

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA
KESİRLİ TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NUREFŞAN SULTAN URAL

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2025

10594650

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA
KESİRLİ TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NUREFŞAN SULTAN URAL

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. TUĞBA YURDAKADİM

BİLECİK, 2025

1059450

BEYAN

"Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Kesirli Trigonometrik Koro-
rovkin Teorisi" adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve
etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kural-
lara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka
bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabi-
lecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu
beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR X	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum;	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1-BAP(Bilimsel Araştırma Projesi)	TÜBİTAK-2210 Yüksek Lisans Burs Programı
2-TÜBİTAK	
Diğer;.....	
ETİK KURUL onayı var ise;	
ETİK KURUL karar / sayı:	/

Nurefşan Sultan URAL

.....

Tarih

.../ .../ 2025

İmza

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam kıymetli zamanını ayırıp, sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin hep fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden hiç esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM'e emekleri için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden Sayın Dr. Öğr. Üyesi Osman ALAGÖZ, Doç. Dr. Esra KAYA ve Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ hocalarıma ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Emre TAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2210 Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca destekleri ile her zaman yanımda olan sınıf arkadaşlarım Yalçın, Halime ve Asiye'ye teşekkür ederim. Ayrıca bana her türlü konuda destek olan eşim Yalçın'a ve bu süreçte aramıza yeni katılan kızım Duru Berra'ya çok teşekkür ediyorum.

Nurefşan Sultan URAL

2025

ÖZET

KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA KESİRLİ TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup ikinci bölümde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılmıştır. Ayrıca pozitif lineer operatörler, süreklilik modülü ve kesirli analize ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm trigonometrik Korovkin teorisi ve kesirli trigonometrik Korovkin teorisine ayrılmıştır. Dördüncü bölüm ise orijinal sonuçlar içermekte olup önce istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen kesirli trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar verilmiştir. Ayrıca daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen kesirli trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar ve örnekler sunulmuştur. Son bölümde ise, elde edilen orijinal sonuçlar değerlendirilerek literatüre katkısı vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Analiz, Pozitif Lineer Operatörler, Süreklilik Modülü, Trigonometrik Korovkin Teoremi, Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık.

ABSTRACT

FRACTIONAL TRIGONOMETRIC KOROVKIN THEORY VIA STATISTICAL CONVERGENCE WITH RESPECT TO POWER SERIES METHOD

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and in the second chapter statistical convergence, statistical convergence with respect to power series method are recalled. Basic definitions, properties and theorems of positive linear operators, modulus of continuity and fractional calculus are also given. The third chapter is devoted to the trigonometric Korovkin and fractional trigonometric Korovkin theories. The fourth chapter includes original results and firstly fractional Korovkin type results obtained by statistical convergence are given. Also fractional Korovkin type results and examples are presented via statistical convergence with respect to a power series which is not included by previously known methods. In the last chapter by evaluating the obtained original results the contribution to the literature is mentioned.

Keywords: Fractional Calculus, Positive Linear Operators, Modulus of Continuity, Trigonometric Korovkin Theorem, Statistical Convergence Method With Respect to Power Series Method.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1. Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık	3
2.2. A-Yoğunluk ve A-İstatistiksel Yakınsaklık	4
2.3. Kuvvet Serisi Metodu ve Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık .	7
2.4. Pozitif Lineer Operatörler.....	9
2.5. Kesirli Analize İlişkin Temel Kavramlar	11
3. KESİRLİ ANALİZ VE TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ	17
3.1. Trigonometrik Korovkin Teorisi.....	17
3.2. Kesirli Trigonometrik Korovkin Teorisi	18
4. KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDI- MIYLA KESİRLİ TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ	23
4.1. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Kesirli Trigonometrik Korovkin Tipi Sonuçlar	23
4.2. Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Kesirli Tri- gonometrik Korovkin Tipi Sonuçlar	25
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	33
KAYNAKÇA	34

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	: $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$\lceil \cdot \rceil$	: Tavan fonksiyonu
$\delta(\mathbf{G})$	: G kümesinin yoğunluğu
$\delta_{\mathbf{P}}(\mathbf{G})$	: G kümesinin P -yoğunluğu
$\omega(\mathbf{f}, \delta)$ ($\delta > 0$)	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\mathbf{AC}([-\pi, \pi])$	: $[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı reel değerli, bu aralıkta mutlak sürekli tüm fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{AC}^{\mathbf{m}}([-\pi, \pi])$	: $\{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : f^{(m-1)} \in \mathbf{AC}([-\pi, \pi])\}$
$\Gamma(\cdot)$	: Gamma fonksiyonu
$\Rightarrow$	: Düzgün yakınsaklık
$\mathbf{D}_z^{\alpha} \mathbf{f}$	: $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α . basamaktan Caputo kesirli türevi
$\mathbf{L}_{\infty}([-\pi, \pi])$	: $[-\pi, \pi]$ üzerinde esas sınırlı fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin gelişimi 1885 yılında Karl Weierstrass'ın bir teoreminin ispatına dayanmakta olup bu teorem $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna cebirsel ve trigonometrik polinomlarla yaklaşımı ifade etmektedir (Weierstrass, 1885: Giriş). Uzun ve karışık bir ispata sahip olan bu teoremin daha kolay bir ispatını vermek birçok matematikçinin temel amacı haline gelmiştir. Bu amaçla günümüzde de iyi bilinen Bernstein polinomları inşa edilerek aranılan ispat verilmiştir (Bernstein, 1912: 1-2). Daha sonra bu polinomlar yerine pozitif lineer operatörler kullanılarak daha genel sonuçlar elde edilmiştir ve yaklaşım teorisinde pozitif lineer operatörler aktif bir rol oynamaya başlamıştır. Popoviciu (Popoviciu, 1951: 1-4), Bohman (Bohman, 1952: 45) ve Korovkin (Korovkin, 1953: 961) tarafından birbirinden bağımsız olarak " (L_n) operatör dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nedir?" sorusu, $\{1, x, x^2\}$ test fonksiyonları yardımıyla yanıtlanmıştır. Bunun yanı sıra 2π periyotlu sürekli bir f fonksiyonu için $\{1, \sin x, \cos x\}$ test fonksiyonları kullanılarak bu teoremin trigonometrik versiyonu da elde edilmiştir. Böylece Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmış ve zamanla birçok açıdan farklı amaçlarla genelleştirilmiştir. Bu genelleştirmelerden biri de kesirli analiz kullanılarak Korovkin teoreminin elde edilmesidir.

Kesirli analiz, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarına ve araştırmalarına ilişkin analizin bir dalı olup uzun bir matematiksel geçmişe sahiptir. Başlangıcı 1600'lü yıllarda L'Hospital ve Leibniz'in mektuplaşmaları sırasında x fonksiyonunun $1/2$. mertebeden türevinin ne olacağını sorgulamalarına dayanmaktadır. Günümüze kadar kesirli analiz birçok matematikçinin ilgi alanı olmuş ve çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bütün bu çalışmalar ışığında Riemann-Liouville kesirli türevi ve kesirli integrali, Weyl kesirli türevi ve kesirli integrali, Grünwald-Letnikov kesirli türevi ve kesirli integrali, Caputo kesirli türevi gibi birçok kesirli türev ve kesirli integral tanımı verilmiştir (Samko vd., 1993). Igor Podlubny (Podlubny, 1999), kesirli analizin ciddi bir geometrik ve fiziksel yorumunu vermiştir ve bununla birlikte kesirli analiz; akustik dalga yayılımı, homojen olmayan gözenekli malzeme, yayımlı taşıma, sıvı akışı, jeoloji, deprem dinamiği, biyomühendislik, optik, elektromanyetik dalgalar, sinir ağları, tomografi ve termodinamik gibi birçok uygulamalı bilimde kullanılmaya başlanmıştır. Klasik analizde tamsayı mertebeler doğaya uygun olmayan bir model iken kesirli analiz daha gerçekçi yaklaşımlar elde etmeyi sağlamaktadır. Kesirli analizin mevcut matematiksel teorisinin yukarıda saydığımız tüm uygulamaların matematiksel modellemesine yönelik ihtiyaçlarının gerisinde kaldığını belirtmekte fayda vardır.

