

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

FATMA ÇOLAK

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİNİN
YÖNLÜ EĞRİLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ÇOLAK
HAZİRAN 2023

KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. İlkay GÜVEN

Fatma ÇOLAK

Haziran 2023



©2023[Fatma ÇOLAK]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Fatma ÇOLAK

ABSTRACT

DIRECTIONAL CURVES OF SPHERICAL INDICATRIX CURVES

ÇOLAK, Fatma

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İlkay GÜVEN

June 2023

72 pages

This study consists of 4 parts. In the first chapter, information about the usage areas of curves, combined curves, directional curves, $\{N, C, W\}$ alternative moving frame is given. In the second chapter, basic information about Frenet derivative formulas and $\{N, C, W\}$ alternative moving frame of tangent indicatrix and principal indicatrix curves of a unit speed curve α are given. In the third chapter, the Frenet apparatus of direction curves of tangent indicatrix curve of the unit speed curve α is investigated in terms of $\{N, C, W\}$ alternative moving frame, in 3-dimensional Euclidean space. Accordingly, general helix, slant helix and C-slant helix characterizations of the curve are given. In fourth chapter, similarly, the Frenet apparatus of direction curves of principal normal indicatrix curve of the unit speed curve α is obtained in terms of the $\{N, C, W\}$ frame. Lastly, same characterizations of the this direction curves are determined and examples are given.

Key Words: Directional curves, Spherical Indicatrix Curves, Integral Curve, Alternative Moving Frame, Helix .

ÖZET

KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ

ÇOLAK, Fatma

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. İlkey GÜVEN

Haziran 2023

72 sayfa

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eğrilerin kullanım alanları, birleştirilmiş eğriler, yönlü eğriler, $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatı hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Frenet türev formülleri, çalışmada kullandığımız birim hızlı bir α eğrisinin teğetler ve asli normal gösterge eğrilerinin $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısı ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 3 boyutlu Öklid uzayında birim hızlı α eğrisinin teğetler gösterge eğrisinin yönlü eğrilerinin Frenet aparatları, $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısı cinsinden bulunmuştur. Buna bağlı olarak eğrinin genel helis, slant helis ve C-slant helis karakterizasyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde, benzer şekilde birim hızlı α eğrisinin asli normal gösterge eğrisinin yönlü eğrilerinin Frenet aparatları, $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısı cinsinden bulunmuştur. Son olarak bu yönlü eğrilerin bazı karakterizasyonları belirlenmiştir ve örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yönlü Eğriler, Küresel Gösterge Eğrileri, İntegral Eğrisi, Alternatif Hareketli Çatı, Helis.



"Canum aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. İlkay GÜVEN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmada maddi destek sağlayan Gaziantep Üniversitesi BAP Yönetim Birimine (FEF.YLT.21.04 no'lu proje) teşekkürlerimi sunarım. Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
İTHAF	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: TEMEL BİLGİLER.....	4
2.1 Eğriler İçin Temel Bilgiler.....	4
2.2 Alternatif Çatı Hakkında Temel Bilgiler	6
BÖLÜM 3: TEĞET GÖSTERGE EĞRİSİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ	9
3.1 Teğet Gösterge Eğrisinin Teğet Vektörünün Yönlü Eğrisi	9
3.2 Teğet Gösterge Eğrisinin Asli Normal Vektörünün Yönlü Eğrisi	17
3.3 Teğet Gösterge Eğrisinin Binormal Vektörünün Yönlü Eğrisi.....	28
3.4 Örnekler	36
BÖLÜM 4: ASLİ NORMAL GÖSTERGE EĞRİSİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ	40
4.1 Asli Normal Gösterge Eğrisinin Teğet Vektörünün Yönlü Eğrisi	40
4.2 Asli Normal Gösterge Eğrisinin Asli Normal Vektörünün Yönlü Eğrisi	51
4.3 Örnekler	68
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ	72

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.4.1 α eğrisi	37
Şekil 3.4.2 α_T eğrisi	37
Şekil 3.4.3 ϑ_1 eğrisi	37
Şekil 3.4.4 ϑ_2 eğrisi	38
Şekil 3.4.5 ϑ_3 eğrisi	38
Şekil 3.4.6 β eğrisi	39
Şekil 3.4.7 β_T eğrisi	39
Şekil 3.4.8 β_T için ϑ_1 eğrisi	39
Şekil 4.3.1 α eğrisi	69
Şekil 4.3.2 α_N eğrisi	69
Şekil 4.3.3 β_1 eğrisi	69
Şekil 4.3.3 β_2 eğrisi	69

SEMBOLLER LİSTESİ

E^3	Üç boyutlu Öklid uzayı
T	Teğet birim vektör
N	Asli normal vektör
B	Binormal vektör
κ	Eğrilik
τ	Torsiyon
C	Asli normal vektörün türevi
W	Darboux vektörü
X	İntegral eğrisi
α	Birim hızlı eğri
α_T	Teğetler gösterge eğrisi
α_N	Asli normal gösterge eğrisi
s	α eğrisinin yay parametresi
f	$\{N, C, W\}$ Alternatif hareketli çatısının eğriliği
g	$\{N, C, W\}$ Alternatif hareketli çatısının eğriliği
H	Harmonik eğrilik
σ	Geodezik eğrilik

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin eğriler teorisi konusu uzun zamandır üzerinde çalışma yapılan alanlarından birisidir. Eğrilerin kullanım alanları çok geniştir. Örneğin helis eğrilerini; hayvan boynuzlarında, deniz kabuklarında ve en önemlisi DNA molekül yapısında görülür. En çok bilinen örneği vidadır. Eksen doğrultusu boyunca dönmeyi harekete transfer eden bir helis yapısıdır. Eğri türlerinin farklı alanlardaki kullanımlarını görmek de mümkündür. Mesela eliptik eğriler kriptografide, Bezier eğrileri düzgün eğrileri modellemek için bilgisayar grafiklerinde kullanılmaktadır.

Eğrilerin rol aldığı en önemli kısımlardan biri ise yüzeylerdir. Doğa, fizik, endüstri, mühendislik alanlarının birçok yerinde kullanılan yüzey kavramını oluşturmada eğrilerden yararlanılmaktadır.

Eğri teorisi içinde ise birleştirilmiş eğriler en ilgi çekici olanlarındandır. İki ya da daha fazla eğri arasında matematiksel bir ilişki var ise bu eğrilere *birleştirilmiş eğriler* denir. Birleştirilmiş eğrilerin en iyi bilinen örnekleri, involüt-evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleridir. Son zamanlarda, Choi ve Kim [2] yeni bir birleştirilmiş eğri tipini gündeme getirmişlerdir. Bu eğriyi, verilen bir eğrinin Frenet vektör alanlarından birinin integral eğrisi olarak tanımlamışlardır ve ismine *yönlü eğri* adını vermişlerdir. Birleştirilmiş eğrilerin eğrilik ve torsiyon ilişkilerini vermişlerdir. Genel helis ve slant helisleri birleştirilmiş eğri açısından karakterize etmişlerdir ve bu helisleri inşa etmek için kanonik metod vermişlerdir. Bu yeni birleştirilmiş eğriler üzerine birçok araştırmacı çalışmıştır. Qian ve Kim [13] yönlü eğrileri, 3 boyutlu Minkowski uzayında araştırmışlardır. Macit ve Döldül [11] bu yönlü eğrilerden esinlenerek yeni bir eğri olan *W-yönlü eğrileri* verilen eğrinin birim Darboux vektörünü kullanarak tanımlamışlardır. Darboux çatısı yardımıyla da bir 2-yüzey üzerinde verilen eğrinin *V-yönlü* eğrisini tanıtmışlardır. Körpınar ve diğerleri [9] yönlü eğrileri Bishop çatısı kullanarak yeniden vermişlerdir. Kızıltuğ ve

Önder [8] yönlü eğrileri 3 boyutlu kompakt Lie grubunda tanımlayıp, burada bazı teorileri çalışmışlardır. Küresel gösterge eğrileri de eğri teorisinde birleştirilmiş eğri kategorisine girmektedir ve yine popüler olarak çalışılan eğrilerdendir. Kula ve Yaylı [10] slant helislerin küresel gösterge eğrilerini çalışmışlardır. Küresel göstergelerinin küresel helisler olduğunu bulmuşlardır. Şahiner gösterge eğrileri ile yönlü eğrileri ilişkilendirip, [15] nolu makalesinde; teğet gösterge eğrisinin yönlü eğrisini araştırmıştır. Bu eğriler de birleştirilmiş eğri sınıfına girmektedirler. Bu eğrilerin eğrilikleri arasında bazı ilişkiler vermiştir. Birim küre üzerindeki çember, küresel helisler ve küresel slant helislerden, genel helis ve slant helis elde etme metodlarını bulmuştur. Şahiner benzer durumları asli normal gösterge eğrisinin yönlü eğrisinde de araştırmıştır [14].

Diğer taraftan eğri teorisinde çalışırken eğrilerin çatıları, onların karakterizasyonlarını araştırmada çok önemlidir. Birçok adapte eğri çatısı örneği vardır. Bunlardan en çok bilinen ve kullanılanı hareketli bir çatı olan *Frenet çatısıdır*. Çok iyi bilinmesine rağmen, eğrinin ikinci türevi sıfır olduğunda tanımlı değildir ve bu durum, çatının bir genel eğrinin teğeti boyunca dönmesinde genelde hareket dizaynında ya da yüzey modellemesinde istenmeyen bir bükülmeye yol açar. Genel bir eğrinin teğeti boyunca dönme yapmayan hareketli çatıya *hareketli minimize çatı* (rotating minimizing frame-RMF) denir. Bu çatı herhangi bir eğri için sürekli şekilde tanımlanır. RMF çatısı, minimal dönme özelliği ve dönüm noktalarının varlığındaki sabit davranışından dolayı birçok bilgisayar grafiğinde Frenet çatısı yerine tercih edilmektedir. Fakat tercih edilmesine rağmen bu çatının hesaplanması oldukça zordur. Bunun üzerine Bishop [1] alternatif bir çatı olan *Bishop çatısını* tanımlamıştır. Bishop çatısı bir paralel nakil çatısıdır (paralel transport frame). Paralel nakil çatısı; sıfır olan ikinci türeve sahip eğriler için tanımlanabilen bir alternatif çatıdır. Son yıllarda tanımlanan başka bir eğri çatısı türü de *Flc çatıdır*. Dede [3], polinom tipli eğriler için Flc-benzer çatıyı tanımlamıştır. Bu yeni çatı; eğri n .inci dereceden bir polinom eğrisi olmak üzere, eğrinin birinci ve n .inci türevlerinin vektörel çarpımı yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu çatının avantajı Frenet çatısında tanımlanmayan singüler noktaların sayısını azaltmasıdır. Yeni tanımlı diğer ilgi çeken çatılardan biri de Uzunoğlu ve diğerlerinin [17] tanımladığı alternatif hareketli bir çatı olan $\{N, C, W\}$ çatısıdır. Bu çatıyı tanımlanırken, eğrinin eğrilik ve torsiyonunu kullanarak yeni f ve g isimlerinde eğrilikler de tanımlamışlardır. Yeni

çatıya dayanarak ilk defa C-slant helis kavramını vermişlerdir. Bu tür helis, bir eğrinin teğet gösterge ve binormal gösterge eğrilerinin küresel slant helis olduğu durumdur. C-slant helisin bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir ve C-sabit prosessiyon eğrisinin bir C-slant helis olduğunu göstermişlerdir. Bir eğrinin küre üzerinde yer alan ve kendisiyle birleştirilmiş eğriler olan teğet gösterge, asli normal gösterge ve binormal gösterge eğrilerinin Frenet aparatlarını (yani Frenet vektörlerini, eğrilik ve torsiyonunu) $\{ N, C, W \}$ çatı aparatları cinsinden vermişlerdir.

Bu tezde yeni bir alternatif hareketli çatı olan $\{ N, C, W \}$ çatısı kullanılarak küresel gösterge eğrileri ve yönlü eğriler bir arada düşünülüp, bu eğriler arasında ilişkiler araştırılmıştır. Şahiner [15] makalesinde, teğet gösterge eğrisinin yönlü eğrisini araştırırken bilinen Frenet çatısını, eğrinin eğrilik ve torsiyonunu kullanarak sonuçlara ulaşmıştır. Burada ise gösterge eğrilerinin yönlü eğrileri çalışılırken $\{ N, C, W \}$ çatı aparatları kullanılmıştır. Araştırma içerisinde bulunacak sonuçlar yeni f ve g eğrilikleri cinsinden incelenmiştir. Küresel gösterge eğrilerinin yönlü eğrilerine bu bakış açısından yaklaşmak ilginç sonuçlar vermiştir. Benzer çalışmalar farklı çatılar alınıp, yeni tipten eğri aparatları ile de incelenebilir. Bu kapsamda araştırmacılara, yeni fikirler konusunda ışık tutmaktadır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1 Eğriler İçin Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1: Matematikte **eğri**; doğruya benzeyen fakat düz olmak zorunda olmayan bir objedir. Topolojik olarak ise tanımı; bir aralığın topolojik uzaya gittiği sürekli bir fonksiyondur. Diferansiyel geometride **eğri**; I bir aralık, X de diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $\alpha : I \rightarrow X$ şeklindeki diferansiyellenebilir fonksiyona denir(Struik,1988).

Tanım 2.1.2: 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisinin **adapte çatısı** $\{v_1, v_2, v_3\}$ vektör üçlüsünün koleksiyonudur. Burada v_i 3-boyutlu Öklid uzayının ortonormal bir bazını oluşturur öyle ki v_1 , α eğrisine teğettir ve v_2, v_3 vektörleri keyfi olarak v_1 vektörüne normal olacak şekilde düzlemden seçilirler(Do Carmo, 1976).

Teorem 2.1.1: α reguler bir uzay eğrisi ve $\alpha' \times \alpha'' \neq 0$ olmak üzere, üç tane ortogonal vektör alanına eğrinin **Frenet Çatısı** denir. Bu vektörler;

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad (1)$$

şeklindedir. Burada T teğet vektör, N asli normal vektör, B binormal vektör olarak adlandırılır. Eğrinin eğrilik ve torsiyonu ise

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (2)$$

şeklinde hesaplanır ve Frenet Türev formülleri;

$$T' = \kappa N \quad N' = -\kappa T + \tau B \quad B' = -\tau N \quad (3)$$

ile verilir (Struik, 1988).

Tanım 2.1.3: Bir eğrinin Frenet çatısındaki her bir vektörünü birim kürenin merkezine taşıyarak, kürenin yüzeyi üzerinde vektörlerin uç noktalarının birleştirilmesiyle oluşan eğrilere **küresel gösterge eğrileri** denir. T teğet vektörün, N asli normal vektörün ve B binormal vektörün oluşturduğu gösterge eğrilerine sırasıyla teğet gösterge, asli normal gösterge ve binormal gösterge eğrileri denir (Struik, 1988).

Tanım 2.1.4: İntegral eğrisi bir diferansiyel denklem ya da denklem sistemine özel çözüm veren parametrik bir eğridir. X bir vektör alanı ve $\alpha(t)$ parametrik eğri olması durumunda, eğer $\alpha(t)$ eğrisi $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ diferansiyel denkleminin bir çözümü ise $\alpha(t)$ eğrisine **integral eğrisi** denir (Struik, 1988).

Teorem 2.1.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 3 boyutlu öklid uzayında tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin ortonormal Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T = \frac{d\alpha}{ds}, N = \left(\frac{1}{\kappa} \right) T', B = T \times N,$$

Burada T birim teğet vektör alanı, N birim asli normal vektör alanı ve B birim binormal vektör alanıdır, $\kappa = \|T'\|$ eğrinin **eğriliği**, s α 'nın yay uzunluk parametresidir. Frenet türev formülleri matris formunda şu şekilde de verilebilir;

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

burada T ve N vektörlerinin kapsadığı, salınım düzleminden eğrinin sapma miktarını ölçen

$$\tau = -\langle B', N \rangle \quad (4)$$

ifadesine **torsiyon** denir (Do Carmo, 1976; O'Neill, 2006).

Teorem 2.1.3: Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $H = \frac{\tau}{\kappa}$ fonksiyonunun sabit olmasıdır (Gray vd., 2006).

Teorem 2.1.4: Bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \text{ fonksiyonunun sabit olmasıdır (Izumiya ve Takeucki, 2004).}$$

Tanım 2.1.5: Bir α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere α eğrisinin küresel göster eğrilerinin denklemleri

$$\begin{aligned} \alpha_T &= T \\ \alpha_N &= N \\ \alpha_B &= B \end{aligned} \tag{5}$$

şeklindeir. Bu eğriler sırası ile teğet gösterge, asli normal gösterge ve binormal gösterge eğrileridir (Struik, 1988).

2.2 Alternatif Çatı Hakkında Temel Bilgiler

Teorem 2.2.1: Yeni eğri çatılarından biri olan eğri boyunca alternatif hareketli $\{N, C, W\}$ çatısı şöyle tanımlanır:

N vektörü birim asli normal vektör, C vektörü asli normal vektörün türevi ve W vektörü de Darboux vektör olmak üzere;

$$C = \frac{N'}{\|N'\|}, \quad W = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

ile verilir. Burada bu yeni çatıya göre eğrilikler f ve g fonksiyonlarıdır.

$$\text{Bir eğrinin harmonik eğriliği: } H = \frac{\tau}{\kappa} \quad \text{ve} \tag{6}$$

asli normal gösterge eğrisinin geodezik eğriliği,

$$\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \tag{7}$$

olmak üzere

$$f = \kappa \sqrt{1+H^2} \quad \text{ve} \quad g = \sigma f \quad (8)$$

ile hesaplanır (Uzunoğlu vd., 2016).

