T.C.

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

l^p UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2024

BATMAN

T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

l^p UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ

Danışman
Prof. Dr. Aziz HARMAN

Ocak-2024
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ tarafından hazırlanan "l^p Uzaylarında Hardy Operatörünün Sınırlılığı" adlı tez çalışması 25/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Aziz HARMAN	……………….
Danışman Prof. Dr. Aziz HARMAN	………………
Üye Dr. Öğrt. Üyesi Hacer BOZKURT	………………..
Üye Dr. Öğrt. Üyesi Yasin KAYA	………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ

Tarih: 25/01/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

l^p UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aziz HARMAN

2024, 97 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Aziz HARMAN
Dr. Öğrt. Üyesi Hacer BOZKURT
Dr. Öğrt. Üyesi Yasin KAYA

Bu tezin giriş bölümünden sonra ikinci bölümde (Kaynak Araştırması) araştırmalarımız boyunca ihtiyaç duyacağımız analizde önemli bir yeri olan fonksiyonel analiz ve reel analizin temel kavramları ve teoremleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde (Materyal ve Yöntem) temel eşitsizlikler ve Hardy eşitsizliği ile ilgili önemli eşitsizlikler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde (Araştırma Sonuçları ve Tartışma) p≥1 olmak üzere, Hilbert eşitsizliği ve Hardy tipi eşitsizlikler ele alınarak l^p uzaylarında kesikli Godfrey Harold Hardy operatörünün ve Dualinin sınırlılığı dolayısıyla sürekliliği incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde (Sonuçlar ve Öneriler) ise literatür araştırmalarımızın sonuçları ve önerileri açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hardy eşitsizliği, Kesikli operatör, Operatör, Sınırlılık

ABSTRACT

MASTER THESIS

BOUNDEDNESS OF HARDY OPERATOR IN l^p SPACES

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Aziz HARMAN

2024, 97 Pages

Jury
Prof. Dr. Aziz HARMAN
Asst. Prof. Dr. Hacer BOZKURT
Asst. Prof. Dr. Yasin KAYA

After the introduction part of this thesis, in the second part (Resource Research), the basic concepts and theorems of functional analysis and real analysis, which have an important place in the analysis we will need throughout our research, are explained. In the third chapter (Materials and Methods), basic inequalities and important inequalities related to Hardy's inequality are explained. In the fourth chapter (Research Results and Discussion), considering the Hilbert inequality and Hardy type inequalities in l^p spaces for $p \geq 1$, has been investigated, so researched boundedness and are continuity of the discrete Godfrey Harold Hardy operator and its Dual operator. Finally, in the fifth chapter (Results and Recommendations), the results and recommendations of our litareture research are explained.

Keywords: Boundednes, Discrete Operator, Hardy inequality, Operator.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması süresince bilgileri ile bana yol gösteren, beni destekleyen, sabır ve fedakarlık gösteren kıymetli danışmanım Saygıdeğer Prof. Dr. Aziz HARMAN'a; eğitimim boyunca maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen daima yanımda olan ve beni sürekli motive eden Saygıdeğer annem Handan SAVAŞ ve Saygıdeğer babam Kadri SAVAŞ'a başta olmak üzere aileme ve arkadaşım Saygıdeğer Emetullah YAĞIZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ
BATMAN-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\forall$	: Her
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Elemanı değildir
$\exists$	: Varlık, var olmak
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\equiv$	: Özdeş
$\sim$	: Yaklaşık
$\Longrightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter koşul
$>$	: Büyüktür
$<$	: Küçüktür
$\leq$	: Küçük veya eşit
$\geq$	: Büyük veya eşit
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
$\setminus$	: Fark
$\emptyset$	: Boş küme
$B(x_0;\, r)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\tilde{B}(x_0;\, r)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$B\ (X)$	: Sınırlı operatörler uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
ces_p	: Cesaro dizi uzayı
$D(T)$	: T operatörünün tanım kümesi
$Dim\ D(T)$	: T operatörünün tanım kümesinin boyutu
$\mathbb{F}$	: Reel veya kompleks sayılar kümesi
l^p	: Terimlerinin p.kuvvetten toplamları sonlu olan dizi uzayı
l_2	: Hilbert dizi uzayı
$l^\infty(\mathbb{N})$	: Sınırlı dizilerin uzayı
I	: Birim vektör
$\mathcal{H}^*$	: Hardy Dual operatörü
M^0	: M kümesinin iç noktası
$\bar{M}$	: M kümesinin kapanışı
$N(T)$	: T operatörünün sıfır uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: Tüm sıralı reel sayı n lilerinin kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$R(T)$	: T operatörünün değer kümesi

$S(x_0;\ r)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı küre(yuvar yüzeyi)
T^*	: Adjoint operatörü
$T(x)$	: T operatörünün x'e karşılık getirdiği eleman
$\|T\|$	: T operatörünün normu
T^{-1}	: T operatörünün tersi
$\lvert\cdot\rvert$	: Mutlak değer
$\|\cdot\|$	: Norm sembolü
$\|\cdot\|_\infty$	: Supremum normu
$[\cdot]$	: Tam değer
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	: İç Çarpım
$\tilde{X}$	: Dual uzay
(X, d)	: Metrik uzay
$(X, \|\,.\,\|)$	: Normlu uzay

Kısaltmalar

Card	: Bir kümenin kardinalitesi
h.h.h	: Hemen hemen her
h.h.h.y	: Hemen hemen her yer
Int	: İç nokta
inf	: İnfimum
Sup	: Supremum

1. GİRİŞ

1900'lerin başında David Hilbert tarafından keşfedilen ve kesikli Hardy eşitsizliği ile yakından ilişkili olan, $a_m \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ serisi yakınsaktır ifadesi ile denk olan ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} \tag{1.1}$$

ile gösterilen Hilbert eşitsizliğini daha basit bir şekilde ispatlamak için 20. yy başlarında araştırmalara başlayan G. H. Hardy, kesikli durumu $p > 1$ ve $\{a_k\}_1^{\infty}$ negatif olmayan gerçek sayılar dizisi olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{1.2}$$

veya

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq p' \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

eşitsizliğini ispatlamış ve bu da günümüze kadar yapılan çok sayıda bilimsel çalışmaya temel oluşturmuştur. Hardy'nin kendi eşitsizliğini bulmasının motivasyon kaynağı Hilbert eşitsizliği olmuştur.

l_p ve L_p uzayları ise 1910'da Frigyes Riesz tarafından tanıtılıp ve araştırılmıştır (Kufner, Maligranda & Persson, 2006).

Bu eşitsizlik üzerine bazı matematikçiler $1 < p < \infty$ için, ces_p ile gösterilen cesáro dizi uzayını tanımlamıştır.

$$ces_p = \left\{ a = \{a_n\} : \|a_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \tag{1.4}$$

Hardy eşitsizliği cesáro dizi uzayının l^p dizi uzayından daha geniş olduğunu gösterir. Cesáro dizi uzayı üzerine bazı sonuçlar, (Bennett, 1996), (Bennett,1989), (Gol'dman, 2001), (Okpoti, Persson & Wedesting, 2006) vb. gibi çalışmalarda incelenmiştir.

1) Aritmetik ortalamalar için, G. H. Hardy'nin

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\left| \frac{A_n}{n} \right| \right)^2 \leq c_2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \tag{1.5}$$

şeklindeki eşitsizliğin,

2) Genelleştirilmiş veya ağırlıklı halleri ise; (u_n) ve (v_n) pozitif değerli ağırlık dizileri olmak üzere,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} (|A_n|)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p v_n \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6}$$

şeklindedir.

3) Bu eşitsizliğin integral formu ise, $f \geq 0$ için, $a, b, p, q : -\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ olacak şekilde parametreler ve $u(x), v(x)$ de (a, b) aralığında hemen hemen her yerde(h.h.h.y) ölçülebilir pozitif ağırlık fonksiyonları ile

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_{p,q} \left(\int_a^b f(x)^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.7}$$

şeklindedir.

Bu eşitsizlik, $\mathcal{H}f(x); = \int_a^x f(t)\, dt$ ile verilen Hardy operatörü olmak üzere, $\mathcal{H}; L^p(a, b; v) \rightarrow L^q(a, b; v)$ süreklidir (Sınırlıdır).

4) Eğer, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ alınırsa, $g(a)=0$ koşulunu sağlayan diferansiyellenebilir $g(x)$ fonksiyonu ile Hardy eşitsizliğinin

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c_{p,q}\left(\int_a^b |g(x)'|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

şeklindeki diferansiyel formu elde edilir. Bu da diferansiyel denklemlerin uygulamasında kullanılmaktadır.

5) Kesikli Hardy operatörü ve Duali sırasıyla,

$$\mathcal{H}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad ve \quad \mathcal{H}_n^*=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{k} \tag{1.9}$$

şeklindedir.

Hardy eşitsizliğinin birçok alanda uygulaması bulunmaktadır. Adi diferansiyel denklemler teorisi, Sturn-Liouville problemleri, fonksiyonel analiz, kompleks fonksiyonlar teorisi uygulama alanlarının başlıcalarındandır. Hardy eşitsizliği ile ilgili olarak birçok kitap yazılmıştır. Günümüzde Hardy operatörü ve eşitsizlikleri ile ilgili çalışmalar devam etmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI (TEMEL TANIM VE TEOREMLER)

Bu bölümde, l^p ile gösterilen dizi uzaylarında Hardy operatorü ve Dualinin sınırlılığı incelenirken konumuz ile ilgili gerekli olacak fonksiyonel analizin bazı temel kavramları ve teoremleri tanıtılacaktır.

2.1. Metrik ve Metrik Uzay Kavramları

Tanım 2.1.1. (Metrik uzay ve metrik): Bir metrik uzay, X bir küme ve d, X üzerinde bir metrik (ya da bir uzaklık fonksiyonu), yani $X \times X$ üzerinde her $x, y, z \in X$ için,

a) d, reel değerli, sonlu ve negatif olmayan,

b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere, bir (X, d) çifti olarak tanımlanır.

X kümesine, (X, d) metrik uzayının temel kümesi denir ve bu kümenin elemanları noktalar olarak adlandırılır. Sabit x ve y noktalarına karşılık gelen $d(x, y)$ negatif olmayan sayısı ise x'den y'ye olan uzaklık adını alır. (a) ve (d) özellikleri ise, metrik aksiyomlardır (Kreyszig, 1989).

