaktır. Burada r_B ve r_C 'nin gerçekte birim uzunluğuna sahip vektörler olduğu görülebilir.

O halde, bunların skaler çarpımları birinin, diğeri üstüne olan dik izdüşümünün uzunluğunu verecektir. Böylece,

$$r_B \cdot r_C = \cos a \quad (1.5)$$

yazabiliriz. r_B ve r_C yerine yukarıdaki eşitlikleri yazar ve düzenlersek,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A} \quad (1.6)$$

elde ederiz. Bu denkleme küresel kosinüs formülü adı verilir. Bu formül temel olup diğer bütün formülleri bundan yararlanarak kolayca elde edebiliriz. Bir diğer formül ise r_C ile r_B nin vektörel çarpımından elde edilebilir r_B ile r_C arasındaki açının BC yayı veya $BC = a$ ile verildiğini görebiliriz. O halde r_D küre üstünde B ve C nin her ikisinden 90° olan küre üstünde bir noktaya (D noktası) doğru bir birim vektörü göstermek üzere,

$$r_C \times r_B = r_D \sin a$$

yazabiliriz. Burada D noktasının koordinatları $\theta_D = AD$ ve $\phi_D = BAD$ dir. Kartezyen koordinatlarla küresel koordinatlar arasındaki bağıntıları kullanarak r_D 'yi kartezyen koordinatlarda,

$$r_D = (\sin AD \cos BAD, \sin AD \sin BAD, \cos AD)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} r_C \times r_B &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin b \cos A & \sin b \sin A & \cos b \\ \sin c & 0 & \cos c \end{vmatrix} \\ &= (\sin b \cos c \sin A, \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, -\sin b \sin c \sin A) \\ &= r_D \sin a \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} &(\sin b \cos c \sin A, \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, -\sin b \sin c \sin A) \\ &= \sin a (\sin AD \cos BAD, \sin AD \sin BAD, \cos AD) \end{aligned} \quad (1.7)$$

elde ederiz. Buradan karşılıklı bileşenleri eşitlemek suretiyle iki önemli formül daha elde ederiz: BAD üçgenini göz önüne alalım. BC büyük çemberinin kutbu D noktası,

BD yayı $= CD = 90^\circ$, $BD \perp CD$ ve $\hat{ABD} = 90^\circ + \hat{B}$ olduğunu göz önünde bulundurup BAD üçgenine yukarıdaki kosinüs kuralını uygularsak,

$$\cos AD = \sin c \cos(90^\circ + B) = -\sin B \sin c$$

elde ederiz.

Bu ifadeyi (1.7) denklemindeki r_D nin z-bileşeninde yerine yazarsak sonra da eşitlersek;

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (1.8)$$

denklemlerini buluruz ki bu ifadeye sinüs formülü adı verilir. Bunu aynı BAD üçgenine uygularsak,

$$\frac{\sin AD}{\sin ABD} = \frac{\sin AB}{\sin ADB} = \frac{\sin BD}{\sin BAD}$$

buluruz. Böylece,

$$\sin AD \sin BAD = \sin ABD = \sin(90^\circ + B) = \cos B$$

ve

$$\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin c \sin AD \sin BAD = \sin a \cos B$$

veya

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

buluruz. Bu formül sinüs formülünün bir benzeridir.

2.BÖLÜM

DÜZLEM ve KÜRESEL TRİGONOMETRİ

2.1 Düzlem ve Küresel Trigonometrinin Karşılaştırılması

Öklidyen olmayan geometri Öklid geometrisindeki temel postulatlar üzerine kurulmayan geometridir. Öklid geometrisindeki 5 temel postulat şunlardır:

1. İki nokta bir doğru parçası belirler.
2. Bir doğruyu her iki uçtan sonsuza genişletebiliriz.
3. Bir merkez ve yarıçap bir çember tanımlar.
4. Bütün dik açılar birbirine eş değerdir.
5. Bir doğru ve dışında bir nokta verildiğinde, verilen noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan sadece bir tek doğru vardır.

Buradaki 5. postulat paralellik postulatı olarak da bilinir.

5.postulat aynı zamanda içinde bulunulan uzayın geometrik olarak eğriliğini de belirler. Eğer herhangi bir uzay için beşinci postulatta olduğu gibi bir tek paralel söz konusu oluyor ise uzayın eğriliği sıfır olarak tanımlanır. Yani uzay herhangi bir eğriliğe sahip değildir. Eğer verilen doğruya, dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru çizilebiliyor ise içinde bulunan uzayın eğriliği negatif olarak tanımlanır. Eğer bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel doğru çizilemiyor ise uzayın eğriliğini pozitif olarak tanımlarız. Öklidyen olmayan en önemli geometriler küresel ve hiperbolik geometridir.

Hiperbolik geometri hiperbolik bir yüzey üzerinde çalışılan geometridir. Hiperbolik bir yüzey ise negatif eğriliğe sahiptir. Böylece hiperbolik geometride 5.postulat, bir doğru dışındaki bir noktadan en az iki paralelin çizilebileceği şeklindedir.

Küresel geometri ise bir küre yüzeyi üzerindeki geometri olup, küresel geometride yukarıda bahsettiğimiz bu postulat aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

- 1) Karşıt olmayan herhangi iki nokta bir tek doğru belirler.(Karşıt iki nokta ise sonsuz sayıda doğru parçası belirleyecektir, karşıt iki noktayı hatırlayalım: Bir nokta verildiğinde bu noktayı kürenin merkezine birleştiren doğruya uzatırsak küreyi deldiği diğer nokta verilen noktanın karşıt noktasıdır.)

- 2) Bir doğru parçası kürenin çevresine eşit olacak bir uzunluğa kadar genişletilebilir.
- 3) r yarıçaplı bir küre verilsin. Küre üstünde bir nokta verildiğinde yarıçapı $\leq \pi r$ olacak şekilde bir tek çember belirleyebiliriz.
- 4) Bütün dik açılar birbirine eş değerdir.
- 5) Bir doğru ve dışında bir nokta verilsin. Bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan hiçbir doğru çizilemez.

Burada küre için doğrular büyük çemberler olarak tanımlanacağından farklı herhangi iki büyük çemberin birbirini daima kesmek zorunda olduğu gerçeği ile bunu hemen kanıtlayabiliriz. Diğer taraftan küre yüzeyi üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bu iki noktadan geçen büyük çember yayının bir parçasıdır, dolayısıyla büyük çember yayları iki noktayı birleştiren doğru parçaları olarak görülebilir. Bu çember yayını, verilen iki nokta ve kürenin merkezi olan nokta bir düzlem belirleyeceğinden bu düzlem ile kürenin ara kesiti bu iki noktadan geçen büyük çemberi ve bu büyük çemberin noktalar arasında kalan parçası da istenen doğru parçasını tanımlayacaktır.