Diğer yandan seriler ve serilerin incelenmesi de matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Önceleri matematikçiler yakınsak serilerle ilgilenmişler, ıraksak serilere gereken önemi vermemişlerdir. Ancak toplanabilme teorisinin gelişmesiyle birlikte ıraksak seriler de dikkate alınmıştır. Toplanabilme teorisinin asıl amacı ıraksak bir seriye bir toplam karşılık getirmek olup çalışılmaya başlandığı andan itibaren toplanabilme teorisi genellikle alışılmış seri ve diziler için araştırılmıştır ve bunlar için birçok yakınsaklık tanımlanmıştır (Boos, 2000). Bunlardan en ilgi

çekici olanları iki boyutlu sonsuz matrisler kullanılarak tanımlanan A -istatistiksel yakınsaklık ve A -toplanabilme metotlarıdır. Birçok metodun matris metodu olarak ifade edilip edilemeyeceği toplanabilme teorisinin önemli problemleri arasındadır. Örneğin istatistiksel yakınsaklık bir matris metodu tarafından içerilmemektedir.

Klasik analiz kullanılarak trigonometrik Korovkin teorisi P. P. Korovkin tarafından geliştirilmiş ve birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Altomare ve Campiti, 1994), (Korovkin, 1960), (Gadjiev ve Orhan, 2002), (Duman, 2003). Örneğin; O. Duman tarafından 2003 yılında alışılmış yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık kullanılarak trigonometrik Korovkin tipi teoremler elde edilmiştir (Duman, 2003). Ayrıca Korovkin tipi teoremler ve trigonometrik versiyonları G. A. Anastassiou tarafından klasik analiz yerine kesirli analiz kullanılarak çalışılmıştır (Anastassiou, 2009), (Anastassiou, 2010). 2010 yılında ise G. A. Anastassiou ve O. Duman, kesirli analiz ve istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen trigonometrik Korovkin tipi sonuçları birlikte göz önüne almışlardır ve istatistiksel yakınsaklık yardımıyla kesirli trigonometrik Korovkin teorisini geliştirmişlerdir (Anastassiou ve Duman, 2010). 2019 yılında ise M. Ünver ve C. Orhan tarafından istatistiksel yakınsaklık ve kuvvet serisi metodu birlikte göz önüne alınarak kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık yani P -istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır (Ünver ve Orhan, 2019: 537). Bu çalışmada, P -istatistiksel yakınsaklık metodunun klasik yakınsaklık ya da istatistiksel yakınsaklık tarafından içerilmediğine dair örnekler verilerek Korovkin tipi sonuçlar P -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla da elde edilmiştir (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

Bu tezin amacı, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla kesirli analiz kullanılarak trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar elde etmektir. Literatürde kesirli analiz ve yaklaşım teorisini birleştiren çalışma sayısı ne yazık ki azdır. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda elde edilecek orijinal sonuçlar, literatüre önemli bir katkı yapacaktır ve bu tez ise bu konuda çalışacak araştırmacılar için bir el kitabı olma niteliğini taşıyacaktır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak temel tanım, kavramlar ve iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

2.1. Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $G \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere G kümesinin yoğunluğu ve istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki örneklerle ortaya koyulacaktır.

Tanım 2.1.1. $\#$, G kümesinin kardinalitesini göstermek üzere

$$\delta(G) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \# \{n \leq k : n \in G\}$$

limitinin var olması durumunda $\delta(G)$ değeri G kümesinin yoğunluğu olarak adlandırılır (Niven ve Zuckerman, 1980: 473).

Tanım gereğince $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olup doğal sayıların sonlu alt kümelerinin yoğunluğunun 0 olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca

$$\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2} \text{ ve } \delta(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2},$$

asal sayılar ve $\{1, 4, 9, \dots, k^2, \dots\}$ kümelerinin yoğunluğunun da 0 olduğu iyi bilinmektedir.

Tanım 2.1.2. $s = (s_n)$ reel ya da kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \# \{n \leq k : |s_n - \ell| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa $s = (s_n)$ bu değere istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle, her $\varepsilon > 0$ için

$$G_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |s_n - \ell| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta(G_\varepsilon) = 0$ ise s dizisi bu değere istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim s = \ell$ ya da $s_n \rightarrow \ell(st)$ şeklinde gösterilir (Fast, 1951: 241), (Fridy, 1985: 302), (Salat, 1980: 139).

Örnek 2.1.3. $m \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+2} & , \quad n = m^2 \\ 0 & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini inceleyelim.

(s_n) dizisi ıraksak olup her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \#\{n \leq k : |s_n| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \#\{n \leq k : s_n \neq 0\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sqrt{k} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\delta(G_\varepsilon) = 0$ olup $s = (s_n)$ dizisi 0 değerine istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 2.1.4. $m \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \begin{cases} \sqrt{n^3} & , \quad n = m^2 \\ 3 & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

(s_n) dizisi sınırsız olduğundan ıraksaktır. Benzer şekilde $s = (s_n)$ dizisinin 3 değerine istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir.

Örnekler incelendiğinde sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak dizilerin istatistiksel yakınsak olabildiği görülür. Ayrıca klasik anlamda yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirse de bunun karşısı doğru değildir.

2.2. A-Yoğunluk ve A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda A sonsuz matris olmak üzere A -yoğunluk ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1. $A := [a_{jn}]$ $j, n = 1, 2, \dots$; sonsuz matrisi ve $s = (s_n)$ dizisi verilsin. Bu durumda " A -dönüşüm dizisi" $As := ((As)_j)$, her bir j için seri yakınsak olmak üzere

$$(As)_j := \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} s_n$$

şeklinde tanımlanır. Yakınsak dizilerin A dönüşüm dizilerinin limiti aynı kalıyorsa, yani limit A dönüşümü altında korunuyorsa, A matrisine regüler denir (Hardy, 1949: 42).

Regülerliği karakterize eden teoremi ispatsız olarak hatırlatalım.

Teorem 2.2.1 (Silverman-Toeplitz). Bir $A = [a_{jn}]$ matrisi regülerdir $\iff$

- i. $\sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$,
- ii. her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n := \lim_j a_{jn} = 0$,
- iii. $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

(Hardy, 1949: 43), (Maddox, 1970: 165).

Tanım 2.2.2. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve $G \subset \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(G) = \lim_j \sum_{n \in G} a_{jn} \quad (2.1)$$

limiti varsa bu değere G kümesinin A -yoğunluğu denir (Freedman ve Sember, 1981: 296).

Tanım 2.2.3. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n: |s_n - \ell| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0 \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı bulunabiliyorsa $s = (s_n)$ bu değere A -istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir başka ifadeyle, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_A(G_\varepsilon) = 0$$

ise s dizisi ℓ değerine A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim s = \ell$ ya da $s_n \rightarrow \ell(st_A)$ şeklinde gösterilir (Kolk, 1993: 79), (Miller, 1995: 1811).

Yukarıdaki tanımda

- eğer $A = I$ birim matrisi alınırsa klasik yakınsaklık,
- eğer A matrisi Cesàro matrisi olarak alınırsa istatistiksel yakınsaklık

elde edilir.

Örnek 2.2.4. $A = [a_{jn}]$ matrisi $j = 1, 2, \dots$ için

$$a_{jn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $A = [a_{jn}]$ matrisinin negatif olmadığı ve regüler olduğu açıktır. (s_n) dizisi ise

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$G_\varepsilon = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| s_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n \in G_\varepsilon} a_{jn} = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $s = (s_n)$ dizisi $\frac{1}{2}$ değerine A -istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 2.2.5. $A = [a_{jn}]$ matrisi $j = 1, 2, \dots$ için

$$a_{jn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = j^2 \\ 0 & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $A = [a_{jn}]$ matrisinin negatif olmadığı ve regüler olduğu açıktır.

(s_n) dizisi ise

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad n = j^2 \\ j & , \quad n \neq j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $s = (s_n)$ sınırsız dizisi için her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n \in G_\varepsilon} a_{jn} = 0$$

olup bu dizi $\frac{1}{2}$ değerine A-istatistiksel yakınsaktır.

Klasik yakınsaklık A-istatistiksel yakınsaklığı gerektirir. Bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

2.3. Kuvvet Serisi Metodu ve Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda kuvvet serisi metodu, bir dizinin kuvvet serisi anlamında yakınsaklığı ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığı tanıtilarak aralarındaki ilişki verilecektir.