Eğer, bir $Y \subset X$ altkümesini alıp, d fonksiyonunu $Y \times Y$'ye kısıtlarsak (X, d)'nin bir $(Y, \tilde{d})$ alt uzayını elde ederiz. Dolayısıyla, Y üzerindeki $\tilde{d}$'ye d tarafından Y üzerinde doğurulan metrik adı verilir (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.1.1. ($\mathbb{R}$ Reel ekseni): Bütün reel sayılardan oluşan bu küme üzerinde tanımlanan,

$$d(x, y) = |x - y| \tag{2.1}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.1.2. (l^∞ Dizi uzayı): Bir X kümesi olarak, kompleks terimli tüm sınırlı dizilerden oluşan kümeyi alalım; yani. X'in her bir elemanı, c_x, x'e bağlı olduğu halde, j'ye bağlı olmayan reel bir sayıyı göstermek üzere, her $j = 1,2, \ldots$ için $|\xi_j| \leq c_x$ olacak şekilde, kompleks terimli bir $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ya da kısaca, $x = \xi_j$ dizisidir. Şimdi bu küme üzerinde, $y = \eta_j \in X$ ve $\mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| \tag{2.2}$$

ile tanımlanan bir metrik seçelim. Bu yolla elde edilen metrik uzay, genellikle l^∞ sembolüyle belirtilir. X'in her bir elemanı bir dizi olduğundan, l^∞ bir dizi uzayıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.2. (Metrik uzayda yakınsama, limit): Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Eğer,

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa, (x_n) dizisi yakınsaktır, ya da x noktasına yakınsar denir. x noktasına (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ya da kısaca, $x_n \to x$ yazılır. (x_n) dizisi yakınsak değilse ıraksaktır denir.

Burada, d metriği $a_n = d(x_n, x)$ şeklindeki reel sayılardan oluşan bir dizi belirlemekte ve bu dizinin yakınsaklığı, (x_n) dizisinin yakınsaklığını tanımlamaktadır. O halde, eğer $x_n \to x$ ise, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n > N$ oldukça, tüm x_n terimleri x'in bir $\varepsilon > 0$ komşuluğu olan $B(x; \varepsilon)$'nun içinde kalacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısının varlığını söyleyebiliriz (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.3. (Sınırlı küme ve sınırlı dizi): Boş olmayan bir $M \subset X$ altkümesini göz önüne alalım. Eğer bu kümenin çapı olan

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x, y) \tag{2.4}$$

sonlu ise, M'ye bir sınırlı küme adı verilir. X'deki bir (x_n) dizisinin elemanlarından oluşan nokta kümesi X'in sınırlı bir alt kümesi ise, (x_n) dizisine sınırlı bir dizi denir.

Aşikar olarak, eğer M sınırlı ise, $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ve r

yeterince büyük reel bir sayı olmak üzere, $M \subset B(x_0; r)$'dir ve bunun tersi de doğrudur (Kreyszig, 1989).

Lemma 2.1.1. (Sınırlılık, limit): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda,

a) X'de yakınsak olan bir dizi sınırlı olup, limiti tektir.

b) X'de, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise, $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ dir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.4. (Cauchy dizisi ve tamlık): Bir $X = (X, d)$ bir metrik uzayında, bir (x_n) dizisini gözönüne alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n > N$ için, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi ya da kısaca bir Cauchy'dir denir (Kreyszig, 1989).

X'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (yani, yine X'de bulunan bir limit noktasına sahip ise) X uzayı tamdır denir (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.1. (Reel doğru, kompleks düzlem): Reel doğru ve kompleks düzlem tam metrik uzaylardır (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.2. (Yakınsak dizi): Bir metrik uzaydaki her yakınsak dizi, bir Cauchy dizisidir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.5. (İzometrik dönüşüm, izometrik uzaylar): $X = (X, d)$ ve $\tilde{X} = \left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ iki metrik uzay olsun.

a) X'den $\tilde{X}$ içine bir T dönüşümü göz önüne alalım. Eğer T dönüşümü uzaklıkları koruyorsa, yani Tx ve Ty sırasıyla, x ve y'nin görüntüleri olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y) \tag{2.5}$$

ise, T dönüşümüne bir izometrik dönüşüm ya da bir izometri adı verilir.

b) X'den $\tilde{X}$ üzerine bire-bir ve örten bir izometrinin varolması halinde, X uzayı $\tilde{X}$ uzayı ile izometriktir denir. Bu durumda X ve $\tilde{X}$ uzayları izometrik uzaylar adını alırlar (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.3. (Tamlaştırma): Bir $X = (X, d)$ metrik uzayı için X ile izometrik olup $\hat{X}$'da yoğun olan bir W altuzayına sahip, tam bir $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ metrik uzayı vardır. Bu $\hat{X}$ uzayı, izometrileri dışında tektir; yani eğer $\tilde{X}, X$ ile izometrik, yoğun bir $\widetilde{W}$ altuzayına sahip herhangi bir tam metrik uzay ise, $\tilde{X}$ ve $\hat{X}$ izometriktir (Kreyszig, 1989).

2.2. Küme ve Yuvar Kavramları

Tanım 2.2.1. (Yuvar ve küre): Bir $x_0 \in X$ noktası ve reel bir $r > 0$ sayısı verilmiş olsun. Buna göre, üç tip küme tanımı yapabiliriz:

a) $B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ (Açık Yuvar)

b) $\tilde{B}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ (Kapalı Yuvar)

c) $S(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ (Küre)

Her üç halde de x_0 merkez, r ise yarıçap adını alır.

Bu tanıma göre, r yarıçaplı bir açık yuvarın, X'in, yuvarın merkezine r'den daha yakın tüm noktalarından oluştuğu görülmektedir. Ayrıca, yine bu tanımların ışığı altında,

$$S(x_0; r) = \tilde{B}(x_0; r) - B(x_0; r) \tag{2.6}$$

yazabiliriz (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.2.2. (Açık ve kapalı küme ile komşuluk): Bir X metrik uzayı ve bunun bir M alt kümesini göz önüne alalım. Eğer, M kümesi, her noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa, M kümesi açıktır denir.

K, X'in bir altkümesi olsun. Eğer, K'nın X'deki tümleyeni, yani $K^C = X - K$ açık ise K kapalıdır denir.

Verilen tanımların ışığında, bir açık yuvarın, bir açık küme, bir kapalı yuvarın ise, bir kapalı küme olduğunu kolayca görürüz.

$(\varepsilon > 0)$ yarıçaplı bir $B(x_0; \varepsilon)$ açık yuvarına, x_0'ın bir $\varepsilon -$komşuluğu da denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.2.3. (İç nokta): Bir $M \subset X$ kümesini göz önüne alalım. Eğer, M, x_0'ın bir komşuluğu ise x_0'a M kümesinin bir iç noktası adı verilir. M'nin içi ise M'nin tüm iç noktalarından oluşan küme olup, yaygın olarak kabul edilmiş bir gösterim yok ise M^0 ya da $Int(M)$ şeklinde gösterilebilir. $Int(M)$ açık olup, M'de içerilenen büyük açık kümedir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.2.4. (Yığılma noktası ve kapanış): M, bir X metrik uzayının bir alt kümesi olsun. X'in (M'nin noktası olabilen ya da olamayan) bir x_0 noktasını ele alalım. Eğer, x_0'ın her bir komşuluğu, x_0'dan farklı en az bir $y \in M$ noktası içeriyorsa, x_0 noktasına, M'nin bir yığılma noktası (ya da M'nin bir limit noktası) adı verilir.

M'nin noktalarıyla M'nin yığılma noktalarından oluşan kümeye ise,
M'nin kapanışı denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir. Bilindiği gibi $\overline{M}$, M'yi içeren en küçük kapalı kümedir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.2.5. (Yoğun küme, ayrılabilir uzay): Bir X metrik uzayının bir M alt kümesi verildiğinde eğer, $\overline{M} = X$ ise M kümesi X'de yoğundur denir. Eğer X kümesi X'de yoğun sayılabilir bir alt kümeye sahipse ayrılabilirdir denir.

Buna göre M, X'de yoğun ise ne kadar küçük olursa olsun X'deki her
yuvar, M'nin noktalarını içerecektir; ya da diğer bir deyimle, bu durumda M'nin noktalarını içermeyen komşuluğa sahip hiçbir $x \in X$ noktası yoktur (Kreyszig, 1989).

2.3. Vektör Uzayı

Tanım 2.3.1. (Vektör uzay): Bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde, bir vektör uzay (ya da lineer uzay), vektör adını taşıyan $x, y, \ldots$ elemanlarından oluşan ve üzerinde iki cebirsel işlem tanımlı, boş olmayan bir X kümesidir. Bu işlemler, vektör toplamı ve vektörlerin skalerlerle (yani $\mathbb{F}$'nin elemanlarıyla) çarpımı olarak adlandırılır.

Vektör toplamı, her sıralı (x, y) vektör çiftine x ve y vektörlerinin
toplamı adını taşıyan ve aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde tanımlanan $x + y$ vektörü karşılık getirir. Vektör toplamı, öncelikle değişme ve birleşme özelliğine sahiptir; yani bütün vektörler için

1. $x + y = y + x$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$

yazılır. Ayrıca, bütün vektörler için

3. $x + 0 = x$

4. $x + (-x) = 0$

olacak şekilde, sıfır vektörü olarak adlandırılan bir 0 vektörü ve her x vektörü için bir $-x$ vektörü vardır

Skalerle çarpım ise, her x vektörü ve α skalerine α ile x'in çarpımı adını taşıyan ve bütün x, y vektörleri ve α, β skalerleri için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir αx vektörü karşılık getirir.

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

6. $1x = x$

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Tanımdan, skalerle çarpma işleminin, bir $\mathbb{F} \times X \to X$ dönüşümü olmasına karşın, vektör toplamının bir $X \times X \to X$ dönüşümü olduğunu görmekteyiz.

$\mathbb{F}'$ya X vektör uzayının skaler cismi adı verilir. Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (reel sayı cismi) ise X'e bir reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (kompleks sayı cismi) ise, kompleks vektör uzayı denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.3.2. (Vektör alt uzayı): Bir X vektör uzayının bir alt uzayı X'in her $y_1, y_2 \in Y$, ve her α, β skalerleri için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ özelliğini sağlayan, boş olmayan bir Y alt kümesidir. O halde, Y'nin kendisi de bir vektör uzay olup, X üzerinde tanımlı cebirsel işlemler, Y üzerinde de geçerlidir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.3.3. (Lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık): Bir X vektör uzayındaki, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörlerinden oluşan bir M kümesini ele alalım. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ skalerler olmak üzere,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 \tag{2.7}$$

eşitliği, ancak ve ancak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri, diğer bir deyimle, M kümesi, lineer bağımsız aksi halde, lineer bağımlıdır denir (Kreyszig, 1989).

X'in keyfi bir M alt kümesini göz önüne alalım. Eğer, M'nin boş olmayan her sonlu alt kümesi lineer bağımsız ise, M'ye lineer bağımsızdır denir. Aksi halde, M lineer bağımlı küme olarak adlandırılır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.3.4. (Sonlu ve sonsuz boyutlu vektör uzay): n pozitif bir tamsayı olmak üzere, bir X vektör uzayı lineer bağımsız n tane vektör içeriyor ve $n+1$ ya da daha fazla sayıda vektör lineer bağımlı oluyorsa, bu X vektör uzayı sonlu boyutludur denir. n sayısına X'in boyutu adı verilir ve $n = dimX$ olarak yazılır. Tanım olarak $X = \{0\}$ uzayı sonlu boyutlu olup $dimX = 0$'dır. Eğer bir X uzayı sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutlu uzay olarak adlandırılır (Kreyszig, 1989).