Ayrıca küre yüzeyi üzerinde verilen ve herhangi ikisi aynı bir büyük çember üzerinde olmayan üç noktanın belirttiği üçgen, küresel geometrideki üçgenler olarak tanımlanır. Böylece bu şekilde iki farklı üçgen tanımlamak mümkün ise de bu tanımlanabilen iki üçgenden birisinin iç açıları 180^0 den küçük diğerinin ise 180^0 den büyüktür. Biz bunlardan 180^0 den küçük iç açıların tanımlı olduğu üçgeni esas alacağız ve bu üçgeni küresel üçgen olarak tanımlayacağız. Üstelik bu üçgenin her bir kenarının uzunluğu birim küre durumunda π 'den küçük olacaktır. Diğer üçgende ise kenar uzunlukları π 'den büyük olabileceği için bu iki nokta arasındaki en kısa uzaklık olma ile çelişeceğinden bu hali zaten ele almayacağız.

Şimdi iç açıları A,B,C ve karşısındaki kenar uzunlukları a,b,c olan ABC küresel üçgenini göz önüne alalım. A,B,C noktalarının R^3 'te oluşturacağı düzlemsel $\triangle ABC$ üçgeniyle küresel ABC üçgeni için örneğin Öklidyen düzlem halinde c kenarının uzunluğu ile küresel üçgen halinde c kenarının uzunluğu oranını ve Öklidyen ve küresel üçgenler halinde bunların alanları oranını araştıralım:

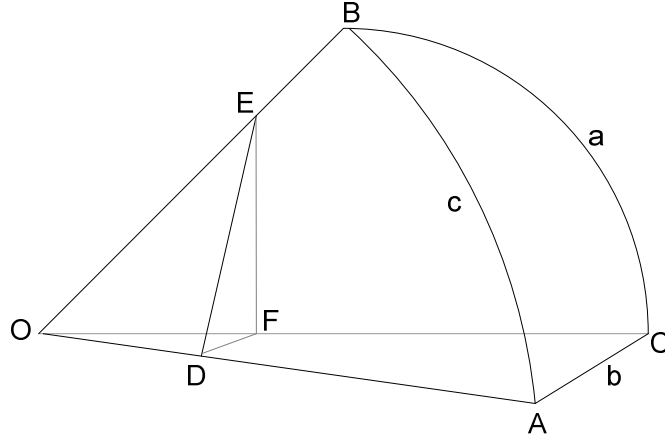
$$\frac{c_{ökl}}{c_{kür}}, \frac{Alan_{ökl}}{Alan_{kür}}$$

oranlarını bulmak istiyoruz.

Bu oranlar üçgenlerin şekline ve büyüklüğüne göre değişecektir, aynı zamanda küre ile de bağlantılıdır. Bu oranları çevre uzunluğu farklı küreler için araştırmak istiyoruz. Bunun için küresel trigonometriye ihtiyacımız olacaktır. ABC üçgeni dik üçgen olmak zorunda olmayacağından çeşitli açılara sahip üçgenlerin trigonometrisini kullanmamız gerekir.

Bu yüzden kenarlar için kosinüs kuralı ile sinüs kuralını kullanmak istiyoruz. Önce dik açılı üçgenler için bu kuralları türetelim: İki büyük çemberin kesişimi ile teşkil edilen açının ölçümü, bu büyük çemberlere ara kesit noktasından çizilecek iki teğet doğru arasında kalan açıya eşittir.

İki büyük çemberin ara kesit noktası A ve kürenin merkezi O olsun. A noktasından bu büyük çemberlere teğet olacak şekilde çizilen doğrular l ve m olsun. Bu doğrular çemberin yarıçapı olan OA ya diktir, yani $l \perp OA$ ve $m \perp OA$ dır. l doğrusu ve O merkezinin teşkil ettiği düzlemi ve m doğrusu ile O merkezinin teşkil ettiği düzlemi göz önüne alırsak, bu iki düzlem arasındaki açı l ve m doğruları arasındaki açıya eşit olur, böylece büyük çemberlerin arasında oluşan küresel açının ölçümü bu açıya eşittir.



Şekil 10. (Dikler ve düzlemler)

Yukarıdaki şekilde O kürenin merkezidir, ABC üçgeni ise dik açısı C olan bir dik üçgendir.

Şimdi OB üstündeki bir E noktasından geçen DEF düzlemini oluşturalım, öyle ki $DEF \perp OA$ olsun;

$D \in OA$ ve $F \in OC$ noktalarını alalım:

DE ve DF doğru parçaları, DEF düzleminde olduğundan ve $DEF \perp OA$ olduğundan $DE \perp OA$ ve $DF \perp OA$ 'dır. Böylece $DF \perp OA$ olması nedeniyle ODF dik açısı D olan bir dik üçgen ve $DE \perp OA$ olduğundan ODE de dik açısı D olan bir dik üçgendir.

Diğer taraftan $DEF \perp OA$ ve $OA \in OAC$ olduğundan $DEF \perp OAC$ elde ederiz. Bu iki düzlem kesişir ve üçüncü bir düzleme her ikisi birden dik olursa o zaman onların ara kesit doğrusu da bu üçüncü düzleme dik olur, böylece $BCO \perp OCA$ ve $DEF \perp OCA$ olması nedeniyle $EF \perp OAC$ elde ederiz. $OC \in OCA$ olduğundan $EF \perp OC$ olur ve böylece OFE üçgeni bir dik üçgendir. Aynı şekilde $DF \in OCA$ olduğundan $EF \perp DF$ olup DFE üçgeni de bir dik üçgen olur.

ABC küresel üçgeninin her parçası için bu parçanın ölçüsüne eşit ölçüme sahip bir açı tanımlayabiliriz. Küresel üçgenin her parçası ve o parçalara karşılık gelen açıları,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{EDF}, & a &= \hat{FOE} \\ \hat{B} &= \hat{DEF}, & b &= \hat{DOF} \\ \hat{C} &= \hat{DFE}, & c &= \hat{DOE}\end{aligned}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda,

$$\sin a = \sin \left(\hat{FOE} \right) = \frac{FE}{OE} = \frac{FE}{ED} \frac{ED}{OE} = \sin A \sin c$$

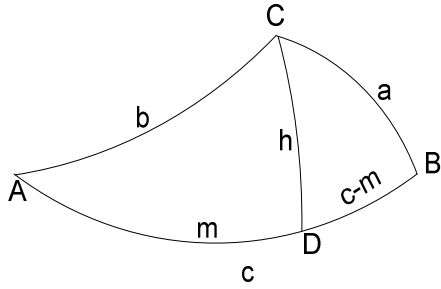
buluruz.