Burada H ve σ arasındaki ilişki ve Γ fonksiyonu

$$\sigma = \frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma = \frac{\sigma'(s)}{f(s)(1+\sigma^2(s))^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

şeklindedir (Uzunoğlu vd., 2016).

Teorem 2.2.2: Birim hızlı bir α eğrisinin, C vektörü sabit bir u doğrultusu ile sabit $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ açısını yapıyorsa, bu eğriye **C-slant helis** denir. Yani; C vektörü ve sabit doğrultu arasındaki açı θ olmak üzere, $\langle C, u \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$ ve α , C-slant helistir gerek ve yeter şart

$$\frac{(f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{f^2 \left(\frac{g}{f} \right)'} = \tan \theta = \text{cons tan } t \quad (10)$$

olmasıdır (Uzunoğlu vd., 2016).

Teorem 2.2.3: Bir α eğrisinin, α_T teğetler gösterge eğrisinin Frenet aparatları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ olsun. α_T gösterge eğrisi ile α eğrisi arasındaki Frenet vektör ilişkileri $\{N, C, W\}$ çatısı cinsinden şöyledir;

$$\begin{aligned}
T_T &= N \\
N_T &= \frac{\kappa}{f}(-T + HB) \\
B_T &= \frac{\kappa}{f}(HT + B) \\
\kappa_T &= \frac{f}{\kappa} \text{ ve } \tau_T = \frac{g}{\kappa} \\
\frac{ds}{ds_T} &= \frac{1}{\kappa}
\end{aligned} \tag{11}$$

s_T α_T 'nin yay parametresidir (Uzunoğlu vd., 2016).

Teorem 2.2.4: α 'nın asli normal göstergesi α_N eğrisi olsun. α_N 'nin Frenet aparatları $\{T_N, N_N, B_N, \kappa_N, \tau_N\}$ olsun. α_N göstergesi ile α eğrisi arasındaki Frenet vektör ilişkileri $\{N, C, W\}$ çatısı cinsinden şöyledir;

$$\begin{aligned}
T_N &= \frac{\kappa}{f}(-T + HB) \\
N_N &= \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f}(HT + B) - \frac{1}{\sigma} N \right] \\
B_N &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f}(HT + B) + \sigma N \right] \\
\kappa_N &= \sqrt{\sigma^2 + 1} \text{ ve } \tau_N = \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} \\
\frac{ds}{ds_N} &= \frac{1}{f}
\end{aligned} \tag{12}$$

s_N, α_N 'nin yay parametresidir (Uzunoğlu vd., 2016).

Tanım 2.2.1: α eğrisi $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen regüler bir eğri olsun. Eğer α_T eğrisi, α 'nın teğet gösterge eğrisi ve α_T 'nin Frenet aparatları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ ise;

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= \int T_T \\
\mathcal{G}_2 &= \int N_T \\
\mathcal{G}_3 &= \int B_T
\end{aligned} \tag{13}$$

Integral eğrilerine α_T 'nin **yönlü eğrileri** denir (Şahiner, 2019).

BÖLÜM 3

TEĞET GÖSTERGE EĞRİSİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ

3.1. Teğet Gösterge Eğrisinin Teğet Vektörünün Yönlü Eğrisi

Bu bölümde; bir α eğrisinin teğet gösterge eğrisinin teğet vektörünün integrali alınarak, yönlü eğrisi araştırılmıştır.

Bu yönlü eğri ile ilgili bilgiler $\{N, C, W\}$ alternatif çatı aparatlarıyla verilmiştir.

α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α_T eğrisi, α 'nın teğet gösterge eğrisi ve α_T 'nin Frenet aparatları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ ise; $\mathcal{G}_1 = \int T_T ds_T$ yönlü eğrisi α_T teğet gösterge eğrisinin T_T yönlü eğrisidir.

$\mathcal{G}_1 = \int T_T ds_T$ yönlü eğrisi için $\{T_{\mathcal{G}_1}, N_{\mathcal{G}_1}, B_{\mathcal{G}_1}, \kappa_{\mathcal{G}_1}, \tau_{\mathcal{G}_1}\}$ Frenet aparatlarını bulalım. ds_T α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametresi olsun.

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{G}_1} &= \frac{d\mathcal{G}_1}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\int T_T ds_T \right) = T_T \Rightarrow T_{\mathcal{G}_1} = T_T \\ &\Rightarrow T_{\mathcal{G}_1} = N \end{aligned}$$

$T_{\mathcal{G}_1}$, $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin teğet vektörüdür.

$$\frac{d\mathcal{G}_1}{ds_T} = T_T \Rightarrow \left\| \frac{d\mathcal{G}_1}{ds_T} \right\| = \|T_T\| = \sqrt{N} = 1$$

olduğu için $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisi birim hızlıdır.

$\mathcal{G}_1$ eğrisinin yay parametresinin $ds_{\mathcal{G}_1}$ olduğunu varsayalım. α_T teğet göstergesinin yay parametresi ds_T için,

$$\frac{d\mathcal{G}_1}{ds_{\mathcal{G}_1}} = \frac{d\mathcal{G}_1}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_1}} = \frac{d(\int T_T ds_T)}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_1}} = T_T \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_1}}$$

Son ifadenin normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\mathcal{G}_1}{ds_{\mathcal{G}_1}} \right\| = \|T_T\| \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_1}} \Rightarrow ds_T = ds_{\mathcal{G}_1}$$

olur. Yani, $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisi ile α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametreleri aynıdır.

$\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin teğet vektörü;

$$T_{\mathcal{G}_1} = N$$

şeklindedir.

$\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\mathcal{G}_1} = \frac{\mathcal{G}_1''}{\|\mathcal{G}_1''\|}$$

ile hesaplanır. Buradan,

$$\mathcal{G}_1'' = \frac{d\mathcal{G}_1'}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\frac{d\mathcal{G}_1}{ds_T} \right) = \frac{d}{ds_T} (T_T) = T_T'$$

olacaktır. Öncelikle denklem (3) yardımıyla Frenet türev formülleri kullanılıp T_T' hesaplanırsa,

$$T_T' = \kappa_T N_T$$

elde edilir. Denklem (11) kullanılarak,

$$T_T' = \frac{f}{\kappa} \frac{\kappa}{f} [-T + HB] = [-T + HB] = \mathcal{G}_1''$$

bulunur.

$\|\mathcal{G}_1'\| = \sqrt{H^2 + 1}$ eşitliği göz önüne alınarak $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\mathcal{G}_1} = \frac{\mathcal{G}_1''}{\|\mathcal{G}_1'\|} = \frac{(-T + HB)}{\sqrt{H^2 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{H^2 + 1}}T + \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}}B$$

şeklinde bulunur. Kısaca

$$N_{\mathcal{G}_1} = \frac{-1}{\sqrt{H^2 + 1}}T + \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}}B$$

olur. Şimdi de $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin binormal vektörü $B_{\mathcal{G}_1}$ bulunacaktır. Denklem (1)'deki eşitlik kullanılarak;

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{G}_1} &= T_{\mathcal{G}_1} \times N_{\mathcal{G}_1} \\ &= N \times \left(\frac{-1}{\sqrt{H^2 + 1}}T + \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}}B \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{H^2 + 1}}(N \times T) + \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}}(N \times B) \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin binormal vektörü

$$B_{\mathcal{G}_1} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}}T + \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}}B$$

şeklinde bulunur.

$\mathcal{G}_1$ birim hızlı eğri olduğundan, $\kappa_{\mathcal{G}_1} = \|T_{\mathcal{G}_1}'\|$ ile $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin eğriliği ve denklem (4) ile $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\mathcal{G}_1} = -\langle B_{\mathcal{G}_1}', N_{\mathcal{G}_1} \rangle$ şeklinde hesaplanırsa,

$$\kappa_{\mathcal{G}_1} = \|T_{\mathcal{G}_1}'\| = \|T_T'\| = \|\kappa_T \cdot N_T\| = \sqrt{\kappa_T^2} = \kappa_T \Rightarrow \kappa_{\mathcal{G}_1} = \kappa_T = \frac{f}{\kappa},$$

yani,

$$\kappa_{\mathcal{G}_1} = \frac{f}{\kappa}$$

bulunur.

Diğer taraftan $\mathcal{A}_1$ yönlü eğrisinin torsiyonu için $\tau_{\mathcal{A}_1} = -\langle B_{\mathcal{A}_1}', N_{\mathcal{A}_1} \rangle$ eşitliğinde önce $B_{\mathcal{A}_1}'$ bulunacaktır,

$$B_{\mathcal{A}_1} = \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}T + \frac{1}{\sqrt{H^2+1}}B \quad \text{için}$$

$$X = \frac{H}{\sqrt{H^2+1}} \quad \text{ve} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{H^2+1}} \quad \text{olsun. Denklem (11) kullanılarak,}$$

$$B_{\mathcal{A}_1}' = \frac{dB_{\mathcal{A}_1}}{ds_T} = \frac{d(XT+YB)}{ds} \frac{ds}{ds_T} = \frac{d(XT+YB)}{ds} \frac{1}{\kappa}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \frac{d(XT+YB)}{ds} \frac{1}{\kappa} &= \frac{1}{\kappa} (X'T + XT' + Y'B + YB') = \frac{1}{\kappa} (X'T + X\kappa N + Y'B - Y\tau N) \\ &= \frac{1}{\kappa} (X'T + (X\kappa - Y\tau)N + Y'B) = \frac{X'}{\kappa}T + \frac{(X\kappa - Y\tau)}{\kappa}N + \frac{Y'}{\kappa}B \\ &= \frac{X'}{\kappa}T + \left(\frac{X\kappa}{\kappa} - \frac{Y\tau}{\kappa} \right)N + \frac{Y'}{\kappa}B = \frac{X'}{\kappa}T + (X - YH)N + \frac{Y'}{\kappa}B \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan $B_{\mathcal{A}_1}'$ değeri $\tau_{\mathcal{A}_1} = -\langle B_{\mathcal{A}_1}', N_{\mathcal{A}_1} \rangle$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{A}_1} &= -\left\langle \frac{X'}{\kappa}T + (X - YH)N + \frac{Y'}{\kappa}B, \frac{-1}{\sqrt{H^2+1}}T + \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}B \right\rangle \\ &= -\left(\frac{X'}{\kappa} \frac{-1}{\sqrt{H^2+1}} + \frac{Y'}{\kappa} \frac{H}{\sqrt{H^2+1}} \right) \end{aligned}$$

olur. Burada X' ve Y' değerleri hesaplanıp yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} X = \frac{H}{\sqrt{H^2+1}} \Rightarrow X' &= \frac{H'\sqrt{H^2+1} - \frac{H^2 H H'}{2\sqrt{H^2+1}}}{H^2+1} \\ &= \frac{H'(H^2+1) - H^2 H'}{\sqrt{H^2+1} (H^2+1)} = \frac{H'}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ Y = \frac{1}{\sqrt{H^2+1}} \Rightarrow Y' &= \frac{-\frac{2HH'}{2\sqrt{H^2+1}}}{H^2+1} = \frac{-HH'}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{A}} &= - \left(\frac{H'}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{-1}{\kappa\sqrt{1+H^2}} + \frac{-HH'}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{H}{\kappa\sqrt{1+H^2}} \right) \\ &= \frac{H'}{\kappa(H^2+1)^2} + \frac{H'H^2}{\kappa(H^2+1)^2} = \frac{H'(H^2+1)}{\kappa(H^2+1)^2} = \frac{H'}{\kappa(H^2+1)}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, $\mathcal{A}$ yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\mathcal{A}} = \frac{H'}{\kappa(H^2+1)}$ şeklindedir.

Özetle $\mathcal{A}$ yönlü eğrisinin Frenet aparatları;

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{A}} &= N \\ N_{\mathcal{A}} &= \frac{-1}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B \\ B_{\mathcal{A}} &= \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}T + \frac{1}{\sqrt{H^2+1}}B \\ \kappa_{\mathcal{A}} &= \frac{f}{\kappa} \\ \tau_{\mathcal{A}} &= \frac{H'}{\kappa(H^2+1)}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu son denklemlerde, denklem (7) ve (8) kullanılarak;

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{A}} &= N \\ N_{\mathcal{A}} &= -\frac{\kappa}{f}T + \frac{\kappa}{f}HB \\ B_{\mathcal{A}} &= \frac{\kappa}{f}HT + \frac{\kappa}{f}B \\ \kappa_{\mathcal{A}} &= \frac{f}{\kappa} \\ \tau_{\mathcal{A}} &= \frac{g}{\kappa} = \sigma \frac{f}{\kappa}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilenler, α_T teğet gösterge eğrisinin Frenet aparatlarıyla aynıdır. Bu durum aşağıdaki işlemlerle de görülebilir:

$\alpha_T = T$ ve $\mathcal{G}_1 = \int T_T$ olduğundan;

$$\mathcal{G}_1' = T_T = N$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_T}{ds_T} = \frac{dT}{ds_T} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{ds_T} = \kappa N \frac{1}{\kappa} = N$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_T}{ds_T} = N = \mathcal{G}_1' \Rightarrow \alpha_T' = \mathcal{G}_1'$$

$$\Rightarrow \alpha_T = \mathcal{G}_1 + c \quad \text{ve} \quad c = 0 \text{ alınabilir.}$$

$\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin harmonik eğriliği hesaplanırsa,

$$H_{\mathcal{G}_1} = \frac{\tau_{\mathcal{G}_1}}{\kappa_{\mathcal{G}_1}} = \frac{\frac{H'}{\kappa(H^2+1)}}{\frac{f}{\kappa}} = \frac{H'}{f(H^2+1)} = \frac{H'}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \sigma$$

$$\Rightarrow H_{\mathcal{G}_1} = \sigma$$

elde edilir.

Slant helis için sabit olması gereken $\sigma_{\mathcal{G}_1}$ fonksiyonu denklem (7) kullanılarak hesaplanacaktır.

Burada dikkat edilmesi gereken durum şudur: $\mathcal{G}_1$ eğrisinin yay parametresi $s_{\mathcal{G}_1}, \alpha_T$ eğrisinin yay parametresi s_T ve α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere

$$s_{\mathcal{G}_1} = s_T \quad \text{ve} \quad \frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa} \quad \text{olduğundan,} \quad \mathcal{G}_1 \text{ eğrisinin slant helis olması için sabit}$$

fonksiyon hesaplanırken;

$$\sigma_{\mathcal{G}_1} = \frac{\kappa_{\mathcal{G}_1}^2}{\left(\kappa_{\mathcal{G}_1}^2 + \tau_{\mathcal{G}_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_{\mathcal{G}_1}}{\kappa_{\mathcal{G}_1}} \right)' \text{ ifadesindeki türev } s_{\mathcal{G}_1} \text{ 'e göre türevdir.}$$

Ancak önceden hesaplanan torsiyon ve eğrilikler yerlerine yazıldığındaki değerler için türev s 'ye göre olmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{\kappa_{\mathcal{Q}_1}^2}{(\kappa_{\mathcal{Q}_1}^2 + \tau_{\mathcal{Q}_1}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{ds_{\mathcal{Q}_1}} \left(\frac{\tau_{\mathcal{Q}_1}}{\kappa_{\mathcal{Q}_1}} \right)' = \frac{\frac{f^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{ds_{\mathcal{Q}_1}} \left(\frac{g}{f} \right)' \\
\sigma_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{\frac{f^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{ds} \left(\frac{g}{f} \right) \frac{ds}{ds_{\mathcal{Q}_1}} = \frac{\frac{f^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{ds} \left(\frac{g}{f} \right) \frac{ds}{ds_T} \\
&= \frac{\frac{f^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{g}{f} \right)' \frac{1}{\kappa}
\end{aligned}$$

denklem (10) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{1}{\tan \theta} \kappa \frac{1}{\kappa} \\
\sigma_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{1}{\tan \theta}
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 3.1.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{Q}_1$ de, α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi olsun. $\mathcal{Q}_1$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{Q}_1} &= N \\
N_{\mathcal{Q}_1} &= -\frac{\kappa}{f} T + \frac{\kappa}{f} HB \\
B_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{\kappa}{f} HT + \frac{\kappa}{f} B \\
\kappa_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{f}{\kappa} \\
\tau_{\mathcal{Q}_1} &= \frac{g}{\kappa} = \sigma \frac{f}{\kappa}
\end{aligned} \tag{14}$$

(Güven ve Çolak, 2022).

İspat: (13) nolu denklemlerden ilk denklemin türevi alınarak, (1), (2), (3), (4) ve (8) nolu denklemler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak (14) nolu denklemler elde edilir.

Sonuç 3.1.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_1$ de α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi çakışır (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: (11) ve (14) nolu denklemlerden görüldüğü üzere α_T ve $\mathcal{G}_1$ eğrilerinin Frenet aparatları eşittir. Bunun yanısıra (5) ve (13) nolu denklemlerin birinci türevleri alınarak, Frenet formülleri ve $\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}$ kullanılarak bu sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_1$ de, α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi genel helistir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: (7) ve (11) eşitlikler yardımıyla $\mathcal{G}_1$ eğrisinin harmonik eğriliği $H_{\mathcal{G}_1} = \sigma$ olarak bulunur. Yani, α eğrisinin geodezik eğriliği ile aynıdır. Buradan ispat açıktır.

Teorem 3.1.2: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_1$ de α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi C-slant helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi slant helistir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliği ;

$$\sigma_{\mathcal{G}_1} = \frac{1}{\tan \theta}$$

şeklinde bulunmuştu.

Burada θ , C vektör alanı ve u sabit doğrultu arasındaki açıdır. α eğrisi C-slant helis olduğunda θ sabittir. Böylece $\sigma_{\mathcal{G}_1}$ fonksiyonu da sabittir ve terside geçerlidir.