2.4. Norm ve Normlu Uzaylar

Tanım 2.4.1. (Norm ve normlu uzay): Bir X vektör uzayı üzerindeki norm X üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri, $\|x\|$ ile gösterilen ve x ve y, X'de keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan reel değerli bir fonksiyondur.

a) $\|x\| \geq 0$;
b) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$;
c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

X üzerinde bir norm, X üzerinde

$$d(x,y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X) \tag{2.8}$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından yaratılan metrik olarak adlandırılır. Tanımlamış olduğumuz normlu uzayları $(X, \|\cdot\|)$ ile gösteririz (Kreyszig, 1989).

Üzerinde bir norm tanımlanmış olan bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.4.2. (Banach uzayı): Bir tam normlu uzaya (norm tarafından tanımlanan metriğe göre tam ise, bu uzaya) Banach uzayı denir (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.4.1. (l^p uzayı): $p \geq 1$ sabit bir reel sayı olsun. Tanım olarak l^p uzayındaki her bir eleman,

$$|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots$$

toplamı yakınsak, yani

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$$

olacak şekilde bir $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ dizisi olup, ilgili metrik, $y = (\eta_j)$ ve $\sum |\eta_j|^p < \infty$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \tag{2.9}$$

ile tanımlanır.

Bu uzay

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \tag{2.10}$$

ile verilen norm altında bir Banach uzayıdır. Gerçekten de bu norm $d(x,y)$ metriğini doğurmaktadır:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{2.11}$$

dir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.4.3. (Normlu uzaylarda yakınsama veya kuvvetli yakınsaklık): Normal bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun.Eğer, X uzayı

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{2.12}$$

olacak şekilde bir x elemanı içeriyorsa, (x_n) dizisi yakınsaktır veya kuvvetli yakınsaktır denir. Bu durum, $x_n \to x$ olarak yazılır ve x'e, (x_n) dizisinin limiti veya kuvvetli limiti adı verilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.4.4. (Zayıf yakınsaklık): Zayıf yakınsaklık, X üzerindeki sınırlı lineer dönüşümler cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \tag{2.13}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \to x$ şeklinde yazılır. x elemanına, (x_n) dizisinin zayıf limiti adı verilir ve (x_n) dizisi x'e zayıf yakınsar denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.4.5. (Cauchy dizisi): Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n > N$ oldukça, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi adı verilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.4.6. (Mutlak yakınsak seri): (x_k) normlu bir X uzayında bir dizi olarak verildiğinde, bu (x_k) dizisiyle $k = 1,2, \dots, n, \dots$ olmak üzere,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{2.14}$$

kısmi toplamlarından oluşan (s_n) dizisini eşleyebiliriz. Eğer (s_n) dizisi yakınsak ise, diğer bir deyimle, $s_n = s$ yani $\|s_n - s\| \to 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \tag{2.15}$$

sonsuz serisi ya da kısaca serisi yakınsaktır denir. s değerine, bu serinin toplamı adı verilir ve

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \tag{2.16}$$

yazılır.

$\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ toplamının yakınsaması halinde ise sonsuz seri toplamı mutlak yakınsaktır denir.

Normlu bir X uzayında, mutlak yakınsaklığın yakınsaklığı gerektirmesi için gerek ve yeter koşul, X'in tam olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.4.1. $\{f_n\}$, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer, $\lambda < 1$ ve

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \lambda \|f_n - f_{n-1}\| \tag{2.17}$$

koşulu her $n \geq 1$ için, sağlanıyorsa, $i \geq 1$ için,

$$\|(f_{n+i} - f_{n+i-1})\| \leq \lambda^n . \frac{1}{1-\lambda} \|f_1 - f_0\| \tag{2.18}$$

dır ve $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat: Yani, $\lambda < 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \lambda \|f_n - f_{n-1}\| \leq \lambda^2 \|f_{n-1} - f_{n-2}\| \tag{2.19}$$

$$\leq \lambda^3 \|f_{n-2} - f_{n-3}\| \leq \ldots \leq \lambda^n \|f_1 - f_0\|$$

ve her $m \geq 1$ için,

$$\|f_{n+m} - f_n\| = \|\sum_{i=1}^{m} (f_{n+i} - f_{n+i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|(f_{n+i} - f_{n+i-1})\| \tag{2.20}$$

$$\leq \|f_1 - f_0\| \sum_{i=1}^{m} \lambda^{n+i-1} \leq \lambda^n . \frac{1}{1-\lambda} \|f_1 - f_0\| \to 0$$

olduğundan, $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.4.7. (Eşdeğer normlar): Bir X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ normuyla, diğer bir $\|\cdot\|_0$ normunu göz önüne alalım. Eğer, her $x \in X$ için,

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0 \tag{2.21}$$

olacak biçimde $a, b > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_0$ normları eşdeğerdir denir (Kreyszig, 1989).

2.5. İç Çarpım ve İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.5.1. (İç çarpım uzayı): Bir iç çarpım uzayı (ya da ön Hilbert uzayı) üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım, $X \times X$'den X'in bir $\mathbb{F}$ skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür; yani X'in her x ve y vektör çifti, x ve y'nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve her x, y ve z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir skalerle eşlenmektedir.

a) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,

b) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$,

c) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

d) $\langle x,x\rangle \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{2.22}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y,x-y\rangle} \tag{2.23}$$

ile verilen bir metrik tanımlar.

Buna göre iç çarpım uzayları birer normlu uzaydır.

(c)'deki üst çizgi, kompleks eşleniği göstermekte olup X'in reel bir vektör uzayı olması halinde kolayca $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (simetri) sonucunu elde ederiz (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.5.2. (Hilbert uzayı): Bir Hilbert uzayı üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre, tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.5.3. (Diklik): Bir X iç çarpım uzayının x ve y gibi iki elemanı verildiğinde, eğer

$$\langle x,y\rangle = 0 \tag{2.24}$$

ise x elemanı y elemanına diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde $A, B \subset X$ alt kümeleri verildiğinde, eğer her $a \in A$ için $x \perp a$ ise $x \perp A$ ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ için, $a \perp b$ ise $A \perp B$ yazarız (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.5.1. ($\boldsymbol{l^2}$ Hilbert uzayı): l^2 uzayı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \tag{2.25}$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.5.2. (l^p uzayı): $p \neq 2$ olmak üzere, l^p uzayı bir iç çarpım uzayı olmayıp dolayısıyla bir Hilbert uzayı da değildir (Kreyszig, 1989).

2.6. Operatör ve Fonksiyonel

Vektör uzaylar ve özellikle normlu uzaylar söz konusu olduğunda tanımlanacak dönüşümlere bir operatör adı verilir.

İlginç olan operatörler, aşağıdaki tanımda belirlendiği anlamda, vektör uzaya ilişkin iki cebirsel işlemi koruyan operatörlerdir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.1. (Lineer operatör): Bir T lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir operatördür.

a) T'nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzay olup, $R(T)$ değer bölgesi aynı cisim üzerinde bir vektör uzaydır.

b) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \tag{2.26}$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \tag{2.27}$$

dir.

$T(x)$ gösterimini Tx şeklinde de gösterebiliriz (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.2. T operatörünün $D(T)$ tanım bölgesi ile $R(T)$ değer bölgesi arasında bir eşleme olduğunu göz önünde bulundurursak üzerine ve içine operatör tanımlarını verebiliriz. X ve Y her ikisi de reel ya da her ikisi de kompleks iki vektör uzay olmak üzere, $D(T) \subset X$ ve $R(T) \subset Y$ olsun. Bu durumda T, $D(T)$'den $R(T)$ üzerine bir operatör (ya da dönüşüm) olup, $T: D(T) \to R(T)$ olarak yazılır. $D(T)$'den Y'nin içine bir operatör ise, $T: D(T) \to Y$ olarak belirtilir. Eğer $D(T)$ tanım bölgesi, X uzayının tümü ise, bu -ve yalnızca bu durumda, $T: X \to Y$ yazarız (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.3. (Bire-bir operatör ve ters operatör): Bir T dönüşümü, tanım bölgesindeki farklı noktalara farklı görüntüler karşılık getiriyorsa, yani herhangi $x_1, x_2 \in D(T)$ için,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \tag{2.28}$$

ya da buna eş değer bir deyimle,

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{2.29}$$

oluyorsa, T dönüşümüne bire-bir dönüşüm adı verilir.

Böyle bir durumda, her $y_0 \in R(T)$ elemanını, $Tx_0 = y_0$ olacak şekilde, $x_0 \in D(T)$ üzerine dönüştüren bir

$$T^{-1} : R(T) \to D(T)$$

$$y_0 \to x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)$$

dönüşümü vardır. T^{-1} dönüşümüne, T'nin tersi adı verilir.

Kolayca

$\forall x \in D(T)$ için $T^{-1}Tx = x$

$\forall y \in R(T)$ için $TT^{-1}y = y$

yazabiliriz (Kreyszig, 1989).

$T(x) = x$ koşulunu sağlayan T operatörü ise, birim operatör olarak bilinir ve I ile gösterilir.

Eğer T^{-1} varsa, $T^{-1}T = TT^{-1} = I$ olacak şekilde tektir.

Tanım 2.6.4. (Sınırlı lineer operatör): X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{2.30}$$

olacak şekilde reel bir c sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir.

Sıfırdan farklı her $x \in D(T)$ için gerçeklenecek şekilde, mümkün olan en küçük c değeri

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \tag{2.31}$$

şeklindedir. Bu ise c'nin en az sol taraftaki ifadenin $D(T) - \{0\}$ üzerinden alınan supremumu kadar büyük olabileceğini gösterir. O halde en küçük c'nin söz konusu supremum olduğudur. Bu büyüklük $\|T\|$ ile gösterilir; dolayısıyla

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2.32}$$

dir. $\|T\|$ büyüklüğüne, T operatörünün normu denir (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.6.1. (Süreklilik ve sınırlılık): X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T: D(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,

a) T'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, T'nin sınırlı olmasıdır.

b) T bir tek noktada sürekli ise, her noktada süreklidir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.5. (Sürekli dönüşüm(operatör)): $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, d)$ iki metrik uzay olsun. Bir $T : X \to Y$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x, x_0) < \delta$ koşulunu gerçekleyen bütün x'ler için $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, T dönüşümü, $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

Diğer bir tanımlamayla: $T: D(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Buna göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon \tag{2.33}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.6. (Lineer fonksiyonel): Tanım bölgesi bir X vektör uzayında, değer bölgesi ise, X'in bir $\mathbb{F}$ skaler cismi içinde bulunan lineer bir f operatörüne bir lineer fonksiyonel adı verilir; dolayısıyla X reel ise, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ve X kompleks ise, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere, $f: D(f) \to \mathbb{F}$ yazılır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.7. (Sınırlı lineer fonksiyonel): $D(f)$ tanım bölgesi, normlu bir X uzayında, değer bölgesi ise, bu normlu X uzayının skaler cismi içinde bulunan, sınırlı lineer bir f operatörüne sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Buna göre her $x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{2.34}$$

olacak şekilde reel bir c syaısı vardır. Ayrıca, f'nin normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.35}$$

ya da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.36}$$

dir (Kreyszig, 1989).