Şimdi aynı düşünceyi OA yerine OB ye uygularsak, yani OB ye dik bir düzlem teşkil edersek bu formüle ilaveten altı formül daha ilave ederiz. Böylece bulacağımız bu

yedi formülü ve bu formülleri türeterek elde edeceğimiz diğer üç formülü aşağıda yazalım:

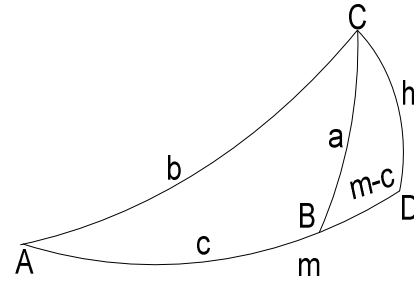
$$\begin{aligned} \sin a &= \sin A \sin c & \sin b &= \sin c \sin B \\ \tan a &= \sin b \tan A & \tan b &= \sin a \tan B \\ \tan a &= \tan c \cos B & \tan b &= \tan c \cos A \\ \cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \cot A \cot B \\ \cos A &= \cos a \cos B & \cos B &= \cos b \sin A \end{aligned}$$

Şimdi sinüs ve kosinüs kurallarını türetebilmek için bir yükseklik kavramı oluşturalım. Üçgenin C köşesinden c kenarına olan uzaklığı gerekirse uzatmak suretiyle belirleyebiliriz. Bu şekilde belirleyeceğimiz yüksekliği her iki durum için aşağıdaki şekilde (c yi uzatmadan ve c yi uzatmak suretiyle) çizebiliriz.



Şekil 11. (a)

1.durum: c yi uzatarak



Şekil 11. (b)

2.durum: c yi uzatmadan

2.2 Sinüs ve Kosinüs Bağlıları

Yukarıda verdiğimiz küresel dik üçgen için trigonometrik bağıntılardan, $\sinh = \sin a \sin B$ ve $\sinh = \sin b \sin A$ elde ederiz. $\sinh$ 'nin bu ifadelerini kullanarak $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ buluruz. Bunun her iki yanını $\sin A \sin B$ ile bölersek,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

buluruz. Eğer h yüksekliğini B köşesinden b kenarına olan yükseklik olarak alırsak bu eşitlik:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

şekline gelir. Geçişme özelliği nedeniyle de:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

yazabiliriz. Bu sinüs bağıntısıdır.

ADC dik açısı D açısı olan bir dik üçgen olsun. Küresel dik üçgenler için trigonometri formüllerini kullanmak suretiyle birinci hal için;

$$\cos a = \cosh \cos(c-m)$$

ve ikinci hal için;

$$\cos a = \cosh \cos(m-c)$$

yazabiliriz.

$$\cos(c-m) = \cos(m-c)$$

olduğundan;

$$\cosh \cos(c-m) = \cosh \cos(m-c)$$

buluruz. Bu nedenle her iki halde formül türetmek için birinci hali kullanabiliriz.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

olduğundan;

$$\cosh \cos(c - m) = \cosh(\cos c \cos m + \sin c \sin m)$$

buluruz.

Küresel ADC dik üçgenine yukarıdaki trigonometrik özellikleri uygulamak suretiyle;

$$\cos b = \cosh \cos m$$

ve her iki tarafı $\cosh$ ile bölerek;

$$\cos m = \frac{\cos b}{\cosh}$$

ve

$$\sin m = \tanh \cot A$$

$$\sinh = \sin b \sin A$$

buluruz.

$\cos m$ ve $\sin m$ nin değerlerini yerine yazarsak,

$$\cosh(\cos c \cos m + \sin c \sin m) = \cosh \cos c \frac{\cos b}{\cosh} + \sin c \tanh \cot A$$

veya

$$\cosh \cos c \frac{\cos b}{\cosh} + \sin c \tanh \cot A = \cos c \cos b + \sin c \sinh \cot A$$

elde ediyoruz.

$$\sinh = \sin b \sin A \text{ ve } \sin A \cot A = \cos A$$

olduğunu kullanarak;

$$\cos c \cos b + \sin c \sinh \cot A = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A$$

buluruz.

Buradan dağılma özelliğini kullanarak;

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A$$

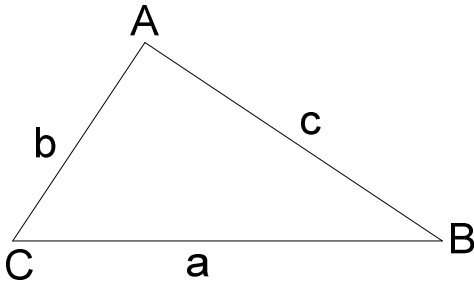
elde ederiz.

Şimdi de c kenarına ait yükseklik yerine a ve b kenarlarına karşılık gelen yüksekliklerini kullanırsak bütün kenarlar için yazacağımız kosinüs kurallarını aşağıdaki şekilde buluruz:

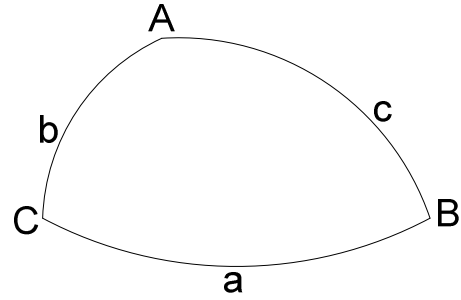
$$\begin{aligned}\cos a &= \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C\end{aligned}$$

Şimdi bölümün başında bahsettiğimiz $\frac{c_{\text{ökl}}}{c_{\text{kür}}}$ ve $\frac{\text{alan}_{\text{ökl}}}{\text{alan}_{\text{kür}}}$ oranlarını hesaplayalım:

Aşağıdaki şekli oluşturalım:



Şekil 12. (a) Öklid hali



Şekil 12. (b) Küresel hali

Öncelikle $c_{\text{ökl}}$ ve $c_{\text{kür}}$ in karşılıklarını bulalım:

Öklidyen halde $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ den

$$c_{\text{ökl}} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

bulunur.

Kürenin yarıçapının sabit r sayısı olduğunu kabul edelim. Küresel üçgenin kenarlarının kosinüs bağıntılarını kullanabilmemiz için açılar yay uzunluğu olarak ifade etmek durumundayız. Yani,

$$\frac{uzunluk}{2\pi r} = \frac{yay}{2\pi} \Rightarrow yay = \frac{uzunluk}{r}$$

almalıyız.

Böylece kenarlara ait kosinüs formüllerini uygularsak,

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos C$$

$$\frac{c}{r} = \text{Arc cos} \left(\cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos C \right)$$

veya

$$c_{kür} = r \text{Arc cos} \left(\cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos C \right)$$

buluruz.