Tanım 2.3.1. (p_n) reel sayıların $n \geq 2$ için $p_n \geq 0$, $p_1 > 0$ olacak şekilde bir dizisi olsun. Ayrıca

$$p(t) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $0 < R \leq \infty$ olsun.

$$C_p := \left\{ f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} f(t) \text{ mevcut} \right\}$$

ve $s = (s_n)$ dizisi için

$$C_{p_p} := \left\{ s = (s_n) \mid p_s(t) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1} s_n \text{ yakınsaklık yarıçapı } \geq R \text{ ve } p_s \in C_p \right\}$$

olsun. Kuvvet serisi metodu $P - \lim : C_{p_p} \rightarrow \mathbb{R}$ (kısaca P) olmak üzere

$$P - \lim s = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^{n-1} s_n$$

şeklinde tanımlanır ve $s = (s_n)$ dizisine P -yakınsaktır denir (Boos, 2000: 152), (Kratz ve Stadtmüller, 1989: 362).

Kuvvet serisi metodunun regülerliği aşağıdaki teorem ile karakterize edilir:

Teorem 2.3.1. P metodu regülerdir $\iff$ Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \frac{p_n t^{n-1}}{p(t)} = 0$$

gerçeklenir (Boos, 2000: 160).

Eğer

i. $R = 1$, $p(t) = \frac{1}{1-t}$ ve $n \geq 1$ için $p_n = 1$ ise Abel,

ii. $R = \infty$, $p(t) = e^t$ ve $n \geq 1$ için $p_n = \frac{1}{(n-1)!}$ ise Borel

metotları elde edilir.

Örnek 2.3.2. $s = (s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ olsun.

$$p_n = \frac{1}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}$$

için $R = \infty$, $p(t) = e^t$ olup bu kuvvet serisi metodu için kolaylıkla

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n t^{n-1}}{(n-1)!} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $s = (s_n)$, $\frac{1}{2}$ değerine P -yakınsaktır. Bu dizi ne klasik anlamda ne de istatistiksel anlamda yakınsaktır.

Örnek 2.3.3. $n \geq 1$ için $s_n = (-1)^n$ ile tanımlanan $s = (s_n)$ dizisi ve $p_n = 1$, her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (p_n) dizisi ile tanımlanan kuvvet serisi metodu verilsin.

Bu durumda $R = 1$ ve $p(t) = \frac{1}{1-t}$ olup

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} s_n t^{n-1} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $s = (s_n)$, 0 değerine P -yakınsaktır. $s = (s_n)$ dizisinin klasik anlamda yakınsak olmadığı açık olup buradan kuvvet serisi metodunun daha etkili olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 2.3.4. P , regüler ve $G \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_P(G) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1}$$

varsa $\delta_P(G)$ değerine G kümesinin P -yoğunluğu denir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

Açıkça $0 \leq \delta_P(G) \leq 1$ gerçekleşir.

Tanım 2.3.5. $s = (s_n)$ reel terimli dizi ve P regüler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G_\varepsilon} p_n t^{n-1} = 0$$

yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_P(G_\varepsilon) = 0$$

ise $s = (s_n)$ dizisi bu değere P -istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_P - \lim s = \ell$$

şeklinde gösterilir (Ünver ve Orhan, 2019: 537).

Ayrıca bir kümenin yoğunluğunun ve P -yoğunluğunun farklı olduğuna ilişkin örnekler verilmiştir ve bu örneklerden yola çıkılarak istatistiksel yakınsaklık ile P -istatistiksel yakınsaklığın birbirini gerektirmediği gösterilmiştir (Ünver ve Orhan, 2019: 538).

2.4. Pozitif Lineer Operatörler

Bu kısımda pozitif lineer operatörlere ilişkin temel kavramlar ve iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.4.1. X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X uzayındaki her g fonksiyonuna Y uzayında bir h fonksiyonu karşılık getiren T kuralına X uzayından Y uzayına bir operatör denir ve $h(x) = T(g; x)$ gösterimi kullanılır.

X uzayının lineer olması durumunda T operatörünün lineerliğinden söz edilebilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.4.2. X ve Y reel fonksiyonların iki uzayı olmak üzere her $f, g \in X$ ve α_1, α_2 keyfi iki reel sabiti için T operatörü,

$$T(\alpha_1 f + \alpha_2 g; x) = \alpha_1 T(f; x) + \alpha_2 T(g; x)$$

ise $T : X \rightarrow Y$ dönüşümüne lineer operatör denir. $g \geq 0$ iken $Tg \geq 0$ ise T pozitif operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

Tanımdan T lineer operatörü için $T(0; x) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

Önerme 2.4.3. $T : X \rightarrow Y$ pozitif lineer operatör olsun. Bu durumda

- $g \leq h$ ise $Tg \leq Th$, (monotonluk)
- $|Tg| \leq T|g|$

gerçeklenir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 11).

Tanım 2.4.4. X, Y normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $g \in X$ için

$$\|Tg\|_Y \leq M\|g\|_X \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa T operatörüne sınırlıdır denir ve T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{g \in X, g \neq \theta} \frac{\|Tg\|_Y}{\|g\|_X} \quad (2.4)$$

ile hesaplanır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995: 12), (Kreyzig, 2007: 91-92).

Şimdi pozitif lineer operatörlerin önemli bir rol oynadığı "Bohman-Korovkin Teoremi'ni" hatırlatalım. Bu teorem 1951 yılında Popoviciu (Popoviciu, 1951: 1-4), 1952 yılında H. Bohman (Bohman, 1952: 45) ve 1953 yılında P. P. Korovkin (Korovkin, 1953: 961) tarafından bağımsız olarak literatüre katılmıştır.

Teorem 2.4.1. $C[a, b] := \{f|f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli}\}$, $e_j(t) = t^j$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ pozitif ve lineer olmak üzere

$$L_n(e_j(t); x) \Rightarrow e_j(x), j = 0, 1, 2 \quad (2.5)$$

şartları sağlanırsa her $f \in C[a, b]$ için

$$L_n(f(t); x) \Rightarrow f(x) \quad (2.6)$$

gerçeklenir.

Örnek 2.4.5. Bernstein polinomları, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C[0, 1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlı olup bu operatörler için Teorem 2.4.1'in gerçekleştiği iyi bilinmektedir.

Şimdi sınırlı fonksiyonlar için tanımlanan süreklilik modülünü ve temel özelliklerini verelim (Altomare ve Campiti, 1994: 17), (Korovkin, 1960: 16).

Tanım 2.4.6. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

$\omega(f, \delta)$ fonksiyonu için

1. her $x \neq y, x, y \in [a, b]$ için $|f(x) - f(y)| \leq \omega(f, |x - y|)$,
2. $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f, \delta_1) \leq \omega(f, \delta_2)$,
3. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir $\iff \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, \delta) = 0$,
4. $f, [a, b]$ üzerinde sınırlı ve $\delta > 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f, n\delta) \leq n \omega(f, \delta)$ ve $\nu > 0$ için $\omega(f, \nu\delta) \leq (1 + \nu) \omega(f, \delta)$ gerçekleşir.

2.5. Kesirli Analize İlişkin Temel Kavramlar

Bu kısımda kesirli analize ilişkin temel kavramlar hatırlatılacaktır ve örnekler verilecektir.

Şimdi keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarına ve araştırmalarına ilişkin analizin bir dalı olan kesirli analizin ihtiyaç duyacağımız kavramlarını hatırlatalım. Kesirli analizde türev için Riemann-Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov, Caputo, Riesz gibi çeşitli tanımlar verilmiştir.

Kesirli diferansiyel teorisinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M. Caputo olmuştur. Şimdi literatürde sık karşılaşıldığı haliyle α . basamaktan Caputo türevin tanımını verelim:

Tanım 2.5.1. m pozitif tamsayı olmak üzere $m - 1 < \alpha < m$ için

$${}_a D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^z (z - t)^{m - \alpha - 1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.7)$$

şeklindedir (Podlubny, 1999), (Kilbas vd., 2006).

$f(z)$ fonksiyonunun normal şartlar altında, $\alpha \rightarrow m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m . basamaktan klasik türevine eşittir. Gerçekten de, $0 \leq m-1 < \alpha < m$ ve $f(z)$ fonksiyonunun her $H > a$ için $[a, H]$ aralığında $(m+1)$ kez sürekli ve sınırlı türeve sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m} {}^a D_z^\alpha f(z) &= \lim_{\alpha \rightarrow m} \left(\frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \int_a^z \frac{(z-t)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(t)}{\Gamma(m-\alpha+1)} dt \right) \\ &= f^{(m)}(a) + \int_a^z f^{(m+1)}(t) dt \\ &= f^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

elde edilir (Sökmen, 2012: 32).