Teorem 3.1.3: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_1$ de α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi düzlemseldir (Güven ve Çolak, 2022)

İspat: (8) ve (9) denklemleri dikkate alınarak, (11) denklemindeki $\mathcal{G}_1$ eğrisinin

$$\text{burulması } \tau_{\mathcal{G}_1} = \frac{H'}{\kappa(H+1)^2} \text{ hesaplandığında sonuç açıktır.}$$

Yani α genel helis $\Leftrightarrow H$ sabit $\Leftrightarrow H'=0$ 'dır $\Leftrightarrow \tau_{\mathcal{G}_1}=0$ olur. $\Leftrightarrow \mathcal{G}_1$ düzlemseldir.

3.2. Teğet Gösterge Eğrisinin Asli Normal Vektörünün Yönlü Eğrisi

Bu bölümde; bir α eğrisinin teğet gösterge eğrisinin asli normal vektörünün integrali alınarak, yönlü eğrisi araştırılmıştır.

Yine işlemler ve sonuçlar $\{N, C, W\}$ alternatif çatı aparatlarıyla verilmiştir.

α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α_T eğrisi, α 'nın teğet gösterge eğrisi ve α_T 'nin Frenet aparatları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ ise; $\mathcal{G}_2 = \int N_T ds_T$ integral eğrisi, α_T teğet gösterge eğrisinin N_T yönlü eğrisi olsun.

$\mathcal{G}_2 = \int N_T ds_T$ yönlü eğrisi için $\{T_{\mathcal{G}_2}, N_{\mathcal{G}_2}, B_{\mathcal{G}_2}, \kappa_{\mathcal{G}_2}, \tau_{\mathcal{G}_2}\}$ Frenet aparatları bulunacaktır. ds_T , α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametresi olsun.

$$T_{\mathcal{G}_2} = \frac{d\mathcal{G}_2}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\int N_T ds_T \right) = N_T \Rightarrow T_{\mathcal{G}_2} = N_T$$

$$\Rightarrow T_{\mathcal{G}_2} = N_T = \frac{\kappa}{f}(-T + HB).$$

$T_{\mathcal{G}_2}$; $\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin teğet vektörüdür.

$$\frac{d\mathcal{G}_2}{ds_T} = N_T \Rightarrow \left\| \frac{d\mathcal{G}_2}{ds_T} \right\| = \|N_T\| = \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2} (H^2 + 1)} = 1$$

olduğu için $\mathcal{G}_2$ integral eğrisi birim hızlıdır.

$\mathcal{G}_2$ eğrisinin yay parametrisini $ds_{\mathcal{G}_2}$ olduğunu varsayalım. α_T teğet göstergesinin yay parametresi ds_T için,

$$\frac{d\mathcal{G}_2}{ds_{\mathcal{G}_2}} = \frac{d\mathcal{G}_2}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_2}} = \frac{d(\int N_T ds_T)}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_2}} = N_T \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_2}} .$$

Son ifadenin normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\mathcal{G}_2}{ds_{\mathcal{G}_2}} \right\| = \|N_T\| \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_2}} \Rightarrow ds_T = ds_{\mathcal{G}_2}$$

olur. Yani, $\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisi ile α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametreleri aynıdır.

$\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin teğet vektörü;

$$T_{\mathcal{G}_2} = N_T = \frac{\kappa}{f} (-T + HB)$$

şeklindedir.

$\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü $N_{\mathcal{G}_2}$;

$$N_{\mathcal{G}_2} = \frac{\mathcal{G}_2''}{\|\mathcal{G}_2''\|}$$

ile hesaplanır. Buradan,

$$\mathcal{G}_2'' = \frac{d\mathcal{G}_2'}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\frac{d\mathcal{G}_2}{ds_T} \right) = \frac{d}{ds_T} (N_T) = N_T'$$

olacaktır.

Öncelikle denklem (3) yardımıyla Frenet türev formülleri kullanılarak N_T' hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} N_T' &= -\kappa_T T_T + \tau_T B_T = -\frac{f}{\kappa} N + \frac{g}{\kappa} \frac{\kappa}{f} [HT + B] \\ &= \frac{g}{f} HT - \frac{f}{\kappa} N + \frac{g}{f} B = \mathcal{G}_2'' \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \|N_T'\| &= \|\mathcal{G}_2''\| = \sqrt{\frac{g^2}{f^2} H^2 + \frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{f^2}} = \sqrt{\frac{g^2}{f^2} (H^2 + 1) + \frac{f^2}{\kappa^2}} \\ &= \sqrt{\sigma^2 (H^2 + 1) + (H^2 + 1)} = \sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$N_{\mathcal{G}_2} = \frac{\mathcal{G}_2''}{\|\mathcal{G}_2''\|} = \frac{\frac{g}{f} HT - \frac{f}{\kappa} N + \frac{g}{f} B}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}}$$

Denklem (8)'deki eşitlik kullanarak bu işlem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{G}_2} &= \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} T - \frac{f}{\kappa \sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} N + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} B \\ &= \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} T - \frac{\sqrt{H^2 + 1}}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} N + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} B \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\mathcal{G}_2} = \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} T - \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} N + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} B$$

şeklinde olur.

Şimdi $\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin binormal vektörü bulunacaktır. Denklem (1) kullanılarak;

$$B_{\vartheta_2} = T_{\vartheta_2} \times N_{\vartheta_2}$$

$$\begin{aligned} B_{\vartheta_2} &= \left[\frac{\kappa}{f} (-T + HB) \right] \times \left[\begin{array}{l} \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} T - \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} N \\ + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} B \end{array} \right] \\ &= \left(-\frac{\kappa}{f} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right) (T \times N) + \left(-\frac{\kappa}{f} \right) \left(\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} \right) (T \times B) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa}{f} H \right) \left(\frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} \right) (B \times T) + \left(\frac{\kappa}{f} H \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right) (B \times N) \\ &= \frac{\kappa}{f \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} B + \frac{\kappa \sigma}{f \sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} N + \frac{\kappa H^2 \sigma}{f \sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} N + \frac{\kappa H}{f \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} T. \end{aligned}$$

Yukarıda denklem (8) kullanılırsa, ϑ_2 yönlü eğrisinin binormal vektörü;

$$B_{\vartheta_2} = \frac{H}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} N + \frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} B$$

şeklinde bulunur.

ϑ_2 , birim hızlı olduğundan $\kappa_{\vartheta_2} = \|T'_{\vartheta_2}\|$ ile ϑ_2 yönlü eğrisinin eğriliği ve denklem (4)

ile ϑ_2 yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\vartheta_2} = -\langle B_{\vartheta_2}', N_{\vartheta_2} \rangle$ şeklinde hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \kappa_{\vartheta_2} &= \|T'_{\vartheta_2}\| = \|N'_{\vartheta_2}\| = \|\kappa_T T_T + \tau_T B_T\| = \sqrt{\kappa_T^2 + \tau_T^2} = \sqrt{\frac{f^2}{\kappa^2} + \frac{g^2}{\kappa^2}} \\ \Rightarrow \kappa_{\vartheta_2} &= \frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Yani ϑ_2 yönlü eğrisinin eğriliği;

$$\kappa_{\vartheta_2} = \frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{\kappa}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan, $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin torsiyonu için $\tau_{\mathcal{G}_2} = -\langle B_{\mathcal{G}_2}', N_{\mathcal{G}_2} \rangle$ eşitliğinde önce $B_{\mathcal{G}_2}'$ bulunacaktır.

$$B_{\mathcal{G}_2} = \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} N + \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} B \text{ için}$$

$$X_1 = \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}, Y_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} \text{ ve } Z_1 = \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}$$

olsun.

$$B_{\mathcal{G}_2}' = \frac{dB_{\mathcal{G}_2}}{ds_T} = \frac{d(X_1 T + Y_1 N + Z_1 B)}{ds} \frac{ds}{ds_T}$$

$$\frac{d(X_1 T + Y_1 N + Z_1 B)}{ds} \frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa} (X_1' T + X_1 T' + Y_1' N + Y_1 N' + Z_1' B + Z_1 B')$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left(X_1' T + X_1 \kappa N + Y_1' N + Y_1 (-\kappa T + \tau B) + Z_1' B - Z_1 \tau N \right)$$

$$= \frac{1}{\kappa} ((X_1' - \kappa Y_1) T + (X_1 \kappa + Y_1' - Z_1 \tau) N + (Y_1 \tau + Z_1') B)$$

denklem (11) yardımıyla,

$$B_{\mathcal{G}_2}' = \frac{1}{\kappa} ((X_1' - \kappa Y_1) T + (X_1 \kappa + Y_1' - Z_1 \tau) N + (Y_1 \tau + Z_1') B)$$

elde edilir.

$$N_{\mathcal{G}_2} = \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2+1)(H^2+1)}} T - \frac{\sqrt{(H^2+1)}}{\sqrt{(\sigma^2+1)(H^2+1)}} N + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(H^2+1)}} B$$

ifadesinde

$$A_1 = \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2+1)(H^2+1)}} \quad B_1 = -\frac{1}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} \quad C_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(H^2+1)}}$$

denirse,

$$\begin{aligned}\tau_{g_2} &= -\frac{1}{\kappa} < (X_1' - \kappa Y_1)T + (X_1\kappa + Y_1' - Z_1\tau)N + (Y_1\tau + Z_1')B, A_1T + B_1N + C_1B > \\ &= -\frac{1}{\kappa} [A_1(X_1' - \kappa Y_1) + B_1(X_1\kappa + Y_1' - Z_1\tau) + C_1(Y_1\tau + Z_1')] \end{aligned}$$

bulunur.

Önce X_1', Y_1' ve Z_1' değerleri sırasıyla hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \text{ olmak üzere,} \\ X_1' &= \left(\frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right)' \\ &= \frac{H' \sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)} - H \left[\frac{2HH'(\sigma^2+1) + 2\sigma\sigma'(H^2+1)}{2\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right]}{(H^2+1)(\sigma^2+1)} \\ &= \frac{H'(H^2+1)(\sigma^2+1) - H^2H'(\sigma^2+1) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \\ &= \frac{H'(\sigma^2+1)(H^2+1-H^2) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} = \frac{H'(\sigma^2+1) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{[(H^2+1)(\sigma^2+1)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\kappa H'(\sigma^2+1)}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{H\sigma\sigma'(H^2+1)}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\kappa H'}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{Hg\sigma'}{\sqrt{(H^2+1)}f(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ve denklem (9) kullanılarak,

$$\Rightarrow X_1' = \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{Hg\Gamma}{\sqrt{(H^2+1)}} \quad (15)$$

şeklindedir.

$$Y_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \text{ olmak üzere,}$$

$$Y_1' = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \right)' = \frac{\sigma' \sqrt{\sigma^2 + 1} - \frac{\sigma 2\sigma\sigma'}{2\sqrt{\sigma^2 + 1}}}{\sigma^2 + 1} = \frac{\sigma'(\sigma^2 + 1) - \sigma^2\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow Y_1' = \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad (16)$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left(\frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \right)' = \frac{\left[\frac{2HH'(\sigma^2 + 1) + 2\sigma\sigma'(H^2 + 1)}{2\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \right]}{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)} \\ &= -\frac{HH'(\sigma^2 + 1)}{\left[(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1) \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma\sigma'(H^2 + 1)}{\left[(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1) \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\tau H'(\sigma^2 + 1)}{\kappa(H^2 + 1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{g\sigma'(H^2 + 1)}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}(H^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ve denklem (9) kullanılarak,

$$\Rightarrow Z_1' = -\frac{\tau\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{g\Gamma}{\sqrt{(H^2 + 1)}} \quad (17)$$

şeklindedir.

X_1' değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} A_1(X_1' - \kappa Y_1) &= \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} \left(\frac{\kappa\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{Hg\Gamma}{\sqrt{(H^2 + 1)}} - \kappa \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right) \\ &= -\frac{\sigma H^2 g\Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \quad (18) \end{aligned}$$

bulunur. Y_1' değeri yerine yazılırsa,

$$B_1(X_1\kappa + Y_1' - Z_1\tau) = -\frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \left(\kappa \frac{H}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} + \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \right)$$

ve denklem (6) kullanılarak,

$$= -\frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^2} \quad (19)$$

bulunur. Z_1' değeri yerine yazılırsa,

$$C_1(Y_1\tau + Z_1') = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} \left(\tau \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{\tau\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{g\Gamma}{\sqrt{(H^2 + 1)}} \right) \\ = -\frac{\sigma g\Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \quad (20)$$

bulunur.

Son olarak bulunan (18), (19) ve (20)'deki eşitlikler torsiyonda yerine yazılırsa;

$$\tau_{\vartheta_2} = -\frac{1}{\kappa} \left[-\frac{\sigma H^2 g\Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^2} - \frac{\sigma g\Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right]$$

elde edilir. Denklem (8) ve (9) yardımıyla,

$$\tau_{\vartheta_2} = -\frac{1}{\kappa} \left[-\frac{\sigma(H^2 + 1)g\Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^2} \right] \\ = -\frac{1}{\kappa} \left[-\frac{\sigma g\sigma'}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\sigma^2 f \sigma'}{f(\sigma^2+1)^2} + \frac{\sigma'}{(\sigma^2+1)^2} \right] = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(\sigma^2+1)\sigma'}{(\sigma^2+1)^2} \right] \\
&= \frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2+1)}.
\end{aligned}$$

Sonuçta $\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\mathcal{G}_2} = \frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2+1)}$ şeklindedir.

$\mathcal{G}_2$ yönlü eğrisinin harmonik eğriliği denklem (6) kullanılarak,

$$H_{\mathcal{G}_2} = \frac{\tau_{\mathcal{G}_2}}{\kappa_{\mathcal{G}_2}} = \frac{\frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2+1)}}{\frac{\sqrt{f^2+g^2}}{\kappa}} = \frac{\sigma'}{\sqrt{f^2+g^2}(\sigma^2+1)} = \frac{\sigma'}{f\sqrt{\sigma^2+1}(\sigma^2+1)}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade düzenlenirse ve denklem (9) kullanılırsa,

$$H_{\mathcal{G}_2} = \frac{\sigma'}{f(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \Gamma$$

şeklinde elde edilir.

$\mathcal{G}_2$ eğrisinin slant helis olması için sabit olması gereken $\sigma_{\mathcal{G}_2}$ fonksiyon değerini denklem (7) kullanılarak hesaplanacaktır.

Burada, $\mathcal{G}_2$ eğrisinin yay parametresi s_{φ_2} , α_T eğrisinin yay parametresi s_T ve α

eğrisinin yay parametresi s olmak üzere, $s_{\mathcal{G}_2} = s_T$ ve $\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}$ olduğundan, $\mathcal{G}_2$

eğrisinin slant helis olması için sabit fonksiyon hesaplanırken;

$$\sigma_{\mathcal{G}_2} = \frac{\kappa_{\mathcal{G}_2}^2}{(\kappa_{\mathcal{G}_2}^2 + \tau_{\mathcal{G}_2}^2)^{\frac{3}{2}}} H_{\mathcal{G}_2}' \text{ ifadesindeki türev } s_{\varphi_2} \text{ 'ye göre türevidir.}$$

Ancak önceden hesaplanan torsiyon ve eğrilikleri yerlerine yazıldığındaki değerler için türev s 'ye göre olmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta_2} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{\kappa}\right)^2}{\left(\left(\frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2 + 1)}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d(H_{\vartheta_2})}{ds} \frac{ds}{ds_{\vartheta_2}} \\
&= \frac{\frac{f^2 + g^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{f^2 + g^2}{\kappa^2} + \frac{(\sigma')^2}{\kappa^2(\sigma^2 + 1)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\Gamma}{ds} \frac{1}{\kappa} \\
&= \frac{(f^2 + g^2)}{\kappa^3} \frac{\kappa^3(\sigma^2 + 1)^3}{\left[f^2(\sigma^2 + 1)^3 + (\sigma')^2\right]^{\frac{3}{2}}} (\Gamma)',
\end{aligned}$$

buradan denklem (9) kullanılırsa

$$\sigma_{\vartheta_2} = \frac{f^2(\sigma^2 + 1)^4}{\left[f^2(\sigma^2 + 1)^3 + (\sigma')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sigma'}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\right)'.$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 3.2.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve ϑ_2 de α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi olsun. ϑ_2 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu şu şekilde hesaplanır:

$$T_{\vartheta_2} = \frac{\kappa}{f}(-T + HB)$$

$$N_{\vartheta_2} = \frac{\sigma H}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} T - \frac{f}{\kappa \sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} N + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(H^2 + 1)}} B$$

$$B_{\vartheta_2} = \frac{H}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} N + \frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} B$$

$$\kappa_{\vartheta_2} = \frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{\kappa} \text{ ve } \tau_{\vartheta_2} = \frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2 + 1)} \quad (21)$$

(Güven ve Çolak, 2022)

İspat: (13) nolu denklemlerden ilk denklemin türevi alınarak (1), (2), (3), (4) ve (8) nolu denklemler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak (21) nolu denklemler elde edilir (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem3.2.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve ϑ_2 de α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi düzlemseldir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: ϑ_2 eğrisinin torsiyonu (21)' deki denklemde $\tau_{\vartheta_2} = \frac{\sigma'}{\kappa(\sigma^2 + 1)}$ şeklinde elde edilmişti. α eğrisi slant helis olduğunda σ sabittir. Böylece ispat açıktır (Güven ve Çolak, 2022).