Böylece,

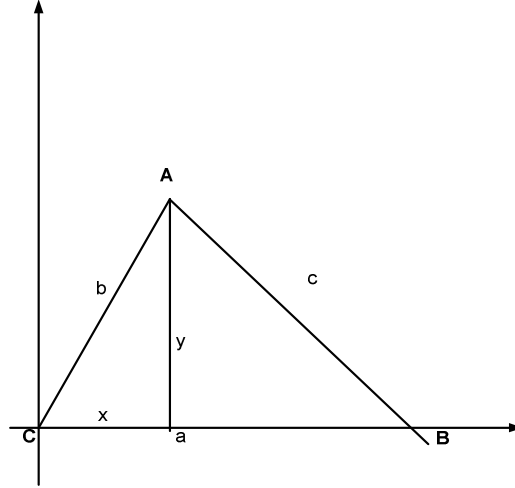
$$\frac{c_{ökl}}{c_{kür}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}}{r \text{Arc cos} \left(\cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos C \right)}$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi de, $\frac{alan_{ökl}}{alan_{kür}}$ oranını hesaplayalım.

Bunun için bu alanları ayrı ayrı hesaplayacağız:

Öklidyen halde ABC üçgenini aşağıdaki gibi C köşesi orijinde olacak şekilde çizelim:



Şekil 13. (ABC üçgeninin alanı)

$\sin C = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b \sin C$ den ABC üçgeninin alanı , $alan_{ökl} = \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}ab \sin C$ olarak

bulunur. Küresel halde A ve B'yi bulmak için küresel sinüs kuralını kullanarak;

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{r}}$$

den,

$$A = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin \frac{a}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right)$$

$$B = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin \frac{b}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right)$$

buluruz.

Küresel üçgenimizin iç açıları toplamı π 'den büyük idi, π 'den fazla açıyı E ile gösterirsek küresel üçgenin alanı $r^2 E$ şeklinde olur. Örneğin iç açıları $A = 90^\circ$

$B = 90^0$ $C = 90^0$ olan bir küresel üçgendeki iç açılar fazlalığı 90^0 veya $\frac{\pi}{2}$ radyandır.

Buna göre r yarıçaplı küre üzerine çizilen bu küresel üçgenin alanı $= \frac{r^2\pi}{2}$ şeklinde olur.

Bu örneğimizdeki üçgen küre yüzeyinin $\frac{1}{8}$ ni kaplar. Böylece kürenin yüzeyi bu üçgenin alanının 8 katı olacağından kürenin alanı $4\pi r^2$ olarak bulunur. Böylece bulduğumuz küresel üçgenin alan formülünün doğruluğunu da kontrol etmiş oluruz.

Esas problemimiz de artık açı formülünden,

$Alan_{kür} = r^2(A + B + C - \pi)$ de A ve B nin değerleri yerine yazılırsa,

$$Alan_{kür} = r^2 \left[Arc \sin \left(\frac{\sin \frac{a}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right) + Arc \sin \left(\frac{\sin \frac{b}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right) + C - \pi \right]$$

bulunur. O halde,

$$\frac{Alan_{ökl}}{Alan_{kür}} = \frac{\frac{1}{2}ab \sin C}{r^2 \left[Arc \sin \left(\frac{\sin \frac{a}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right) + Arc \sin \left(\frac{\sin \frac{b}{r} \sin C}{\sin \frac{c}{r}} \right) + C - \pi \right]}$$

elde ederiz.

Şimdi bulduğumuz bu sonucu kontrol edelim:

$a = b = k$ olsun, $r = 1$ alalım; $0 < C < \pi$ aldığımızdan $0 < k < \pi$ dir. Aksi durumda k bir doğru parçasının tanımına uymaz. O halde k artarken $\frac{C_{ökl}}{C_{kür}}$ oranı da artacaktır.

Böylece küresel halde C nin değeri gitgide C nin Öklidyen değerinden daha küçük kalacaktır. Bu ise üçgenin a ve b kenarlarının kürenin daha fazla kısmını

kapsayacağını gösterir. Böylece $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{c_{ökl}}{c_{kiir}} = 1$ olur. Buna göre k nin küçük değerleri için $c_{ökl}$ ile c_{kiir} arasındaki fark ihmal edilebilir.

Diğer taraftan $\lim_{C \rightarrow \pi} \frac{c_{ökl}}{c_{kiir}} = 1$ dir.

Bunun sebebi de bu durumda c 'nin uzunluğunun giderek $a+b$ ye yaklaşıyor olmasıdır.

c 'nin maksimum değeri ise $k = \frac{\pi}{2}$ olduğunda alınır.

Bunu kanıtlayalım:

$$c = \text{Arc cos}(\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)$$

ifadesini k ya göre türetirsek:

$$\frac{dc}{dk} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)}} (-2 \cos k \sin k + 2 \sin k \cos k \cos C)$$

veya

$$\frac{dc}{dk} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)}} (\cos k \sin k (\cos C - 1))$$

veya

$$\frac{dc}{dk} = \frac{-2 \cos k \sin k (\cos C - 1)}{\sqrt{1 - (\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)}}$$

buluruz.

$\frac{dc}{dk}$ yı 0 ya da tanımsız yapan k değerleri c 'nin kritik değerleridir. O halde yukarıdaki eşitliğin sağ yanında bulunan kesrin payını 0' a eşitlersek veya paydasını 0' a eşitleyerek c 'nin kritik değerlerini elde ederiz.

Böylece c 'yi kritik yapan k değerini elde ederiz. Şimdi payını 0' a eşitleyerek,

$$-2 \cos k \sin k (\cos C - 1) = 0 \text{ dan } -2(\cos C - 1) \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$$\cos k \sin k = 0 \text{ buluruz.}$$

O halde $\cos k = 0$ veya $\sin k = 0$ olmalıdır.

$$\text{Buradan } k = \frac{\pi}{2} \text{ veya } k = 0 \text{ veya } k = \pi \text{ buluruz.}$$

Şimdide paydayı sıfır'a eşitleyelim:

$$\sqrt{1 - (\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)} = 0$$

veya

$$\cos^2 k + \sin^2 k \cos C = 1$$

buluruz.

Buradan $1 - \cos^2 k = \sin^2 k$ olduğundan,

$$\cos^2 k = \frac{1 - \cos C}{1 - \cos C} \text{ ve } k = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 - \cos C}} \text{ den } k = 0 \text{ veya } k = \pi \text{ elde ederiz.}$$

Sonuç olarak kritik noktalar: $k = \frac{\pi}{2}$, $k = 0$ ve $k = \pi$ dir.

Şimdi de, k 'nın bu kritik değerlerinden hangisinin maksimuma karşılık geleceğine bakalım. Bunun için,

$$\frac{dc}{dk} = \frac{-2 \cos k \sin k (\cos C - 1)}{\sqrt{1 - (\cos^2 k + \sin^2 k \cos C)}}$$

ifadesinde $\cos C - 1$ her zaman negatiftir. Çünkü $|\cos C| < 1$ dir.