Belirli şartlar altında bu tanımlar eşdeğer olmasına ve aralarında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımların fiziksel yorumları farklılık gösterir (Anastassiou, 2009: 68), (Samko vd., 1993), (Sökmen, 2012: 64). Örneğin; Riemann-Liouville ve Caputo tanımları için sabitin türevi farklılık göstermektedir. Sabit bir sayının Caputo türevi sıfır iken sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Bir problemin fiziksel olarak yorumlanabilmesi için sabitin kesirli türevinin sıfır olması gerekmektedir.

Şimdi tezde ilgilendiğimiz uzaya uygun haliyle sol ve sağ Caputo türev tanımlarını verelim:

Tanım 2.5.2. $r > 0$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in AC^m([-\pi, \pi])$ olmak üzere her $x \in [-\pi, \pi]$ için

$$D_{*(-\pi)}^r f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_{-\pi}^x (x-t)^{m-r-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan $D_{*(-\pi)}^r f(x)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun sol Caputo türevi denir.

Burada $m = \lceil \cdot \rceil$ sayının tavan fonksiyonu ve Γ ; $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt$, $y > 0$ ile tanımlanan Gamma fonksiyonudur. Ayrıca

$$AC^m([-\pi, \pi]) := \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} | f^{(m-1)} \in AC([-\pi, \pi])\}$$

ve $AC([-\pi, \pi])$ ise $[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı reel değerli, bu aralıkta mutlak sürekli tüm fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.5.3. $f \in AC^m([-\pi, \pi])$, $m = \lceil r \rceil$, $r > 0$ olmak üzere her $x \in [-\pi, \pi]$ için

$$D_{\pi-}^r f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-r)} \int_x^\pi (\zeta - x)^{m-r-1} f^{(m)}(\zeta) d\zeta \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan $D_{\pi-}^r f(x)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun sağ Caputo türevi denir.

Yukarıdaki (2.8) ve (2.9) eşitliklerinde, $[-\pi, \pi]$ üzerinde $D_{\pi-}^0 f = f$ ve $D_{*(-\pi)}^0 f = f$ olarak alınacaktır.

Ayrıca $r > 0$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in AC^m([-\pi, \pi])$ olmak üzere

$$\text{her } x < -\pi \text{ için } D_{*(-\pi)}^r f(x) = 0,$$

$$\text{her } x > \pi \text{ için } D_{\pi-}^r f(x) = 0,$$

olduğu kabul edilecektir.

Örnek 2.5.4. $f(t) = t^\alpha \in C[0, 1]$, $t \in [0, 1]$, $r = \frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda $m = 1$ olup

$$D_{*(0)}^{\frac{1}{3}} f(y) := \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^y (y-t)^{-\frac{1}{3}} \alpha t^{\alpha-1} dt$$

ifadesinde $t = yx$ alırsak

$$D_{*(0)}^{\frac{1}{3}} f(y) := \frac{\alpha y^{\alpha-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{3}} \alpha x^{\alpha-1} dx$$

ifadesini elde ederiz. Beta fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$D_{*(0)}^{\frac{1}{3}} f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1) y^{\alpha-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\alpha+\frac{2}{3})}$$

olduğunu görürüz. Eğer $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ olursa $D_{*(0)}^{\frac{1}{3}} f(0) = \infty$ ve $\alpha = \frac{1}{3}$ olursa $D_{*(0)}^{\frac{1}{3}} f(0) = \Gamma(\frac{4}{3}) > 0$ olur. Görüldüğü gibi $D_{*(a)}^r f(a)$ değeri sıfır veya sıfırdan farklı olabildiği gibi sonsuz da olabilir.

Örnek 2.5.5. $f(y) = y$ ve $r = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} D_{*(0)}^{\frac{1}{2}} y &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} y^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

buluruz. Eğer bu ifadenin $1/2$. türevini alırsak

$$D_{*(0)}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} y^{\frac{1}{2}} = 1$$

olduğunu görürüz. Yani $f(y) = y$ için iki kere $1/2$. türev almak ile birinci türevini almak aynıdır.

Örnek 2.5.6. Hatta $e^{\lambda x}$ fonksiyonunun Caputo türevi

$$\lambda^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda x)$$

olup burada $E_{\alpha,\beta}(z)$,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

şeklinde tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Ayrıca (Anastassiou, 2009), (Anastassiou, 2010) ve (Anastassiou ve Duman, 2010) çalışmalarından aşağıdakilerin gerçekleştiği bilinmektedir:

(1) $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in C^{m-1}([-\pi, \pi])$ ve $f^{(m)} \in L_{\infty}([-\pi, \pi])$ olmak üzere $D_{*(-\pi)}^r f(-\pi) = 0$ ve $D_{\pi-}^r f(\pi) = 0$ gerçekleşir.

(2) $y \in [-\pi, \pi]$ noktası sabit olsun. $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f^{(m)} \in L_{\infty}([-\pi, \pi])$ olacak şekilde her $f \in C^{m-1}([-\pi, \pi])$ için:
her $y \in [x, \pi]$ için

$$U_f(x, y) := D_{*x}^r f(y) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_x^y (y-t)^{m-r-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.10)$$

ve her $y \in [-\pi, x]$ için

$$V_f(x, y) := D_{x-}^r f(y) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-r)} \int_y^x (\zeta-y)^{m-r-1} f^{(m)}(\zeta) d\zeta \quad (2.11)$$

şeklindeki kesirli Caputo türevleri göz önüne alalım. Bu durumda her sabit $x \in [-\pi, \pi]$ noktası için; $[x, \pi]$ kapalı aralığında $U_f(x, \cdot)$ süreklidir ve $[-\pi, x]$ kapalı aralığında $V_f(x, \cdot)$ süreklidir. Ek olarak, eğer $f \in C^m([-\pi, \pi])$ ise $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ kümesi üzerinde $U_f(\cdot, \cdot)$

ve $V_f(\cdot, \cdot)$ süreklidir.

- (3) $[-\pi, \pi]$ üzerinde süreklilik modülü $\omega(f, \delta)$, $\delta > 0$ için eğer $g \in C([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ ise her $\delta > 0$ için, $s(x) := \omega(g(x, \cdot), \delta)_{[-\pi, x]}$ ve $t(x) := \omega(g(x, \cdot), \delta)_{[x, \pi]}$ fonksiyonlarının her ikisi de $x \in [-\pi, \pi]$ noktasında süreklidir.

- (4) $f^{(m)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$ olacak şekilde her $f \in C^{m-1}([-\pi, \pi])$ ve her $\delta > 0$ için

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(U_f(x, \cdot), \delta)_{[x, \pi]} < \infty \quad (2.12)$$

ve

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(V_f(x, \cdot), \delta)_{[-\pi, x]} < \infty \quad (2.13)$$

gerçeklenir.

- (5) Şimdi $[-\pi, \pi]$ üzerinde $\psi(y) := \psi_x(y) = y - x$, $\Omega(y) := \Omega_x(y) = \sin\left(\frac{|y-x|}{4}\right)$ ve $e_0(y) := 1$ olsun. $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f^{(m)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$ olacak şekilde her $f \in AC^m([-\pi, \pi])$ için $T_n : C([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - f\| &\leq \|f\| \|T_n(e_0) - e_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\|f^{(k)}\|}{k!} \|T_n(|\psi|^k)\| \\ &\quad + \left(\frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r+1)} \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{r+1}} + \frac{(2\pi)^r(r+1+2\pi)}{\Gamma(r+2)} \right) \\ &\quad \times \|T_n(\Omega^{r+1})\|^{\frac{r}{r+1}} \left\{ \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega\left(U_f(x, \cdot), \|T_n(\Omega^{r+1})\|^{\frac{1}{r+1}}\right)_{[x, \pi]} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega\left(V_f(x, \cdot), \|T_n(\Omega^{r+1})\|^{\frac{1}{r+1}}\right)_{[-\pi, x]} \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada $\|\cdot\|$ supremum normu olmak üzere

$$\rho_{n,r} := \|T_n(\Omega^{r+1})\|^{\frac{1}{r+1}}$$

yazılarak ve (2.12) ile (2.13) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|T_n(f) - f\| &\leq H_{m,r} \left\{ \|T_n(e_0) - e_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} \|T_n(|\psi|^k)\| \right. \\
&\quad + \rho_{n,r}^r \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[x, \pi]} \right) \\
&\quad + \rho_{n,r}^r \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[-\pi, x]} \right) \\
&\quad + \rho_{n,r}^r \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{r+1}} \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[x, \pi]} \right) \\
&\quad \left. + \rho_{n,r}^r \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{r+1}} \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[-\pi, x]} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

elde edilir. Burada

$$H_{m,r} := \max \left\{ \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r+1)}, \frac{(2\pi)^r(r+1+2\pi)}{\Gamma(r+2)}, \|f\|, \|f'\|, \frac{\|f''\|}{2!}, \dots, \frac{\|f^{(m-1)}\|}{(m-1)!} \right\} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Açıkça $r \in (0, 1)$ ise $m = 1$ olup (2.14) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplam ortadan kalkacaktır.