Lineer Operatörler, Lineer Diferansiyel Denklem sistemleri, integral denklemler ve lineer cebir gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Tanım 2.6.8. ($\widetilde{X}$ Dual uzayı): X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan küme

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.37}$$

ile tanımlanan norma sahip olan, normlu bir uzay oluşturur. Bu uzaya X'in dual uzayı adı verilir ve $\tilde{X}$ sembolüyle gösterilir.

X üzerindeki bir lineer fonksiyonel, X'i $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$'nin (X'in skaler cismi) içine dönüştürdüğünden ve $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$, alışılmış metrikleri altında, tam olduklarından $Y = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olması halinde $\tilde{X}$'ın $B(X,Y)$ uzayı olduğu ortaya çıkar. ($B(X,Y)$: İkisi de reel ya da ikisi de kompleks olan X ve Y normlu uzayı ile, X'den Y'nin içine olan tüm sınırlı lineer operatörlerden oluşan kümedir.) (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.9. (Adjoint operatörü): X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $T: X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Buna göre $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ sırasıyla, X ve Y'nin dual uzayları olmak üzere T'nin $T^*: \tilde{Y} \to \tilde{X}$ adjoint operatörü,

$$f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) \qquad \left(g \in \tilde{Y}\right) \tag{2.38}$$

ile tanımlanır (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.6.2. (Adjoint operatörün normu): T^* operatörü, lineer ve sınırlı olup,

$$\|T^*\| = \|T\| \tag{2.39}$$

dir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.10. (Operatör dizilerinin yakınsaklığı): X ve Y normlu uzaylar olsun. $T_n \in B(X,Y)$ operatörlerinden oluşan bir (T_n) dizisini göz önüne alalım.

a) Eğer, (T_n) dizisi, $B(X,Y)$ üzerindeki norma göre yakınsak ise, (T_n) düzgün operatör yakınsaktır denir.

b) Eğer, $(T_n x)$ dizisi, her $x \in X$ için, Y'de kuvvetli yakınsak ise, (T_n) dizisi, kuvvetli operatör yakınsaktır denir.

c) Eğer, $(T_n x)$, her $x \in X$ için, Y'de zayıf yakınsak ise, (T_n) dizisi, zayıf operatör yakınsaktır denir.

Formüle edecek olursak, bu tanımlar

$$\|T_n - T\| \to 0, \tag{2.40}$$

$$\|T_n x - Tx\| \to 0, \qquad \forall x \in X \tag{2.41}$$

$$|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0 \qquad \forall x \in X, \qquad \forall f \in \tilde{X} \tag{2.42}$$

olacak şekilde, bir $T: X \to Y$ operatörünün var olduğu anlamına gelir. T'ye ise, $(T_n)'$in, sırasıyla düzgün, kuvvetli ve zayıf operatör limiti adı verilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6.11. $T: V \to W$ bir operatör $R(T)$, T'nin görüntü kümesi ve $D(T)$, T'nin tanım kümesi olmak üzere eğer, $\forall g \in R(T) \subset W$ için, $T(x) = y$ olacak şekilde bir tek $x \in D(T) \subset V$ varsa, T'ye birebir (injective) operatör denir. Eğer, $R(T) = W$ ise, T'ye örten (surjective) operatör denir. Eğer T, bire bir ve örtense, T'ye bijektive operatör denir.

$T, S: V \to W$ iki operatör olmak üzere, eğer, $D(T) = D(S)$ ve $\forall x \in V$ için, $T(x) = S(x)$ ise, T ile S operatörleri eşittir.

Teorem 2.6.3. $k: [a, b]x[a, b] \to \mathbb{C}$ sürekli ise, K$(\mathcal{B}[a, b]) \to (\mathcal{B}[a, b])$ operatörü sınırlıdır ve $\|K\| \leq \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy \leq (b - a) \sup_{a \leq x \leq b} |k(x, y)|$ dır.

Tanım 2.6.12. $\mathcal{B}$, Banach uzayı olmak üzere, $L: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ operatörüne gömme (imbedding)denir.

Tanım 2.6.13. $L: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ bir operatör (Lineer olmak zorunda değil) olmak üzere, $\|Lf\| = \|f\|$ koşulu $\forall f \in \mathcal{B}$ için sağlanıyorsa, L' ye bir izometri denir. Eğer L, bire- bir ve örten (bijektive) ise, L'ye izomorfizm denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Bazı Temel Eşitsizlikler

Young eşitsizliği 3.1.1. $a \geq 0,\ b \geq 0$ iki reel sayı ve p ile q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere,

$$a.b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \tag{3.1}$$

dur.

İspat: Bu eşitsizlik, $f(x)=\log x$ fonksiyonu konkav bir eğriye sahip olduğundan, $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

dir. Bu durumda,

$$\lambda \log x+(1-\lambda)\log y \leq \log(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

$$\Rightarrow \log x^{\lambda}.y^{1-\lambda} \leq \log(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

$$\Rightarrow x^{\lambda}.y^{1-\lambda} \leq \lambda x+(1-\lambda)y$$

$x \to a^{\frac{1}{\lambda}}$, $\quad x \to b^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$, $\quad \lambda=\frac{1}{p}$ ve $1-\lambda=\frac{1}{q}$ alındığında

$$a.b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

bulunur.

Cauchy eşitsizliği 3.1.2. $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ reel veya kompleks sayılar olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|X\|_2 . \|Y\|_2 \tag{3.3}$$

dır.

Hölder eşitsizliği 3.1.3. p ve q, $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan iki reel sayı olmak üzere, $x = (x_n) \in l^p$ ve $y = (y_n) \in l^q$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} \tag{3.4}$$

dır.

İspat: Eğer x ve y'den en az biri sıfır ise, eşitsizlik doğrudur. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ise Young eşitsizliğinde

$$a = \frac{|x_n|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}} , \qquad b = \frac{|y_n|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}}$$

alındığında

$$\frac{|x_n| . |y_n|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{p/p}} + \frac{1}{q} \frac{|y_n|^q}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{q/q}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n.y_n|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}.\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}.\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}$$

Sonuç 3.1.3.1. $x = (x_n) \in l^p \Rightarrow |x|_p < \infty,\ y = (y_n) \in l^q \Rightarrow |y|_q < \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise $x.y = (x_n.y_n) \in l^1$ olup $\|x_n.y_n\|_1 < \infty$ dır.

Sonuç 3.1.3.2. Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alındığında $x = (x_n) \in l^2,\ y = (y_n) \in l^2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n.y_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde Cauchy-Schwartz eşitsizliği elde edilir. Burada $x.y \in l^1$ dir.

Sonuç 3.1.3.3. $|x+y|^p \le (|x| + |y|)^p \le \{2.\max(|x|\,,|y|)\}^p$

$\le 2^p$ max$\{|x|^p, |y|^p\} \le 2^p(|x|^p + |y|^p)$ dir. $(1 \le p < \infty)$

Minkowski eşitsizliği 3.1.4. $1 \le p < \infty$, olmak üzere, $x = (x_n) \in l^p$ ve $y = (y_n) \in l^p$ ise,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p} \qquad (3.5)$$

dir.

İspat: x ile y'den en az biri sıfır dizisi ise, eşitsizlik doğrudur. $x \neq (0,0,\dots,0,\dots)$ ve $y \neq (0,0,\dots,0,\dots)$ olmak üzere $1 \leq p < \infty$ ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1}.|x_n + y_n|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} (|x_n| + |y_n|)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1}.|x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1}.|y_n|$$

yazılabilir. Eşitsizliğin son iki terimine Hölder eşitsizliği uygulandığında,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{\frac{1}{q}.q}\right]^{1/q} . \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}\right]$$

bulunur. Buradan da,

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}$$

elde edilir. Burada, $\frac{1}{\mathrm{p}}+\frac{1}{\mathrm{q}}=1$ olup, $\frac{p}{q}=p-1$ ve $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ dir.

Cauchy eşitsizliği 3.1.5. (a_n) ve (b_n) reel terimli diziler olmak üzere,

$$x_n=\frac{a_n}{\left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}} \qquad \text{ve} \qquad y_n=\frac{b_n}{\left(\sum_i b_i^2\right)^{1/2}}$$

alındığından

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\left(\sum_i {a_i}^2\right)}=1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}y_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\left(\sum_i {b_i}^2\right)}=1 \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n.y_n\leq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2=1 \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{b_n}{\left(\sum_i b_i^2\right)^{1/2}}\leq 1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n.b_n\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

Bu eşitsizliğin sürekli hali ise,

$\int_a^b f(x).g(x)dx\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2}$ (Bunyakovsky Eşitsizliği)

$D\subset\mathbb{R}^2$ için, $\iint_D\ fgdxdy\leq\left(\iint_D\ f^2(x)dxdy\right)^{1/2}\cdot\left(\iint_D\ g^2(y)dxdy\right)^{1/2}$

şeklindedir.

Jensen eşitsizliği 3.1.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $j=1,2,\dots,n$ için $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ olacak şekilde negatif olmayan reel sayılar ise $j=1,2,\dots,n$ ve $\forall\ x_j\in[a,b]$ için,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) \tag{3.9}$$

dir. $n = 2$ ve $0 \leq p \leq 1$ için,

$$f(px_1 + (1-p)x_2) \leq pf(x_1) + (1-p)f(x_2) \tag{3.10}$$

olur.

Tanım 3.1.1. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ise X'in $\tilde{X}$ ile gösterilen dual uzayı, $|\lambda(x)| \leq c_\lambda \|x\|$ koşulunu sağlayan c_λ var olacak şekildeki $\lambda: X \to \mathbb{R}$ bütün lineer fonksiyonellerin koleksiyonu olarak tanımlıdır.

X bir Banach uzayı ise, $\tilde{X}$ ile gösterilen duali de $\|\lambda\| \coloneqq \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda(x)|$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Hölder eşitsizliğinde, $y \to \left(\lambda_y : x \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right)$ dönüşümü $l^q \to (\widetilde{l^p})$ şeklindedir. Bu dönüşüm $(\widetilde{l^p})$ ve l^q uzayları arasında bir izomorfizm olup, $\|y\|_q = \|\lambda y\|_p$ ile de bir izometridir (Abbas, 2003).

Teorem 3.1.1. (Riesz teoremi): l^2 nin dual uzayı l^2 ye izomorfiktir.

Hilbert eşitsizliği 3.1.7. $x, y \in l^2(\mathbb{N})$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n} \leq c\|x\|_2 \|y\|_2 \tag{3.11}$$

olacak şekilde c sabiti vardır. [$T(x)_n \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{xm}{m+n}$ operatörü l^2'de sınırlıdır.]

