

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ YARDIMIYLA KOROVKİN TİPİ
YAKLAŞIM TEOREMLERİ

MUHAMMET SAYAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

PROF. DR. FADİME DİRİK

SİNOP - 2024

TEZ KABUL

Muhammet SAYAR tarafından hazırlanan “**KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ YARDIMIYLA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ**” başlıklı bu çalışma, 12.06.2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ
Sinop Üniversitesi /Fen-Edebiyat Fakültesi

İmza

**Üye
(Danışman)**

Prof. Dr. Fadime DİRİK
Sinop Üniversitesi /Fen-Edebiyat Fakültesi

İmza

Üye

Prof. Dr. Murat OLGUN
Ankara Üniversitesi / Fen Fakültesi

İmza

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Fadime DİRİK

.....

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

12/06/2024

Muhammet SAYAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ YARDIMIYLA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

MUHAMMET SAYAR

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. FADİME DİRİK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk olarak bu tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Ayrıca klasik yakınsaklık yardımı ile reel sayıların kompakt bir kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı, sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayı ve H_w uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler için sırasıyla Korovkin teoremleri ifade edilmiştir. Verilen uzaylarda ifade ettiğimiz teoremleri sağlayan birer örnek verilmiştir. Sonrasında kuvvet serisi yöntemi yardımı ile yine verilen bu uzaylarda Korovkin tipi teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Dördüncü yani son bölümde yakınsaklıktan daha kuvvetli olan kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması yöntemi ile sırasıyla bu üç uzayda Korovkin tipi yaklaşım teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca her bir uzayda bu yeni verilen ve ispat edilen Korovkin tipi teoremlerin, klasik yakınsaklık yardımı ile ifade edilen Korovkin tipi teoremlerden daha kuvvetli olduğunu gösteren bazı örnekler verilmiştir. Son olarak süreklilik modülü kullanılarak kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatörüne uygulanması yardımıyla yaklaşım oranı hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Korovkin Teoremi; Kuvvet Serisi Yöntemi; Yakınsaklık Oranı; Süreklilik Modülü

Haziran 2024, 47 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS VIA POWER SERIES METHOD

MUHAMMET SAYAR

SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. FADİME DİRİK

This thesis consists of four chapters. First, some basic definitions that will be used throughout this thesis are given. Also, with the help of classical convergence, Korovkin theorems are stated for positive linear operators defined on the space of continuous functions defined on a compact set of real numbers, the space of continuous and 2π -periodic functions and the space H_w , respectively. An example is given which satisfies the theorems we have stated in the given spaces. Then, with the help of the power series method, Korovkin type theorems are stated and proved in these spaces. In the fourth and last part, Korovkin type approximation theorems are stated and proved in these three spaces respectively by applying the power series method, which is stronger than classical convergence, to the positive linear operator. Moreover, in each space, some examples are given to show that these newly given and proved Korovkin type theorems are stronger than the Korovkin type theorems expressed with the help of classical convergence. Finally, the rate of convergence is calculated by applying the power series method to the positive linear operator using the modulus of continuity.

KEYWORDS: Korovkin Theorem; Power Series Method; Rate of Convergence; Continuity of Modulus

June 2024, 47 Page

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren, bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen, beni daima cesaretlendiren ve çalışmamın bu aşamaya gelmesini sağlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fadime DİRİK' e, çalışmalarımda yardımlarını ve desteğini esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Sevda YILDIZ' a en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimime başlamama vesile olan ve eğitimim boyunca manevi desteğini esirgemeyen arkadaşım Sayın Doç. Dr. Hüseyin KAMACI' ya, çalışmalarımda verdikleri manevi destek ile güç veren öğretmen arkadaşlarım Sayın Nazlı SÖYLEMEZ ve Sayın Fazlı CANİKLİOĞLU' na dostlukları ve destekleri için çok teşekkür ederim.

Gerek seminer gerek tez çalışmam boyunca her koşulda yanımda olan ve desteğini bir an olsun esirgemeyen canım eşim Esra SAYAR' a sonsuz teşekkür ederim. Son olarak varlıklarıyla bana güç veren yaşam kaynağım canım kızlarım Azra Eyşan SAYAR ve Eslina Sare SAYAR'a en içten sevgilerimi iletmek isterim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ KABUL	ii
ETİK BEYANI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	2
2.1. Pozitif lineer operatörler	2
2.2. Süreklilik modülü	2
2.3. Kuvvet serisi yöntemi	3
2.4. Korovkin teoremi	4
2.4.1. Klasik Korovkin teoremi	4
2.4.2. Periyodik Korovkin teoremi	5
2.4.3. H_w uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi	6
2.4.4. Sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı lineer pozitif operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi.....	9
2.4.5. Sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayında tanımlı lineer pozitif operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi	14
3. MATERYAL METOT	18
4. BULGULAR.....	20
4.1. Kuvvet serisi yöntemi ile Korovkin tipi yaklaşım teoremleri.....	20

4.1.1. Kuvvet serisi yöntemi ile sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı lineer pozitif operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi	20
4.1.2. Sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayında tanımlı lineer pozitif operatörleri için kuvvet serisi yöntemi ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi.....	26
4.1.3. H_w uzayı üzerinde kuvvet serisi yöntemi yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi	30
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	38



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$L(g; x)$	: Pozitif lineer operatör
$C[a, b]$	: $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{2\pi}(\mathbb{R})$	: 2π -periyodik reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{D})$	: $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f; \delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$[[\lambda]]$	: λ reel sayısının tam değeri
$p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n$	: (p_n) reel dizi olmak üzere kuvvet serisi
H_w	: $ f(x) - f(y) \leq w\left(\left \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right \right)$ koşulunu sağlayan $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Karl Weierstrass 1885 yılında, sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır.

Pozitif lineer operatörlerin bir (L_n) dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu birçok araştırmacı tarafından incelemiştir. İlk olarak 1952 yılında H. Bohman, $C[0,1]$ uzayına ait fonksiyonlara düzgün yakınsama problemini incelemiştir. Daha sonra Korovkin (1953) Bohman'ın elde ettiği sonucun genel halde de geçerli olduğunu ispatlamıştır. Korovkin, 1953'te $[a, b]$ aralığı üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C[a, b]$ olmak üzere $1, t, t^2$ test fonksiyonlarını ve reel eksen üzerindeki 2π -periyodik tüm sürekli fonksiyonlar uzayı $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ olmak üzere $1, \sin t, \cos t$ test fonksiyonlarını kullanarak genel yaklaşım teoremleri ispatlamıştır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine olanak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır. Pozitif lineer operatör dizileri için klasik anlamda yakınsaklığın olmadığı durumda, farklı toplanabilme metotları (Boos, 2000; Hardy, 1949) kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilebilmektedir. İlk olarak Gadjiev ve Orhan (2002) toplanabilme metodu olan istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlamıştır. Sonrasında toplanabilme metotları operatörler yardımı ile fonksiyonlara yaklaşımda sıklıkla kullanılmış ve bu sayede klasik yaklaşımdan daha genel ve kuvvetli olan yaklaşım sonuçlarına ulaşılmıştır (Demirci vd. (2022), Dirik ve Demirci (2010), Dirik vd., (2019), Duman ve Orhan (2004), Duman (2007), Okçu Şahin ve Dirik (2018), Taş vd., (2018), Ünver (2013), Ünver ve Orhan (2019)).

Bu tezde Kratz ve Stadtmüller (1989) tarafından tanımlanan kuvvet serisi yöntemi kullanılarak regülerlik koşulu altında Atlıhan ve Taş (2019), Gadjiev ve Çakar (1999)'ın çalışmalarına yer verilecektir. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçların klasik anlamda yakınsaklık için elde edilen sonuçlardan daha kuvvetli olduğunu gösteren örnekler verilecektir. Son olarak pozitif lineer operatörlerin dizileri için yaklaşım hızı, süreklilik modülü yardımı ile hesaplanacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ihtiyaç duyulacak olan bazı temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. Pozitif Lineer Operatörler

2.1.1. Tanım: X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere eğer X den alınmış herhangi bir g fonksiyonuna Y 'de bir ve yalnız bir fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir. L operatörünün x noktasındaki değeri $L(g(t); x) = L(g; x) = f(x)$ şeklinde gösterilir.