Bu ifadede payda ≥ 0 dır.

$-2 < 0$ olduğundan k bir kritik değer değilse $\frac{dc}{dk}$ nın işareti her zaman $\cos k \sin k$ nın işareti ile aynıdır.

$0 < k < \frac{\pi}{2}$ olduğunda $\cos k$ ve $\sin k$ 'nın her ikisi de pozitif olduğundan $\frac{dc}{dk}$ pozitifdir.

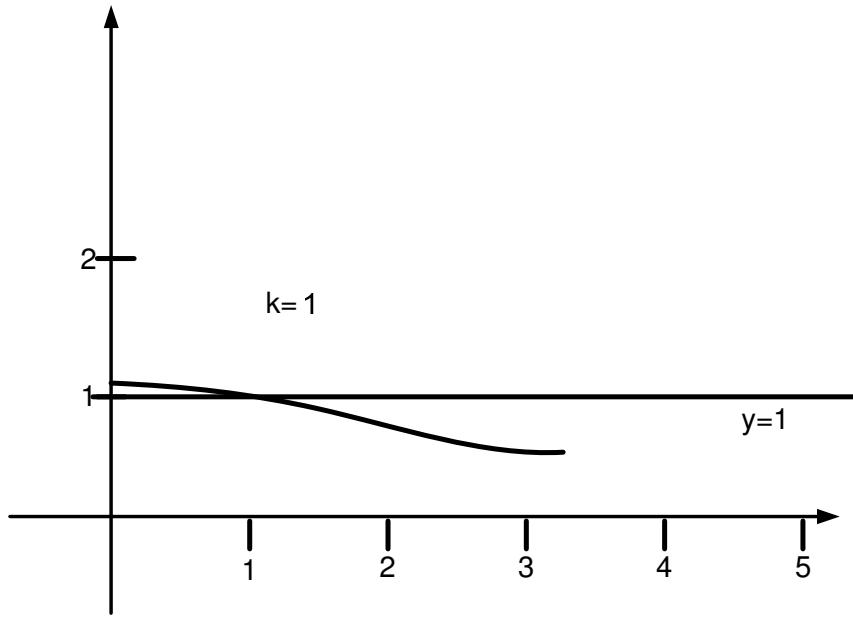
$\frac{\pi}{2} < k < \pi$ olduğunda $\cos k$ negatif ve $\sin k$ pozitifdir.

Dolayısıyla $\frac{dc}{dk}$ daima negatif olacaktır. Diğer taraftan $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında c daima artan ve $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ aralığında c daima azalan olduğundan $k = \frac{\pi}{2}$ de yerel maksimuma sahiptir.

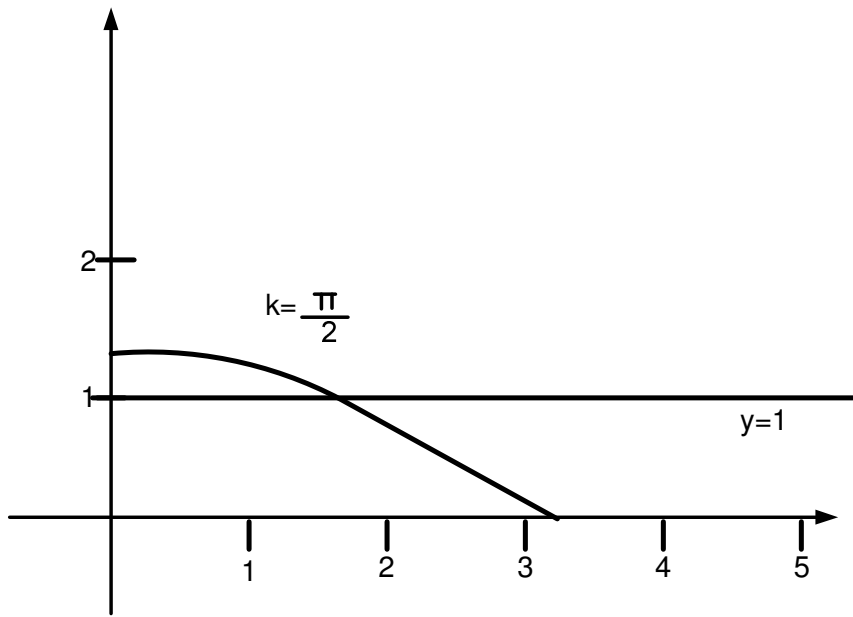
Üstelik c 'nin başka hiç bir yerel maksimumu olamayacağından $k = \frac{\pi}{2}$, c 'nin bir mutlak maksimumu olur.

$\frac{Alan_{ökl}}{Alan_{kürr}}$ fonksiyonunun C değişkenine göre $k = 1$ ve $k = \frac{\pi}{2}$ olması halinde

grafikleri aşağıdaki gibidir:

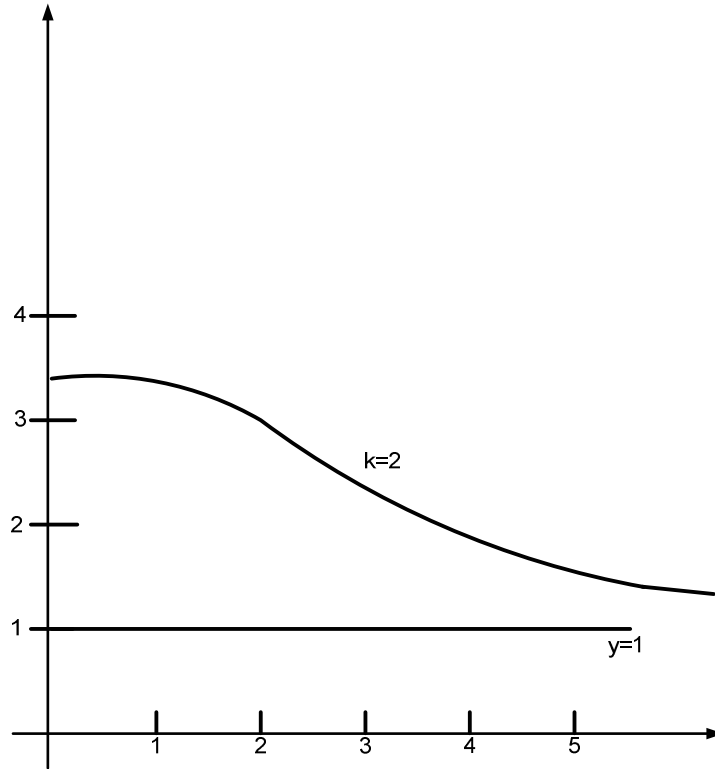


Şekil 14.(a)



Şekil 14.(b)

Buna göre $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{Alan_{ökl}}{Alan_{kür}} = 1$ dir. k artarken eğrinin y eksenini kestiği noktada yükselir. k azalırken $\lim_{C \rightarrow \pi} \frac{Alan_{ökl}}{Alan_{kür}}$ limit değeri azalır ve $k = \frac{\pi}{2}$ de sıfır minimumuna ulaşır. $k > \frac{\pi}{2}$ halinde grafik aşağıdaki gibidir:



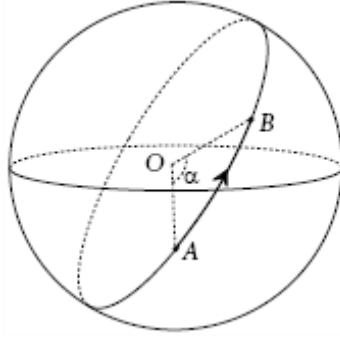
Şekil 15.