İspat: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m}{\sqrt{m+n}} \cdot \frac{y_m}{\sqrt{m+n}}$$

$$\leq \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{m+n}} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n} \right)^{2\lambda} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{y_n}{\sqrt{m+n}} \right)^2 \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^{2\lambda} \right)^{1/2}$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n} \right)^{2\lambda} \right) \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{n}{m} \right)^{2\lambda} \right) \right\}$$

eşitsizliğinden $m \geq 1$ için $\lambda > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n} \right)^{2\lambda} \leq c_\lambda$ olacak şekilde bir c_λ sabiti bulmak istenmektedir.

$(0, \infty)$ aralığında $f(x) = \frac{1}{m+x} \left(\frac{m}{x} \right)^{2\lambda}$ şeklinde tanımlanan monoton azalan fonksiyonu kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n} \right)^{2\lambda} \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{m+x} \cdot \frac{m^{2\lambda}}{x^{2\lambda}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u^{2\lambda}} du$$

bulunur. $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ seçildiğinde, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n} \right)^{2\lambda} \leq c_\lambda$ elde edileceğinden,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n} \leq c_\lambda \|x\|_2 \|y\|_2$$

bulunur.

Sonuç 3.1.7.1. $T_x: l^p \to l^p$ Hilbert operatörü sınırlıdır ve $1 < p < \infty$ için $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n} \leq c \|x\|_p \|y\|_q$ dır. $p = 2$ için eşitsizlikteki en iyi sabitin $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Toeplitz tarafından en iyi sabitin π olduğu gösterilmiştir.

Kısmi integrasyon ile $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)\, e^{int} dt = \frac{1}{in}$$

özdeşliği yazılabilir.

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\sum_{k=1}^{N} x_k e^{ikt}\sum_{k=1}^{N} y_k e^{ikt}\,dt = \sum_{m,n=1}^{N}\frac{x_m y_n}{m+n}$$

Cauchy-schwartz eşitsizliği ve üstellerin ortogonalliğinden

$$\left|\sum_{m,n=1}^{N}\frac{x_m y_n}{m+n}\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{ikt}\right|\cdot\left|\sum_{k=1}^{N} y_k e^{ikt}\right| dt$$

$$\le \pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k e^{ikt}\right|^2 dt\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{N} y_k e^{ikt}\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\le \pi\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2\right)^{1/2}$$

olup $N\to\infty$ için $c=\pi$ elde edilmiş.

Carleman eşitsizliği 3.1.8. $a_1, a_2, \dots, a_N$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{N}(x_1.x_2\dots x_N)^{1/N} \le e\sum_{n=1}^{N} x_n \tag{3.12}$$

dir. Burada en iyi sabit $c_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ dir (Hardy, Littlewood & Polya, 1934).

$G.O$; Geometrik ortalama ve $H.O$; Harmonik ortalama olmak üzere, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ için, $G.O \le A.O$' dır.

Yani,

$$(a_1.a_2.\dots.a_n)^{1/n} \le \frac{a_1+\ a_2+\dots+a_n}{n}$$

dir. $n=2$ için,

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \leq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$$

dir. $n=1$ ve $a \to \sqrt{a},\ \ b \to \sqrt{b}$ alındığında, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ olur.

G.H.Hardy, $A_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ aritmetik ortalama dizisini kullanarak yeni sonuçlar elde etmiştir. Eğer $x \in l^2$ ise $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n}$ serileri yakınsaktır şeklinde Hilbert eşitsizliğinin daha basit ispatını vermiştir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Hardy Tipli Eşitsizlikler

Tanım 4.1.1. $1 \leq p < \infty$ için, $l^p(\mathbb{N})$ uzayı, $(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^p < \infty$ koşulunu sağlayan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizilerinin bir koleksiyonu olarak tanımlıdır.

$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$ ile gösterilirse, $p = \infty$ için $l^\infty(\mathbb{N})$ uzayı sınırlı dizilerin uzayı olarak bilinir ve $(|x_n|)$ dizisinin supremum normu $\|x\|_\infty$ ile gösterilir.

$1 \leq p \leq \infty$ için $l^p(\mathbb{N})$ uzayı $\|\cdot\|_p$ ile tam normlu uzay olup bir Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.2. $p > 1,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve a_n bir dizi olmak üzere,

1) Kesikli ve sürekli durumlarda Hilbert eşitsizlikleri sırasıyla,,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left|\frac{A_n}{n}\right|\right)^p \leq c_p \sum_{n=1}^{N}|a_n|^p \tag{4.1}$$

süreklilik durumunda, $f(x) > 0$ için,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq c_p \int_0^\infty |f(x)|^p dx \tag{4.2}$$

şeklinde olup,

2) Aritmetik ortalamalar için, G. H. Hardy'nin

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left|\frac{A_n}{n}\right|\right)^2 \leq c_2 \sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 \tag{4.3}$$

şeklindeki eşitsizliğin,

3) Genelleştirilmiş veya ağırlıklı halleri ise; (u_n) ve (v_n) pozitif değerli ağırlık dizileri olmak üzere,

$$\left(\sum_{n=1}^{N}(|A_n|)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c_p\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^p v_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4}$$

dir.

4) $f \geq 0$ için, $a, b, p, q : -\infty \leq a < b \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty$ olacak şekilde parametreler ve $u(x)$, $v(x)$ de (a, b) aralığında h.h.h.y. ölçülebilir pozitif ağırlık fonksiyonları ile

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq c_{p,q}\left(\int_a^b f(x)^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.5}$$

şeklindedir. $p = q, a = 0, b = \infty, v(x) = 1, u(x) = x^{-1}$ alındığında,

$$\left(\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{p,p}\left(\int_0^\infty f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.6}$$

elde edilir. Bu durumda, $c_{p,p}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ olur.

Bu eşitsizlik, $\mathcal{H}f(x); = \int_a^x f(t)\,dt$ ile verilen Hardy operatörü olmak üzere, $\mathcal{H}; L^p(a, b; v) \rightarrow L^q(a, b; v)$ süreklidir. (Sınırlıdır)

5) Eğer, $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ alınırsa, $g(a) = 0$ koşulunu sağlayan diferansiyellenebilir $g(x)$ fonksiyonu ile Hardy eşitsizliğinin

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q}\left(\int_a^b |g(x)'|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.7}$$

şeklindeki diferansiyel formu elde edilir. Bu da diferansiyel denklemlerin uygulamasında kullanılmaktadır.

L^p ve $L^{p(x)}$ uzaylarında Hardy operatörünün sınırlılığı, (Anderson & Heining,1983), (Bradley, 1978), (Harman & Keleş, 2014), (Harman, 2019) vb. gibi çalışmalar da incelenmiştir.

6) Kesikli Hardy operatörü ve Duali sırasıyla,

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad ve \quad \mathcal{H}_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} \tag{4.8}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.3. Hardy tipinden olan

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p \tag{4.9}$$

veya

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq p'\left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.10}$$

bu eşitsizlik üzerine bazı matematikçiler $1 < p < \infty$ için, ces_p ile gösterilen cesáro dizi uzayını tanımlamıştır.

$$ces_p = \left\{ a = \{a_n\} : \|a_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \tag{4.11}$$

Hardy eşitsizliği cesáro dizi uzayının l^p dizi uzayından daha geniş olduğunu gösterir. Cesáro dizi uzayı üzerine bazı sonuçlar, (Bennett, 1989), (Bennett, 1996), (Gol'dman, 2001), (Okpoti, Persson & Wedesting, 2006) vb. gibi çalışmalarda incelenmiştir.

Diziler için Hardy eşitsizliğinin önemli sonuçları;

1. Eğer $p > 1$ için $\{a_k\} \in ces_p$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\{a_k\}$'nın $\{b_k c_k\}$ formunda olmasıdır. Burada $\{b_k\} \in l^p$ ve yeterince büyük N'ler için $|c_1|^{p'} + |c_2|^{p'} + \cdots + |c_n|^{p'} \leq c_n$'dir.

2. Diziler üzerine Hardy eşitsizliğinin genelleştirilmesi olan, ağırlıklı Hardy ve Hardy-Capson eşitsizlikleridir. $p \geq 1$ ve a_n, b_n pozitif dizileri için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p . b_n \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1-p}\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right)^p . a_n^p$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p . b_n \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^p . a_n^p$$

dir (Leindler, 1970).

a_n, u_n, v_n pozitif dizileri için genel ağırlıklı eşitsizlik ise,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\, v_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Eğer $1 \leq p \leq q < \infty$ ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{4.13}$$

ise genel eşitsizlik sağlanır.

Teorem 4.1.1. Eğer $p > 1, a_n \geq 0$ ve $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ise, bütün a_n'ler sıfırdan farklı iken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.14}$$

dir.

İspat: $a_1 = 0$ alındığında

$$\left(\frac{a_2}{2}\right)^p + \left(\frac{a_2+a_3}{3}\right)^p + \left(\frac{a_2+a_3+a_4}{4}\right)^p + \cdots \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(a_2^p + a_3^p + a_4^p + \cdots\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

eşitsizliğinden daha zayıftır.

$\frac{A_n}{n} = x_n$ alındığında, $A_n = nx_n$, $A_{n-1} = (n-1)x_{n-1}$ ve $a_n = A_n - A_{n-1}$ olduğundan

$$x_n^p - \frac{p}{p-1} x_n^{p-1} a_n = x_n^p - \frac{p}{p-1}[nx_n - (n-1)x_{n-1}]x_n^{p-1}$$

$$= x_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + x_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) x_n^{p-1} x_{n-1}$$

$$\leq x_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1}\left[(p-1)x_n^p + x_{n-1}^p\right]^c$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[(n-1)x_{n-1}^p - nx_n^p\right]$$

olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p - \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{N} x_n^{p-1} a_n \leq \frac{Nx_n^p}{p-1} \leq 0$$

olup Hölder eşitsizliğinden de,

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{N} x_n^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur.

Eşitsizliğin her iki yanı son eşitsizliğin sağ yanındaki ikinci terim ile bölündüğünde ise,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

eşitsizliği bulunur.

$n \leq N$ için,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^p > \int_1^n t^{-1/p} dt = \frac{p}{p-1}\left(n^{\frac{p-1}{p}} - 1\right)$$

ise

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left(\frac{1-\delta_n}{n}\right)$$

ve $n \to \infty$ için $\delta_n \to 0$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p (1-r_N)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

$n \to \infty$ için $r_N \to 0$ olacağından

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p-1}{p}\right)^p (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

bulunur. Eğer, N yeterince büyük ve $a_n \geq 0$ şeklinde seçilirse, eşitsizlik yanlış olur. Bu da eşitsizliği sağlayan en iyi sabitin $\left(\frac{p-1}{p}\right)^p$ olduğu anlamına gelir.