X tanım kümesinden alınan $\forall g(x) \geq 0$ fonksiyonu için $L(g; x) \geq 0$ koşulunu gerçekleştiriyor ise bu durumda L operatörüne “pozitif operatör” denir.

X uzayı lineer fonksiyon uzayı olmak üzere her $g_1, g_2 \in X$ ve her $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(b_1g_1 + b_2g_2; x) = b_1L(g_1; x) + b_2L(g_2; x)$$

ise L ye “lineer operatör” denir.

Lineer ve pozitif olan operatörlere “pozitif lineer operatör” denir.

Pozitif lineer operatörler aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i) $-g(x) \leq 0 \Rightarrow L(-g; x) = -L(g; x) \leq 0,$

ii) Pozitif lineer operatörler monoton artandır. Yani;

$$g_1(x) \leq g_2(x) \Rightarrow L(g_1; x) \leq L(g_2; x),$$

iii) L pozitif lineer operatör olmak üzere,

$$|L(g; x)| \leq L(|g|; x)$$

(Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

2.2. Süreklilik Modülü

Bu kısımda yakınsaklık oranı hesaplamasını yaparken kullanılan süreklilik modülü kavramı ve özellikleri verilecektir.

$C[a, b]$ uzayı $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olup,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

normuna göre Banach Uzayıdır.

2.2.1. Tanım: $f \in C[a, b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f; \delta)$ şeklinde gösterilir ve

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sabittir.

Buradan $\omega(f; \delta)$ süreklilik modülü

$$i) \omega(f; \delta) \geq 0$$

$$ii) \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

$$iii) \omega(f + g; \delta) \leq \omega(f; \delta) + \omega(g; \delta)$$

$$iv) \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta), m \in \mathbb{N}$$

v) $\llbracket \lambda \rrbracket, \lambda'$ nın tam değerini göstermek üzere bir $\lambda > 0$ sayısı için,

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \llbracket \lambda \rrbracket)\omega(f; \delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$$

$$vi) \omega(f; |t - x|) \geq |f(t) - f(x)|$$

$$vii) |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

özelliklerini gerçekler (Altomere ve Campiti, 1994).

2.3. Kuvvet Seri Yöntemi

(p_n) , $p_0 > 0$ olmak üzere $n \geq 1$ için $p_n \geq 0$ olacak şekilde bir dizi ve $R \in (0, \infty]$, $u \in (0, R)$ olmak üzere

$$p(u) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n$$

kuvvet serisi R yakınsama yarıçapına sahip olsun. $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi olsun.

Eğer, tüm $u \in (0, R)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n u^n = L$$

oluyorsa $x = (x_n)$ dizisi kuvvet serisi yöntemi anlamında L sayısına yakınsaktır denir (Kratz ve Stadtmüller, 1989).

$\forall n$ için

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{p_n u^n}{p(u)} = 0 \tag{2.3.1}$$

koşulu gerçekleşiyor ise kuvvet serisi yönteminin regüler olduğu bilinmektedir. Bu çalışma boyunca (2.3.1) koşulunun sağlandığı kabul edilecektir. Bu durumda yakınsak her dizi kuvvet serisi anlamında aynı sayıya yakınsaktır.

Not: Kuvvet seri yönteminin bazı özel durumlarına aşağıdaki şekildedir. $R = 1$ durumunda, eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alınırsa Kuvvet serisi yöntemi Abel yöntemini verir. Ayrıca $p_n = \frac{1}{n+1}$ alınırsa, alınırsa Kuvvet serisi yöntemi bize logaritmik yöntemini verir. Ayrıca, eğer $R = \infty$ ve $p_n = \frac{1}{n!}$ ise, Kuvvet serisi yöntemi bize Borel yöntemini verir.

Şimdi verdiğimiz tanımları kullanarak, kuvvet serisi yönteminin klasik yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu bir örnek ile gösterilsin.

2.3.1. Örnek: $|u| < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olsun. $p(u) := \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$ olur.

Şimdi genel terimi

$$s = (s_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ise} \\ 2, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $s = (s_n)$ dizisini alınsın. O zaman,

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n u^n = \lim_{u \rightarrow 1^-} 2(1-u) \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} = \lim_{u \rightarrow 1^-} 2(1-u) \frac{1}{1-u^2} = 1$$

olur. Yani (s_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 1' e yakınsaktır, fakat klasik anlamında yakınsak değildir.

2.4. Korovkin Teoremi

2.4.1. Klasik Korovkin teoremi

Bu bölümde yaklaşımlar teorisinde önemli yeri olan ve ilk olarak H. Bohman tarafından 1952 yılında $C[0,1]$ uzayı üzerinde tanımlı toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin sürekli bir fonksiyonuna yakınsaması problemi incelenmiş daha sonra 1953 yılında Korovkin tarafından genel halde de yani $C[a, b]$ uzayı üzerinde sağlanan yaklaşım teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Bu bölümde bu teorem ve bu teoremi sağlayan bir örnek verilecektir.

2.4.1.1. Teorem: $C[a, b]$ den $C[a, b]$ ye tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

$$i) \forall g \in C[a, b] \text{ için } \lim_n \|L_n(g) - g\|_{C[a,b]} = 0$$

$$ii) g_0(t) = 1, g_1(t) = t, g_2(t) = t^2 \text{ olmak üzere}$$

$$\lim_n \|L_n(g_i) - g_i\|_{C[a,b]} = 0, i = 0,1,2$$

(Korovkin, 1953, 1960).

2.4.1.2. Örnek: $C[0,1]$ üzerinde

$$R_n(g; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{t=0}^{\infty} g\left(\frac{t}{t+n}\right) \binom{t+n}{t} x^t, \quad 0 \leq x < 1$$

ve $R_n(g; 1) = g(1)$ şeklindeki Meyer-König ve Zeller polinomunu ele alalım. Basit hesaplamalar ile $R_n(1; x) = 1$, $R_n(t; x) = x$, $R_n(t^2; x) \leq x^2 + \frac{x}{n+1}$ olduğu görülebilir. Buradan

$$\|R_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\|R_n(t) - x\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\|R_n(t^2) - x^2\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{n+1},$$

olduğu görülür ki bu ise $g_0(t) = 1, g_1(t) = t, g_2(t) = t^2$ olmak üzere

$$\lim_n \|R_n(g_i) - g_i\|_{C[0,1]} = 0, i = 0,1,2,$$

olmasıdır. 2.4.1.1. Teorem' den $\forall g \in C[0,1]$ için $\lim_n \|R_n(g) - g\|_{C[0,1]} = 0$ elde edilir.

2.4.2. Periyodik Korovkin teoremi

Şimdi sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar için Korovkin teoremi verilsin. Burada

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: 2\pi - \text{periyodik sürekli fonksiyon} \}$$

vektör uzayı olup,

$$\|f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

normuna göre Banach Uzayıdır.

2.4.2.1. Teorem: $L_n: C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

$$i) \forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ için } \lim_n \|L_n(f) - f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0,$$

$$ii) f_0(t) = 1, f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t \text{ olmak üzere } \lim_n \|L_n(f_i) - f_i\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0,$$

$i = 0,1,2$ (Korovkin, 1953).

2.4.2.2. Örnek: $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ üzerinde

$$F_n(g; x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\sin^2 \frac{n(t-x)}{2}}{2 \sin^2 \frac{(t-x)}{2}} dt,$$

ve $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n(t-x)}{2}}{2 \sin^2 \frac{(t-x)}{2}} dt = 1$ ile tanımlı Fejér operatörü alınsın. Biliniyor ki $F_n(1; x) = 1$,

$$F_n(\sin t; x) = \frac{n-1}{n} \sin x, F_n(\cos t; x) = \frac{n-1}{n} \cos x \text{ olup buradan}$$

$$\|F_n(1; x) - 1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0,$$

$$\|F_n(\sin t; x) - \sin x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = \frac{1}{n},$$

$$\|F_n(\cos t; x) - \cos x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = \frac{1}{n}$$

olduğu görülür. Bu ise $f_0(t) = 1, f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t$ olmak üzere

$$\lim_n \|F_n(f_i) - f_i\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0, i = 0, 1, 2$$

olmasıdır. 2.4.2.1. Teorem' den $\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_n \|F_n(f) - f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$$

elde edilir.