3. KESİRLİ ANALİZ VE TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ

Bu bölümde yaklaşım teorisinde iyi bilinen Korovkin teoreminin trigonometrik versiyonu ve kesirli analiz yardımıyla elde edilen trigonometrik versiyonu hatırlatılacaktır.

3.1. Trigonometrik Korovkin Teorisi

Bu kısımda Korovkin teoreminin trigonometrik versiyonu hatırlatılacaktır.

Teorem 3.1.1. $T_n : C([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$, $n \in \mathbb{N}$, pozitif lineer operatör olmak üzere $[-\pi, \pi]$ üzerinde

$$T_n(e_0) \Rightarrow e_0, \quad T_n(\cos t) \Rightarrow \cos x, \quad T_n(\sin t) \Rightarrow \sin x,$$

oluyorsa 2π periyotlu her $f \in C([-\pi, \pi])$ için $T_n(f(t); x) \Rightarrow f(x)$ gerçekleşir (Korovkin, 1960: 16).

Ayrıca Shisha ve Mond tarafından 1968 yılında elde edilen aşağıdaki teoremi hatırlatabiliriz (Shisha ve Mond, 1968):

Teorem 3.1.2. T_n , D üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler ve f ; 2π periyotlu her yerde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $1, \cos x, \sin x, f$ fonksiyonları D uzayına ait olsun. $-\infty < a < b < \infty$ ve $[a, b]$ üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(e_0)$ sınırlı olmak üzere

$$\|T_n(f) - f\| \leq \|f\| \|T_n(e_0) - e_0\| + \|T_n(e_0) + e_0\| \omega(f, \mu_n) \quad (3.1)$$

gerçeklenir. Burada

$$\mu_n = \pi \left\| \left(T_n \left(\sin^2 \left(\frac{t-x}{2} \right); x \right) \right) \right\|^{\frac{1}{2}}$$

ve $\|\cdot\|$ ilgili uzay üzerindeki supremum normu göstermektedir. Özel olarak, eğer $T_n(e_0) = e_0$ ise

$$\|T_n(f) - f\| \leq 2 \omega(f, \mu_n)$$

elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mu_n^2 \leq \left(\frac{\pi^2}{2} \right) \left[\|T_n(e_0) - e_0\| + \|(T_n(\cos t; x) - \cos x)\| + \|(T_n(\sin t; x) - \sin x)\| \right]$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği kolayca görülmektedir.

3.2. Kesirli Trigonometrik Korovkin Teorisi

Bu kısımda daha önce tanıtılan trigonometrik Korovkin teorisi ve kesirli analizin birleştirildiği George A. Anastassiou tarafından elde edilen sonuçlar incelenecektir. (Anastassiou, 2009) ve (Anastassiou, 2010) çalışmalarından aşağıdakilerin gerçekleştiği bilinmektedir:

- μ , $[-\pi, \pi]$ aralığının Borel σ -cebiri üzerinde pozitif bir ölçü, $r > 0$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$ olsun. Hölder eşitsizliğinde $p = \frac{r+1}{r}$ ve $q = r+1$ alarak, $|t| \leq \pi \sin\left(\frac{|t|}{2}\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$ yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, x_0]} (x_0 - x)^r d\mu(x) &\leq 2^r \left(\int_{[-\pi, x_0]} \left(\frac{(x_0 - x)}{2} \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \mu([- \pi, x_0])^{\frac{1}{(r+1)}} \\ &\leq (2\pi)^r \left(\int_{[-\pi, x_0]} \left(\sin\left(\frac{(x_0 - x)}{4}\right) \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \mu([- \pi, x_0])^{\frac{1}{(r+1)}} \end{aligned}$$

elde edilir.

- Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \int_{(x_0, \pi]} (x - x_0)^r d\mu(x) &\leq 2^r \left(\int_{(x_0, \pi]} \left(\frac{(x - x_0)}{2} \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \mu((x_0, \pi])^{\frac{1}{(r+1)}} \\ &\leq (2\pi)^r \left(\int_{(x_0, \pi]} \left(\sin\left(\frac{(x - x_0)}{4}\right) \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \mu((x_0, \pi])^{\frac{1}{(r+1)}} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $k = 1, \dots, m-1$ olsun. $p = \frac{r+1}{k}$ ve $q = \frac{r+1}{r+1-k}$ alınarak Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi, \pi]} |x - x_0|^k d\mu(x) &\leq 2^k \left(\int_{[-\pi, \pi]} \left(\frac{|x - x_0|}{2} \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{k}{(r+1)}} \mu([- \pi, \pi])^{\frac{r+1-k}{(r+1)}} \\
&\leq (2\pi)^k \left(\int_{[-\pi, \pi]} \left(\sin \left(\frac{|x - x_0|}{4} \right) \right)^{r+1} d\mu(x) \right)^{\frac{k}{(r+1)}} \mu([- \pi, \pi])^{\frac{r+1-k}{(r+1)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

- $T_n : C([- \pi, \pi]) \rightarrow C([- \pi, \pi])$, $n \in \mathbb{N}$, pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Riesz Gösterim Teoremi gereğince her $x_0 \in [- \pi, \pi]$ için

$$T_n(f; x_0) = \int_{[-\pi, \pi]} f(t) d\mu_{n, x_0}(t)$$

gerçeklenir. Burada μ_{n, x_0} , $[- \pi, \pi]$ aralığının bir Borel σ -cebiri üzerinde tanımlı bir tek pozitif sonlu ölçüdür. Ayrıca

$$T_n(e_0; x_0) = \mu_{n, x_0}([- \pi, \pi]) = M_{n, x_0}$$

olarak gösterilsin.

- $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in C^{m-1}([- \pi, \pi])$ ve $f^{(m)} \in L_\infty([- \pi, \pi])$ olmak üzere

$$\left| D_{*(-\pi)}^r f(x) \right| \leq \frac{\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (x - (-\pi))^{m-r}, \quad \text{her } x \in [- \pi, \pi] \text{ için} \quad (3.2)$$

gerçeklenir.

- Ayrıca (3.2) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\omega \left(D_{*(-\pi)}^r f, \delta \right) &= \sup_{\substack{x, y \in [-\pi, \pi] \\ |x-y| \leq \delta}} \left| D_{*(-\pi)}^r f(x) - D_{*(-\pi)}^r f(y) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{x, y \in [-\pi, \pi] \\ |x-y| \leq \delta}} \left(\frac{\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (y - (-\pi))^{m-r} + \frac{\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (x - (-\pi))^{m-r} \right) \\
&\leq \frac{2\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (2\pi)^{m-r}
\end{aligned}$$

ifadesinin gerçeklendiği kolayca görülmektedir.

■ Benzer şekilde

$$\omega(D_{\pi-}^r f, \delta) \leq \frac{2\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (2\pi)^{m-r}$$

eşitsizliği de gerçekenir.

■ $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in C^{m-1}([-\pi, \pi])$ ve $f^{(m)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$ olmak üzere

$$\sup_{x_0 \in [-\pi, \pi]} \omega(D_{*x_0}^r f, \delta)_{[x_0, \pi]} \leq \frac{2\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (2\pi)^{m-r}$$

ve

$$\sup_{x_0 \in [-\pi, \pi]} \omega(D_{x_0-}^r f, \delta)_{[-\pi, x_0]} \leq \frac{2\|f^{(m)}\|}{\Gamma(m-r+1)} (2\pi)^{m-r}$$

gerçeklenir.

Tüm bu ifadeler dikkate alındığında aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verebiliriz.