Sonuç 3.2.1: Eğer α eğrisi genel helis ise, α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi yine düzlemseldir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: Denklem (9) ve τ_{ϑ_2} ' den sonuç açıktır (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem3.2.2: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve ϑ_2 de, α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi olsun. Eğer α eğrisi slant helis ise, genel helis ve slant helis olan N_T -yönlü eğrisi yoktur (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: ϑ_2 eğrisinin denklem (21) 'deki eğriliği ve burulması kullanılarak N_T -yönlü eğrisinin harmonik eğriliği ve σ_{ϑ_2} fonksiyonu şu şekilde elde edilir;

$$H_{\vartheta_2} = \frac{\sigma'}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \text{ ve } \sigma_{\vartheta_2} = \frac{f^2(\sigma^2 + 1)^4}{\left[f^2(\sigma^2 + 1)^3 + (\sigma')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sigma'}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)'$$

Burada eğer α slant helis ise o zaman $H_{\vartheta_2} = 0$ ve $\sigma_{\vartheta_2} = 0$ olur. Buradan sonuç açıktır (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem 3.2.3: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve ϑ_2 de, α_T eğrisinin N_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi C-slant helistir gerek ve yeter şart N_T -yönlü eğrisi genel helistir.

İspat: α eğrisi, C-slant helistir gerek ve yeter şart

$$\frac{(f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{f^2 \left(\frac{g}{f} \right)'} = \tan \theta$$

ifadesinin sabit olmasıdır. Denklem (8) ve (9) kullanılarak $\tan \theta = \frac{1}{\Gamma}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $H_{\vartheta_2} = \Gamma$ sabit olur ve böylece ispat açıktır.

3.3. Teğet Gösterge Eğrisinin Binormal Vektörünün Yönlü Eğrisi

Bu bölümde; bir α eğrisinin teğet gösterge eğrisinin binormal vektörünün integrali alınarak, yönlü eğrisi araştırılmıştır.

Bu yönlü eğri ile ilgili bilgiler $\{N, C, W\}$ alternatif çatı aparatlarıyla verilmiştir.

α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α_T eğrisi, α 'nın teğet gösterge eğrisi ve α_T 'nin Frenet aparatları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ ise; $\vartheta_3 = \int B_T ds_T$ yönlü eğrisi α_T teğet gösterge eğrisinin B_T yönlü eğrisidir.

$\vartheta_3 = \int B_T ds_T$ yönlü eğrisi için $\{T_{\vartheta_3}, N_{\vartheta_3}, B_{\vartheta_3}, \kappa_{\vartheta_3}, \tau_{\vartheta_3}\}$ Frenet aparatlarını bulalım. ds_T α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametresi olsun.

$$T_{\mathcal{G}_3} = \frac{d\mathcal{G}_3}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\int B_T ds_T \right) = B_T \Rightarrow T_{\mathcal{G}_3} = B_T$$

$$\Rightarrow T_{\mathcal{G}_3} = \frac{\kappa}{f} (HT + B).$$

$T_{\mathcal{G}_3}$, $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin teğet vektörüdür.

$$\frac{d\mathcal{G}_3}{ds_T} B_T \Rightarrow \left\| \frac{d\mathcal{G}_3}{ds_T} \right\| = \|B_T\| = \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2} H^2 + \frac{\kappa^2}{f^2}} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2} (H^2 + 1)} = 1$$

olduğu için $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisi birim hızlıdır.

$\mathcal{G}_3$ eğrisinin yay parametresinin $ds_{\mathcal{G}_3}$ olduğunu varsayalım α_T teğetler göstergesinin yay parametresi ds_T için,

$$\frac{d\mathcal{G}_3}{ds_{\mathcal{G}_3}} = \frac{d\mathcal{G}_3}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_3}} = \frac{d\left(\int B_T ds_T\right)}{ds_T} \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_3}} = B_T \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_3}}$$

Son ifadenin normu alınır;

$$\left\| \frac{d\mathcal{G}_3}{ds_{\mathcal{G}_3}} \right\| = \|B_T\| \frac{ds_T}{ds_{\mathcal{G}_3}} \Rightarrow ds_T = ds_{\mathcal{G}_3}$$

olur. Yani, $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisi ile α_T teğetler gösterge eğrisinin yay parametreleri aynıdır.

$\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin teğet vektörü;

$$T_{\mathcal{G}_3} = \frac{\kappa}{f} (HT + B)$$

ya da,

$$T_{\mathcal{G}_3} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} T + \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} B$$

şeklindedir.

$\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\mathcal{G}_3} = \frac{\mathcal{G}_3''}{\|\mathcal{G}_3''\|}$$

ile hesaplanır. Buradan,

$$\mathcal{G}_3'' = \frac{d\mathcal{G}_3'}{ds_T} = \frac{d}{ds_T} \left(\frac{d\mathcal{G}_3}{ds_T} \right) = \frac{d}{ds_T} (B_T) = B_T'$$

olacaktır. Öncelikle denklem (3) yardımıyla Frenet türev formülleri kullanılıp B_T' hesaplanırsa,

$$B_T' = -\tau_T N_T$$

elde edilir. Denklem (11) kullanılarak,

$$B_T' = -\frac{g}{\kappa} \left[-\frac{\kappa}{f} T + \frac{\kappa H}{f} B \right] = \left[\frac{g}{f} T - \frac{g}{f} HB \right] = \mathcal{G}_3''$$

bulunur.

$$\|\mathcal{G}_3''\| = \sqrt{\frac{g^2}{f^2} + \frac{g^2}{f^2} H^2} = \sqrt{\frac{g^2 (H^2 + 1)}{f^2}}$$

denklem (8) kullanılarak,

$$= \sqrt{\frac{g^2}{f^2} \frac{f^2}{\kappa^2}} = \frac{g}{\kappa} = \tau_T$$

şeklindedir.

$\|\mathcal{G}_3''\| = \frac{g}{\kappa}$ eşitliği göz önüne alınarak $\mathcal{G}_1$ yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\mathcal{G}_3} = \frac{\mathcal{G}_3''}{\|\mathcal{G}_3''\|} = \frac{\kappa}{g} \left(\frac{g}{f} T - \frac{gH}{f} B \right) = \frac{\kappa}{f} T - \frac{\kappa H}{f} B$$

şeklinde bulunur.

Denklem (8)'deki eşitlik kullanarak bu işlem düzenlenirse,

$$N_{\mathcal{G}_3} = \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} T - \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} B$$

şeklinde bulunur. Kısaca,

$$N_{\mathcal{G}_3} = \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} T - \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} B.$$

Şimdi $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin binormal vektörü bulunacaktır. Denklem (1) kullanılarak;

$$B_{\mathcal{G}_3} = T_{\mathcal{G}_3} \times N_{\mathcal{G}_3}$$

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{G}_3} &= \left[\frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} T + \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} B \right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} T - \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} B \right] \\ &= \left(\frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} \right) \left(-\frac{H}{\sqrt{H^2 + 1}} \right) (T \times B) + \left(\frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{H^2 + 1}} \right) (B \times T) \\ &= -\frac{H^2}{H^2 + 1} (-N) + \frac{1}{H^2 + 1} N = \left(\frac{H^2 + 1}{H^2 + 1} \right) N = N. \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin binormal vektörü;

$$B_{\mathcal{G}_3} = N$$

şeklinde bulunur.

$\mathcal{G}_3$, birim hızlı olduğundan $\kappa_{\mathcal{G}_3} = \|T'_{\mathcal{G}_3}\|$ ile $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin eğriliği ve denklem (4)

ile $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\mathcal{G}_3} = -\langle B_{\mathcal{G}_3}', N_{\mathcal{G}_3} \rangle$ şeklinde hesaplanırsa;

$$\kappa_{\mathcal{G}_3} = \|T'_{\mathcal{G}_3}\| = \|B'_T\| = \|-\tau_T N_T\| = \|\tau_T\| = \tau_T = \frac{g}{\kappa}$$

$$\Rightarrow \kappa_{\mathcal{G}_3} = \frac{g}{\kappa}.$$

Yani $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin eğriliği;

$$\kappa_{\mathcal{G}_3} = \frac{g}{\kappa}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan, ϑ_3 yönlü eğrisinin torsiyonu için $\tau_{\vartheta_3} = -\langle B_{\vartheta_3}', N_{\vartheta_3} \rangle$ eşitliğinde önce B_{ϑ_3}' bulunacaktır.

$$B_{\vartheta_3}' = \frac{dB_{\vartheta_3}}{ds_T} = \frac{d(N)}{ds} \frac{ds}{ds_T} = N' \frac{1}{\kappa} = (-\kappa T + \tau B) \frac{1}{\kappa} = -T + \frac{\tau}{\kappa} B$$

denklem (8) yardımıyla,

$$B_{\vartheta_3}' = -T + HB$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \tau_{\vartheta_3} &= -\langle -T + HB, \frac{1}{\sqrt{H^2+1}}T - \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}B \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{H^2+1}} + \frac{H^2}{\sqrt{H^2+1}} = \frac{1+H^2}{\sqrt{H^2+1}} = \sqrt{H^2+1} = \frac{f}{\kappa} \end{aligned}$$

bulunur. Yani, ϑ_3 yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\vartheta_3} = \frac{f}{\kappa}$ şeklindedir.

ϑ_3 yönlü eğrisinin harmonik eğriliği denklem (6) kullanılarak,

$$H_{\vartheta_3} = \frac{\tau_{\vartheta_3}}{\kappa_{\vartheta_3}} = \frac{\frac{f}{\kappa}}{\frac{g}{\kappa}} = \frac{f}{g}$$

denklem (8) kullanılırsa,

$$H_{\vartheta_3} = \frac{1}{\sigma}$$

şeklinde bulunur.

$\mathcal{G}_3$ eğrisinin slant helis olması için sabit olması gereken $\sigma_{\mathcal{G}_3}$ fonksiyon değerini

denklem (7) kullanılarak hesaplanacaktır.

Burada, $\mathcal{G}_3$ eğrisinin yay parametresi $s_{\mathcal{G}_3}$, α_T eğrisinin yay parametresi s_T ve α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere, $s_{\mathcal{G}_3} = s_T$ ve $\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}$ olduğundan, $\mathcal{G}_3$ eğrisinin slant helis olması için sabit fonksiyon hesaplanırken;

$$\sigma_{\mathcal{G}_3} = \frac{\kappa_{\mathcal{G}_3}^2}{\left(\kappa_{\mathcal{G}_3}^2 + \tau_{\mathcal{G}_3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} H_{\mathcal{G}_3}' \text{ ifadesindeki türev } s_{\mathcal{G}_3} \text{ 'e göre türevdir.}$$

Ancak önceden hesaplanan torsiyon ve eğrilikleri yerlerine yazıldığındaki değerler için türev s 'ye göre olmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{G}_3} &= \frac{\frac{g^2}{\kappa^2}}{\left(\frac{g^2}{\kappa^2} + \frac{f^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d(H_{\mathcal{G}_3}')}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathcal{G}_3}} = \frac{\frac{g^2}{\kappa^2}}{\frac{1}{\kappa^3}(g^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\sigma}\right)' \frac{1}{\kappa} \\ &= \frac{\kappa^3}{\kappa^3} \frac{g^2}{(g^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\sigma'}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

denklem (8) kullanılarak düzenleme yapılırsa,

$$= \frac{\sigma^2 f^2}{(\sigma^2 f^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{\sigma'}{\sigma^2}\right) = -\frac{f^2 \sigma'}{(f^2(\sigma^2 + 1))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sigma'}{f(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

buradan denklem (9) kullanılırsa,

$$\sigma_{\mathcal{G}_3} = -\Gamma \quad (22)$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 3.3.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_3$ de α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi olsun. $\mathcal{G}_3$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{G}_3} &= \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}T + \frac{1}{\sqrt{H^2+1}}B \\
N_{\mathcal{G}_3} &= \frac{1}{\sqrt{H^2+1}}T - \frac{H}{\sqrt{H^2+1}}B
\end{aligned} \tag{23}$$

$$B_{\mathcal{G}_3} = N$$

$$\kappa_{\mathcal{G}_3} = \frac{g}{\kappa} \quad \text{ve} \quad \tau_{\mathcal{G}_3} = \frac{f}{\kappa}$$

(Güven ve Çolak, 2022).

İspat: (13) nolu denklemlerden ilk denklemin türevi alınarak (1), (2), (3), (4) ve (8) nolu denklemler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak (23) nolu denklemler elde edilir (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem3.3.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_3$ de α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi olsun. α_T eğrisinin, düzlemsel B_T -yönlü eğrisi yoktur (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: $\kappa \neq 0$ ve dolayısıyla $f \neq 0$ olacağından $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin denklem (23)'e göre torsiyonu sıfır olamaz (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem3.3.2: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_3$ de α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi genel helistir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: Denklem (8) ve (23)'ye göre $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin harmonik eğriliği;

$$H_{\mathcal{G}_3} = \frac{1}{\sigma}$$

şeklinde bulunmuştur.

Eğer α eğrisi slant helis ise $\sigma = \text{sabit}$ olur, dolayısıyla $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin harmonik eğriliği $H_{\mathcal{G}_3}$ değeri de sabit olacaktır ve böylece ispat açıktır (Güven ve Çolak, 2022).

Teorem3.3.3: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_3$ de α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi doğrudur (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin eğriliği denklem (23), (8), (9) göz önüne alındığında,

$$\kappa_{\mathcal{G}_3} = \frac{H'}{\kappa(H^2 + 1)}$$

şeklindedir.

Bu nedenle α eğrisi genel helistir ($H = \text{sabit}$) gerek ve yeter şart $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin eğriliği $\kappa_{\mathcal{G}_3} = 0$ olur. Buradan ispat açıktır ve terside geçerlidir.

Teorem3.3.4: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve $\mathcal{G}_3$ de α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi C-slant helistir gerek ve yeter şart α_T eğrisinin B_T -yönlü eğrisi slant helistir (Güven ve Çolak, 2022).

İspat: $\mathcal{G}_3$ yönlü eğrisinin geodezik eğriliği denklem (22)'de,

$$\sigma_{\mathcal{G}_3} = -\Gamma$$

şeklinde hesaplanmıştı.

Denklem (9) ve (10) ile $\sigma_{\mathcal{G}_3} = -\frac{1}{\tan \theta}$ şeklindedir. Burada θ , C vektör alanı ve u sabit doğrultu arasındaki açıdır. α eğrisi C-slant helis olduğunda θ sabittir. Böylece $\sigma_{\mathcal{G}_3}$ fonksiyonu da sabittir ve terside geçerlidir.

3.4. Örnekler

Örnek 3.3.1: Yay parametrelili ve genel helis olan

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}}s \right)$$

eğrisini alalım. Bu eğrinin teğet gösterge eğrisi;

$$\alpha_T(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), 2 \right) \text{ dir.}$$

α_T eğrisinin T_T -yönlü eğrisi, N_T -yönlü eğrisi ve B_T -yönlü eğrisi sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

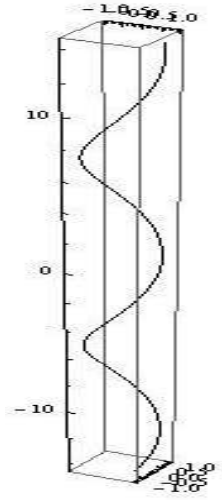
$$\mathcal{G}_1(s) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + c_1, \frac{\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + c_2, \frac{c_3}{5} \right)$$

$$\mathcal{G}_2(s) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + c_4, -\frac{\sqrt{5}}{5} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + c_5, \frac{c_6}{5} \right)$$

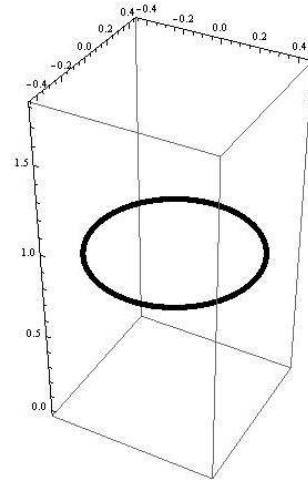
$$\mathcal{G}_3(s) = \left(c_7, c_8, \frac{s}{5} + c_9 \right).$$

Burada $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 9$ şeklindedir.

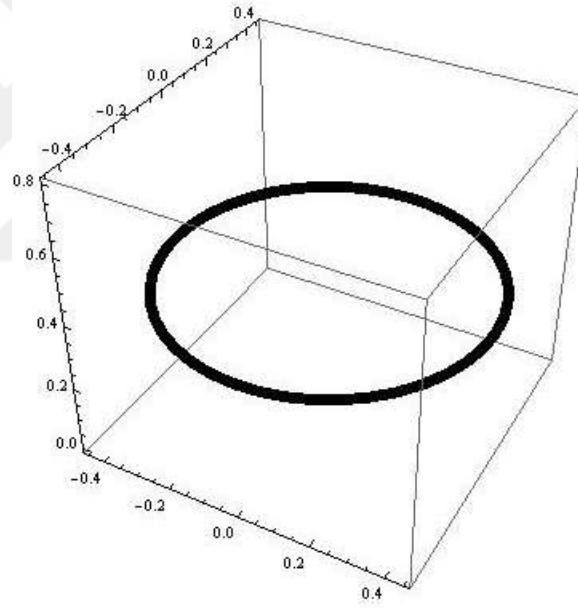
Burada $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$ düzlemsel, $\mathcal{G}_3$ de doğrudur. Böylece bu örnek Sonuç 3.2.1, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.3.3 'ü doğrular.