2.4.3. H_w uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi

1999 yılında Gadjiev ve Çakar tarafından H_w uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenmiştir.

Burada w ,

i) $w, [0, \infty)'$ da negatif olmayan artan bir fonksiyon,

ii) $w(\delta_1 + \delta_2) \leq w(\delta_1) + w(\delta_2)$,

iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta) = 0$

özelliklerini sağlayan süreklilik modülü tipi bir fonksiyon olsun. H_w uzayı,

$$|f(x) - f(y)| \leq w \left(\left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \right) \quad (2.4.3.1)$$

koşulunu sağlayan, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayıdır.

Ayrıca $C_B[0, \infty)$ uzayı, $[0, \infty)'$ da tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı olup burada norm $f \in C_B[0, \infty)$ için,

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Açıktır ki, herhangi bir $f \in H_w$ için $H_w \subset C_B[0, \infty)$ sağlanır.

2.4.3.1. Örnek: $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ ile tanımlı f fonksiyonu ve $w(t) = 2t$ için H_w uzayının bir elemanıdır. Gerçekten $\forall x, y$ için

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1+2x}{1+x} - \frac{1+2y}{1+y} \right| = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \leq w \left(\left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \right)$$

elde edilir.

Şimdi H_w uzayındaki Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

2.4.3.2. Teorem: $L_n: H_w \rightarrow C_B[0, \infty)$ lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun. Bu durumda

$$\lim_n \left\| L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^i \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^i \right\|_{C_B} = 0, i = 0, 1, 2$$

koşulu sağlanıyorsa herhangi bir $f \in H_w$ için,

$$\lim_n \|L_n(f) - f\|_{C_B} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Çakar, 1999).

Şimdi Bleilmann, Butzer, Hahn operatörünün 2.4.3.2. Teorem' in koşullarını sağladığını gösterelim.

2.4.3.3. Örnek: H_w üzerinde

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \binom{n}{k} x^k, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan Bleilmann, Butzer, Hahn operatörü göz önüne alınsın.

$$L_n(1; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

olup Binom açılımından,

$$L_n(1; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \frac{1}{(1+x)^{n-k}} = 1$$

dir. Bu ise $\lim_n \|L_n(1) - 1\|_{C_B} = 0$ olmasıdır. Ayrıca

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\frac{k}{n-k+1}}{1 + \frac{k}{n-k+1}} \binom{n}{k} x^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} \binom{n}{k} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} \frac{n!}{k! (n-k)!} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \frac{1}{n+1} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{k! (n-k-1)!} \frac{1}{n+1} x^{k+1} \\
&= (1+x)^{-n} \frac{n}{(n+1)} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\
&= \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \frac{1}{(1+x)} \frac{n}{(n+1)} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\
&= \frac{n}{(n+1)} \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n \left(\frac{t}{1+t} \right) - \frac{x}{1+x} \right\|_{CB} = 0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2 ; x \right) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{(n+1)^2} \frac{n!}{k! (n-k)!} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{k \pm 1}{(n+1)^2} \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} x^k \\
&= (1+x)^{-n} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(n+1)^2} \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} x^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} x^k \right\} \\
&= (1+x)^{-n} \left\{ \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} x^k \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k \Big\} \\
& = (1+x)^{-n} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} x^k \right. \\
& \quad \left. + \frac{n}{(n+1)^2} x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k \right\} \\
& = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{1}{(1+x)^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k \\
& \quad + \frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x} \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\
& = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_n \left\| L_n \left(\frac{t}{1+t} \right)^2 - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right\|_{C_B} = 0$$

olduğu görülür. Böylece 2.4.3.2. Teorem'den dolayı $\forall f \in H_w$ için,

$$\lim_n \|L_n(f) - f\|_{C_B} = 0$$

gerçeklenir.

2.4.4. Sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi

Şimdi kuvvet serisi yöntemi yardımı ile $C(D)$ uzayında tanımlı L_n pozitif lineer operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

$D, \mathbb{R}'$ nin kompakt bir alt kümesi olmak üzere,

$$C(D) = \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli fonksiyon} \}$$

vektör uzayı olup,

$$\|f\|_{C(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

normu tanımlı olup bu uzay Banach Uzaydır.

Şimdi aşağıdaki teorem verilsin.

2.4.4.1. Teorem: $L_n: C(D) \rightarrow C(D)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun. Eğer

$$i) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} = 0,$$

$$ii) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \|L_n(t) - x\|_{C(D)} = 0,$$

$$iii) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(t^2) - x^2\|_{C(D)} = 0$$

ise $\forall g \in C(D)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

sağlanır.

İspat: $\forall g \in C(D)$ alalım. g fonksiyonunun sürekli olmasından $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in D$ için $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir.

$|t - x| \geq \delta$ için, $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ yani $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ elde edilir. g, D 'de sınırlı olduğundan,

$$|g(t) - g(x)| \leq |g(t)| + |g(x)| \leq 2K. 1 \leq 2K \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

sağlanır. Burada $K := \|g\|_{C(D)}$ şeklindedir. O halde $\forall x, t \in D$ için,

$$|g(t) - g(x)| \leq 2K \frac{(t-x)^2}{\delta^2} + \varepsilon$$

olup eşitsizliğe L_n pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_n(|g(t) - g(x)|; x) &\leq L_n\left(\varepsilon + 2K \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) \\ &\leq L_n(\varepsilon; x) + \frac{2K}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\ &= L_n(\varepsilon; x) \pm \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \{L_n(u^2; x) - 2xL_n(u; x) + x^2L_n(1; x) \pm 2x^2\} \\ &= \varepsilon + \varepsilon(L_n(1; x) - 1) + \frac{2K}{\delta^2} \{(L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad - 2x(L_n(t; x) - x) + x^2(L_n(1; x) - 1)\} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon|L_n(1; x) - 1| + \frac{2K}{\delta^2} \{|L_n(t; x) - x^2| \end{aligned}$$

$$+2|x||L_n(t; x) - x| + |x^2||L_n(1; x) - 1| \} \quad (2.4.4.1)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} |L_n(g(t); x) - g(x)| &= |L_n(g(t); x) + L_n(g(x); x) - L_n(g(x); x) - g(x)| \\ &\leq |L_n(g(t); x) - L_n(g(x); x)| + |L_n(g(x); x) - g(x)| \\ &\leq L_n(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)||L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (2.4.4.1) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} |L_n(g(t); x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \varepsilon |L_n(1; x) - 1| + \frac{2K}{\delta^2} \{|L_n(t^2; x) - x^2| \\ &\quad + 2|x||L_n(t; x) - x| + |x^2||L_n(1; x) - 1|\} + K|L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $x \in D$ için supremum alınır ve norma geçilirse,

$$\begin{aligned} \|L_n(g) - g\|_{C(D)} &\leq \varepsilon \\ &\quad + H \{ \|L_n(t^2) - x^2\|_{C(D)} + \|L_n(t) - x\|_{C(D)} + \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} \} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$H = \sup_{x \in D} \left\{ \varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} |x^2|, \frac{4K}{\delta^2} |x|, \frac{2K}{\delta^2} \right\}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C(D)} &\leq \varepsilon + H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(t^2) - x^2\|_{C(D)} \\ &\quad + H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(t) - x\|_{C(D)} \\ &\quad + H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} \end{aligned}$$

eşitsizliğinde her iki tarafının $u \rightarrow R^-$ için limiti alınır ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse hipotezlerden,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(f) - f\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir.

Şimdi bu teoremi sağlayan bir örnek verilsin.