Teorem 3.2.1. $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$, $f \in AC^m([-\pi, \pi])$ ve $f^{(m)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$ olsun. $h > 0$ ve $x_0 \in [-\pi, \pi]$ için $T_n : C([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörler olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| T_n(f; x_0) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} T_n((x-x_0)^k; x_0) \right| \leq \\
& \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r+1)} \left[(T_n(e_0; x_0))^{\frac{1}{(r+1)}} + \frac{2\pi}{(r+1)h} \right] \\
& \times \left\{ \left(T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|x-x_0|\chi_{[-\pi, x_0]}(x)}{4} \right) \right)^{r+1}; x_0 \right) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \right. \\
& \times \omega \left(D_{x_0-f, h}^r \left(T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|x-x_0|\chi_{[-\pi, x_0]}(x)}{4} \right) \right)^{r+1}; x_0 \right) \right)^{\frac{1}{(r+1)}} \right)_{[-\pi, x_0]} \\
& + \left(T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|x-x_0|\chi_{[x_0, \pi]}(x)}{4} \right) \right)^{r+1}; x_0 \right) \right)^{\frac{r}{(r+1)}} \\
& \left. \omega \left(D_{*x_0-f, h}^r \left(T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|x-x_0|\chi_{[x_0, \pi]}(x)}{4} \right) \right)^{r+1}; x_0 \right) \right)^{\frac{1}{(r+1)}} \right)_{[x_0, \pi]} \right\}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada χ_M ;

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \text{ ise} \\ 0, & x \notin M \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan M kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Tüm bunlar dikkate alındığında aşağıdaki Shisha-Mond tipi trigonometrik eşitsizliği ve Korovkin tipi yaklaşım sonucunu kesirli analiz için verebiliriz.

Teorem 3.2.2. $f \in AC^m([-\pi, \pi])$, $f^{(m)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$, $m = \lceil r \rceil$, $r \notin \mathbb{N}$, $r > 0$, $h > 0$, $x \in [-\pi, \pi]$

ve $T_n : C([-π, π]) \rightarrow C([-π, π])$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörleri için

$$\|T_n(f) - f\| \leq$$

$$\begin{aligned} & \|f\| \|T_n(e_0) - e_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\|f^{(k)}\|}{k!} \|T_n((\cdot - x)^k; x)\| + \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r+1)} \left[(\|T_n(e_0)\|)^{\frac{1}{(r+1)}} + \frac{2\pi}{(r+1)h} \right] \\ & \times \left\{ \left\| T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|\cdot - x| \chi_{[-\pi, x]}(\cdot)}{4} \right) \right)^{r+1}; x \right) \right\|^{\frac{r}{(r+1)}} \right. \\ & \times \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega \left(D_{x-}^r f, h \left\| T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|\cdot - x| \chi_{[-\pi, x]}(\cdot)}{4} \right) \right)^{r+1}; x \right) \right\|^{\frac{1}{(r+1)}} \right)_{[-\pi, x]} \\ & + \left\| T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|\cdot - x| \chi_{[x, \pi]}(\cdot)}{4} \right) \right)^{r+1}; x \right) \right\|^{\frac{r}{(r+1)}} \\ & \times \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \omega \left(D_{*x}^r f, h \left\| T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|\cdot - x| \chi_{[x, \pi]}(\cdot)}{4} \right) \right)^{r+1}; x \right) \right\|^{\frac{1}{(r+1)}} \right)_{[x, \pi]} \left. \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Teorem 3.2.3. $m = \lceil r \rceil$, $r \notin \mathbb{N}$, $r > 0$ ve $T_n : C([-π, π]) \rightarrow C([-π, π])$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörleri için $T_n(e_0) \rightrightarrows e_0$ ve

$$\left\| T_n \left(\left(\sin \left(\frac{|\cdot - x|}{4} \right) \right)^{r+1}; x \right) \right\| \rightarrow 0$$

olsun. Bu durumda, $f^{(m)} \in L_\infty([-π, π])$ olacak şekilde her $f \in AC^m([-π, π])$ için

$$T_n(f) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir.

4. KUVVET SERİSİ ANLAMINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMIYLA KESİRLİ TRİGONOMETRİK KOROVKİN TEORİSİ

İstatistiksel yakınsaklık ve yaklaşım teorisi ilk olarak 2002 yılında A. D. Gadjiev ve C. Orhan tarafından (Gadjiev ve Orhan, 2002) birleştirilmiştir ve sonrasında birçok matematikçi için yaklaşım sonuçlarının bu açıdan araştırılması popüler bir problem haline gelmiştir. Kesirli analiz ve yaklaşım teorisini birleştiren çalışmalar ise az sayıda olup bunlar arasında G. A. Anastassiou tarafından (Anastassiou, 2009) elde edilen sonuçlar literatürde önemli bir yer tutmaktadır. 2010 yılında G. A. Anastassiou ve O. Duman tarafından (Anastassiou ve Duman, 2010) kesirli analiz yardımıyla elde edilen yaklaşım sonuçları klasik yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık alınarak genelleştirilmiştir.

Bu bölümde P -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla kesirli trigonometrik Korovkin tipi teoremler elde edilecektir.

Bu bölüm (N. S. Ural ve T. Yurdakadim, 2023: 13) çalışmasında yayımlanan orijinal sonuçlarımızı içermektedir.

4.1. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Kesirli Trigonometrik Korovkin Tipi Sonuçlar

Bu kısımda A -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla G. A. Anastassiou ve O. Duman tarafından elde edilen kesirli trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar incelenecektir (Anastassiou ve Duman, 2010: 130).

Daha önceki bölümlerde hatırlatılan eşitsizlikler yardımıyla aşağıdaki sonuçlar ispatsız olarak verilecektir. Burada ve orijinal sonuçlarımızda kullanılan ispat teknikleri aynı olup tekrara düşmemek adına bir sonraki kısımda ispatlar detaylı bir şekilde verilecektir.

Lemma 4.1.1. $J = [-\pi, \pi]$, $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$ olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörleri için

$$st_A - \lim_n \|T_n(e_0) - e_0\| = 0 \quad (4.1)$$

ve

$$st_A - \lim_n \rho_{n,r} = 0 \quad (4.2)$$

oluyorsa her $k = 1, 2, \dots, m-1$ için

$$st_A - \lim_n \|T_n(|\psi|^k)\| = 0$$

gerçeklenir. Burada

$$\begin{aligned}\rho_{n,r} &:= \|T_n(\phi^{r+1})\|^{\frac{1}{r+1}} \\ \phi(y) &:= \phi_x(y) = \sin\left(\frac{|y-x|}{4}\right) \\ \psi(y) &:= \psi_x(y) = y - x\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 4.1.1. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$ olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörler dizisi için (4.1) ve (4.2) şartları sağlanıyorsa $f^{(m)} \in L_\infty(J)$ olacak şekilde her $f \in AC^m(J)$ için

$$st_A - \lim_n \|T_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

Yukarıdaki teorem $AC^m(J)$ uzayı yerine $C^m(J)$ uzayı alınarak ufak bir düzenlemeyle elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 4.1.2. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$ olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörleri için (4.2) şartı sağlanırsa her $f \in C^m(J)$ için

$$\begin{aligned}i. \quad st_A - \lim_n \left(\sup_{x \in J} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[x, \pi]} \right) &= 0 \\ ii. \quad st_A - \lim_n \left(\sup_{x \in J} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,r})_{[-\pi, x]} \right) &= 0\end{aligned}$$

gerçeklenir.

Teorem 4.1.2. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil r \rceil$ olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$, $n \in \mathbb{N}$ pozitif lineer operatörleri için (4.1) ve (4.2) şartları sağlanıyorsa her $f \in C^m(J)$ için

$$st_A - \lim_n \|T_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

4.2. Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Kesirli Trigonometrik Korovkin Tipi Sonuçlar

Bu kısımda daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen P -istatistiksel yakınsaklık kullanılarak kesirli trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar elde edilecektir. Kesirli analizin, akustik dalga yayılımı, homojen olmayan gözenekli malzeme, sıvı akışı, termodinamik jeoloji, deprem dinamiği, biyomühendislik, sinir ağları, tomografi gibi birçok uygulamalı bilimde kullanıldığını ve mevcut matematiksel teorisinin bu uygulamaların matematiksel modellemesine yönelik ihtiyaçlarının gerisinde kaldığını belirtmekte fayda vardır (Podlubny, 2001). Ayrıca bu kısımda $\mu > 0$, $\mu \notin \mathbb{N}$, $m = \lceil \mu \rceil$ olarak alınacaktır.