Teorem 4.1.2. (Hardy teoremi): Eğer $x_n \geq 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n A_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$ ve $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{x_m y_n}{m+n}$ serilerinin yakınsaklığı denktir.

Teorem 4.1.3.

i) Eğer $1 < p \leq q < \infty$ ise,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\, v_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği a_n, u_n, v_n pozitif dizileri için sağlanır. Ancak ve ancak

$$A_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_n\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{1/p} \text{ veya}$$

$$A_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{-1/p'} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k \left(\sum_{m=1}^{k} v_m^{1-p}\right)^q\right)^{1/q} < \infty \text{ veya}$$

$$A_3 := \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)^{1/q'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{1-p'} \left(\sum_{m=k}^{\infty} v_m\right)^{p'}\right)^{1/p'} < \infty \text{ dır.}$$

ii) Eğer $0 < p < 1, \quad p \leq q < \infty$ ise

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\, v_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak ve ancak

$$A_4 := \sup_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{\infty} u_k)^{1/q} \; v_n^{-1/p'} < \infty \text{ dır.}$$

iii) Eğer $1 < p < \infty, \;\; 0 < q < p, \; \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ise

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \, v_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak ve ancak

$$A_5 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n (\sum_{k=n}^{\infty} u_k)^{r/p} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{r/p'}\right) < \infty \text{ dır.}$$

iv) Eğer $q < p = 1$ ise

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \, v_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak ve ancak

$$A_6 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n (\sum_{k=n}^{\infty} u_k)^{q'(1-q)} \max_{1\leq k\leq n} v_k^{q/(q-1)}\right) < \infty$$

v) Eğer $0 < q < 1 < p < \infty, \; \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ise

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq c.\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \, v_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak ve ancak

$$A_7 := \left(\sum_{k=1}^{n} (\sum_{k=n}^{\infty} u_k)^{r/q} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{r/q'} \; v_n^{1-p'}\right)^{1/r} < \infty \text{ dır.}$$

Teorem 4.1.4. (Hardy-Landau eşitsizliği): $p > 1$, $a_n \geq 0$ ve $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} {a_n}^p \tag{4.15}$$

eşitsizliği her $\mathbb{N}$ doğal sayısı veya $N = \infty$ için sağlanır (Kufner, Maligranda & Persson, 2006).

İspat: $x \geq 0$ için, $x^p - px + x - 1 \geq 0$ Bernoulli eşitsizliği olarak bilinir. Bu durumda $x^p \geq 1 + p(x-1)$ yazılabilir. $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ için $x = \frac{npb_n}{(p-1)B_n}$ alındığında,

$$b_n^p - pb_n \left(\frac{p-1}{p} \cdot \frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p} \cdot \frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} b_n^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \sum_{n=1}^{N} pb_n \left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0$$

olur.

$pb_n B_n^{p-1} = pB_n^{p-1} \underbrace{(B_n - B_{n-1})}_{b_n} \geq B_n^p - B_{n-1}^p$ ve kısmi toplamlar ile

$$\sum_{n=1}^{N} pb_n \left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} \geq \sum_{n=1}^{N} \left(B_n^p - B_{n-1}^p\right) \frac{1}{n^{p-1}}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} B_n^p \left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \geq (p-1) \sum_{n=1}^{N} B_n^p \frac{1}{(n+1)^p}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} b_n^p \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} B_n^p \left(\frac{p}{(n+1)^p} - \frac{p-1}{n^p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} c_n \left(\frac{B_n}{n}\right)^p$$

olup, $c_n = p\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p} - p + 1 \quad n \to \infty$ için $c_n \to 1$ ve

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = a_1,\ b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_{2m} = a_2, \ldots\ ,\ \ b_{(N-1)(m+1)} =$ $b_{(N-1)(m+2)} = \cdots = b_{Nm} = a_N$ $\quad Nm$ yerine N alındığında,

$$m\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p \;\ge\; (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)\left(\frac{A_1}{1}\right)^p$$
$$+ (c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m})\left(\frac{A_2}{2}\right)^p$$
$$+ \cdots + \left(c_{(N-1)(m+1)} + c_{(N-1)(m+2)} + \cdots + c_{Nm}\right)\left(\frac{A_N}{N}\right)^p$$

iki taraf m ile bölünüp $m \to \infty$ alındığında $\frac{(c_1+c_2+\cdots+c_m)}{m} \to 1$ $\quad \frac{(c_{m+1}+c_{m+2}+\cdots+c_{2m})}{m} \to 1$ olup Hardy eşitsizliği sağlanır.

$N = \infty$ için $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ en iyi sabittir. Yani eşitsizliği sağlayan en küçük sabittir.

$a_n = n^{-1/p-\varepsilon}$ $\quad \left(0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{p}\right)$ şeklinde seçilmiş a_n için,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1/p-\varepsilon} > \int_1^n x^{-1/p-\varepsilon}\,dx = \frac{1}{1-1/p-\varepsilon}\left(n^{1-1/p-\varepsilon} - 1\right)$$

$$> \frac{p}{p-1}\left(n^{1-1/p-\varepsilon} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1 - \frac{1}{n^{1-1/p-\varepsilon}}\right)^p \ge \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1 - \frac{p}{n^{1-1/p-\varepsilon}}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(n^{-1-\varepsilon p} - p n^{-2+1/p+\varepsilon-\varepsilon p}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p - p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2-1/p-\varepsilon+\varepsilon p}} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p - \lambda C_{N\varepsilon}\right)$$

$N \to \infty$ için $\varepsilon > 0$ ve $2 - 1/p - \varepsilon + \varepsilon p > 1$ olduğundan $C_{N\varepsilon} \to C$(sabit) olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \Big/ \sum_{n=1}^{N} a_n^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(1 - pC_{N\varepsilon} \Big/ \sum_{n=1}^{N} a_n^p\right) \to \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$$

olup $\sum_{n=1}^{N} a_n^p = \sum_{n=1}^{N} n^{-1-\varepsilon p} \to \infty$ dır. $(N \to \infty$ $iken$ $\varepsilon \to 0^+)$

Yani $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ eşitsizliğinin en iyi sabitidir (Kufner, Maligranda & Persson, 2006).

Teorem 4.1.5. $a_n \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere, eğer $p > 1$ ise,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p b_n \tag{4.16}$$

dır.

İspat (Capson-Elliot):

$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$ olsun. Young eşitsizliğinin $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ kullanılmasıyla,

$$A_{n-1}.A_n^{p-1} \leq \frac{1}{p} A_{n-1}^p + \frac{1}{q} A_n^{(p-1)q} \Rightarrow A_{n-1}.A_n^{p-1} \leq \frac{1}{p} A_{n-1}^p + \left(\frac{p-1}{p}\right) A_n^p$$

bulunur. $\sum_{k=1}^{0} = 0$ şeklinde tanımlarsak,

$$\left(A_n^p - \frac{p}{p-1} a_n A_n^{p-1}\right) b_n = A_n^p b_n - \frac{p}{p-1}\left[\sum_{k=1}^{n} b_k A_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k A_{k-1}\right].A_n^{p-1}$$

$$= A_n^p \left(b_n - \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k A_{n-1}.A_n^{p-1}$$

$$\leq A_n^p \left(b_n - \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \left(\frac{1}{p-1} A_{n-1}^p + A_n^p\right)$$

$$= A_n^p\left(b_n - \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) + \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p$$

$$= \frac{1}{p-1} A_n^p\left[(p-1)b_n - p\sum_{k=1}^{n} b_k + (p-1)\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right] + \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p$$

$$= \frac{1}{p-1} A_n^p\left[(p-1)b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k - pb_k\right] + \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p$$

$$= \frac{1}{p-1} A_n^p\left(-\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p - \sum_{k=1}^{n} b_k\, A_n^p\right)$$

bulunur. 1'den N'ye kadar toplam aldığımızda,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(A_n^p - \frac{p}{p-1} a_n A_n^{p-1}\right) b_n \leq \frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\, A_{n-1}^p - \sum_{k=1}^{n} b_k\, A_n^p\right)$$

$$= \frac{1}{p-1}[0 - b_1 A_1^p + b_1 A_1^p - \left(b_1 A_2^p + b_2 A_2^p\right) + \left(b_1 A_2^p + b_2 A_2^p\right)$$

$$-\left(b_1 A_3^p + b_2 A_3^p + b_3 A_3^p\right) + \cdots + \sum_{n=1}^{N-1} b_n A_{N-1}^p - \sum_{k=1}^{N} b_k A_N^p]$$

$$= \frac{-1}{p-1} A_N^p \sum_{k=1}^{N} b_k$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği ile de

$$\sum_{k=1}^{N} A_N^p b_n + \frac{1}{p-1} A_n^p \sum_{k=1}^{N} b_k \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{N} a_n b_n A_n^{p-1}$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p b_n \right)^{1/p} . \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^p b_n \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} A_n^p b_n \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p-1} \frac{A_N^p \sum_{k=1}^{N} b_k}{\left(\sum_{n=1}^{N} A_n^p b_n \right)^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p b_n \right)^{1/p}$$

elde edilerek teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6. Capson eşitsizliği (Elliot ve Ingham'ın ispatları):

$a_n = \frac{A_n}{n}$ ve $a_0 = 0$ ise $u.v \leq \frac{u^{p'}}{p'} + \frac{v^p}{p}$; $p' = 1 - \frac{1}{p}$ Young eşitsizliğinden $(a_n = A_n - A_{n-1})$

$$a_n^p - \frac{p}{p-1} a_n^{p-1} a_n = a_n^p - \frac{p}{p-1} [n a_n - (n-1) a_{n-1}] a_n^{p-1}$$

$$= a_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1} \right) + \frac{(n-1)p}{p-1} a_n^{p-1} a_{n-1}$$

$$\leq a_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1} \right) + \frac{(n-1)}{p-1} \left[(p-1) a_n^p + a_{n-1}^p \right]$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[(n-1) a_{n-1}^p - n a_n^p \right]$$

bulunur. İki tarafın 1'den N'ye kadar toplamı alındığında,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p-\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1}a_n\leq\frac{-Na_N^p}{p-1}\leq 0$$

olur. Hölder eşitsizliğinden de

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\leq\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1}a_n$$

$$\leq\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}.\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\qquad;\qquad\begin{pmatrix}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\ q=\frac{p}{p-1}=p'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{1/p'}\Rightarrow\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p'}}\leq\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n^p$$

bulunur (Kufner, Maligranda & Persson, 2007).

Teorem 4.1.7. $p>1,\ \ f(x)\geq 0$ ve $f(x),\ \ (0,\infty)$ aralığında p $-$integrallenebilir olmak üzere, $\forall x>0$ için, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ise,

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p dx \tag{4.17}$$

dir (Hardy, Littlewood & Polya, 1934).