2.4.4.2. Örnek: 2.4.1.2. Örnek'te tanımlanan Meyer-König ve Zeller polinomu tekrar ele

alınsın. Bu polinom ve $s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ise} \\ 2, & n \text{ çift ise} \end{cases}$ olmak üzere (s_n) dizisi kullanılarak

$\forall x \in D$ ve $f \in C[0,1]$ için, $T_n(f; x) = s_n R_n(f; x)$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir (T_n) dizisi tanımlansın. $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$ olmak üzere buradan

$$T_n(1; x) = s_n \cdot R_n(1; x) = s_n$$

$$T_n(t; x) = s_n \cdot R_n(t; x) = s_n x$$

$$T_n(t^2; x) = s_n \cdot R_n(t^2; x) \leq (x^2 + \frac{x}{n+1}) s_n$$

olduğu görülebilir. Şimdi (p_n) dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ ile tanımlansın. $|u| < 1$ olmak üzere,

$$p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n = \frac{1}{1-u}$$

ve biliniyor ki (s_n) kuvvet serisi yöntemi anlamında 1'e yakınsak, fakat klasik anlamında yakınsak değil idi. O halde

$$T_n(1; x) - 1 = s_n - 1,$$

$$T_n(t; x) - x = (s_n - 1)x,$$

$$T_n(t^2; x) - x^2 \leq x^2(s_n - 1) + \frac{x}{n+1} s_n,$$

şeklindedir. Ayrıca, $(\frac{1}{n+1})$ dizisi 0'a yakınsak ve (s_n) kuvvet serisi yöntemi anlamında 1'e yakınsak olduğundan

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n (s_n - 1) = 0 \text{ ve } \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \frac{1}{n+1} = 0$$

olur. Buradan

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|T_n(1) - 1\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|T_n(t) - x\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|T_n(t^2) - x^2\|_{C[0,1]} = 0,$$

elde edilir. Böylece (T_n) operatörü 2.4.4.1. Teorem' in tüm koşullarını sağladığından $\forall g \in C[0,1]$ için

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|T_n(g) - g\|_{C[0,1]} = 0$$

olur.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla 2.4.4.1. Teorem' de elde edilen yaklaşımın yakınsaklık oranını ifade eden aşağıdaki teorem verilsin.

2.4.4.3. Teorem: $L_n : C(D) \rightarrow C(D)$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun. Bu takdirde,

$$i) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} = 0,$$

$$ii) \delta_n := \sqrt{\|L_n(\psi)\|_{C(D)}} \quad \text{ve} \quad \psi(t) = (t - x)^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \omega(f; \delta_n) = 0$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall g \in C(D)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

olur.

İspat: Süreklilik modülünden dolayı $x \in D$ ve $f \in C(D)$ için $\psi(t) = (t - x)^2$ olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| \leq \left(1 + \frac{\psi(t)}{\delta^2}\right) \omega(g, \delta) \quad (2.4.4.3)$$

gerçeklenir. Öte yandan,

$$|L_n(g; x) - g(x)| \leq L_n(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

olur. Burada (2.4.4.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(g; x) - g(x)| &\leq L_n\left(\left(1 + \frac{\psi(t)}{\delta^2}\right)\omega(g, \delta); x\right) + |g(x)| |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq \omega(g, \delta) |L_n(1; x) - 1| + \omega(g, \delta) + T |L_n(1; x) - 1| \\
&\quad + \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^2} |L_n(\psi(t); x)|
\end{aligned}$$

olur. Burada $K := \|g\|_{C(D)}$ şeklindedir. Bu son eşitsizlikte $\delta := \delta_n := \sqrt{\|L_n(\psi)\|_{C(D)}}$

alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının $x \in D$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|L_n(g) - g\|_{C(D)} \leq \omega(g, \delta) \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} + 2\omega(g, \delta) + K \|L_n(1) - 1\|_{C(D)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C(D)} &\leq \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \omega(g, \delta) \|L_n(1) - 1\|_{C(D)} \\
&\quad + 2 \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \omega(g, \delta) \\
&\quad + K \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C(D)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde her iki tarafın $u \rightarrow R^-$ için limiti alınırsa, hipotezlerden dolayı $\forall g \in C(D)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(f) - f\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

2.4.5. Sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi

Şimdi kuvvet serisi yöntemi yardımı ile aşağıdaki periyodik Korovkin teoremi verilsin.

2.4.5.1. Teorem: Pozitif lineer operatörlerin (L_n) dizisi, $L_n: C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$ tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
i) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &= 0, \\
ii) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(\sin t) - \sin x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &= 0,
\end{aligned}$$

$$iii) \lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(cost) - cosx\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0 ,$$

koşulları sağlanıyor ise $\forall g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$$

sağlanır.

İspat: $\forall g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alalım. g 'nin sürekliliğinden $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in \mathbb{R}$ için $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. g , $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olduğundan,

$$|g(t) - g(x)| \leq |g(t)| + |g(x)| \leq 2N. 1 \leq 2N \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

sağlanır. Burada $N := \|g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}$ şeklindedir. Şimdi $t \in (x - \delta, 2\pi + x - \delta]$ aralığı alınsın. Bu aralığın boyu 2π dir. $x - \delta < t < 2\pi + x - \delta$ olup $-\delta < t - x < 2\pi - \delta$ olduğundan $|t - x| < \delta$ olur. Ayrıca $|t - x| < \delta$ için $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$ olduğu biliniyor. Ayrıca, $x + \delta < t \leq 2\pi + x - \delta \Rightarrow \delta < t - x \leq 2\pi - \delta$ olduğundan

$$\frac{\delta}{2} < \frac{t-x}{2} \leq \frac{2\pi-\delta}{2}$$

bulunur. Bu ise $\sin \frac{\delta}{2} < \sin \frac{(t-x)}{2}$ olmasıdır. Böylelikle $\frac{\sin \frac{(t-x)}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} > 1$ olduğu yani

$$\frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} > 1 \text{ elde edilir. O halde } \forall x, t \in [0, 2\pi] \text{ için}$$

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + 2N \frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

olup bu eşitsizliğe pozitif lineer L_n operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_n(|g(t) - g(x)|; x) &\leq L_n\left(\varepsilon + 2N \frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}; x\right) \\ &\leq L_n(\varepsilon, x) + \frac{2N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} L_n\left(\sin^2 \frac{(t-x)}{2}; x\right) \\ &= L_n(\varepsilon, x) + \frac{2N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} L_n(1 - \cos(t - x); x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_n(\varepsilon, x) \pm \varepsilon + \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{L_n(1; x) - \cos x L_n(\cos t; x) \\
&\quad - \sin x L_n(\sin t; x) \pm 1\} \\
&= \varepsilon + \varepsilon(L_n(1; x) - 1) \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{(L_n(1; x) - 1) \\
&\quad - \cos x (L_n(\cos t; x) - \cos x) - \sin x (L_n(\sin t; x) - \sin x)\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$\begin{aligned}
L_n(|g(t) - g(x)|; x) &\leq \varepsilon + \varepsilon |L_n(1; x) - 1| + \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{|L_n(1; x) - 1| \\
&\quad + |\cos x| \cdot |L_n(\cos t; x) - \cos x| \\
&\quad + |\sin x| \cdot |L_n(\sin t; x) - \sin x|\} \tag{2.4.5.1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
|L_n(g(t); x) - g(x)| &= |L_n(g(t); x) + L_n(g(x); x) - L_n(g(x); x) - g(x)| \\
&\leq |L_n(g(t); x) - L_n(g(x); x)| + |L_n(g(x); x) - g(x)| \\
&\leq L_n(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)| \cdot |L_n(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (2.4.5.1) eşitsizliği dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
|L_n(g(t); x) - g(x)| &\leq \varepsilon + (\varepsilon + N) |L_n(1; x) - 1| + \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{|L_n(1; x) - 1| \\
&\quad + |\cos x| \cdot |L_n(\cos t; x) - \cos x| + |\sin x| \cdot |L_n(\sin t; x) - \sin x|\}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafının $x \in \mathbb{R}$ için supremumu alınır,

$$\begin{aligned}
\|L_n(g) - g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon + H \{ \|L_n(1) - 1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} + \|L_n(\cos t) - \cos x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \\
&\quad + \|L_n(\sin t) - \sin x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$H = \max \left\{ \varepsilon + N + \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}, \frac{N}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right\}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \leq \varepsilon + H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(1) - 1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned}
& +H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(\cos t) - \cos x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \\
& +H \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(\sin t) - \sin x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde her iki tarafının $u \rightarrow R^-$ için limiti alınır ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse hipotezler göz önüne alındığında,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \|L_n(g) - g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$$

elde edilir.