Lemma 4.2.1. P regüler olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$ pozitif lineer operatörleri için

$$stP - \lim \|T_n(e_0) - e_0\| = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$stP - \lim \rho_{n,\mu} = 0 \quad (4.4)$$

ise her $k = 1, 2, \dots, m-1$ için

$$stP - \lim \|T_n(|\psi|^k)\| = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ sabit olsun. (Pitul, 2007) gereğince pozitif lineer operatör dizileri için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\|T_n(|\psi|^k)\| \leq (2\pi)^k \left[\rho_{n,\mu}^k \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{\mu+1-k}{\mu+1}} + \rho_{n,\mu}^k \right]$$

olduğu (Anastassiou ve Duman, 2010) çalışmasında gösterilmiştir. Şimdi aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(|\psi|^k)\| \geq \varepsilon \right\}$$

$$G_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^k \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{\mu+1-k}{\mu+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^k} \right\}$$

$$G_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \right\}.$$

$G \subseteq G_1 \cup G_2$ olduğu açıktır. Ayrıca aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$G'_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2k}} \right\}$$

$$G''_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(e_0) - e_0\| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2(2\pi)^k} \right)^{\frac{\mu+1}{2(\mu+1-k)}} \right\}.$$

Benzer şekilde kolaylıkla $G \subseteq G'_1 \cup G''_1 \cup G_2$ olduğu görülür. Buradan,

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G'_1} p_n t^{n-1} + \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G''_1} p_n t^{n-1} + \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in G_2} p_n t^{n-1}$$

olup hipotez yardımıyla her $k = 1, 2, \dots, m-1$ için

$$st_P - \lim \left\| T_n(|\psi|^k) \right\| = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi P-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen ilk kesirli yaklaşım sonucumuzu verebiliriz.

Teorem 4.2.1. P regüler olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$ pozitif lineer operatörleri (4.3) ve (4.4) şartlarını sağlarsa $f^{(m)} \in L_\infty(J)$ olacak şekilde her $f \in AC^m(J)$ için

$$st_P - \lim \|T_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $f^{(m)} \in L_\infty(J)$ olacak şekilde keyfi bir $f \in AC^m(J)$ verilsin. Burada

$$\gamma_{m,\mu} := \max \left\{ H_{m,\mu}, \sup_{x \in J} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[x,\pi]}, \sup_{x \in J} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[-\pi,x]} \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - f\| &\leq \gamma_{m,\mu} \left\{ \|T_n(e_0) - e_0\| + 2\rho_{n,\mu}^\mu \right. \\ &\quad \left. + 2\rho_{n,\mu}^\mu \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} + \sum_{k=1}^{m-1} \|T_n(|\psi|^k)\| \right\} \end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir.

$$F := \{n \in \mathbb{N} : \|T_n(f) - f\| \geq \varepsilon\}$$

$$F_k := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(|\psi|^k)\| \geq \frac{\varepsilon}{(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

$$F_m := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(e_0) - e_0\| \geq \frac{\varepsilon}{(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right\}$$

$$F_{m+1} := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \left(\frac{\varepsilon}{2(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right\}$$

$$F_{m+2} := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^\mu \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right\}$$

kümeleri tanımlanırsa $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m+2} F_i$ olduğu kolaylıkla görülür.

$$F_{m+3} := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(e_0) - e_0\| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \right\}$$

ve

$$F_{m+4} := \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \left(\frac{\varepsilon}{2(m+2)\gamma_{m,\mu}} \right)^{\frac{1}{2\mu}} \right\}$$

kümeleri tanımlanırsa da $F_{m+2} \subseteq F_{m+3} \cup F_{m+4}$ ve $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m+4} F_i$ olduğu kolaylıkla elde edilecektir. Hipotezler gereğince $\delta_P(F) = 0$ elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

$AC^m(J)$ uzayı yerine $C^m(J)$ uzayını almak istersek yukarıdaki teoremi aşağıdaki lemma yardımıyla yine de verebiliriz.

Lemma 4.2.2. *P regüler olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$ pozitif lineer operatörleri için (4.4) şartı sağlanıyorsa*

$$i. \quad st_P - \lim \left(\sup_{x \in J} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[x,\pi]} \right) = 0$$

$$ii. \quad st_P - \lim \left(\sup_{x \in J} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[-\pi,x]} \right) = 0$$

gerçeklenir.

İspat. (Anastassiou, 2009) ve (Anastassiou, 2010) çalışmalarından

$$\sup_{x \in J} \omega(U_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[x,\pi]} = \omega(U_f(x_0, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[x_0,\pi]} =: g(\rho_{n,\mu})$$

ve

$$\sup_{x \in J} \omega(V_f(x, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[-\pi,x]} = \omega(V_f(x_1, \cdot), \rho_{n,\mu})_{[-\pi,x_1]} =: h(\rho_{n,\mu})$$

olacak şekilde $x_0, x_1 \in J$ olduğu bilinmektedir.

Hipotez gereğince her $\delta > 0$ için

$$\delta_P(\{n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \delta\}) = 0$$

olup (Anastassiou, 2010) çalışmasına benzer olarak g ve h fonksiyonlarının orijindeki süreklilikleri kullanılarak

$$\{n \in \mathbb{N} : g(\rho_{n,\mu}) \geq \varepsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \delta_1\}$$

ve

$$\{n \in \mathbb{N} : h(\rho_{n,\mu}) \geq \varepsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu} \geq \delta_2\}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n: g(\rho_{n,\mu}) \geq \varepsilon} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n: \rho_{n,\mu} \geq \delta_1} p_n t^{n-1},$$

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n: h(\rho_{n,\mu}) \geq \varepsilon} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n: \rho_{n,\mu} \geq \delta_2} p_n t^{n-1}$$

olup her iki tarafta limit alınırsa istenilen elde edilir. ■

Teorem 4.2.2. P regüler olmak üzere $T_n : C(J) \rightarrow C(J)$ pozitif lineer operatörleri (4.3) ve (4.4) şartlarını sağlarsa her $f \in C^m(J)$ için

$$st_P - \lim \|T_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

İspat. (2.14) gereğince;

$$\begin{aligned}
\|T_n(f) - f\| &\leq H_{m,\mu} \left\{ \|T_n(e_0) - e_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} \|T_n(|\psi|^k)\| \right. \\
&\quad + \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) + \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) \\
&\quad + \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} \\
&\quad \left. + \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olup keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
F &:= \{n \in \mathbb{N} : \|T_n(f) - f\| \geq \varepsilon\} \\
F_k &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(|\psi|^k)\| \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \\
F_m &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \|T_n(e_0) - e_0\| \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\} \\
F_{m+1} &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\} \\
F_{m+2} &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\} \\
F_{m+3} &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\} \\
F_{m+4} &:= \left\{ n \in \mathbb{N} : \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} \geq \frac{\varepsilon}{(m+4)H_{m,\mu}} \right\}
\end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın. (4.5) gereğince $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m+4} F_i$ olup

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n \in F} p_n t^{n-1} \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{i=1}^{m+4} \sum_{n \in F_i} p_n t^{n-1} \tag{4.6}$$

gerçeklenir.

(4.3), (4.4), Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 kullanılarak

$$stP - \lim \|T_n(|\psi|^k)\| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

$$st_P - \lim \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) = 0,$$

$$st_P - \lim \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) = 0,$$

$$st_P - \lim \rho_{n,\mu}^\mu g(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} = 0,$$

$$st_P - \lim \rho_{n,\mu}^\mu h(\rho_{n,\mu}) \|T_n(e_0) - e_0\|^{\frac{1}{\mu+1}} = 0$$

olduğu görülür. Buradan her $i = 1, 2, \dots, m+4$ için $\delta_P(F_i) = 0$ olup (4.6) eşitsizliğinin her iki tarafında limit alınarak

$$st_P - \lim \|T_n(f) - f\| = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi literatürde bilinen sonuçların yetersiz kaldığı ancak bizim sonuçlarımızı kullanabileceğimiz örnekler verelim:

Örnek 4.2.3. (p_n) ve (s_n) dizileri

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$s_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ n & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda P metodu regüler olup her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_P(G_\varepsilon) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in K_\varepsilon} p_n t^{n-1} = 0$$

elde edilir, yani $st_P - \lim s_n = 0$ olur. (s_n) ve (p_n) dizileri yukarıdaki gibi olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(-\pi + \frac{2\pi k}{n}\right) \left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)^k \left(\frac{\pi-x}{2\pi}\right)^{n-k}$$

yardımla

$$T_n(f; x) = (1 + s_n)B_n(f; x), \quad x \in J, \quad n \in \mathbb{N}$$

operatörlerini tanımlayalım. $\mu = \frac{1}{2}$ için $f^{(m)} \in L_\infty(J)$ olacak şekilde $f \in AC^m(J)$ verilsin. Bu

durumda $m = \lceil \mu \rceil = 1$ ve $st_P - \lim \|T_n(e_0) - e_0\| = 0$ olup

$$\|T_n(|\psi|^{\frac{3}{2}})\| \leq \pi^{\frac{3}{2}}(1+s_n)\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$$

ve

$$\rho_{n, \frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \|T_n(\phi^{\frac{3}{2}})\| \leq \frac{1}{8} \|T_n(|\psi|^{\frac{3}{2}})\| \leq \pi^{\frac{3}{2}}(1+s_n)\frac{1}{8n^{\frac{3}{4}}}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.3) ve (4.4) gerçekleşir ve Teorem 4.2.1 gereğince $f' \in L_\infty(J)$ olacak şekilde her $f \in AC(J)$ için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

Örnek 4.2.4. (p_n) , (u_n) ve (s_n) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$u_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ \frac{1}{2} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$s_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ n & , \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Bu durumda P regüler olup her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_P(G_\varepsilon) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n \in K_\varepsilon} p_n t^{n-1} = 0$$

elde edilir, yani $st_P - \lim s_n = 0$ ve $st_P - \lim u_n = 1$ olur. Şimdi T_n operatörlerini

$$T_n(f; x) = (1+s_n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(-\pi + \frac{2\pi k}{n}\right) \left(\frac{u_n x + \pi}{2\pi}\right)^k \left(\frac{\pi - u_n x}{2\pi}\right)^{n-k}, \quad x \in J, \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlayalım.