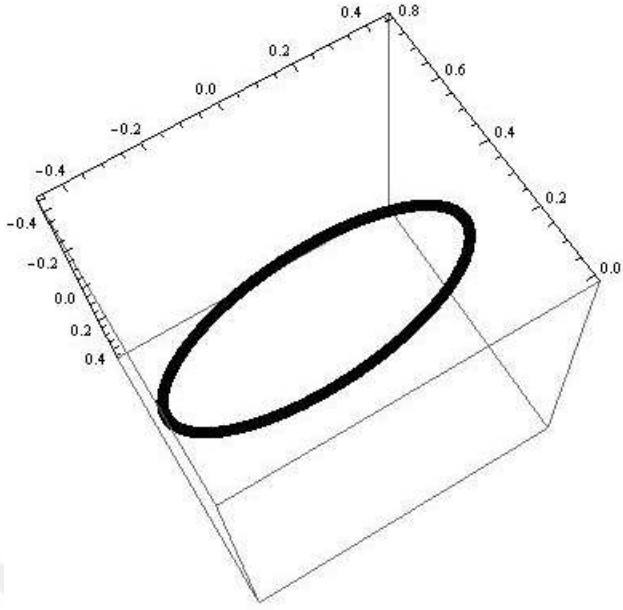
Şekil 3.4.1 α eğrisi



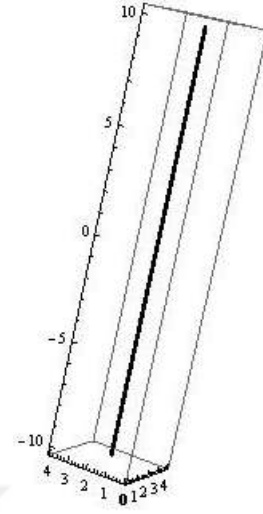
Şekil 3.4.2 α_T eğrisi



Şekil 3.4.3 g_l eğrisi



Şekil 3.4.4 $\mathcal{G}_2$ eğrisi



Şekil 3.4.5 $\mathcal{G}_3$ eğrisi

(Güven ve Çolak, 2022).

Örnek 3.3.2: Yay parametrelili ve slant helis olan

$$\beta(s) = \left(-\frac{8}{6} \left(\frac{\cos(4s)}{16} + \frac{\cos(2s)}{4} \right), -\frac{8}{6} \left(\frac{\sin(4s)}{16} + \frac{\sin(2s)}{4} \right), \frac{\sqrt{8}}{3} \cos s \right)$$

eğrisini alalım. Bu eğrinin teğet gösterge eğrisi,

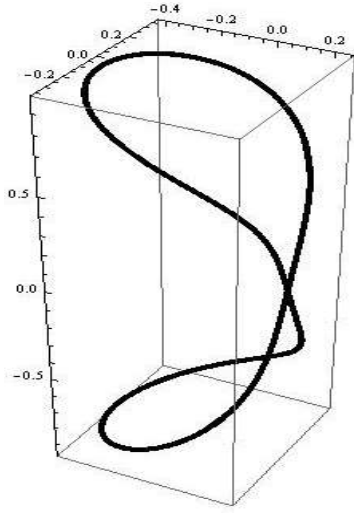
$$\beta_T(s) = \left(\frac{8}{6} \left(\frac{\sin(4s)}{4} + \frac{\sin(2s)}{2} \right), -\frac{8}{6} \left(\frac{\cos(4s)}{4} + \frac{\cos(2s)}{2} \right), -\frac{\sqrt{8}}{3} \sin s \right)$$

ve β_T eğrisinin T_T - yönlü eğrisi, c_1, c_2, c_3 sabit reel sayılar olmak üzere;

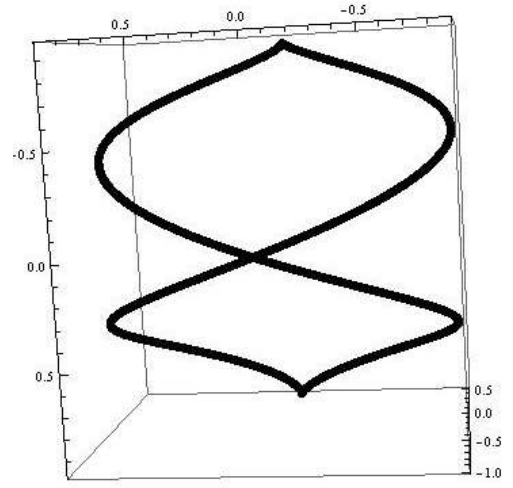
$$\mathcal{G}_1(s) = \left(\frac{\sin(4s)}{3} + \frac{\sin(2s)}{3} + c_1, -\frac{\cos(4s)}{3} - \frac{\cos(2s)}{3} + c_2, -\frac{\sqrt{8}}{3} \sin s + c_3 \right)$$

şeklindedir.

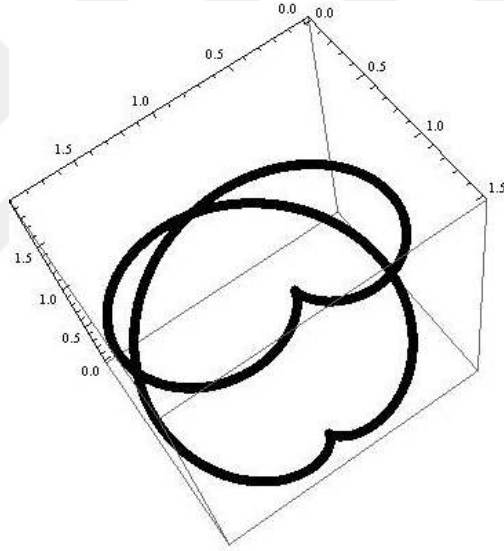
Burada $\mathcal{G}_1$ eğrisi genel helistir ve bu örnek Teorem 3.1.1'i doğrular.



Şekil 3.4.6 β eğrisi



Şekil 3.4.7 β_r eğrisi



Şekil 3.4.8 β_r için $\mathcal{A}_1$ eğrisi

(Güven ve Çolak, 2022).

BÖLÜM 4

ASLİ NORMAL GÖSTERGE EĞRİSİNİN YÖNLÜ EĞRİLERİ

4.1. Asli Normal Gösterge Eğrisinin Teğet Vektörünün Yönlü Eğrisi

Bu bölümde; bir α eğrisinin asli normal gösterge eğrisinin teğet vektörünün integrali alınarak, yönlü eğrisi araştırılmıştır.

Yönlü eğri ile ilgili hesaplar ve sonuçlar $\{N, C, W\}$ alternatif çatı aparatları yardımıyla verilmiştir.

α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α_N eğrisi, α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve α_N eğrisinin Frenet aparatları $\{T_N, N_N, B_N, \kappa_N, \tau_N\}$ ise; $\beta_1 = \int T_N ds_N$ integral eğrisi, α_N asli normal gösterge eğrisinin T_N -yönlü eğrisidir. $\beta_1 = \int T_N ds_N$ yönlü eğrisi için $\{T_{\beta_1}, N_{\beta_1}, B_{\beta_1}, \kappa_{\beta_1}, \tau_{\beta_1}\}$ Frenet aparatları bulunacaktır. ds_N , α_N asli normal gösterge eğrisinin yay parametresi olsun.

$$T_{\beta_1} = \frac{d\beta_1}{ds_N} = \frac{d}{ds_N} \left(\int T_N ds_N \right) = T_N \Rightarrow T_{\beta_1} = T_N$$

Denklem (12) den,

$$T_{\beta_1} = T_N = \frac{\kappa}{f} (-T + HB)$$

bulunur. T_{β_1} ; β_1 yönlü eğrisinin teğet vektörüdür.

$$\frac{d\beta_1}{ds_N} = T_N \Rightarrow \left\| \frac{d\beta_1}{ds_N} \right\| = \|T_N\| = \sqrt{\frac{\kappa^2(1+H^2)}{f^2}} = 1$$

olduğu için β_1 yönlü eğrisi birim hızlıdır.

β_1 yönlü eğrisinin yay parametrisinin ds_{β_1} olduğu varsayalım. α_N asli normal göstergesinin yay parametresi ds_N için,

$$\frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}} = \frac{d\beta_1}{ds_N} \frac{ds_N}{ds_{\beta_1}} = \frac{d(\int T_N ds_N)}{ds_N} \frac{ds_N}{ds_{\beta_1}} = T_N \frac{ds_N}{ds_{\beta_1}},$$

ifadesinin normu alınır;

$$\left\| \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}} \right\| = \|T_N\| \frac{ds_N}{ds_{\beta_1}} \Rightarrow ds_N = ds_{\beta_1}$$

olur. Yani β_1 yönlü eğrisi ile α_N asli normal göstergesinin yay parametreleri aynıdır.

β_1 yönlü eğrisinin teğet vektörü;

$$T_{\beta_1} = T_N = \frac{\kappa}{f} (-T + HB)$$

şeklindedir.

β_1 yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\beta_1} = \frac{\beta_1''}{\|\beta_1''\|}$$

eşitliği ile hesaplanacaktır.

$$\beta_1'' = \frac{d\beta_1'}{ds_N} = \frac{d}{ds_N} \left(\frac{d\beta_1}{ds_N} \right) = \frac{d}{ds_N} (T_N) = T_N'$$

olacaktır.

Öncelikle denklem (3) yardımıyla Frenet türev formülleri ve denklem (12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T_N' &= \kappa_N N_N \\
&= \sqrt{1+\sigma^2} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \left[\frac{\kappa}{f} (HT+B) - \frac{1}{\sigma} N \right] = \frac{\sigma\kappa}{f} (HT+B) - \sigma \frac{1}{\sigma} N
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan düzenleme yapılırsa eşitlik;

$$T_N' = \frac{\sigma\kappa H}{f} T - N + \frac{\sigma\kappa}{f} B = \beta_1''$$

şeklinde olur. Denklem (8) kullanılırsa,

$$\|\beta_1''\| = \sqrt{\frac{\sigma^2 \kappa^2}{f^2} (1+H^2) + 1} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \kappa^2}{f^2} \frac{f^2}{\kappa^2} + 1} = \sqrt{\sigma^2 + 1}$$

olur. Dolayısıyla β_1 yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$N_{\beta_1} = \frac{\beta_1''}{\|\beta_1''\|} = \frac{\frac{\sigma\kappa H}{f} T - N + \frac{\sigma\kappa}{f} B}{\sqrt{\sigma^2 + 1}}$$

Yani,

$$N_{\beta_1} = \frac{\sigma\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} T - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} N + \frac{\sigma\kappa}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} B$$

şeklindedir.

β_1 yönlü eğrisinin binormal vektörü B_{β_1} denklem (1) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
B_{\beta_1} &= T_{\beta_1} \times N_{\beta_1} \\
&= \left(-\frac{\kappa}{f} T + \frac{\kappa H}{f} B\right) \times \left(\frac{\sigma\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} T - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} N + \frac{\sigma\kappa}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} B\right) \\
&= \frac{\kappa}{f} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} (T \times N) - \frac{\kappa}{f} \frac{\sigma\kappa}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} (T \times B) \\
&\quad + \frac{\kappa H}{f} \frac{\sigma\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2 + 1}} (B \times T) - \frac{\kappa H}{f} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} (B \times N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2+1}}T + \frac{\sigma\kappa^2 H^2}{f^2\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\sigma\kappa^2}{f^2\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\kappa}{f\sqrt{\sigma^2+1}}B \\
&= \frac{\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2+1}}T + \frac{\sigma\kappa^2(H^2+1)}{f^2\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\kappa}{f\sqrt{\sigma^2+1}}B \\
&= \frac{\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2+1}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\kappa}{f\sqrt{\sigma^2+1}}B \\
&= \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}B
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Kısaca β_1 yönlü eğrisinin binormal vektörü;

$$B_{\beta_1} = \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}B$$

şeklinde olur.

β_1 birim hızlı olduğundan, $\kappa_{\beta_1} = \|T_{\beta_1}'\|$ ile β_1 yönlü eğrisinin eğriliği ve denklem (4) ile β_1 yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_1} = -\langle B_{\beta_1}', N_{\beta_1} \rangle$ şeklinde hesaplanırsa;

$$\kappa_{\beta_1} = \|T_{\beta_1}'\| = \|T_N'\|$$

şeklinde olacaktır. Burada denklem (3) ve (12) yardımıyla,

$$\kappa_{\beta_1} = \|\kappa_N N_N'\| = \sqrt{\kappa_N^2} = \kappa_N \Rightarrow \kappa_{\beta_1} = \kappa_N = \sqrt{\sigma^2+1}$$

olur. Yani β_1 yönlü eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{\sigma^2+1}$$

olarak bulunur. β_1 yönlü eğrisinin torsiyonu için $\tau_{\beta_1} = -\langle B_{\beta_1}', N_{\beta_1} \rangle$ eşitliğinde önce B_{β_1}' bulunacaktır.

$$B_{\beta_1} = \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}B \text{ için,}$$

$$X_2 = \frac{H}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} , Y_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \text{ ve } Z_2 = \frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \text{ olsun.}$$

$$B_{\beta_1}' = \frac{dB_{\beta_1}}{ds_N} = \frac{d(X_2 T + Y_2 N + Z_2 B)}{ds} \frac{ds}{ds_N} .$$

Burada denklem (12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} B_{\beta_1}' &= \frac{d(X_2 T + Y_2 N + Z_2 B)}{ds} \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{f} (X_2' T + X_2 T' + Y_2' N + Y_2 N' + Z_2' B + Z_2 B') \\ &= \frac{1}{f} (X_2' T + X_2 \kappa N + Y_2' N + Y_2 (-\kappa T + \tau B) + Z_2' B - Z_2 \tau N) \\ &= \frac{1}{f} [(X_2' - \kappa Y_2) T + (X_2 \kappa + Y_2' - Z_2 \tau) N + (Y_2 \tau + Z_2') B] \end{aligned}$$

$$B_{\beta_1}' = \frac{(X_2' - \kappa Y_2)}{f} T + \frac{(X_2 \kappa + Y_2' - Z_2 \tau)}{f} N + \frac{(Y_2 \tau + Z_2')}{f} B .$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\sigma \kappa H}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}} T - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} N + \frac{\sigma \kappa}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}} B \text{ için de}$$

$$A_2 = \frac{\sigma \kappa H}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}}, B_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \text{ ve } C_2 = \frac{\sigma \kappa}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}} \text{ olsun.}$$

Elde edilen B_{β_1}' ve N_{β_1} ifadeleri $\tau_{\beta_1} = -\langle B_{\beta_1}', N_{\beta_1} \rangle$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_1} &= -\langle \frac{(X_2' - \kappa Y_2)}{f} T + \frac{(X_2 \kappa + Y_2' - Z_2 \tau)}{f} N + \frac{(Y_2 \tau + Z_2')}{f} B, A_2 T - B_2 N + C_2 B \rangle \\ &= -\frac{1}{f} [A_2 (X_2' - \kappa Y_2) - B_2 (Y_2' + \kappa X_2 - \tau Z_2) + C_2 (Z_2' + \tau Y_2)] . \end{aligned} \quad (24)$$

Torsiyonu hesaplayabilmek için öncelikle buradaki X_2', Y_2' ve Z_2' değerleri ayrı ayrı hesaplanıp denklem (24)'te yerine yazılacaktır.

$$X_2 = \frac{H}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}
X_2' &= \left(\frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right)' \\
&= \frac{H' \sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)} - H \left[\frac{2HH'(\sigma^2+1) + 2\sigma\sigma'(H^2+1)}{2\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right]}{(H^2+1)(\sigma^2+1)} \\
&= \frac{H'(H^2+1)(\sigma^2+1) - H^2H'(\sigma^2+1) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}(H^2+1)(\sigma^2+1)} \\
&= \frac{H'(\sigma^2+1)(H^2+1-H^2) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}(H^2+1)(\sigma^2+1)} \\
&= \frac{H'(\sigma^2+1)(H^2+1-H^2) - H\sigma\sigma'(H^2+1)}{\left[(H^2+1)(\sigma^2+1) \right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\kappa H'(\sigma^2+1)}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{H\sigma\sigma'(H^2+1)}{(H^2+1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\kappa H'}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{Hg\sigma'}{\sqrt{(H^2+1)}f(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

denklem (9)'daki eşitlik yardımıyla,

$$X_2' = \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{Hg\Gamma}{\sqrt{(H^2+1)}} \quad (25)$$

bulunur.

$$Y_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}} \text{ için,}$$

$$Y_2' = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}} \right)' = \frac{\sigma'\sqrt{\sigma^2+1} - \frac{\sigma 2\sigma\sigma'}{2\sqrt{\sigma^2+1}}}{\sigma^2+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma'(\sigma^2+1) - \sigma^2\sigma'}{(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma'}{(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sigma'}{(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{26}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \text{ için,} \\
Z_2' &= \left(\frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right)' = \frac{\left[\frac{2HH'(\sigma^2+1) + 2\sigma\sigma'(H^2+1)}{2\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}} \right]}{(H^2+1)(\sigma^2+1)} \\
&= -\frac{HH'(\sigma^2+1)}{\left[(H^2+1)(\sigma^2+1) \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma\sigma'(H^2+1)}{\left[(H^2+1)(\sigma^2+1) \right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\tau H'(\sigma^2+1)}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{g\sigma'(H^2+1)}{f(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}(H^2+1)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

denklem (8) ve (9)'daki eşitlikler ile;

$$Z_2' = -\frac{\tau\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{g\Gamma}{\sqrt{(H^2+1)}} \tag{27}$$

bulunur. Denklem (25), (26) ve (27) 'deki değerler denklem (24) 'te yerine yazılarak hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{(X_2' - \kappa Y_2)A_2}{f} &= -\frac{\left(\frac{\kappa\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} - \frac{Hg\Gamma}{\sqrt{(H^2+1)}} - \kappa \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} \right) \sigma \kappa H}{f^2 \sqrt{(\sigma^2+1)}} \\
&= -\frac{\left(-\frac{Hg\Gamma}{\sqrt{(H^2+1)}} \right) \sigma \kappa H}{f^2 \sqrt{(\sigma^2+1)}} = \frac{g}{f} \frac{\kappa}{f} \frac{\sigma H^2 \Gamma}{\sqrt{(\sigma^2+1)} \sqrt{(H^2+1)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2 H^2 \Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} , \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{(X_2 \kappa + Y_2' - Z_2 \tau) B_2}{f} &= \frac{\frac{H \kappa}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} + \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}}}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}} \\ &= \frac{\frac{\tau}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}} + \frac{\sigma'}{(\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}}}{f \sqrt{\sigma^2 + 1}} \\ &= \frac{\sigma'}{f (\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} = \Gamma \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \\ &= \frac{\Gamma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \end{aligned} \quad (29)$$

ve

$$\begin{aligned} -\frac{(Y_2 \tau + Z_2') C_2}{f} &= -\frac{\left(\frac{\tau \sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{\tau \sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - \frac{g \Gamma}{\sqrt{(H^2 + 1)}} \right) \sigma \kappa}{f^2 \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \\ &= \frac{g \Gamma \sigma \kappa}{f^2 \sqrt{(\sigma^2 + 1)} \sqrt{(H^2 + 1)}} = \frac{g}{f} \frac{\kappa}{f} \frac{\Gamma \cdot \sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)} \sqrt{(H^2 + 1)}} \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{(H^2 + 1)}} \frac{\Gamma \cdot \sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)} \sqrt{(H^2 + 1)}} = \frac{\Gamma \sigma^2}{(H^2 + 1) \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \\ &= \frac{\Gamma \sigma^2}{(H^2 + 1) \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \end{aligned} \quad (30)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki denklem (28), (29) ve (30)'daki ifadeler denklem (24) 'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tau_{\beta_1} &= \frac{\sigma^2 H^2 \Gamma}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} + \frac{\Gamma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} + \frac{\Gamma \sigma^2}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \\ &= \frac{\sigma^2 \Gamma (H^2 + 1)}{(H^2 + 1)\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} + \frac{\Gamma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} = \frac{(\sigma^2 + 1)\Gamma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} = \Gamma \sqrt{(\sigma^2 + 1)}\end{aligned}$$

bulunur.