3.BÖLÜM

KÜRENİN ALANI ve KÜRESEL PİSAGOR TEOREMİ

3.1 Büyük Çemberler Üstünde Uzaklık

Tanım 6. Bir küre üzerindeki A noktasıyla B noktasını birleştiren büyük çember üzerinde AOB açısı α radyan ise, AB yayının uzunluğu $r\alpha$ olur.Yine aksi yönde büyük çemberden ayrılmadan gidersek AB yayının uzunluğu $r(2\pi - \alpha)$ olur.Eğer A'dan herhangi bir yönde yola çıkıp, büyük çember üzerinde gene A noktasına gelirsek aldığımız yol $2\pi r^2$ olacaktır.



Şekil 16.

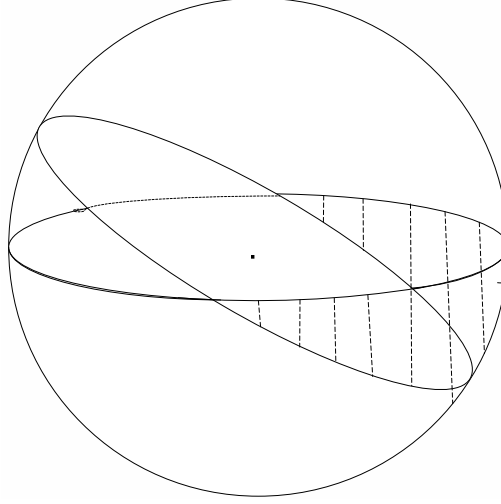
3.2 Kürenin Alanı

Yarıçapı r olan bir kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$ dir. Bir küre yüzeyindeki büyük çemberler arasındaki açıya α dersek çemberlerin arasında kalan dilimin alanı $2\alpha r^2$ ye eşittir çünkü $4\pi r^2$ olan toplam küresel alanı 2π radyana bölersek 1 radyanlık küresel dilimin alanını buluruz $(2r^2)$; bunu α la çarparsak α radyanlık dilimin alanını buluruz.



Küre üzerindeki poligonal bölgelerin alanı ile ilgili aşağıdaki dört özelliği ifade edelim:

- 31



Şekil 18. Bir küresel yüzey dilimi

Yukarıdaki varsayımlardan dördüncü varsayım şunu gösterir:

Küresel yüzey diliminin alanına kısaca A_{KYD} dersek ; $A_{KYD} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2\alpha r^2$

olur.

Teorem 1. (Girard Teoremi)

Köşe açıları α, β ve γ olan bir küresel üçgenin alanı Δ ise,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\Delta}{r^2}$$

dir.

Kanıt.

Küresel üçgenlerin köşe açılarıyla alanı arasındaki ilişkiyi genel olarak inceleyelim:

ABC küresel üçgeni düşünürsek, $ABCA'$ diliminin alanı $2\alpha r^2$ dir.

(A', A nın karşıt noktasıdır.) BCA' küresel üçgeninin alanına x dersek, $2\alpha r^2 = \Delta + x$ ve $ABCB'$ dilimine bakarsak ACB' küresel üçgeninin alanına y dersek, $2\beta r^2 = \Delta + y$ olur.

Aynı şekilde ABC' küresel üçgeninin alanını z ile gösterirsek, $2\gamma r^2 = \Delta + z$ elde ederiz.

Yukarıda elde edilen üç eşitliği toplayarak,

$$2\pi r^2 = 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 3\Delta + \Delta$$

$$2\Delta = 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 2\pi r^2$$

$$\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2$$

bulunur.

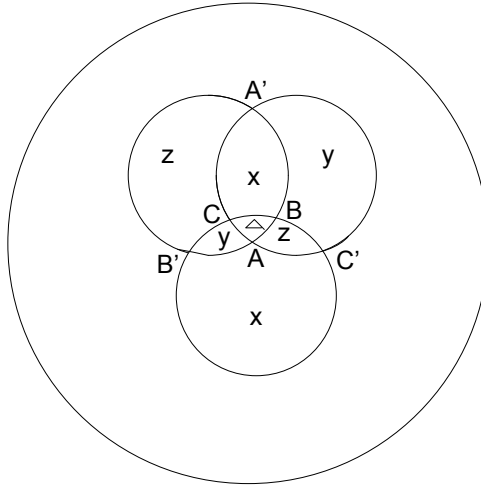
Bir küresel üçgen ile karşıtlarının alanlarının eşit olduğunu hatırlayarak (örneğin $A'BC'$ küresel üçgeniyle $AB'C$ küresel üçgenleri karşılaştıralım.) şöyle diyebiliriz;

$$\Delta + x + y + z = 2\pi r^2 \text{ ise}$$

son iki eşitlikten,

$$\Delta + \pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma) r^2$$

buluruz.



Şekil 19. (Δ , ABC küresel üçgenin alanıdır)

Kürenin Alanı:

$$4\pi r^2 = 2(\Delta + x + y + z)$$

dir.

Teorem1.1’de görüldüğü üzere, yarıçapı r olan bir kürede, iç açıları α , β , ve γ olan bir $\triangle ABC$ üçgenin alanı:

$$\Delta = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

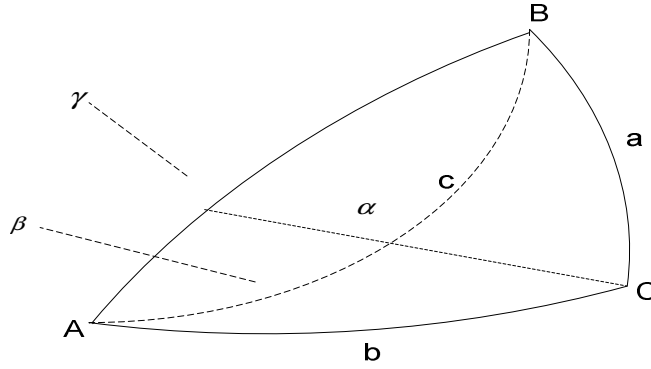
dir.