$\mu = \frac{1}{2}$ için $f^{(m)} \in L_\infty(J)$ olacak şekilde $f \in AC^m(J)$ verilsin. Bu durumda $m = \lceil \mu \rceil = 1$

ve $st_P - \lim \|T_n(e_0) - e_0\| = 0$ olup

$$\|T_n(|\psi|^{\frac{3}{2}})\| \leq \pi^{\frac{3}{2}}(1+s_n) \left[(1-u_n)^2 + \frac{1}{n} \right]^{\frac{3}{4}}$$

ve

$$\rho_{n,\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \|T_n(\phi^{\frac{3}{2}})\| \leq \frac{1}{8} \|T_n(|\psi|^{\frac{3}{2}})\| \leq \pi^{\frac{3}{2}}(1+s_n) \frac{1}{8} \left[(1-u_n)^2 + \frac{1}{n} \right]^{\frac{3}{4}}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.3) ve (4.4) gerçekleşir ve Teorem 4.2.1 gereğince, $f' \in L_\infty(J)$ olacak şekilde her $f \in AC(J)$ için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

gerçeklenir.

Örnek 4.2.5. B_n operatörleri Örnek 4.2.3'deki gibi

$$s_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ n & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

olmak üzere T_n operatörlerini

$$T_n(f;x) = s_n B_n(f;x)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda P metodunun regüler olduğu açıktır ve $st_P - \lim s_n = 1$ olur.

Önceki örneklerde olduğu gibi $\mu = \frac{1}{2}$ için benzer işlemler yapılarak Teorem 4.2.1 gereğince, $f' \in L_\infty(J)$ olacak şekilde her $f \in AC(J)$ için

$$st_P - \lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

elde edilir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tezde, P -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla kesirli analiz kullanılarak trigonometrik Korovkin tipi sonuçlar elde edilmesi amaçlanmıştır. Öncelikle klasik Korovkin teoremi ve trigonometrik versiyonu, kuvvet serisi metodu, istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık ve kesirli analize ilişkin ihtiyaç duyacağımız temel kavramlar hatırlatılarak çeşitli örnekler sunulmuştur. Korovkin tipi teoremler daha genel toplanabilme metotları yardımıyla birçok matematikçi tarafından genişletilmiş olup bu yöntemler arasında en bilinenlerden biri istatistiksel yakınsaklıktır. Kesirli analiz, trigonometrik Korovkin teorisi ve istatistiksel yakınsaklık birlikte göz önüne alınarak 2010 yılında G. A. Anastassiou ve O. Duman tarafından süreklilik modülü yardımıyla elde edilen çeşitli sonuçlar detaylıca incelenmiştir. Bu çalışmaların ışığında daha önce bilinen metotlar tarafından içerilmeyen kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımıyla kesirli trigonometrik Korovkin teorisi geliştirilerek orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Verilen örneklerle literatürde var olan sonuçların kullanılamayacağı görülmüştür. Dolayısıyla ispatladığımız teoremlerimizin önemli bir katkı sağlayacağı gösterilmiştir.

Sonuç olarak, klasik limit olmadığında yine de toplanabilme metotları kullanarak yaklaşımdan bahsetmemizi sağlayan teoremler literatür için ilgi çekicidir. Ayrıca klasik analizde tam sayı değerler doğaya uygun olmayan birer model iken kesirli analiz daha gerçekçi modellemeler sunmaktadır ve ne yazık ki kesirli analiz ile yaklaşım teorisini birleştiren çalışma sayısı yok denecek kadar azdır. Bu tez, bu konuda çalışacak araştırmacılar için el kitabı olma niteliği taşıyarak toplanabilme metotları kullanılarak kesirli analiz yardımıyla elde edilebilecek sonuçları öneri niteliğindedir.

KAYNAKÇA

- Altomare, F. & Campiti, M.** (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications*. Walter de Gruyter.
- Anastassiou, G. A.** (2009). Fractional Korovkin Theory, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(4), 2080–2094.
- Anastassiou, G. A.** (2010). Fractional Trigonometric Korovkin Theory, *Communications in Applied Analysis*, 14(1), 39.
- Anastassiou, G. A. & Duman, O.** (2010). Fractional Trigonometric Korovkin Theory in Statistical Sense, *Serdica Mathematical Journal*, 35(2), 121–136.
- Bernstein, S. N.** (1912). Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee. *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13, 1-2.
- Bohman, H.** (1952). On Approximation of Continuous and of Analytic Functions, *Ark. Mat.*, 2(1), 43–56.
- Boos, J.** (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*. Clarendon Press.
- Duman, O.** (2003). Statistical Approximation for Periodic Functions. *Demonstratio Math.*, 36(4), 873-878.
- Fast H.** (1951). Sur la Convergence Statistique. *Colloq. Math.*, 2(3), 241-244.
- Freedman, A. R., & Sember, J. J.** (1981) Densities and Summability. *Pacific J. Math.*, 95(2), 293-305.
- Fridy J.A.** (1985). On Statistical Convergence. *Analysis*, 5(4), 301-314.
- Gadjiev, A. D., & Orhan, C.** (2002). Some Approximation Theorems via Statistical Convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 129-138.
- Hacısalıhoğlu, H., & Hacıyev, A.** (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, 20-45.
- Hardy, G. H.** (1949). *Divergent Series*. Oxford University Press, London.
- Kilbas, A. A. & Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J.** (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204.
- Kolk, E.** (1993). Matrix Summability of Statistically Convergent Sequences. *Analysis*, 13, 77-83.
- Korovkin, P. P.** (1953). On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 90, 961–964.
- Korovkin, P. P.** (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publishing Corporation, Delhi, 8.

- Kratz, W. & Stadtmüller, U.** (1989). Tauberian Theorems for J_p -summability. *J. Math. Anal. Appl.*, 2(1), 145-159.
- Kreyzig, E.** (2007). *Introductory to Functional Analysis with Application*. John Wiley, New York.
- Maddox, I. J.** (1970). *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press Archive.
- Miller, H. I.** (1995). A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(5), 1811-1819.
- Niven, I., & Zuckerman, H. S.** (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth. New York John Willey and Sons.
- Pitul, P. A.** (2007). *Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators*, Ph.D. Thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca.
- Podlubny, I.** (1999). *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press.
- Podlubny, I.** (2001). Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 5(4), 367-386.
- Popoviciu, T.** (1950). *Asupra Demonstrației Teoremei lui Weierstrass cu Ajutorul Polinoamelor de Interpolare*, Lucrarile Ses, Gen. St. Acad. Române din, 1–4.
- Salat T.** (1980). On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. *Mat. Slovaca.*, 30, 139-150.
- Samko, S. G. & Kilbas, A. A. & Marichev, O. I.** (1993). *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.
- Shisha, O. & Mond, B.** (1968). The Degree of Approximation to Periodic Functions by Linear Positive Operators, *Journal of Approximation Theory*, 1(3), 335–339.
- Sökmen, Y.** (2012). *Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları*. (Yüksek Lisans Tezi). Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir.
- Ural, N. S. & Yurdakadim, T.** (2023). Fractional Trigonometric Korovkin Theory via Statistical Convergence with Respect to Power Series Method. *Academic Researches in Mathematics and Science*, 13-30.
- Ünver M. & Orhan C.** (2019). Statistical Convergence with Respect to Power Series Methods and Applications to Approximation Theory. *Numer. Func. Anal. Opt.*, 40, 535-547.
- Weierstrass, K.** (1885). Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Functionen Einer Reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2, 633–639.