O halde, β_1 integral eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_1} = \Gamma \sqrt{(\sigma^2 + 1)}$ şeklindedir.

β_1 yönlü eğrisinin harmonik eğriliği denklem (6) kullanılarak,

$$H_{\beta_1} = \frac{\tau_{\beta_1}}{\kappa_{\beta_1}} = \frac{\Gamma \sqrt{(\sigma^2 + 1)}}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} = \Gamma$$

$$\Rightarrow H_{\beta_1} = \Gamma$$

şeklinde bulunur.

β_1 eğrisinin slant helis olması için sabit olması gereken σ_{β_1} fonksiyon değeri denklem (7) kullanılarak hesaplanacaktır.

Burada, β_1 eğrisinin yay parametresi s_{β_1} , α_N eğrisinin yay parametresi s_N ve α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere, $s_{\beta_1} = s_N$ ve $\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{f}$ olduğundan, β_1 eğrisinin slant helis olması için sabit fonksiyon hesaplanırken;

$$\sigma_{\beta_1} = \frac{\kappa_{\beta_1}^2}{(\kappa_{\beta_1}^2 + \tau_{\beta_1}^2)^{\frac{3}{2}}} H_{\beta_1} \text{ ifadesinde ki türev } s_{\beta_1} \text{ 'e göre türevdir.}$$

Ancak önceden hesaplanan torsiyon ve eğrilikler yerlerine yazıldığındaki değerler için türev s 'ye göre olmalıdır. Aynı zamanda $H_{\beta_1} = \Gamma$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta_1} &= \frac{\left(\sqrt{(\sigma^2+1)}\right)^2}{\left(\left(\sqrt{(\sigma^2+1)}\right)^2 + \left(\Gamma\sqrt{(\sigma^2+1)}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\Gamma}{ds} \frac{ds}{ds_N} \\
&= \frac{(\sigma^2+1)}{\left((\sigma^2+1) + (\sigma^2+1)\Gamma^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\Gamma}{ds} \frac{ds}{ds_N} = \frac{(\sigma^2+1)}{\left((\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma'}{f} \\
&= \frac{(\sigma^2+1)}{(\sigma^2+1)^{\frac{3}{2}}(\Gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma'}{f} = \frac{\Gamma'}{f\sqrt{(\sigma^2+1)}(\Gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\Gamma'}{f\sqrt{(\sigma^2+1)}(\Gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 4.1.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_1 de, α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi olsun. β_1 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu şu şekilde hesaplanır:

$$T_{\beta_1} = T_N = \frac{\kappa}{f}(-T + HB)$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\sigma\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2+1}}T - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\sigma\kappa}{f\sqrt{\sigma^2+1}}B$$

$$B_{\beta_1} = \frac{H}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)}}B$$

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{\sigma^2+1} \quad \text{ve} \quad \tau_{\beta_1} = \Gamma\sqrt{(\sigma^2+1)} \quad (31)$$

İspat : (13) nolu denklemlerden ikinci denklemin türevi alınarak (1), (2), (3), (4), (8) ve (9) nolu denklemler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak (31) nolu denklemler elde edilir.

Teorem 4.1.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_1 de, α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi genel helis ise α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi düzlemseldir.

İspat : α eğrisi genel helis olsun o halde $H = \frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. Dolayısıyla σ ve Γ nın tanımından

$$\sigma = \frac{H'}{\kappa(H^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma = \frac{\sigma'(s)}{f(s)(1 + \sigma^2(s))^{\frac{3}{2}}}$$

$\Gamma = 0$ olur. (31) nolu denklemlerden $\tau_{\beta_1} = \Gamma\sqrt{(\sigma^2 + 1)}$ olduğu için $\tau_{\beta_2} = 0$ böylece ispat gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.2: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_1 de, α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi C-slant helistir gerek ve yeter şart α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi genel helistir.

İspat: T_N yönlü eğrisi genel helis ise $H_{\beta_1} = \Gamma$ sabittir. Denklem (9) ve (10)'daki eşitlikler düzenlendiğinde, $H_{\beta_1} = \Gamma = \frac{1}{\tan \theta}$ sabit olur. Böylece α eğrisi C-slant helistir. Tersine de bu teoremin doğruluğu açıktır.

Teorem 4.1.3: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_1 de, α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi slant helistir gerek ve yeter şart α_N eğrisinin T_N -yönlü eğrisi düzlemseldir.

İspat: α eğrisi slant helis ise σ sabittir. β_1 eğrisinin torsiyonu (31)'deki denklemde

$\tau_{\beta_1} = \Gamma\sqrt{(\sigma^2 + 1)}$ şeklinde elde edilmişti. Ve denklem (9)'daki eşitlikte

$$\Gamma = \frac{\sigma'(s)}{f(s)(1 + \sigma^2(s))^{\frac{3}{2}}} \quad \text{olduğundan,} \quad \Gamma = 0 \quad \text{elde edilir. Dolayısıyla} \quad \tau_{\beta_1} = 0$$

olacağından ispat gösterilmiş olur. Tersine de bu teoremin doğruluğu açıktır.

4.2. Asli Normal Gösterge Eğrisinin Asli Normal Vektörünün Yönlü Eğrisi

Bu bölümde; bir α eğrisinin asli normal gösterge eğrisinin asli normal vektörünün integrali alınarak, yönlü eğrisi araştırılmıştır.

Yine yönlü eğri ile ilgili hesaplar ve sonuçlar $\{N, C, W\}$ alternatif çatı aparatları yardımıyla verilmiştir.

α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α_N eğrisi, α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve α_N eğrisinin Frenet aparatları $\{T_N, N_N, B_N, \kappa_N, \tau_N\}$ ise; $\beta_2 = \int N_N ds_N$ integral eğrisi, α_N asli normal gösterge eğrisinin N_N -yönlü eğrisidir. $\beta_2 = \int N_N ds_N$ integral eğrisi için $\{T_{\beta_2}, N_{\beta_2}, B_{\beta_2}, \kappa_{\beta_2}, \tau_{\beta_2}\}$ Frenet aparatları bulunacaktır. ds_N , α_N asli normal gösterge eğrisinin yay parametresi olsun.

$$T_{\beta_2} = \frac{d\beta_2}{ds_N} = \frac{d}{ds_N} \left(\int N_N ds_N \right) = N_N \Rightarrow T_{\beta_1} = N_N$$

denklem (12)'den,

$$T_{\beta_2} = N_N = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f} (HT + B) - \frac{1}{\sigma} N \right]$$

bulunur. T_{β_2} ; β_2 yönlü eğrisinin teğet vektörüdür.

$$\frac{d\beta_2}{ds_N} = N_N \Rightarrow \left\| \frac{d\beta_2}{ds_N} \right\| = \|N_N\| = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + 1)} \left[\frac{\kappa^2 (H^2 + 1)}{f^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right]} = 1$$

olduğu için β_2 yönlü eğrisi birim hızlıdır.

β_2 yönlü eğrisinin yay parametrisinin ds_{β_2} olduğu varsayılınsın. α_N asli normaller göstergesinin yay parametresi ds_N için,

$$\frac{d\beta_2}{ds_{\beta_2}} = \frac{d\beta_2}{ds_N} \frac{ds_N}{ds_{\beta_2}} = \frac{d\left(\int N_N ds_N\right)}{ds_N} \frac{ds_N}{ds_{\beta_2}} = N_N \frac{ds_N}{ds_{\beta_2}}.$$

İfadesinin normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\beta_2}{ds_{\beta_2}} \right\| = \|N_N\| \cdot \frac{ds_N}{ds_{\beta_2}} \Rightarrow ds_N = ds_{\beta_2}$$

olur. Yani β_2 yönlü eğrisi ile α_N asli normal göstergesinin yay parametreleri aynıdır.

β_2 yönlü eğrisinin teğet vektörü;

$$T_{\beta_2} = N_N = N_N = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f} (HT + B) - \frac{1}{\sigma} N \right]$$

şeklindedir.

β_2 yönlü eğrisinin asli normaller vektörü;

$$N_{\beta_2} = \frac{\beta_2''}{\|\beta_2''\|}$$

eşitliği ile hesaplanacaktır.

$$\beta_2'' = \frac{d\beta_2'}{ds_N} = \frac{d}{ds_N} \left(\frac{d\beta_2}{ds_N} \right) = \frac{d}{ds_N} (N_N) = N_N'$$

olacaktır.

Öncelikle denklem (3) yardımıyla Frenet türev formülleri ve denklem (12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_N' &= -\kappa_N T_N + \tau_N B_N \\ &= -\sqrt{\sigma^2 + 1} \frac{\kappa}{f} (-T + HB) + \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f} (HT + B) + \sigma N \right] \end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan düzenleme yapılırsa eşitlik;

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\sigma^2+1}\kappa}{f}T - \frac{\sqrt{\sigma^2+1}\kappa H}{f}B + \frac{\kappa\Gamma H}{f}T + \frac{\kappa\Gamma}{f}B + \Gamma\sigma N \\
&= \frac{\kappa}{f}\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)T + \Gamma\sigma N + \frac{\kappa}{f}\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)B = \beta_2''
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
\|N_N'\| &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2}\left[\frac{1+\sigma^2+\Gamma^2H^2+2\sqrt{\sigma^2+1}\Gamma H}{+(\sigma^2+1)H^2+\Gamma^2-2\sqrt{\sigma^2+1}\Gamma H}\right] + \Gamma^2\sigma^2} \\
\|N_N'\| &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2}\left[(\sigma^2+1)(H^2+1)+\Gamma^2(H^2+1)\right] + \Gamma^2\sigma^2} \\
\|N_N'\| &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{f^2}(H^2+1)(1+\sigma^2+\Gamma^2) + \Gamma^2\sigma^2}
\end{aligned}$$

denklem (8) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|N_N'\| &= \sqrt{1+\sigma^2+\Gamma^2+\Gamma^2\sigma^2} \\
\|N_N'\| &= \sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)} = \|\beta_2''\|
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla β_2 yönlü eğrisinin asli normal vektörü;

$$\begin{aligned}
N_{\beta_2} &= \frac{\beta_2''}{\|\beta_2''\|} = \frac{N_N'}{\|N_N'\|} = \frac{\kappa}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)T + \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}N \\
&\quad + \frac{\kappa}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)B
\end{aligned}$$

yani,

$$N_{\beta_2} = \frac{\kappa\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}T + \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}N + \frac{\kappa\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}B$$

olur. Denklem (8) kullanılarak,

$$N_{\beta_2} = \frac{\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}T + \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}N \\ + \frac{\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}B$$

şeklinde elde edilir.

β_2 yönlü eğrisinin binormal vektörü B_{β_2} , denklem (1) kullanılarak;

$$B_{\beta_2} = T_{\beta_2} \times N_{\beta_2} \\ = \left(\frac{\sigma\kappa H}{f\sqrt{\sigma^2+1}}T - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}}N + \frac{\sigma\kappa}{f\sqrt{\sigma^2+1}}B\right) \times \left(\frac{\kappa\left(\sqrt{1+\sigma^2}+\Gamma H\right)}{f\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}T \right. \\ \left. + \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}N + \frac{\kappa\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}B\right) \\ = \frac{\sigma^2\kappa H\Gamma}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(T \times N) + \frac{\sigma\kappa^2 H\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f^2\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(T \times B) \\ - \frac{\kappa\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(N \times T) - \frac{\kappa\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(N \times B) \\ + \frac{\sigma\kappa^2\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{f^2\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(B \times T) + \frac{\sigma^2\kappa\Gamma}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}(B \times N) \\ = \frac{\sigma^2\kappa H\Gamma}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}B - \frac{\sigma\kappa^2 H\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f^2\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}N + \frac{\kappa\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}B \\ - \frac{\kappa\left(-\sqrt{\sigma^2+1}H+\Gamma\right)}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}T + \frac{\sigma\kappa^2\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{f^2\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}N - \frac{\sigma^2\kappa\Gamma}{f\left(\sigma^2+1\right)\sqrt{\left(\Gamma^2+1\right)}}T$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa\sqrt{\sigma^2+1}H - \kappa\Gamma(\sigma^2+1)}{f(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} T + \frac{\sigma\kappa^2 H^2 \sqrt{\sigma^2+1} - \sigma\kappa^2 H\Gamma + \sigma\kappa^2 \sqrt{\sigma^2+1} + \sigma\kappa^2 H\Gamma}{f^2(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} N \\
&\quad + \frac{\sigma^2\kappa H\Gamma + \kappa\sqrt{\sigma^2+1} + \kappa\Gamma H}{f(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} B \\
&= \frac{\sqrt{\sigma^2+1}(\kappa H - \kappa\Gamma\sqrt{\sigma^2+1})}{f(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} T + \frac{\sigma\kappa^2\sqrt{\sigma^2+1}(H^2+1)}{f^2(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} N + \\
&\quad \frac{\sqrt{\sigma^2+1}(\kappa H\Gamma\sqrt{\sigma^2+1} + \kappa)}{f(\sigma^2+1)\sqrt{(\Gamma^2+1)}} B
\end{aligned}$$

olur. β_2 yönlü eğrisinin binormal vektörü;

$$B_{\beta_2} = \frac{\kappa(H - \Gamma\sqrt{\sigma^2+1})}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} N + \frac{\kappa(H\Gamma\sqrt{\sigma^2+1} + 1)}{f\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} B$$

şeklinde olur. Denklem (8)'deki eşitlik yardımıyla düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
B_{\beta_2} &= \frac{H - \Gamma\sqrt{\sigma^2+1}}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} N \\
&\quad + \frac{H\Gamma\sqrt{\sigma^2+1} + 1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} B
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

β_2 birim hızlı olduğundan $\kappa_{\beta_2} = \|T_{\beta_2}'\|$ ile β_1 yönlü eğrisinin eğriliği ve denklem

(4) ile β_2 yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_2} = -\langle B_{\beta_2}', N_{\beta_2} \rangle$ şeklinde hesaplanırsa,

$$\kappa_{\beta_2} = \|T_{\beta_2}'\| = \|N_{\beta_2}'\|$$

şeklinde olacaktır. Burada denklem (3) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_2} &= \|T_{\beta_2}'\| = \|N_N'\| = \|-\kappa_N T_N + \tau_N B_N\| = \sqrt{\kappa_N^2 + \tau_N^2} \\ &= \sqrt{1 + \sigma^2 + \Gamma^2(1 + \sigma^2)} = \sqrt{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}\end{aligned}$$

olur. Yani β_2 yönlü eğrisinin eğriliği;

$$\kappa_{\beta_2} = \sqrt{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}$$

olarak bulunur. β_2 yönlü eğrisinin torsiyonu için $\tau_{\beta_2} = -\langle B_{\beta_2}', N_{\beta_2} \rangle$ eşitliğinde önce

B_{β_1}' bulunacaktır.

$$\begin{aligned}B_{\beta_2} &= \frac{H - \Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}N \\ &\quad + \frac{H\Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1} + 1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}B \quad \text{için,} \\ X_3 &= \frac{H - \Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}, Y_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} \\ \text{ve } Z_3 &= \frac{H\Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1} + 1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} \text{ olsun.}\end{aligned}$$

$$\frac{dB_{\beta_2}}{ds_N} = \frac{d(X_3T + Y_3N + Z_3B)}{ds} \frac{ds}{ds_N}.$$

Burada denklem (12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{dB_{\beta_2}}{ds_N} &= \frac{d(X_3T + Y_3N + Z_3B)}{ds} \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{f} (X_3'T + X_3T' + Y_3'N + Y_3N' + Z_3'B + Z_3B') \\ &= \frac{1}{f} ((X_3' - \kappa Y_3)T + (Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3)N + (Z_3' + \tau Y_3)B) \\ &= \frac{(X_3' - \kappa Y_3)}{f} T + \frac{(Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3)}{f} N + \frac{(Z_3' + \tau Y_3)}{f} B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\beta_2} &= \frac{\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}} T + \frac{\Gamma \sigma}{\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}} N \\
&+ \frac{\left(-\sqrt{\sigma^2+1} H+\Gamma\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}} B \quad \text{ için de} \\
A_3 &= \frac{\left(\sqrt{\sigma^2+1}+\Gamma H\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}, B_3 = \frac{\Gamma \sigma}{\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}} \text{ ve} \\
C_3 &= \frac{\left(-\sqrt{\sigma^2+1} H+\Gamma\right)}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}} \text{ olsun.}
\end{aligned}$$

Elde edilen B_{β_1} ' ve N_{β_2} ifadeleri $\tau_{\beta_2} = -\langle B_{\beta_2}', N_{\beta_2} \rangle$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tau_{\beta_2} &= -\frac{1}{f} < (X_3' - \kappa Y_3) T + (Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3) N + (Z_3' + \tau Y) B, A_3 T + B_3 N + C_3 B > \\
&= -\frac{1}{f} [A_3 (X_3' - \kappa Y_3) + B_3 (Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3) + C_3 (Z_3' + \tau Y_3)]. \quad (32)
\end{aligned}$$

Torsiyonu hesaplayabilmek için $A_3 (X_3' - \kappa Y_3)$, $B_3 (Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3)$ ve $C_3 (Z_3' + \tau Y_3)$ değerleri ayrı ayrı hesaplanıp denklem (32) 'deki eşitlikte yerine yazılacaktır.