3. MATERYAL METOT

Bu tez çalışmasında ilk olarak kuvvet serisi yöntemi tanıtılmıştır. Sonra P.P. Korovkin tarafından 1953 yılında verilen klasik Korovkin teoremi verilmiştir. Kuvvet serisi yöntemi yardımı ile sürekli fonksiyonlar uzayı olan $C(D)$, sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayı olan $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ve de H_w uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremleri ifade edilmiş ve örneklerle elde edilen sonuçların klasik durumlarından daha kuvvetli olduğu gösterilmiştir.

Bulgular bölümünde 2019 yılında Atlıhan ve Taş ve 2017 yılında Altıparmak tarafından verilen kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması ile $C(D)$, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ve H_w uzaylarında Korovkin tipi teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca süreklilik modülü yardımı ile yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

4. BULGULAR

4.1. Korovkin tipi yaklaşım teoremleri

2019 yılında Atlıhan ve Taş tarafından D , $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kompakt bir kümesi olmak üzere $C(D)$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizileri için kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması yöntemi ile yeni Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiş ve yaklaşım oranı incelenmiştir.

Bu bölümde kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması ile $C(D)$ uzayında, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayında ve H_w uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verilecek ve yakınsaklık oranı süreklilik modülü yardımı ile incelenecektir. Verilen örnekler ile yeni elde edilen teoremin daha kuvvetli olduğu gösterilecektir.

4.1.1. Kuvvet serisi yöntemi ile sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi

$L_n: C(D) \rightarrow C(D)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olmak üzere, kabul edilsin ki

$$\sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n u^n < \infty \quad (4.1.1.1)$$

koşulu sağlansın. $\forall g \in C(D)$ için

$$K_u(g(t); x) = \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n$$

ile tanımlı K_u operatörünü göz önüne alınsın. Buradan

$$\begin{aligned} \|K_u(g)\|_{C(D)} &= \sup_{x \in D} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n \right| \\ &\leq \sup_{x \in D} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|g(t)|; x) p_n u^n \\ &\leq \sup_{x \in D} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|g\|_{C(D)}; x) p_n u^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|g\|_{C(D)} \sup_{x \in D} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n \\
&\leq \|g\|_{C(D)} \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C(D)} p_n u^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.1.1.1) göz önüne alınırsa

$$\|K_u\|_{C(D)} \leq \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C(D)} p_n u^n < \infty$$

eşitsizliğinden de görüldüğü gibi K_u operatörü $\forall g \in C(D)$ için anlamlı olup $C(D)$ uzayına aittir. Dolayısıyla K_u operatörü $C(D)$ 'den $C(D)$ 'ye tanımlı bir operatör olup

$$\|K_u\|_{C(D)} = \|K_u(1)\|_{C(D)} \leq \sup_{x \in D} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n \right|$$

şeklinde yazabilir.

4.1.1.1. Teorem: $L_n: C(D) \rightarrow C(D)$ pozitif lineer operatörlerin dizisi (L_n) olsun ve (4.1.1.1) koşulu sağlansın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

$$i) \forall g \in C(D) \text{ için } \lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} = 0,$$

$$ii) f_r(t) = t^r, \quad r = 0, 1, 2 \text{ olmak üzere } \lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(f_r) - f_r\|_{C(D)} = 0$$

(Atlıhan ve Taş, 2019).

İspat: $f_r(t) = t^r, \quad r = 0, 1, 2$ fonksiyonları $C(D)$ uzayının elemanı olduğundan $i) \Rightarrow ii)$ ispatı açıktır.

$ii) \Rightarrow i)$ olduğu gösterilsin. $g \in C(D)$ alınsın. g fonksiyonunun sürekliliğinden $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in D$ için $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. Ayrıca $g, [a, b]$ 'de sınırlı olduğundan, $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in D$ için

$$|g(t) - g(x)| \leq 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

elde edilmiş olur. Burada $M := \|f\|_{C(D)}$ şeklindedir. Bu durumda $\forall x, t \in D$ için,

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (4.1.1.2)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
|K_u(g(t); x) - g(x)| &= |K_u(g(t); x) + K_u(g(x); x) - K_u(g(x); x) - f(x)| \\
&\leq |K_u(g(t); x) - K_u(g(x); x)| + |K_u(g(x); x) - g(x)| \\
&\leq K_u(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)| \cdot (|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)|) \\
&\leq K_u(|g(t) - g(x)|; x) + M \cdot |K_u(f_0(t); x) - f_0(x)|
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin ilk teriminde (4.1.1.2) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|K_u(g(t); x) - g(x)| &\leq K_u\left(\varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)| \\
&= K_u(\varepsilon; x) + \frac{2M}{\delta^2} K_u((t-x)^2; x) + M|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)| \\
&= K_u(\varepsilon; x) \pm \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \{K_u(t^2; x) - 2xK_u(t; x) + x^2K_u(1; x) \pm 2x^2\} \\
&\quad + M|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)| \\
&= \varepsilon + (K_u(\varepsilon; x) - \varepsilon) + \frac{2M}{\delta^2} \{(K_u(t^2; x) - x^2) - 2x(K_u(t; x) - x) \\
&\quad + x^2(K_u(1; x) - 1)\} + M(|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)|) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} \{|K_u(f_2(t); x) - f_2(x)| \\
&\quad + 2|x||K_u(f_1(t); x) - f_1(x)| + |x^2||K_u(f_0(t); x) - f_0(x)|\} \\
&\quad + M|K_u(f_0(t); x) - f_0(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall u \in (0, R)$ için,

$$\begin{aligned}
|K_u(g(t); x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} |x^2|\right) |K_u(f_0(t); x) - f_0(x)| \\
&\quad + \frac{4M}{\delta^2} |x| |K_u(f_1(t); x) - f_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |K_u(f_2(t); x) - f_2(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $x \in D$ için supremum alınıp norma geçilirse,

$$\begin{aligned}
\|K_u(g) - g\|_{C(D)} &\leq \varepsilon + H\{\|K_u(f_2) - f_2\|_{C(D)} + \|K_u(f_1) - f_1\|_{C(D)} + \|K_u(f_0) - f_0\|_{C(D)}\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada,

$$H = \sup_{x \in D} \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} |x^2|, \frac{4M}{\delta^2} |x|, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$$

şeklinde dir. Her iki tarafın $u \rightarrow R^-$ için limiti alınırsa *ii*)'den ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük alınır

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi 4.1.1.1. Teorem' de çalışan bir örnek verilsin.

4.1.1.2. Örnek: $|u| < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olsun. Buradan $p(u) := \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$ olur. Şimdi genel terimi

$$q = (q_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ tek ise,} \\ 1, & n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olacak şekilde $q = (q_n)$ dizisini alalım. Buradan,

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n p_n u^n = \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u) \frac{1}{1+u} = 0$$

olur. Yani (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsaktır, fakat klasik anlamında yakınsak değildir. Şimdi $D = [0,1]$ olmak üzere $C(D)$ üzerinde

$$B_n(g; x) = \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde tanımlı Bernstein polinomu ele alınsın. Bu polinom kullanılarak $C(D)$ üzerinde (q_n) dizisi yardımıyla aşağıdaki şekilde L_n pozitif lineer operatörü tanımlansın:

$$L_n(f; x) = (1 + q_n) B_n(f; x).$$

Pozitif lineer operatörlerin (L_n) dizisi için basit hesaplamalar ile

$$L_n(1; x) = (1 + q_n) B_n(1; x) = (1 + q_n),$$

$$L_n(t; x) = (1 + q_n) B_n(t; x) = (1 + q_n)x,$$

$$L_n(t^2; x) = (1 + q_n) B_n(t^2; x) = (1 + q_n) \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n} \right)$$

olduğu görülebilir. Şimdi 4.1.1.1. Teorem' inin koşullarının sağlanıp sağlanmadığı incelensin. İlk olarak

$$\|K_u(f_0) - f_0\|_{C(D)} = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0; x) p_n u^n - 1 \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) u^n - 1 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n - 1 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \frac{1}{1-u} + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n - 1 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \right| \\
&= (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \rightarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|K_u(f_1) - f_1\|_{C(D)} &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_1; x) p_n u^n - x \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) x u^n - x \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot x \cdot u^n - x \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| x + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot x \cdot u^n - x \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot x \cdot u^n \right| \\
&= (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \\
&= (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \rightarrow 0
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla hesaplanabilir. Son olarak $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin 0' a yakınsak dolayısıyla kuvvet serisi yöntemine göre 0'a yakınsak olduğu kullanılırsa

$$\|K_u(f_2) - f_2\|_{C(D)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_2; x) u^n - x^2 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) u^n - x^2 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) u^n - x^2 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} x^2 u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x^2}{n} \right) u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^2 u^n \right. \\
&\quad \left. + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{x-x^2}{n} \right) u^n - x^2 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x^2}{n} \right) u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^2 u^n \right. \\
&\quad \left. + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{x-x^2}{n} \right) u^n \right| \\
&\leq (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n} \right) u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{1}{4n} \right) u^n \rightarrow 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece L_n operatörü 4.1.1.1. Teorem' inin koşullarını sağladığından her $g \in C(D)$ için