İspat: $0<a<A<\infty$ koşulunu sağlayan keyfi a ve A için ve $\forall x\in(0,\infty)$ için $\frac{d}{dx}F(x)^p=pF(x)^{p-1}f(x)$ olup kısmi integrasyon ile,

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = \frac{-1}{p-1}\int_a^A \underbrace{F(x)^p}_{u}\ \underbrace{d(x^{1-p})}_{dv\to(1-p)x^{-p}dx}$$

$$= \frac{a^{1-p}}{p-1}F(a)^p - \frac{A^{1-p}}{p-1}F(A)^p + \frac{1}{p-1}\int_a^A x^{1-p}\ \underbrace{d(F^p(x))}_{p.F^{p-1}(x)f dx}$$

$$\leq \frac{a^{1-p}}{p-1}F(a)^p + \frac{p}{p-1}\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx$$

dir.

Hölder eşitsizliği sağ yandaki ikinci parçaya uygulanırsa

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{a^{1-p}}{p-1}F(a)^p$$

$$+\frac{p}{p-1}\left[\left(\int_a^A f^p(x)dx\right)^{1/p} . \left(\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'}\right]$$

bulunur. Son terim eşitsizliğin soluna gönderildiğinde

$$\left[\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right]^{1-\frac{1}{p'}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^A f^p(x)dx\right)^{1/p}$$

$a \to 0^+$ ve $A \to \infty$ için

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx$$

olur (Hardy, Littlewood & Polya, 1934).

Tanım 4.1.4. $\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt$, Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\int_0^\infty \mathcal{H}f(x)^p dx\right)^{1/p} \leq \|\mathcal{H}f\|_p = \left\|\int_0^1 f(tx)dt\right\|_p \leq \int_0^1 \|f(tx)\|_p dt =$$

$$\int_0^1 \left(\left(\int_0^\infty f(tx)^p dx\right)^{1/p} dt = \int_0^1 \left(\left(\int_0^\infty f^p(s)\frac{ds}{t}\right)^{1/p} dt = \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f(s)^p ds\right)^{1/p}$$

$$= \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

operatör cinsinden Hardy eşitsizliğinin sürekli halidir.

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx$$

Sürekli halde temel Hardy eşitsizliğinde (a_n) reel terimli diziler için $f = \sum_{n=1}^\infty a_n$ alındığında

$$\int_0^\infty |F(x)|^p . x^{-p} dx = \int_0^\infty \left|\sum_{k=1}^{[x]} a_k + a_{[x]+1}(x-[x])\right|^p x^{-p} dx$$

$$= |a_1|^p + \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left|\sum_{k=1}^{[x]} a_k + a_{[x]+1}(x-[x])\right|^p x^{-p} dx$$

$$\geq |a_1|^p + \sum_{n=1}^\infty \left|\int_n^{n+1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x} + a_{n+1}\left(1-\frac{n}{x}\right)\right] dx\right|^p$$

$$= |a_1|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \ln(x) + a_{n+1}(x - n \ln x) \Big|_{x=n}^{x=n+1} \right|^p$$

$$= |a_1|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + a_{n+1}\left(1 + n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \right|^p$$

$$\geq |a_1|^p + \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^p$$

Jensen eşitsizliğinde $\varphi(x) = |x|^p$ alınarak logaritmanın özelliklerinden ve Hardy eşitsizliğinin sürekli halinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p dx = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p$$

bulunur.

4.2. Kesikli Hardy Eşitsizliği

Teorem 4.2.1. $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \quad p > 1$ olsun ve

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{n} x_i^p \tag{4.18}$$

olduğunu varsayalım. Eşitsizlik ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ ise eşittir işaretini alır (Tu & Xia, 2019).

İspat: 3 aşamada ispat yapılacaktır.

Aşama 1: Denge faktörünü tanıtalım:

p'nin eşleneği $q = \frac{p}{p-1}$ olsun. Pozitif sayıları keyfi olarak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$

seçelim. Hardy eşitsizliğine göre şunları elde edebiliriz:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \frac{x_1}{a_1^{\alpha}} a_1^{\alpha} + \frac{x_2}{a_2^{\alpha}} a_2^{\alpha} + \cdots + \frac{x_k}{a_k^{\alpha}} a_l^{\alpha}$$

$$\leq \left(\frac{x_1^p}{a_1^{\alpha p}} + \frac{x_2^p}{a_2^{\alpha p}} + \cdots + \frac{x_k^p}{a_k^{\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha_1^{\alpha q} + \alpha_2^{\alpha q} + \cdots + \alpha_k^{\alpha q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Önce $\alpha q = 1$, sonra $\alpha = \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ olsun. Buradan

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq \left(\frac{x_1^p}{a_1^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p}} + \frac{x_2^p}{a_2^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p}} + \cdots + \frac{x_k^p}{a_k^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p}} \right)^{\frac{1}{p}} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{x_1^p}{a_1^{p-1}} + \frac{x_2^p}{a_2^{p-1}} + \cdots + \frac{x_k^p}{a_k^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{1-\frac{1}{p}}$$

Her iki tarafın p. kuvveti alınırsa

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^p \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{p-1} \left(\frac{x_1^p}{a_1^{p-1}} + \frac{x_2^p}{a_2^{p-1}} + \cdots + \frac{x_k^p}{a_k^{p-1}} \right)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı k pozitif sayısına bölündüğünde

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} \right)^p \leq \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{p-1}}{k^p} \left(\frac{x_1^p}{a_1^{p-1}} + \frac{x_2^p}{a_2^{p-1}} + \cdots + \frac{x_k^p}{a_k^{p-1}} \right)$$

olur. Her iki tarafın 1 den n'ye kadar toplamları alınınca

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} \right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{p-1}}{k^p} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^p}{a_i^{p-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{p-1}}{k^p} \right] x_i^p$$

olur. Yani x_i^p'nin katsayısı $r_i = \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)^{p-1}}{k^p}$ dir.

Aşama 2: Uygun denge faktörünü belirleyelim:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$'nın başlangıç noktasını mümkün olduğu kadar basit hale getirmek için $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = k^\beta$'yı varsayabiliriz.

Bunlar arasında $\beta > 0$ olmak üzere,

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \ k = 1 \\ k^\beta - (k-1)^\beta, \ k > 1 \end{cases} = k^\beta - (k-1)^\beta, \qquad k = 1,2, \dots, n$$

$$r_i = \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)^{p-1}}{k^p} = \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} \frac{\left(k^\beta\right)^{p-1}}{k^p} = \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} k^{\beta p - \beta - p}$$

$\beta p - \beta - p < 0,\ \beta p - \beta - p \neq -1$ i yapmak için β'yı ardından $x \in (0, +\infty)$

$\left(x^{\beta p - \beta - p}\right)^n = (\beta p - \beta - p)(\beta p - \beta - p - 1)x^{\beta p - \beta - p - 2} > 0$, olacak şekilde seçelim.

Yani $x^{\beta p - \beta - p}$, $(0, +\infty)$'dan bir katı alt dışbükey fonksiyondur, o halde

$$k^{\beta p - \beta - p} < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x^{\beta p - \beta - p} dx = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{(1-\beta)(p-1)}$$

olur, sonra

$$r_i = \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} k^{\beta p - \beta - p} < \frac{1}{a_i^{p-1}} \sum_{k=i}^{n} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{(1-\beta)(p-1)}$$

$$\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{a_i^{p-1}(1-\beta)(p-1)}$$

olur. $(1-\beta)(p-1)>0$ olduğu sürece bu $0<\beta<1$ dir.

Artık bu eşitsizliği ölçeklendirmeye devam edebiliriz.

$$r_i=\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{a_i^{p-1}(1-\beta)(p-1)}<\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{(1-\beta)(p-1)a_i^{p-1}}$$

$$\left[\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)(p-1)}}{a_i^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}=\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1-\beta}}{a_i}$$

$0<\beta<1$, dolayısıyla $x^{\beta-1}$ $(0,+\infty)$ da katı bir alt dışbükey fonksiyondur, böylece

$$\alpha_i=i^\beta-(i-1)^\beta=\beta\int_{i-1}^{i}x^{\beta-1}dx>\beta\left(i-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1},\qquad i=1,2,\ldots,$$

olur. Buradan

$$\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1-\beta}}{a_i}<\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1-\beta}}{\beta\left(i-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}}=\frac{1}{\beta},$$

sonra

$$r_i<\frac{\frac{1}{\beta^{p-1}}}{(1-\beta)(p-1)}=\frac{1}{(p-1)(1-\beta)\beta^{p-1}}$$

olur. Buradan da

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(p-1)(1-\beta)\beta^{p-1}} x_i^p$$

dır.

Aşama 3: Optimum denge faktörünü belirleyelim:

$f(x) = (1-x)x^{p-1} = x^{p-1} - x^p$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığından maksimum değerini düşünelim. $f(x)$ negatif değildir ve $[0,1]$'da süreklidir. $f(x)$'in türevini alırsak ve $0 < x < \frac{p-1}{p}$, $f'(x) > 0$ olduğunda

$$f'(x) = (p-1)x^{p-2} - px^{p-1} = px^{p-1}\left(\frac{p-1}{p} - x\right)$$

olur.

$\frac{p-1}{p} < x < 1$, $f'(x) < 0$ olduğunda $f(x) = \frac{p-1}{p}$ olduğunda maksimumu alır.

$\beta = \frac{p-1}{p}$ seçelim, o zaman

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(p-1)\left(1-\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}} x_i^p$$

$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

dir (Tu & Xia, 2019).

4.3. Kesikli Hardy Eşitsizliğinin Bazı Genellemeleri

Tanım 4.3.1. Klasik Hardy eşitsizliği şunu belirtmektedir:

$p > 1$ ve $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.19}$$

dir. $p \to \infty$ olduğunda yukarıdaki eşitsizlik Carleman eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1.a_2.\dots.a_n)^{\frac{1}{n}} \leq e\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.20}$$

e dönüşür (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Lemma 4.3.1. (Jensen eşitsizliği): $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun. Eğer $x_k \in I$ $(k = 1,2,\dots,n)$ ve $q_k \geq 0$ $(k = 1,2,\dots,n)$ $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$ ile birlikte ise

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \tag{4.21}$$

olur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Lemma 4.3.2. (Hadamard eşitsizliği): Eğer $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon ise, o zaman

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.22}$$

(Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Lemma 4.3.3. Eğer $\beta > -2$ ve $a > \frac{1}{2}$ ise,

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} x^\beta dx \geq \frac{16a^{\beta+4} - 4(\beta+3)a^{\beta+2}}{(4a^2-1)^2} \tag{4.23}$$

(Liu, Zhang & Jiang, 2012).