$A_3 (X_3' - \kappa Y_3)$ için öncelikle X_3' değeri hesaplanacaktır.

$$X_3 = \frac{H - \Gamma \sqrt{\sigma^2+1}}{\sqrt{\left(H^2+1\right)\left(\sigma^2+1\right)\left(\Gamma^2+1\right)}}$$

$$\text{ için } X_3 = \frac{E_1}{D_1} \quad \text{ olsun.}$$

$$X_3' = \frac{E_1' D_1 - E_1 D_1'}{D_1^2}$$

$$E_1' = H' - \left(\Gamma' \sqrt{\sigma^2+1} + \frac{2\Gamma\sigma\sigma'}{2\sqrt{\sigma^2+1}} \right) = H' - \Gamma' \sqrt{\sigma^2+1} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'}{\sqrt{\sigma^2+1}},$$

$$D_1' = \frac{2HH'(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)+2\sigma\sigma'(H^2+1)(\Gamma^2+1)+2\Gamma\Gamma'(H^2+1)(\sigma^2+1)}{2\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}$$

$$= \frac{HH'(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)+\sigma\sigma'(H^2+1)(\Gamma^2+1)+\Gamma\Gamma'(H^2+1)(\sigma^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}$$

olur. O halde,

$$X_3' = \frac{\left[\left(H' - \Gamma' \sqrt{\sigma^2+1} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'}{\sqrt{\sigma^2+1}} \right) \sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)} - \left(H - \Gamma \sqrt{\sigma^2+1} \right) \frac{HH'(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1) + \sigma\sigma'(H^2+1)(\Gamma^2+1) + \Gamma\Gamma'(H^2+1)(\sigma^2+1)}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} \right]}{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}$$

elde edilir.

$$a = \sqrt{1+H^2}, \quad b = \sqrt{\sigma^2+1} \quad \text{ve} \quad c = \sqrt{\Gamma^2+1} \quad (33)$$

olarak alıp X_3' düzenlenirse,

$$X_3' = \frac{H'}{abc} - \frac{\Gamma'}{ac} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'}{ab^2c} - \frac{H^2H'}{a^3bc} - \frac{H\sigma\sigma'}{ab^3c} - \frac{H\Gamma\Gamma'}{abc^3} + \frac{HH'\Gamma}{a^3c} + \frac{\Gamma\sigma\sigma'}{ab^2c} + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{ac^3}$$

$$= \frac{H'}{abc} - \frac{\Gamma'}{ac} - \frac{H^2H'}{a^3bc} - \frac{H\sigma\sigma'}{ab^3c} - \frac{H\Gamma\Gamma'}{abc^3} + \frac{HH'\Gamma}{a^3c} + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{ac^3}$$

şeklinde olur.

$$A_3 = \frac{(\sqrt{\sigma^2+1} + \Gamma H)}{\sqrt{(1+H^2)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}$$

denklem (33)'e göre düzenlenirse,

$$A_3 = \frac{(b + \Gamma H)}{abc}$$

şeklinde olacaktır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} A_3 X_3' &= \left(\frac{1}{ac} + \frac{\Gamma H}{abc} \right) \left(\frac{H'}{abc} - \frac{\Gamma'}{ac} - \frac{H^2 H'}{a^3 bc} - \frac{H \sigma \sigma'}{ab^3 c} - \frac{H \Gamma \Gamma'}{abc^3} + \frac{HH' \Gamma}{a^3 c} + \frac{\Gamma^2 \Gamma'}{ac^3} \right) \\ &= \frac{H'}{a^2 bc^2} - \frac{\Gamma'}{a^2 c^2} - \frac{H^2 H'}{a^4 bc^2} - \frac{H \sigma \sigma'}{a^2 b^3 c^2} - \frac{H \Gamma \Gamma'}{a^2 bc^4} + \frac{HH' \Gamma}{a^4 c^2} + \frac{\Gamma^2 \Gamma'}{a^2 c^4} \\ &\quad + \frac{HH' \Gamma}{a^2 b^2 c^2} - \frac{H \Gamma \Gamma'}{a^2 bc^2} - \frac{H^3 H' \Gamma}{a^4 b^2 c^2} - \frac{H^2 \Gamma \sigma \sigma'}{a^2 b^4 c^2} - \frac{H^2 \Gamma^2 \Gamma'}{a^2 b^2 c^4} + \frac{H^2 H' \Gamma^2}{a^4 bc^2} + \frac{H \Gamma^3 \Gamma'}{a^2 bc^4} \end{aligned}$$

ve

$$A_3 \kappa Y_3 = \kappa \left(\frac{1}{ac} + \frac{\Gamma H}{abc} \right) \left(\frac{\sigma}{bc} \right) = \frac{\kappa \sigma}{abc^2} + \frac{\kappa \Gamma H \sigma}{ab^2 c^2}$$

şeklinde bulunurlar. Bulanan değerler $A_3 (X_3' - \kappa Y_3)$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} A_3 X_3' - \kappa A_3 Y_3 &= \frac{H'}{a^2 bc^2} + \frac{HH' \Gamma}{a^2 b^2 c^2} - \frac{\Gamma'}{a^2 c^2} - \frac{\Gamma' \Gamma H}{a^2 bc^2} - \frac{H^2 H'}{a^4 bc^2} - \frac{H^3 H' \Gamma}{a^4 b^2 c^2} \\ &\quad - \frac{H \sigma \sigma'}{a^2 b^3 c^2} - \frac{H^2 \Gamma \sigma \sigma'}{a^2 b^4 c^2} - \frac{H \Gamma \Gamma'}{a^2 bc^4} - \frac{H^2 \Gamma^2 \Gamma'}{a^2 b^2 c^4} + \frac{HH' \Gamma}{a^4 c^2} + \frac{H^2 H' \Gamma^2}{a^4 bc^2} \\ &\quad + \frac{\Gamma^2 \Gamma'}{a^2 c^4} + \frac{H \Gamma^3 \Gamma'}{a^2 bc^4} - \frac{\kappa \sigma}{abc^2} - \frac{\kappa \Gamma H \sigma}{ab^2 c^2} \end{aligned} \quad (34)$$

şeklinde olur.

Şimdi $B_3 (Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3)$ için öncelikle Y_3' değeri hesaplanacaktır.

$$Y_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} \text{ için}$$

$$Y_3' = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} \right)'$$

$$= \left(\frac{\sigma' \sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)} - \frac{2\sigma \sigma' \sigma (\Gamma^2 + 1) + 2\sigma \Gamma \Gamma' (\sigma^2 + 1)}{2\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}}{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)} \right)$$

$$= \frac{\sigma'(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1) - \sigma^2\sigma'(\Gamma^2+1) - \sigma\Gamma\Gamma'(\sigma^2+1)}{\left((\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. O halde,

$$Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3 = \frac{\sigma'(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1) - \sigma^2\sigma'(\Gamma^2+1) - \sigma\Gamma\Gamma'(\sigma^2+1)}{\left((\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)\right)^{\frac{3}{2}}} + \kappa \left(\frac{H - \Gamma\sqrt{\sigma^2+1}}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} \right) - \tau \left(\frac{H\Gamma\sqrt{\sigma^2+1}+1}{\sqrt{(H^2+1)(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}} \right)$$

şeklinde dir. Denklem (6) ve (33) kullanılarak,

$$\begin{aligned} Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3 &= \frac{\sigma'b^2c^2 - \sigma^2\sigma'c^2 - \sigma\Gamma\Gamma'b^2}{b^3c^3} + \kappa \left(\frac{H - \Gamma b}{abc} \right) - \tau \left(\frac{H\Gamma b + 1}{abc} \right) \\ &= \frac{\sigma'b^2c^2 - \sigma^2\sigma'c^2 - \sigma\Gamma\Gamma'b^2}{b^3c^3} + \frac{\kappa H - \kappa\Gamma b - \tau H\Gamma b - \tau}{abc} \\ &= \frac{\sigma'}{bc} - \frac{\sigma^2\sigma'}{b^3c} - \frac{\sigma\Gamma\Gamma'}{bc^3} + \frac{-\kappa\Gamma - \kappa H^2\Gamma}{ac} \\ &= \frac{\sigma'}{bc} - \frac{\sigma^2\sigma'}{b^3c} - \frac{\sigma\Gamma\Gamma'}{bc^3} - \frac{\kappa\Gamma(1+H^2)}{ac} \\ &= \frac{\sigma'}{bc} - \frac{\sigma^2\sigma'}{b^3c} - \frac{\sigma\Gamma\Gamma'}{bc^3} - \frac{\kappa\Gamma a}{c} \end{aligned}$$

olur. Yani ,

$$Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3 = \frac{\sigma'}{bc} - \frac{\sigma^2\sigma'}{b^3c} - \frac{\sigma\Gamma\Gamma'}{bc^3} - \frac{\kappa\Gamma a}{c} .$$

$$B_3 = \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\Gamma^2+1)}}$$

denklem (33)'e göre düzenlenirse,

$$B_3 = \frac{\sigma\Gamma}{bc}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} B_3(Y_3' + \kappa X_3 - \tau Z_3) &= \frac{\sigma \Gamma}{bc} \left(\frac{\sigma'}{bc} - \frac{\sigma^2 \sigma'}{b^3 c} - \frac{\sigma \Gamma \Gamma'}{bc^3} - \frac{\kappa \Gamma a}{c} \right) \\ &= \frac{\sigma \sigma' \Gamma}{b^2 c^2} - \frac{\sigma^3 \sigma' \Gamma}{b^4 c^2} - \frac{\sigma^2 \Gamma^2 \Gamma'}{b^2 c^4} - \frac{\kappa \sigma \Gamma^2 a}{bc^2} \end{aligned} \quad (35)$$

olur.

$C_3(Z_3' + \tau Y_3)$ için öncelikle Z_3' değeri hesaplanacaktır.

$$Z_3 = \frac{H \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} + 1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}$$

$$\text{için } Z_3 = \frac{E_2}{D_2} \text{ olsun.}$$

$$Z_3' = \frac{E_2' D_2 - E_2 D_2'}{D_2^2}$$

$$E_2' = H' \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} + H \Gamma' \sqrt{\sigma^2 + 1} + \frac{2H \Gamma \sigma \sigma'}{2\sqrt{\sigma^2 + 1}},$$

$$D_2' = \frac{2HH'(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + 2\sigma\sigma'(H^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + 2\Gamma\Gamma'(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{2\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}$$

$$D_2 = \frac{HH'(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + \sigma\sigma'(H^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + \Gamma\Gamma'(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}$$

olur. O halde,

$$Z_3' = \frac{\left[\left(H' \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} + H \Gamma' \sqrt{\sigma^2 + 1} + \frac{H \Gamma \sigma \sigma'}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \right) \left(\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)} \right) - \left(H \Gamma \sqrt{\sigma^2 + 1} + 1 \right) \left(\frac{HH'(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + \sigma\sigma'(H^2 + 1)(\Gamma^2 + 1) + \Gamma\Gamma'(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} \right) \right]}{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}$$

ve denklem (33) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
Z_3' &= \frac{\left[\left(H'\Gamma b + H\Gamma'b + \frac{H\Gamma\sigma\sigma'}{b} \right) abc - (H\Gamma b + 1) \left(\frac{HH'b^2c^2 + \sigma\sigma'a^2c^2 + \Gamma\Gamma'a^2b^2}{abc} \right) \right]}{a^2b^2c^2} \\
&= \frac{\left[\left(\frac{H'\Gamma b^2 + H\Gamma'b^2 + H\Gamma\sigma\sigma'}{b} \right) a^2b^2c^2 - (H\Gamma b + 1) (HH'b^2c^2 + \sigma\sigma'a^2c^2 + \Gamma\Gamma'a^2b^2) \right]}{abc} \\
&= \frac{\left[\left(\frac{H'\Gamma b^2 + H\Gamma'b^2 + H\Gamma\sigma\sigma'}{b} \right) a^2b^2c^2 - (H^2H'\Gamma b^3c^2 + H\Gamma\sigma\sigma'a^2bc^2 + H\Gamma^2\Gamma'a^2b^3 + HH'b^2c^2 + \sigma\sigma'a^2c^2 + \Gamma\Gamma'a^2b^2) \right]}{a^3b^3c^3} \\
&= \left[\frac{H'\Gamma + H\Gamma'}{ac} + \frac{H\Gamma\sigma\sigma'}{ab^2c} - \frac{H^2H'\Gamma}{a^3c} - \frac{H\Gamma\sigma\sigma'}{ab^2c} - \frac{H\Gamma^2\Gamma'}{ac^3} - \frac{HH'}{a^3bc} - \frac{\sigma\sigma'}{ab^3c} - \frac{\Gamma\Gamma'}{abc^3} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$C_3 = \frac{\left(-\sqrt{\sigma^2 + 1}H + \Gamma \right)}{\sqrt{(1 + H^2)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}}$$

denklem (33)'e göre düzenlenirse,

$$C_3 = \left(\frac{\Gamma - Hb}{abc} \right)$$

olacaktır. Bu durumda,

$$C_3(Z_3' + \tau Y_3) = \left(\frac{\Gamma - Hb}{abc} \right) \left(\frac{H'\Gamma + H\Gamma'}{ac} - \frac{H^2H'\Gamma}{a^3c} - \frac{H\Gamma^2\Gamma'}{ac^3} - \frac{HH'}{a^3bc} - \frac{\sigma\sigma'}{ab^3c} - \frac{\Gamma\Gamma'}{abc^3} + \frac{\sigma\tau}{bc} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\Gamma}{abc} - \frac{H}{ac} \right) \left[\frac{H'\Gamma + H\Gamma'}{ac} - \frac{H^2H'\Gamma}{a^3c} - \frac{H\Gamma^2\Gamma'}{ac^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{HH'}{a^3bc} - \frac{\sigma\sigma'}{ab^3c} - \frac{\Gamma\Gamma'}{abc^3} + \frac{\sigma\tau}{bc} \right] \\
&= \left[\frac{H'\Gamma^2 + H\Gamma\Gamma'}{a^2bc^2} - \frac{H^2H'\Gamma^2}{a^4bc^2} - \frac{H\Gamma^3\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{HH'\Gamma}{a^4b^2c^2} \right. \\
&\quad - \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{a^2b^4c^2} - \frac{\Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} + \frac{\sigma\Gamma\tau}{ab^2c^2} - \frac{HH'\Gamma + H^2\Gamma'}{a^2c^2} + \frac{H^3H'\Gamma}{a^4c^2} \\
&\quad \left. + \frac{H^2\Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} + \frac{H^2H'}{a^4bc^2} + \frac{H\sigma\sigma'}{a^2b^3c^2} + \frac{H\Gamma\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{H\sigma\tau}{abc^2} \right] \quad (36)
\end{aligned}$$

bulunur.