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

olur. (q_n) dizisi klasik anlamında yakınsak olmadığı için 2.4.1.1. Teorem' inin koşulları sağlanmaz. Yani 4.1.1.1. Teoremi, 2.4.1.1. Teorem' inin bir genelleştirilmesidir.

Şimdi süreklilik modülü yardımı ile kuvvet serisi yöntemi kullanılarak yakınsaklık oranını veren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

4.1.1.3. Teorem: $L_n : C(D) \rightarrow C(D)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olmak üzere (4.1.1.1) koşulu sağlansın. Bu takdirde,

$$i) \lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(1) - 1\|_{C(D)} = 0,$$

$$ii) \alpha^2(t) = \|K_u((t-x)^2)\|_{C(D)} \text{ olmak üzere } \lim_{u \rightarrow R^-} \omega(g; \alpha(t)) = 0$$

koşulları gerçekleşiyor ise $\forall g \in C(D)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

sağlanır (Atlıhan ve Taş, 2017).

İspat: $\forall u \in (0, R)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere süreklilik modülünün özelliği yardımı ile,

$$|g(t) - g(x)| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \omega(g; \delta)$$

gerçeklenir. Eşitsizliğin her iki tarafına K_u pozitif lineer operatörünü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} K_u(|g(t) - g(x)|; x) &\leq K_u\left(\omega(g; \delta) + \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \omega(g; \delta); x\right) \\ &\leq K_u(\omega(g; \delta); x) + \frac{\omega(g; \delta)}{\delta^2} K_u((t-x)^2; x) \\ &\leq K_u(\omega(g; \delta); x) + \frac{\omega(g; \delta)}{\delta^2} \alpha^2(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\forall u \in (0; R)$ için $\delta = \alpha(t) = \sqrt{\|K_u(t-x)^2\|_{C(D)}}$ alınırsa

$$K_u(|g(t) - g(x)|; x) \leq (K_u(1; x) + 1)\omega(g; \alpha(t)) \quad (4.1.1.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$|K_u(g(t); x) - g(x)| \leq K_u(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)| \cdot |K_u(1; x) - 1|$$

eşitsizliğinde (4.1.1.3) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$|K_u(g(t); x) - g(x)| \leq (K_u(1; x) + 1)\omega(g; \alpha(t)) + M \cdot |K_u(1; x) - 1|$$

bulunur. Son eşitsizlikte her iki tarafının $x \in D$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|K_u(g) - g\|_{C(D)} \leq (\|K_u(1)\|_{C(D)} + 1)\omega(g; \alpha(t)) + M \cdot \|K_u(1; x) - 1\|_{C(D)}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall u \in (0, R)$ ve $\|K_u(\cdot)\|_{C(D)} < T$ için,

$$\begin{aligned} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} &\leq (T + 1)\omega(g; \alpha(t)) + M \cdot \|K_u(1) - 1\|_{C(D)} \\ &\leq H(\omega(g; \alpha(t)) + \|K_u(1) - 1\|_{C(D)}) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada $H = \max\{1 + T, M\}$ şeklindedir. Son eşitsizlikte $u \rightarrow R^-$ için limit alınırsa, hipotezlerden her $\forall g \in C(D)$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|K_u(g) - g\|_{C(D)} = 0$$

olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

4.1.2. Sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörleri için kuvvet serisi yöntemi yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi

$L_n: C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere kabul edelim ki

$$\sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} p_n u^n < \infty \quad (4.1.2.1)$$

koşulu sağlansın. O halde $\forall g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$R_u(g(t); x) = \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n$$

ile tanımlı R_u operatörünü göz önüne alınsın. Buradan

$$\begin{aligned} \|R_u(g)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|g(t)|; x) p_n u^n \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}; x) p_n u^n \\ &= \|g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n \\ &\leq \|g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} p_n u^n \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.1.2.1) göz önüne alınırsa

$$\|R_u(g)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \leq \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} p_n u^n < \infty$$

eşitsizliğinden de görüldüğü üzere R_u pozitif lineer operatörü $\forall g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için anlamlı olup $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayına aittir. Dolayısıyla R_u operatörü $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ' den $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ' ye tanımlı bir operatör olup

$$\|R_u\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = \|R_u(1)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n \right|$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

4.1.2.1. Teorem: $L_n: C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) ve (4.1.2.1) koşulu sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

$$i) \forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ için } \lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(f) - f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0,$$

$$ii) f_0(t) = 1, f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t \text{ olmak üzere } \lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(f_i) - f_i\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0, \\ i = 0, 1, 2.$$

İspat: $i) \Rightarrow ii)$ gerçeğlendiği açıktır. Çünkü $\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için $i)$ hipotezi sağlandığına göre $f_0(t) = 1, f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t$ fonksiyonları da $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayına ait olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi $ii) \Rightarrow i)$ olduğunu gösterilsin.

$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in \mathbb{R}$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeğlenir. $f, \mathbb{R}'$ de sınırlı olduğundan,

$$|f(t)| \leq M$$

gerçeğlenir. Şimdi $y \in (x - \delta, 2\pi + x - \delta]$ aralığını alalım. Buradan $x - \delta < t < 2\pi + x - \delta$ olup $-\delta < t - x < 2\pi - \delta$ olduğundan $|t - x| < \delta$ olur. Ayrıca $|t - x| < \delta$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olduğu biliniyor. Son olarak $t \in (x + \delta, 2\pi + x - \delta]$ alalım. Buradan, $x + \delta < t \leq 2\pi + x - \delta \Rightarrow \delta < t - x \leq 2\pi - \delta$

olduğundan $\frac{\delta}{2} < \frac{t-x}{2} \leq \frac{2\pi-\delta}{2}$ bulunur. Bu ise $\sin \frac{\delta}{2} < \sin \frac{(t-x)}{2}$ olmasıdır. Böylelikle

$$\frac{\sin \frac{(t-x)}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} > 1 \text{ olup bu ise } \frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} > 1 \text{ sağlar. O halde } \forall x, t \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

olduğu görülür. R_u pozitif lineer operatörü son eşitsizlikte uygulanırsa,

$$R_u(|f(t) - f(x)|; x) \leq R_u \left(\varepsilon + 2M \frac{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}; x \right) \\ \leq R_u(\varepsilon, x) + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} R_u \left(\sin^2 \frac{(t-x)}{2}; x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= R_u(\varepsilon, x) + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} R_u \left(1 - \cos 2 \frac{(t-x)}{2}; x \right) \\
&= R_u(\varepsilon, x) \pm \varepsilon + \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{ R_u(1, x) - \cos x R_u(\cos t; x) \\
&\quad - \sin x R_u(\sin t; x) \pm 1 \} \\
&= \varepsilon + \varepsilon(R_u(1; x) - 1) \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{ (R_u(1; x) - 1) \\
&\quad - \cos x (R_u(\cos t; x) - \cos x) - \sin x (R_u(\sin t; x) - \sin x) \}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $M := \|f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}$ şeklindedir. Böylelikle