Teorem 2. (Küresel Pisagor Teoremi)

Küre üzerinde r yarıçaplı C tepe noktasında dik açığa sahip bir dik üçgen için $\triangle ABC$ üçgeninin uzunlukları a , b ve c olmak üzere,

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cdot \cos\left(\frac{b}{r}\right)$$

dir.



Şekil 20. (Küresel Dik Üçgen)

Kanıt. A noktasının koordinatları $(r, 0, 0)$ olacak şekilde küreyi döndürürsek ve C noktasının xy - düzleminde bulunduğunu düşünürsek β ve $\frac{\pi}{2}$ açıları B noktasını belirleyen açılardır. Burada β ; AC kenarı tarafından belirlenen merkezi açı, $\frac{\pi}{2}$; CB tarafından belirlenen bir açı ve γ ; AB tarafından belirlenen bir açı olur. Bunları kullanarak üçgenin tepe noktası için aşağıdaki küresel koordinatları buluruz;

$$\begin{aligned}
A &= (r, 0, 0) \\
B &= \left(r \cdot \cos(\beta) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), r \cdot \sin(\beta) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \\
&= (r \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\alpha)) \\
C &= (r \cdot \cos(\beta), r \cdot \sin(\beta), 0)
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ de γ açısının kosinüsü,

$$\cos(\gamma) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} = \frac{r^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{r^2} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (4)$$

şeklindedir.

$$\alpha = \frac{a}{r}, \beta = \frac{b}{r}, \gamma = \frac{c}{r}$$

ifadelerini (4)de yerine yazarsak,

$$\cos\left(\frac{c}{r}\right) = \cos\left(\frac{a}{r}\right) \cdot \cos\left(\frac{b}{r}\right)$$

elde ederiz.

Bu, niçin Küresel Pisagor Teoremi olarak adlandırılmıştır? Öncelikle bu teorem bana dik açının hipotenüsünün üçgenin diğer kenarlarıyla ilişkisini vermektedir, bu sebeple Klasik Pisagor Teoremi ile ilişkisini görmek için, Maclaurin Serilerini kullanarak,

(Taylor serilerinde $a=0$) kosinüs fonksiyonu için:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Küresel Pisagor teoreminde bu formülü kullanarak;

$$1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4} - \dots = \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4} - \dots\right) \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} - \dots\right)$$

$$1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4} - \dots = 1 - \frac{a^2}{2r^2} - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{a^2b^2}{24r^4} + \dots$$

$$c^2 - \underbrace{\frac{c^4}{12r^2}}_{(c)} + \dots = a^2 + b^2 - \underbrace{\frac{a^2b^2}{12r^4}}_{(a_{ve}b)} + \dots$$

$$c^2 + \frac{(c)}{r^2} = a^2 + b^2 + \frac{(a_{ve}b)}{r^2}$$

elde ederiz.

Eğer, r 'yi büyütüp sonsuza yaklaştırırsak klasik Pisagor Teoremine yani $c^2 = a^2 + b^2$ limit haline ulaşmış oluruz.

4.BÖLÜM

KÜRESEL GEOMETRİNİN BİR UYGULAMASI

4.1 Sığ Suda Dalga Denklemleri

Sığ su akımının denklemleri momentum ve kütle korunma kanunlarını ifade edebilen denklemler olarak,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -f\mathbf{k} \times \mathbf{v} - g\nabla h + \mathbf{F}_v \quad (4.1)$$

ve

$$\frac{dh^*}{dt} = -h^* \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_h \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v)$ hız vektörü, u ve v bileşenleri θ ve ϕ yönündeki hızları göstermektedir. Serbest su yüzeyinin yüksekliğini $h = h^* + h_s$ şeklinde göstereceğiz.

Böylece h_s su yüzeyini h^* ise suyun derinliğini ve

$$\frac{d}{dt}(\quad) \text{ notasyonu, } \frac{d}{dt}(\quad) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\quad) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\quad) \quad (4.3)$$

göstermektedir. Etkiyen dış kuvvetler eğer mevcut ise, $\mathbf{F}_v = (\mathbf{F}_u, \mathbf{F}_v)$ ve F_h şeklinde ifade edilmektedir.

Görüldüğü gibi (4.1), (4.2) denklemleri sistemi nonlineer hale getirmektedir ve söz konusu denklemlerin gerçek çözümünü elde etmek imkansızdır. Bu nedenle genelde (4.1), (4.2) denklemler sisteminin çözümü nümerik yöntemler yardımı ile elde edilir.

Fakat bu denklemler divergence biçimde olmadığı için onların sonlu fark karşılığı da konservatif şema oluşturamaz ve buda fiziksel yanlışlara neden olmaktadır.

Bu nedenle bu bölümde (4.1), (4.2) denklemler sistemini divergence denklemler şeklinde ifade edeceğiz.

Daha kolay olması bakımından küre yüzeyi üzerinde yatay eksen boyunca türevleri hesaplamak için bir kartezyen koordinat sistemi kullanacağız.

Yüzey vektörünü $\mathbf{v} = (u, v)^T$ şeklinde gösterelim ve bu vektörü üç boyutlu hale genişletelim, yani $\mathbf{v}_s = (w, v, u)^T$ gibi gösterelim.

Bu durumda momentum denklemleri,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + S(\mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta} = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde bir tek denklemle gösterilebilir.

Burada,

$$S(\mathbf{v}_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial_w}{\partial_r} & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial_w}{\partial_\theta} - v \right) & \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial_w}{\partial_\lambda} - u \cos \theta \right) \\ \frac{\partial_v}{\partial_r} & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial_v}{\partial_\theta} + w \right) & \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial_v}{\partial_\lambda} - u \sin \theta \right) \\ \frac{\partial_u}{\partial_r} & \frac{1}{a} \frac{\partial_u}{\partial_\theta} & \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial_u}{\partial_\lambda} - v \sin \theta + w \cos \theta \right) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

şeklindedir. Bu ifadede λ enlemi ve θ boylamı r ise radyal koordinatı göstermekte olup dünyamız üzerinde bu $r = a$ 'dır. Ayrıca,

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + v^2}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ \frac{g}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_v \\ -F_u \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ fu \\ -fv \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

şeklinde verilir.

(x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde hız vektörünü $\mathbf{V} = (X, Y, Z)^T$ şeklinde tanımlarsak

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{Q}\mathbf{V} \quad (4.10)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda & \cos \theta \sin \lambda & \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \lambda & -\sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

şeklindedir. (4.10) denklemini (4.4) de yerine yazıp $\mathbf{Q}^T$ ile çarparsak kartezyen formda

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}) = 0 \quad (4.12)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde,

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{a} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} x(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ y(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ z(X^2 + Y^2 + Z^2) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\delta} = \frac{2\Omega z}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

ve

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\beta} = g \mathbf{P} \nabla_c h \quad (4.16)$$

şeklindedir. (4.16) denkleminde

$$\mathbf{P} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & a^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & a^2 - z^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

ve

$$\nabla_c h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right)^T \quad (4.18)$$

dır.