Elde edilen; (34), (35) ve (36) denklemleri, denklem (32)'de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tau_{\beta_2} = -\frac{1}{f} \left[\begin{aligned}
&\frac{H'}{a^2bc^2} + \frac{HH'\Gamma}{a^2b^2c^2} - \frac{\Gamma'}{a^2c^2} - \frac{\Gamma'\Gamma H}{a^2bc^2} - \frac{H^2H'}{a^4bc^2} - \frac{H^3H'\Gamma}{a^4b^2c^2} - \frac{H\sigma\sigma'}{a^2b^3c^2} \\
&- \frac{H^2\Gamma\sigma\sigma'}{a^2b^4c^2} - \frac{H\Gamma\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{H^2\Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} + \frac{HH'\Gamma}{a^4c^2} + \frac{H^2H'\Gamma^2}{a^4bc^2} + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} \\
&+ \frac{H\Gamma^3\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{\kappa\sigma}{abc^2} - \frac{\kappa\Gamma H\sigma}{ab^2c^2} + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\sigma^3\sigma'\Gamma}{b^4c^2} - \frac{\sigma^2\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4} - \frac{\kappa\sigma\Gamma^2a}{bc^2} \\
&+ \frac{H'\Gamma^2 + H\Gamma\Gamma'}{a^2bc^2} - \frac{H^2H'\Gamma^2}{a^4bc^2} - \frac{H\Gamma^3\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{HH'\Gamma}{a^4b^2c^2} - \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{a^2b^4c^2} - \frac{\Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} \\
&+ \frac{\sigma\Gamma\tau}{ab^2c^2} - \frac{HH'\Gamma + H^2\Gamma'}{a^2c^2} + \frac{H^3H'\Gamma}{a^4c^2} + \frac{H^2\Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} + \frac{H^2H'}{a^4bc^2} + \frac{H\sigma\sigma'}{a^2b^3c^2} \\
&+ \frac{H\Gamma\Gamma'}{a^2bc^4} - \frac{H\sigma\tau}{abc^2}
\end{aligned} \right]$$

ve denklem (6) ve (33) 'deki eşitlikler kullanılırsa,

$$\tau_{\beta_2} = -\frac{1}{f} \left[\begin{aligned}
&\frac{H' - \Gamma\Gamma'H + H'\Gamma^2 + \Gamma\Gamma'H}{a^2bc^2} + \frac{HH'\Gamma}{a^2b^2c^2} - \frac{\Gamma' + HH'\Gamma + H^2\Gamma'}{a^2c^2} \\
&+ \frac{H^2H' - H^2H' + H^2H'\Gamma^2 - H^2H'\Gamma^2}{a^4bc^2} - \frac{H^3H'\Gamma + HH'\Gamma}{a^4b^2c^2} \\
&+ \frac{H\sigma\sigma' - H\sigma\sigma'}{a^2b^3c^2} - \frac{H^2\Gamma\sigma\sigma' + \Gamma\sigma\sigma'}{a^2b^4c^2} + \frac{H\Gamma\Gamma' - H\Gamma^3\Gamma' - H\Gamma\Gamma' + H\Gamma^3\Gamma'}{a^2bc^4} \\
&- \frac{H^2\Gamma^2\Gamma' + \Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} + \frac{HH'\Gamma + H^3H'\Gamma}{a^4c^2} + \frac{H^2\Gamma^2\Gamma' + \Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} - \frac{\kappa\sigma + H\sigma\tau}{abc^2} \\
&+ \frac{\sigma\Gamma\tau - \kappa\Gamma H\sigma}{ab^2c^2} + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma\Gamma^2a}{bc^2} - \frac{\sigma^3\sigma'\Gamma}{b^4c^2} - \frac{\sigma^2\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4}
\end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'(\Gamma^2+1)}{a^2bc^2} + \frac{HH'\Gamma}{a^2b^2c^2} - \frac{\Gamma'(H^2+1)}{a^2c^2} - \frac{HH'\Gamma}{a^2c^2} - \frac{(H^2+1)HH'\Gamma}{a^4b^2c^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(H^2+1)\Gamma\sigma\sigma'}{a^2b^4c^2} - \frac{(H^2+1)\Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} + \frac{HH'\Gamma(H^2+1)}{a^4c^2} + \frac{(H^2+1)\Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa\sigma(H^2+1)}{abc^2} + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma\Gamma^2a}{bc^2} - \frac{\sigma^3\sigma'\Gamma}{b^4c^2} - \frac{\sigma^2\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4} \right] \\
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'c^2}{a^2bc^2} + \frac{HH'\Gamma}{a^2b^2c^2} - \frac{\Gamma'a^2}{a^2c^2} - \frac{HH'\Gamma}{a^2c^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2HH'\Gamma}{a^4b^2c^2} - \frac{a^2\Gamma\sigma\sigma'}{a^2b^4c^2} - \frac{a^2\Gamma^2\Gamma'}{a^2b^2c^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{HH'\Gamma a^2}{a^4c^2} + \frac{a^2\Gamma^2\Gamma'}{a^2c^4} - \frac{\kappa\sigma a^2}{abc^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma\Gamma^2a}{bc^2} - \frac{\sigma^3\sigma'\Gamma}{b^4c^2} - \frac{\sigma^2\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4} \right] \\
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{a^2b} - \frac{\Gamma'}{c^2} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'}{b^4c^2} - \frac{\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4} + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{c^4} - \frac{\kappa\sigma a}{bc^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma\Gamma^2a}{bc^2} - \frac{\sigma^3\sigma'\Gamma}{b^4c^2} - \frac{\sigma^2\Gamma^2\Gamma'}{b^2c^4} \right] \\
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{a^2b} - \frac{\Gamma'}{c^2} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'(\sigma^2+1)}{b^4c^2} - \frac{\Gamma^2\Gamma'(\sigma^2+1)}{b^2c^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{c^4} + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma a(\Gamma^2+1)}{bc^2} \right] \\
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{a^2b} - \frac{\Gamma'}{c^2} - \frac{\Gamma\sigma\sigma'b^2}{b^4c^2} - \frac{\Gamma^2\Gamma'b^2}{b^2c^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma^2\Gamma'}{c^4} + \frac{\sigma\sigma'\Gamma}{b^2c^2} - \frac{\kappa\sigma ac^2}{bc^2} \right] \\
&= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{a^2b} - \frac{\Gamma'}{c^2} - \frac{\kappa\sigma a}{b} \right]
\end{aligned}$$

olur. Yani, β_2 yönlü eğrisinin torsiyonu,

$$\tau_{\beta_2} = -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{(H^2+1)\sqrt{\sigma^2+1}} - \frac{\Gamma'}{(\Gamma^2+1)} - \frac{\kappa\sigma\sqrt{H^2+1}}{\sqrt{\sigma^2+1}} \right]$$

denklem (9) kullanılarak,

$$= -\frac{1}{f} \left[\frac{H'}{(H^2+1)\sqrt{\sigma^2+1}} - \frac{\Gamma'}{(\Gamma^2+1)} - \frac{\kappa\sqrt{H^2+1}}{\sqrt{\sigma^2+1}} \frac{H'}{\kappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{1}{f} \frac{\Gamma'}{(\Gamma^2+1)}$$

şeklinde bulunur.

O halde, β_2 yönlü eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_2} = \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2+1)}$ şeklindedir.

β_2 yönlü eğrisinin harmonik eğriliği denklem (6) kullanılarak,

$$H_{\beta_2} = \frac{\tau_{\beta_2}}{\kappa_{\beta_2}} = \frac{\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2+1)}}{\sqrt{(\Gamma^2+1)(\sigma^2+1)}} = \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+\sigma^2)}}$$

şeklinde bulunur.

β_2 eğrisinin slant helis olması için sabit olması gereken σ_{β_2} fonksiyon değeri denklem (7) kullanılarak hesaplanacaktır.

Burada, β_2 eğrisinin yay parametresi s_{β_2} , α_N eğrisinin yay parametresi s_N ve α

eğrisinin yay parametresi s olmak üzere $s_{\beta_2} = s_N$ ve $\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{f}$ olduğundan, β_2

eğrisinin slant helis olması için sabit fonksiyon hesaplanırken;

$$\sigma_{\beta_2} = \frac{\kappa_{\beta_2}^2}{(\kappa_{\beta_2}^2 + \tau_{\beta_2}^2)^{\frac{3}{2}}} H_{\beta_2}' \text{ ifadesinde ki türev } s_{\beta_2} \text{ 'e göre türevdir.}$$

Ancak önceden hesaplanan torsiyon ve eğrilikler yerlerine yazıldığındaki değerler için türev s 'ye göre olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta_2} &= \frac{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{\left((\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1) + \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right)}{ds} \frac{ds}{ds_N} \\ &= \frac{1}{f} \frac{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{\left((\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1) + \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right)\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Önerme 4.2.1: : α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_2 de, α_N eğrisinin N_N -yönlü eğrisi olsun. β_2 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}T_{\beta_2} &= N_N = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \left[\frac{\kappa}{f} (HT + B) - \frac{1}{\sigma} N \right] \\ N_{\beta_2} &= \frac{\kappa(\sqrt{\sigma^2 + 1} + \Gamma H)}{f\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} T + \frac{\Gamma\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} N + \frac{\kappa(-\sqrt{\sigma^2 + 1}H + \Gamma)}{f\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} B \\ B_{\beta_2} &= \frac{H - \Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} T + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} N \\ &\quad + \frac{H\Gamma\sqrt{\sigma^2 + 1} + 1}{\sqrt{(H^2 + 1)(\sigma^2 + 1)(\Gamma^2 + 1)}} B \\ \kappa_{\beta_2} &= \sqrt{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)} \\ \tau_{\beta_2} &= \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)}\end{aligned}\tag{37}$$

İspat : (13) nolu denklemlerden ilk denklemin türevi alınarak (1), (2), (3), (4),(6),(7), (8) ve (9) nolu denklemler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak (37) nolu denklemler elde edilir.

Teorem 4.2.1: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_2 de, α_N eğrisinin N_N -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi genel helis ise β_2 yönlü eğrisi düzlemseldir.

İspat : α eğrisi genel helis olsun. O halde $H = \frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. Dolayısıyla σ ve Γ nın tanımından

$$\sigma = \frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma = \frac{\sigma'(s)}{f(s)(1+\sigma^2(s))^{\frac{3}{2}}}$$

$\Gamma' = 0$ olur. (37) nolu denklemlerden $\tau_{\beta_2} = \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2+1)}$ olduğu için $\tau_{\beta_2} = 0$ böylece ispat gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.2: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_N ; α eğrisinin asli normal gösterge eğrisi ve β_2 de α_N eğrisinin N_N -yönlü eğrisi olsun. α eğrisi C-slant helistir gerek ve yeter şart β_2 yönlü eğrisi düzlemseldir.

İspat : α eğrisi C-slant helis olsun. O halde C vektörü $\vec{u}$ sabit doğrultu ile yaptığı açı θ olursa, $\tan \theta$ sabit olur. O halde $\Gamma = \frac{1}{\tan \theta}$ ifadesi de sabittir. Dolayısıyla

$\Gamma' = 0$ olur ve (37) nolu denklemlerden $\tau_{\beta_2} = \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2+1)}$ olduğu için $\tau_{\beta_2} = 0$ böylece

ispat gösterilmiş olur. Tersinede teoremin doğruluğu açıktır.

Teorem 4.2.3: α eğrisi yay parametrelili bir eğri, α_T ; α eğrisinin teğet gösterge eğrisi ve β_2 de, α_N eğrisinin N_N -yönlü eğrisi olsun. Eğer α eğrisi slant helis ise, $H_{\beta_2} = 0$ ve $\sigma_{\beta_2} = 0$ 'dır.

İspat: β_2 'nin denklem (37) 'deki eğriliği ve burulması kullanılarak β_2 yönlü eğrisi için harmonik eğrilik ve geozedik eğrilik şu şekilde elde edilir;

$$H_{\beta_2} = \frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \quad \text{ve}$$

$$\sigma_{\beta_2} = \frac{1}{f} \frac{(\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1)}{\left((\Gamma^2 + 1)(\sigma^2 + 1) + \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Gamma'}{f(\Gamma^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma^2 + 1)}} \right)$$

Burada denklem (9) 'daki $\Gamma = \frac{\sigma'(s)}{f(s)(1 + \sigma^2(s))^{\frac{3}{2}}}$ olduğundan, eğer α slant helis ise

o zaman $H_{\beta_2} = 0$ ve $\sigma_{\beta_2} = 0$ olur. Buradan sonuç açıktır.

4.3. Örnekler

Örnek 4.3.1: Yay parametrelili ve genel helis olan

$$\alpha(s) = \left(\frac{\cos^2(s)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(s)\cos(s)}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

eğrisini alalım. Bu eğrinin asli normal gösterge eğrisi;

$$\alpha_N(s) = (-\cos(2s), \sin(2s), 0) \text{ dir.}$$

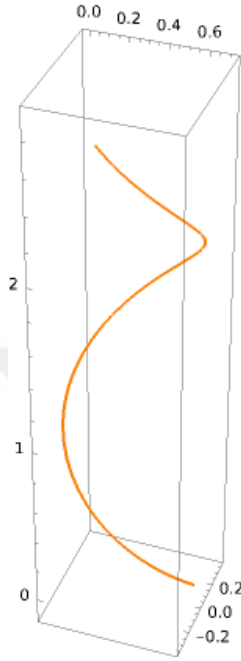
α_N eğrisinin T_N - yönlü eğrisi, N_N - yönlü eğrisi sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta_1(s) = \left(\frac{-\cos(2s)}{2} + c_1, \frac{\sin(2s)}{2} + c_2, c_3 \right)$$

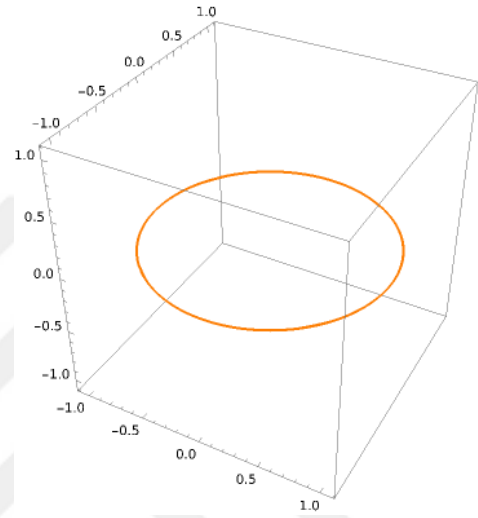
$$\beta_2(s) = \left(\frac{\sin(2s)}{2} + c_4, \frac{\cos(2s)}{2} + c_5, c_6 \right)$$

Burada $c_i \in R$, $1 \leq i \leq 9$ şeklindedir.

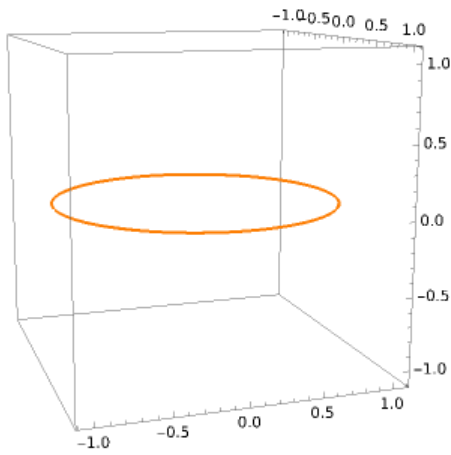
Burada $\beta_1(s)$ ve $\beta_2(s)$ düzlemseldir. Böylece bu örnek Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 'i doğrular.



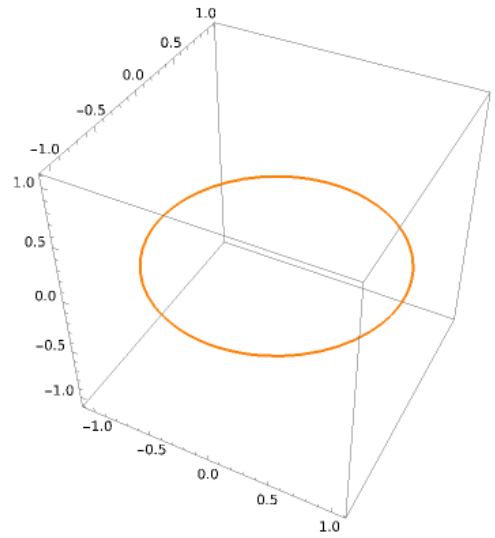
Şekil 4.3.1: $\alpha(s)$ eğrisi



Şekil 4.3.2: $\alpha_N(s)$ eğrisi



Şekil 4.3.3: $\beta_1(s)$ eğrisi



Şekil 4.3.4: $\beta_2(s)$ eğrisi

KAYNAKLAR

- [1] Bishop, R.L. (1975). There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3), 246-251.
- [2] Choi, F.H. & Kim, Y.H. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 9116-9124.
- [3] Dede, M. (2019). A new representation of tubular surface. *Houston Journal of Mathematics*, 45(3), 707-720.
- [4] Do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [5] Gray, A., Abbena, E. & Salamon, S. (2006). *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica* (3. baskı). Chapman and Hall/CRC.
- [6] Güven, A. İ. & Çolak, F. (2022). Direction curves of spherical indicatrices of a new framed curve. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15(1), 325-339.
- [7] Izumiya, S. & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28, 153-163.
- [8] Kızıltuğ, S. & Önder, M. (2015). Associated curves of Frenet curves in three dimensional compact Lie group. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(2), 953- 964.
- [9] Körpınar, T., Sarıaydın, M.T. & Turhan, E. (2013).Associated curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. *Advanced Modeling and Optimization*, 15(3), 713-717.
- [10] Kula, L. & Yaylı, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 600-607.
- [11] Macit, N. & Döldül, M. (2014). Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4 . *Turkish Journal of Mathematics*, 38, 1023-1037.

- [12] O'Neill, B. (2006). *Elementary differential geometry* (revize edilmiş 2. baskı). Academic Press.
- [13] Qian, J. & Kim, Y.H. (2015). Directional associated curves of a null curve in Minkowski 3-space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(1), 183- 200.
- [14] Şahiner, B. (2018). Direction curves of principal normal indicatrix of a curve. *Journal of Technical Sciences*, 8(2), 46-54.
- [15] Şahiner, B. (2019). Direction curves of tangent indicatrix of a curve. *Applied Mathematics and Computation*, 343, 273-284.
- [16] Struik, D.J. (1988). *Lectures on classical differential geometry*, Dover.
- [17] Uzunoğlu B., Gök, İ., & Yaylı, Y. (2016). A new approach on curves of constant precession. *Applied Mathematics and Computation*, 275, 317-323.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı : Fatma ÇOLAK

EĞİTİM BİLGİLERİ

	Mezun olduğu okul	Mezuniyet yılı
Yüksek Lisans	: Gaziantep Üniversitesi	2023
Lisans	: Karadeniz Teknik Üniversitesi	2009
Lise	: Mustafa Koyuncu Anadolu Öğretmen Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

	Çalıştığı Kurum	Görevi
2009-2010	Modern Erişim Dershanesi	Öğretmen
2012-2012	Aile ve Sosyal Hizmetler Bakanlığı	Sosyal Yardım ve İnceleme Görevlisi
2012-Halen	T.C. Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

YAYINLAR

Ulusal Makale

- Güven, A. İ. & Çolak, F. (2022). Direction curves of spherical indicatrices of a new framed curve. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Dergisi*, 15(1), 325-339.