$$\begin{aligned}
R_u(|f(t) - f(x)|; x) &\leq \varepsilon + \varepsilon |R_u(1; x) - 1| + \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{ |R_u(1; x) - 1| \\
&\quad + |\cos x| \cdot |R_u(\cos t; x) - \cos x| \\
&\quad + |\sin x| \cdot |R_u(\sin t; x) - \sin x| \}
\end{aligned} \tag{4.1.2.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|R_u(f(t); x) - f(x)| &= |R_u(f(t); x) + R_u(f(x); x) - R_u(f(x); x) - f(x)| \\
&\leq |R_u(f(t); x) - R_u(f(x); x)| + |R_u(f(x); x) - f(x)| \\
&\leq R_u(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| \cdot |R_u(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (4.1.2.2) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
|R_u(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \varepsilon |R_u(1; x) - 1| + \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \{ |R_u(1; x) - 1| \\
&\quad + |\cos x| \cdot |R_u(\cos t; x) - \cos x| \\
&\quad + |\sin x| \cdot |R_u(\sin t; x) - \sin x| + M \cdot |R_u(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

bulunur. $x \in \mathbb{R}$ için son eşitsizlikte her iki tarafının supremumu alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|R_u(f) - f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon + H \{ \|R_u(f_2) - f_2\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} + \|R_u(f_1) - f_1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} + \|R_u(f_0) - f_0\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} \}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$H = \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}, \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right\}$$

şeklindedir. Şimdi $u \rightarrow R^-$ için limit alınırsa ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük alınırsa

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(f) - f\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$$

olduğu görülür.

4.1.2.2. Örnek: $|u| < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olsun. 2.5.1.2. Örnek'te $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı olan Fejér operatörünü ve genel terimi

$$q = (q_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ tek ise} \\ 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $q = (q_n)$ dizisi göz önüne alınsın. Biliniyor ki (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak, fakat klasik anlamında yakınsak değildir. Şimdi bu operatör ve (q_n) dizisi yardımıyla $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ üzerinde L_n pozitif lineer operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$L_n(f; x) = (1 + q_n)F_n(f; x).$$

Pozitif lineer operatörlerin (L_n) dizisi için

$$L_n(1; x) = (1 + q_n)F_n(1; x) = (1 + q_n),$$

$$L_n(t; x) = (1 + q_n)F_n(\sin t; x) = (1 + q_n) \frac{n-1}{n} \sin x,$$

$$L_n(t^2; x) = (1 + q_n)F_n(\cos t; x) = (1 + q_n) \frac{n-1}{n} \cos x$$

olduğunu görebilir. Şimdi 4.1.2.1. Teorem' inin koşulları incelensin. İlk olarak

$$\begin{aligned} \|R_u(f_0) - f_0\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (1 - u) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + q_n) u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (1 - u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \right| \\ &= (1 - u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \end{aligned}$$

bulunur. (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak olduğundan

$\lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(f_0) - f_0\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$ bulunur. Ayrıca

$$\|R_u(f_1) - f_1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\sin t; x) p_n u^n - \sin x \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) \frac{n-1}{n} \sin x u^n - \sin x \right| \\
&\leq \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) \left(1 - \frac{1}{n}\right) u^n - 1 \right| \\
&\leq (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n} u^n
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla hesaplanabilir. (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak olduğu ve $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin 0' a yakınsak dolayısıyla kuvvet serisi yöntemine göre 0'a yakınsak olduğu kullanılırsa $\lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(f_1) - f_1\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$ bulunur. Benzer şekilde son olarak $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin ve (q_n) dizisinin kuvvet serisi yöntemine göre 0' a yakınsak olduğu kullanılırsa $\lim_{u \rightarrow R^-} \|R_u(\cos x) - \cos x\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$ elde edilir. Böylece L_n operatörü 4.1.2.1. Teorem' inin koşullarını sağladığından $\forall g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \|R_u(g) - g\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} = 0$$

olur. (q_n) dizisi klasik anlamında yakınsak olmadığı için 2.4.2.1. Teorem' inin koşulları sağlanmaz. Yani 4.1.2.1. Teorem' i, 2.4.2.1. Teorem' inin bir genelleştirilmesidir.

4.1.3. H_w uzayı üzerinde kuvvet serisi yöntemi yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi

$L_n: H_w \rightarrow C_B[0, \infty)$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun. Kabul edelim ki

$$\sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_B} p_n u^n < \infty \quad (4.1.3.1)$$

koşulu sağlansın. $\forall g \in H_w$ için

$$S_u(g(t); x) = \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n$$

ile tanımlı S_u operatörünü göz önüne alınsın. Buradan benzer hesaplamalar ile

$$\|S_u(g)\|_{C_B} = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(g(t); x) p_n u^n \right|$$

$$\leq \|g\|_{C_B} \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_B} p_n u^n$$

elde edilir. Şimdi (4.1.3.1) kabulü göz önüne alınırsa

$$\|S_u\|_{C_B} \leq \sup_{u \rightarrow R^-} \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_B} p_n u^n < \infty$$

eşitsizliğinden de görüldüğü gibi S_u olarak tanımlı operatör $\forall g \in H_w$ için anlamlıdır. Dolayısıyla S_u operatörü H_w 'den $C_B[0, \infty)$ 'ye tanımlı bir operatör olup

$$\|S_u\|_{C_B} = \|S_u(1)\|_{C_B} \leq \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1; x) p_n u^n \right|$$

şeklinde yazabilir.

Şimdi H_w uzayında kuvvet serisi yöntemi ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

4.1.3.1. Teorem: $L_n: H_w \rightarrow C_B[0, \infty)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi (L_n) olsun ve (4.1.3.1) koşulu sağlansın. Buradan

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = \frac{t}{1+t}, \quad f_2(t) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$$

olmak üzere,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f_i) - f_i\|_{C_B} = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in H_w$ için,

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f) - f\|_{C_B} = 0$$

gerçeklenir (Altıparmak, 2017).

İspat: $f \in H_w$ olsun. f fonksiyonunun sürekliliğinden, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle

ki $\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall t, x \in [0, \infty)$ için $|f(t) - f(x)| < \delta$

gerçeklenir. Şimdi $\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| \geq \delta$ için, $\frac{\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|}{\delta} \geq 1$ olup $\frac{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2}{\delta^2} \geq 1$ sağlanır. f

fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \leq 2M \frac{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall t, x \in [0, \infty)$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2}$$

sağlanır. S_u pozitif lineer operatörü son eşitsizliğin her iki tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} S_u(|f(t) - f(x)|; x) &\leq S_u\left(\varepsilon + 2M \frac{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2}; x\right) \\ &\leq S_u(\varepsilon; x) + \frac{2M}{\delta^2} S_u\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2; x\right) \\ &= S_u(\varepsilon; x) \pm \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{x}{1+x} S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) + \frac{x^2}{(1+x)^2} S_u(1; x) \pm \frac{2x^2}{(1+x)^2} \right\} \\ &= \varepsilon + \varepsilon(S_u(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ \left(S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{x}{1+x} S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x - \left(\frac{x}{1+x}\right)\right) + \frac{x^2}{(1+x)^2} (S_u(1; x) - 1) \right\} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon |S_u(1; x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ \left| S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right| \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{|x|}{|1+x|} \left| S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x^2|}{|(1+x)^2|} |S_u(1; x) - 1| \right\} \end{aligned} \quad (4.1.3.1)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} |S_u(f(t); x) - f(x)| &= |S_u(f(t); x) + S_u(f(x); x) - S_u(f(x); x) - f(x)| \\ &\leq |S_u(f(t); x) - S_u(f(x); x)| + |S_u(f(x); x) - f(x)| \\ &\leq S_u(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| \cdot |S_u(1; x) - 1| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (4.1.3.1) eşitsizliği dikkate alınır,

$$\begin{aligned} |S_u(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \varepsilon |S_u(1; x) - 1| + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ \left| S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right| \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{|x|}{|1+x|} \left| S_u\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x^2|}{|(1+x)^2|} |S_u(1; x) - 1| \right\} + |f(x)| \cdot |S_u(1; x) - 1| \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizliğin her iki tarafının $x \geq 0$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|S_u(f) - f\|_{C_B} \leq \varepsilon + H\{\|S_u(f_0) - f_0\|_{C_B} + \|S_u(f_2) - f_2\|_{C_B} + \|S_u(f_1) - f_1\|_{C_B}\}$$

bulunur. Burada

$$H = \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$$

şeklindedir. Şimdi $u \rightarrow R^-$ için limit alınırsa

$$\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f) - f\|_{C_B} = 0$$

olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi Bleilmann, Butzer, Hahn operatörü yardımı ile 4.1.3.1. Teorem' inin koşullarının sağlandığını gösteren bir örnek verilsin.