Benzer şekilde, süreklilik denklemi kartezyen koordinat sisteminde,

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \mathbf{V}^T \mathbf{P} \nabla_c h^* + h^* \nabla_c \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F}_{h^*} \quad (4.19)$$

ile verilir. Buradaki P matrisi, keyfi bir vektörü küreye (x, y, z) noktasında teğet olan düzleme iz düşüren bir dönüşüme karşılık gelmektedir.

4.2 Momentum Denkleminin Küresel Koordinatındaki Yazılım Formu

Küresel koordinat sisteminde tanımlanan girdap, $\zeta \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$ şeklinde olmaktadır. Aşağıdaki eşitliği

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (4.20)$$

kullanarak momentum denklemini,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(gh + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + \mathbf{F}_v \quad (4.21)$$

şeklinde yazabiliriz. Küresel koordinatlardan kartezyen koordinatlara dönüşüm yapmak suretiyle momentum denklemini kartezyen formda,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{Q}^T (\mathbf{\Lambda} + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\Delta}) = 0 \quad (4.22)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde,

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} = \frac{(\xi + 2\Omega_z)}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

ve

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{P} \nabla_c \left(gh + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) \quad (4.24)$$

şeklindedir.

Curl operatörü koordinat dönüşümü altında değişmeyeceğinden,

$$\zeta \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla_c \times \mathbf{V}$$

yazabiliriz.

Burada $\mathbf{k}$ vektörü küreye (x, y, z) noktasında dik olan birim vektördür. Yani $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{x}}{a}$ dır.

Kartezyen koordinat sisteminde curl operatörü standart şekilde

$$\nabla_c \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

ile verilir. Buradaki türevler ise yukarıda tanımladığımız $\mathbf{C}$ matrisinde mevcuttur.

Momentum denkleminin dönel formunun yarı enerjiyi koruduğu çok önemli bir özellik olup momentum denklemini hız ile vektörel olarak çarptığımızda elde edilen diskret kinetik enerji denklemini göz önüne alırsak kolayca görülebilir.

Yüzeyin şeklini ve kuvvetini içeren terimleri ihmal ederek,

$$\mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{(\zeta + 2\mathbf{\Omega z})}{a^2} \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c \left(gh + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) \quad (4.26)$$

Bu denklemi iki parçaya ayırarak birisi sadece hıza dik olan diğeri ise gradyent içerisinde kinetik enerji olarak yok olur. Hız vektörleri küreye teğet vektörler olduğundan ilk terim kartezyen hız ile çarpıldığında sıfır olur böylece,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c \left(gh + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) \quad (4.27)$$

yazarız.

$$\text{Toplam enerjiyi } E = gh + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \text{ ile tanımlayıp (4.27) denkleminde (4.28)}$$

denklemini katarsak diskret enerji denklemini,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c (E) - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c gh - gh \nabla_c \cdot \mathbf{V} \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilir.

Enerjinin korunumu dolayısıyla diskret enerjinin integrali sabit olmalıdır, böylece,

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.29)$$

yazarız. Burada $\bar{E}$ integralin küre üzerinde alındığını göstermektedir, yani $\bar{(\quad)} = \int_{S^2} (\quad)$ notasyonu kullanılmıştır. (4.28) denkleminin integralini alırsak,

$$-\left(\overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c (E)}\right) - \left(\overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \nabla_c gh + gh \nabla_c \cdot \mathbf{V}}\right) = 0 \quad (4.30)$$

bulunur.

Diskret gradyent diskret divergence'nin negatif adjointi ise o zaman enerji denklemi,

$$0 = +\left(\overline{E \nabla_c \cdot \mathbf{V}}\right) - \left(\overline{\nabla_c \cdot (gh \mathbf{V})}\right) \quad (4.31)$$

şekline gelir.

Serbest divergence hızı için ilk terim sıfır olur ve ikinci koşul kütlenin korunması koşuludur. Bu nedenle eğer bu koşullar sağlanırsa diskret enerji de korunacaktır.

SONUÇLAR

1. Geometride yüzey eğriliklerini sınıflandırmak için yüzeyin birbirine dik iki düzlemle kesiminden elde edilen minimum ve maksimum normal eğrilikleri olan asal eğrileri kullanırız. Bu eğriler birbiri ile aynı veya zıt işaretli olabilir. Asal eğriliklerin çarpımından elde edilen Gauss eğriliği $\left\{ K = \left(\frac{1}{R_1} \right) \times \left(\frac{1}{R_2} \right) \right\}, (K = 0), (K > 0)$ veya $(K < 0)$ olabilir. Buna göre yüzeyleri düzlemsel, eliptik, küresel veya hiperbolik olarak sınıflandırabiliriz.
2. $r = 1$ yarıçaplı bir küre üzerindeki bir üçgenin iki kenarları $a = b = k$ ise c kenarı için $0 < c < \pi$ geçerlidir. $0 < k < \pi$ olmak üzere. k artarken $\frac{C_{öklidgen}}{C_{küresel}}$ oranının da artacağı sonucuna ulaştık.
3. Bu çalışmada küresel koordinatlar kullanılarak küresel üçgenler ile ilgili sonuçlar elde edilmiş ve kürenin düzlemlerle arakesitleri kullanılarak sinüs kosinüs bağıntıları karşılaştırılmış ve alan hesaplamaları yapılmıştır. Son bölümde ise küresel geometrinin bir uygulaması olarak, sıg su dalga denklemlerinin küre yüzeyi üzerindeki yatay eksen boyunca hareketini küresel koordinatları kullanarak elde ettik.

KAYNAKÇA

- [1]. Paul R.Rider, Plane and Spherical Trigonometry, New York, The Macmillan Company,1943.
- [2]. Brand,L.,Vector and Tensor Analysis, John Wiley & Sons,Inc.London,1974.
- [3]. Henderson, David W., Experiencing Geometry in Euclidean, Spherical and Hyperbolic Spaces, Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall,2001
- [4].Henderson, David W.,Differential Geometry:A Geometric Introduction, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998
- [5].D. Veljan, The 2500-year-old Pythagorean Theorem, Mathematics Magazine, 73,4,2000.
- [6]. Geometry: Euclid and Beyond by Robin Hartshorne, Springer-Verlag, New York, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

23.04.1971 yılında İstanbul'da doğdum. İlk, orta ve lise öğretimini İstanbul'da tamamladım.1989 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım.1995 yılında mezun oldum. Üç yıl dershanede çalıştıktan sonra İstanbul'da bir lise de matematik öğretmeni olarak göreve başladım.2005 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisansa başladım. Halen Gürpınar ,80. Yıl Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım ve yabancı dilim İngilizce dir.