4.1.3.2. Örnek: H_w üzerinde 2.4.3.3. Örnek' te tanımlı olan L_n Bleilmann, Butzer, Hahn pozitif lineer operatörü alınsın. Ayrıca $|u| < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olsun. Şimdi genel terimi

$$q = (q_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ tek ise} \\ 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $q = (q_n)$ dizisi tekrar göz önüne alınsın. (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak, fakat klasik anlamında yakınsak değil idi. Bu L_n operatörü kullanılarak H_w üzerinde (q_n) dizisi yardımıyla aşağıdaki T_n lineer pozitif operatörü tanımlansın:

$$T_n(f; x) = (1 + q_n)L_n(f; x)$$

Buradan bazı hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} T_n(1; x) &= (1 + q_n)L_n(1; x) \\ &= 1 + q_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) &= (1 + q_n)L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) \\ &= (1 + q_n) \frac{n}{(n+1)} \frac{x}{(1+x)} \end{aligned}$$

$$T_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) = (1 + q_n)L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right)$$

$$= (1 + q_n) \left(\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x} \right)$$

olduğu görebilir. Şimdi 4.1.3.1. Teorem' inin koşullarının sağlanıp sağlanmadığı incelenir.

$$\begin{aligned} \|S_u(f_0) - f_0\|_{C_B} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(f_0; x) p_n u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \frac{1}{1-u} + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n - 1 \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \right| \\ &= (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \end{aligned}$$

bulunur. (q_n) dizisi, kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak olduğu kullanılırsa $\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f_0) - f_0\|_{C_B} = 0$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|S_u(f_1) - f_1\|_{C_B} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{p(u)} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(f_1; x) p_n u^n - \frac{x}{(1+x)} \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) \frac{n}{(n+1)} \frac{x}{(1+x)} u^n - \frac{x}{(1+x)} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \frac{x}{(1+x)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) u^n - x \right| \\ &= (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla hesaplanabilir. Buradan $\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f_1) - f_1\|_{C_B} = 0$ görülür. Son olarak

$$\|S_u(f_2) - f_2\|_{C_B}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(f_2; x) u^n - \frac{x^2}{(1+x)^2} \right| \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} (1+q_n) \left(\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x} \right) u^n - \frac{x^2}{(1+x)^2} \right| \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \right) u^n \right. \\
&\quad \left. + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \right) u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x} \right) u^n \right. \\
&\quad \left. + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{n}{(n+1)^2} \frac{x}{1+x} \right) u^n - \frac{x^2}{(1+x)^2} \right| \\
&\leq (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} u^n + (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} q_n \frac{n}{(n+1)^2} u^n
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)$ dizisinin ve (q_n) dizisinin kuvvet serisi yöntemi anlamında 0'a yakınsak kullanılırsa $\lim_{u \rightarrow R^-} \|S_u(f_2) - f_2\|_{C_B} = 0$ olduğu görülür. Böylece T_n operatörü

4.1.3.1. Teorem'inin koşullarını sağladığından $\forall g \in H_w$ için

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \|S_u(g) - g\|_{C_B} = 0$$

olur. Ayrıca (q_n) dizisi klasik anlamında yakınsak olmadığından 2.4.3.2. Teorem'ini sağlamaz yani 4.1.3.1. Teorem'i, 2.4.3.2. Teorem'inin bir genelleştirilmesidir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kuvvet serisi yöntemi yardımıyla farklı uzaylarda tanımlı olan pozitif lineer operatörlerin dizileri için yaklaşım teorisinde önemli yeri olan Korovkin Tipi Teoremlerin ispatlanması amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle, kuvvet serisi yöntemi, klasik Korovkin teoremi, periyodik Korovkin teoremi hatırlatılmış; daha sonra kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması ile $C(D)$ uzayında, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayında ve H_w uzayında tanımlı lineer pozitif operatörler dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Sonrasında yakınsaklık oranı süreklilik modülü yardımı ile incelenmiştir. Yeni elde edilen teoremlerin daha kuvvetli olduğunu gösteren örnekler verilmiştir.

Kuvvet serisi yönteminin pozitif lineer operatöre uygulanması ile süreklilikten daha kuvvetli olan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi ve de bu uzaylarda çift indisli diziler için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Altomare, F. and Campiti, M. (1994). Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications, de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol.17, Walter de Gruyter, Berlin- New York.
- Atlıhan, Ö. G. and Taş, E. (2019). Korovkin type approximation theorems via power series method, *Sao Paolo J.Math. Sci.*, 13, 696-707.
- Altıparmak, E. (2017). Korovkin yaklaşım teoremleri ve kuvvet serisi metodu, (Yayın No. 474178) [Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Pamukkale Üniversitesi].
- Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions, *Ark. Mat.*, 2, 43-56.
- Boos, J. (2000). Classical and modern methods in summability. Oxford: *Oxford University Press*.
- Demirci, K., Dirik, F. and Yıldız, S. (2022). Approximation via Equi-Statistical Convergence in the Sense of Power Series Method. *Revista de La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 116(2), 1–13.
- Dirik, F. and Demirci, K. (2010). Korovkin Type Approximation Theorem For Functions Of Two Variables in Statistical Sense, *Turkish Journal of Mathematics*, 34, 73–83.
- Dirik, F., Yıldız, S. and Demirci, K. (2019). Abstract Korovkin theory for double sequences via power series method in modular spaces. *Operators and Matrices*, 13(4), 1023–1034.
- Duman, O. (2007). A Korovkin type Approximation Theorems via I -Convergence, *Czechoslovak Math. J.*, 57 (132), 367-375.
- Duman, O and Orhan, C. (2004). μ -Statistically convergent function sequences, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, 413–422.
- Gadjiev, A. D. and Çakar, Ö. (1999). On uniform approximation by Bleilmann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech.Math. Sci.*, 19, 21-26.
- Gadjiev, A., D., Orhan C. (2002). Some approximation theorems via statisticial convergence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32(1), 129-138.
- Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu, H. H. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara Üniversitesi Yayınları.
- Hardy, G.H. (1949). Divergent series. London: *Oxford Univ. Press*.
- Korovkin, P. P. (1953). "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 90, 961-964.
- Korovkin, P. P. (1960). Linear Operators and Approximation Theory, Delhi.
- Kratz, W. and Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p -summability, *J. Math. Anal. Appl.*, 139, 362-371.
- Okçu Şahin, P. and Dirik, F. (2018). A Korovkin-type theorem for double sequences of positive linear operators via power series method. *Positivity*, 22, 209–2018.
- Taş, E., Yurdakadim, T., Atlıhan, Ö. G. (2018). “Korovkin type approximation theorems in weighted spaces via power series method”, *Operators and Matrices*, 12(2), 529-535.
- Ünver, M. (2013). 'Abel transforms of positive linear operators, *ICNAAM 2013 AIP Conference Proceedings*, 1558, 1148-1151.
- Ünver, M. ve Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory, *Journal Numerical Functional Analysis and Optimization*, 40(5), 535-547.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muhammet SAYAR

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Samsun Bafra Kızılırmak Lisesi, 2006

Lisans : Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,
2011

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Kredi ve Yurtlar Genel Müdürlüğü Memur, 2013-2015

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Şırnak Cizre Mesleki ve Teknik Anadolu
Lisesi Matematik Öğretmeni, 2015-2017

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Giresun 125. Yıl Mesleki ve Teknik
Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni, 2017-2018

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Giresun Alucra Hacı Osman Erilli
Anadolu İmam Hatip Lisesi Matematik Öğretmeni, 2018-2021

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Samsun Vezirköprü Mesleki ve Teknik
Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni, 2021-2022

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Samsun Alaçam Şehit Kadir Kara
Anadolu İmam Hatip Lisesi Matematik Öğretmeni, 2022-...