İspat: $\beta > -2$ den $\beta + 3 > 1$ olur. $f(x) = x^{\beta+3}$ $(0, +\infty)$ üzerinde dışbükey bir fonksiyon olduğundan,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

yani

$$x^{\beta+3} \geq -(\beta + 2)a^{\beta+3} + (\beta + 3)a^{\beta+2}x$$

olacağından,

$$x^{\beta} \geq -(\beta + 2)a^{\beta+3}x^{-3} + (\beta + 3)a^{\beta+2}x^{-2} \tag{4.24}$$

(4.24)'ün $\left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right]$ üzerinde integralini alarak Lemma 4.3.3.'ün ispatını basitleştirerek tamamlamış oluruz (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Lemma 4.3.4. $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ \ (n, m \in \mathbb{N})$ ve $p > 1$ olsun. O halde keyfi t parametresi için

$$\sum_{n=1}^{m} b_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \sum_{k=1}^{m} w(k) a_k \tag{4.25}$$

bulunur. Burada

$$w(k) = \left(k - \frac{1}{2}\right)^{t(1-p)} \sum_{n=k}^{m} b_n \left(\sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{1}{2}\right)^t\right)^{p-1} \tag{4.26}$$

Bu Lemma, Schur testinin bir versiyonu olarak görülebilir. Burada basit ve doğrudan bir ispat veriyoruz (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

İspat: $\lambda_{nk} > 0$ $(n \in \mathbb{N},\ \ k = 1,2,\dots,n)$ ve $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} = 1$ olsun. $f(x) = x^p,\ p > 1$ için $(0, +\infty)$ üzerinde dışbükey bir fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.1'den şunu elde edebiliriz:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}\, \lambda_{nk}^{-1} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \left(\lambda_{nk}^{-1} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{1-p} a_k \tag{4.27}$$

(4.27)'den şu sonuç çıkıyor:

$$\sum_{n=1}^{m} b_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \sum_{n=1}^{m} b_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{1-p} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{n=k}^{m} b_n\, \lambda_{nk}^{1-p} \tag{4.28}$$

(4.28)'de $\lambda_{nk} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^t}{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)^t}$ alarak (4.25)'i elde edebiliriz.

Bu Lemma 4.3.4.'ün ispatını tamamlar. Burada (4.26) de $w(k)$'ya ağırlık katsayısı diyoruz (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Aşağıda uygun t parametresi seçilerek ve ağırlık katsayısı tahmin edilerek kesikli Hardy eşitsizliğinin çeşitli genellemeleri türetilmiştir. Ayrıca $p \to \infty$ kabul edilerek Carleman eşitsizliğine ilişkin bazı sonuçlar ve genellemeler elde edilmiştir (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Lemma 4.3.5. $\Lambda_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, $\lambda_i > 0$ ve $S_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ olsun. $0 \neq p < 1$ sabit olsun ve $(\mu_i)_{i\geq 1}, (\eta_i)_{i\geq 1}$, $0 < p < 1$ için $\mu_i \leq \eta_i$ ve $p < 0$ için $\mu_i \geq \eta_i$ olacak şekilde iki reel sayı dizisi olsun. O zaman $n \geq 2$ için

$$\sum_{i=2}^{n-1} \left[\mu_i - \left(\mu_{i+1}^q - \eta_{i+1}^q\right)^{1/q}\right] S_i^{1/p} + \mu_n S_n^{1/p} \leq \left(\mu_2^q - \eta_2^q\right)^{1/q} \lambda_1^{1/p} a_1^{1/p} + \sum_{i=2}^{n} \eta_i\, \lambda_i^{1/p} a_i^{1/p} \tag{4.29}$$

dir (Gao, 2005).

İspat: Bu esas olarak R.Redheffer'dan kaynaklanmaktadır. $t = \lambda_k a_k / S_{k-1}$ ile $k \geq 2$

$$\mu_k S_k^{1/p} - \eta_k \lambda_k^{1/p} a_k^{1/p} = S_{k-1}^{1/p}\left(\mu_k (1+t)^{1/p} - \eta_k t^{1/p}\right) \leq \left(\mu_k^q - \eta_k^q\right)^{1/q} S_{k-1}^{1/p} \qquad (4.30)$$

yı not edelim. Lemma daha sonra $2 \leq k \leq n$ için (4.30) toplayarak takip eder (Gao, 2005).

Teorem 4.3.1. Lemma 4.3.5'deki aynı koşulları varsayalım ve $0 < p < 1$ sabit olsun.Varsayalım ki, $c^{-1} + 1 \leq c^{-1/p}$ ve

$$c \leq 1 - p + (1-p)\left(\lambda_i^{-q} - \lambda_{i-1}^{-q}\right)\Lambda_{i-1}\lambda_i^{q/p}, \qquad i \geq 2 \; ve \; 0 < p < 1 \qquad (4.31)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{S}_i/\Lambda_i)^{1/p} \leq c^{-1/p} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/p} \qquad (4.32)$$

için pozitif bir c sabiti var (Gao, 2005).

İspat: Herhangi bir $n \geq 1$ tam sayısı için teoremi kanıtlamak yeterlidir. Öncelikle (4.31) koşulunun

$$q^{-1}\left(1 - c^{-1} + c^{-1}\Lambda_{i-1}\lambda_i^{q/p}\left(\lambda_{i-1}^{-q} - \lambda_i^{-q}\right)\right) \geq 1, \quad i \geq 2 \qquad (4.33)$$

eşdeğer olduğundan,

(4.29)'daki $\eta_i = \lambda_i^{-1/p}$, $\mu_i^q = \lambda_i^{-q/p} + \Lambda_{i-1}/c\lambda_{i-1}^q$ ayarlayarak, (4.29)'un sol tarafını şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\sum_{i=2}^{n-1} \left[\left(\lambda_i^{-q/p} + \Lambda_{i-1}/c\lambda_{i-1}^q\right)^{1/q} - \left(\Lambda_i/c\lambda_i^q\right)^{1/q}\right] S_i^{1/p} + \mu_n S_n^{1/p}$$

Ortalama değer teoremine göre,

$$\left(\lambda_i^{-q/p} + \Lambda_{i-1}/c\lambda_{i-1}^q\right)^{1/q} - \left(\Lambda_i/c\lambda_i^q\right)^{1/q}$$

$$\geq q^{-1}\left(\lambda_i^{-q/p} + \Lambda_{i-1}/c\lambda_{i-1}^q - \Lambda_i/c\lambda_i^q\right)\left(\Lambda_i/c\lambda_i^q\right)^{-1/p}$$

$$= q^{-1}\left(1 - c^{-1} + c^{-1}\Lambda_{i-1}\lambda_i^{q/p}\left(\lambda_{i-1}^{-q} - \lambda_i^{-q}\right)\right)(\Lambda_i/c)^{-1/p}$$

$$\geq (\Lambda_i/c)^{-1/p}$$

Burada son eşitsizlik (4.33)'dan gelir. Böylece (4.29)

$$\sum_{i=1}^{n}(S_i/\Lambda_i)^{1/p} \leq (c^{-1}+1)a_1^{1/p} + c^{-1/p}\sum_{i=2}^{n} a_i^{1/p} \leq c^{-1/p}\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/p}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar (Gao, 2005).

Teorem 4.3.2. α bir sabit olsun ve $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n - \frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n < \infty$ olsun. O halde $p > 1$ ve $-1 < \alpha < p - 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p} \leq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n \qquad (4.34)$$

bulunur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

İspat: m keyfi bir pozitif tamsayı ve $b_n = n^{\alpha - p}$ olsun. $p > 1$ ve $-1 < \alpha < p - 1$ için $-1 < t < \min\left\{\frac{\alpha}{1-p}, 0\right\}$'ı seçelim. $f(x) = x^t$, $(0, +\infty)$ üzerinde dışbükey bir fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.2.'den

$$\left(i - \frac{1}{2}\right)^{t} \leq \int_{i-1}^{i} x^t dx \qquad i = 1,2,\dots,n \ \text{için} \qquad (4.35)$$

sonucu çıkar. Böylece

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)^{t}\right)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{i-1}^{i} x^{t}dx\right)^{p-1} = \left(\int_{0}^{n} x^{t}dx\right)^{p-1} = \frac{n^{(p-1)(1+t)}}{(1+t)^{p-1}} \tag{4.36}$$

(4.26) ve (4.36)’dan şu sonuç çıkar:

$$w(k) = \left(k-\frac{1}{2}\right)^{t(1-p)} \sum_{n=k}^{m} n^{\alpha-p} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)^{t}\right)^{p-1}$$

$$\leq \frac{1}{(1+t)^{p-1}}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{t(1-p)} \sum_{n=k}^{m} n^{\alpha+pt-t-1} \tag{4.37}$$

$\alpha+pt-t-1 = \alpha-1+(p-1)t < \alpha-1+(p-1)\frac{\alpha}{1-p} = -1$ olduğundan Lemma 4.3.2.’den

$$n^{\alpha+pt-t-1} \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^{\alpha+pt-t-1}\,dx \tag{4.38}$$

çıkar. (4.38)’den

$$\sum_{n=k}^{m} n^{\alpha+pt-t-1} \leq \sum_{n=k}^{m} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^{\alpha+pt-t-1}\,dx = \int_{k-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} x^{\alpha+pt-t-1}\,dx$$

$$\leq \frac{1}{t-pt-\alpha}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha+pt-t} \tag{4.39}$$

olur. (4.37) ve (4.39)’dan şu sonucu buluruz:

$$w(k) \leq \frac{1}{(1+t)^{p-1}(t-pt-\alpha)}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \tag{4.40}$$

Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p} \leq \sum_{k=1}^{m} w(k)a_k \leq \frac{1}{(1+t)^{p-1}(t-pt-\alpha)}\sum_{k=1}^{m}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_k \quad (4.41)$$

Basit hesaplamayla $f(t) = \frac{1}{(1+t)^{p-1}(t-pt-\alpha)}$, $\quad -1 < t < \min\left\{\frac{\alpha}{1-p}, 0\right\}$ fonksiyonunun $t = -\frac{1+\alpha}{p}$ de minimum $\left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p}$ ye ulaştığını elde edebiliriz.

Dolayısıyla (4.41) de $t = -\frac{1+\alpha}{p}$ alındığında, şunu elde ederiz:

$$\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p} \leq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p}\sum_{k=1}^{m}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_k$$

$$= \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p}\sum_{k=1}^{m}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n \quad (4.42)$$

(4.34)'in ispatı $m \to \infty$ alınarak yapılır (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Teorem 4.3.2 de $p \to +\infty$ kabul edersek Carleman eşitsizliğinin aşağıdaki genellemesini elde edebiliriz (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Sonuç 4.3.1. $\alpha > -1$ ve $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ile $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n < \infty$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(a_1.a_2.\dots.a_n)^{\frac{1}{n}} \leq e^{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n \quad (4.43)$$

olur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Teorem 4.3.2 de $\alpha \to -1^{+}$ kabul edersek Hardy eşitsizliğinin aşağıdaki genellemesini elde edebiliriz (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Sonuç 4.3.2. $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n-\frac{1}{2}} < \infty$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n-\frac{1}{2}} \tag{4.44}$$

olur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Teorem 4.3.3. $p > 1$ ve $a_n \geq 0 \;\; (n \in \mathbb{N})$ ile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ olsun. Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{4.45}$$

(Liu, Zhang & Jiang, 2012).

İspat:

$b_n = \frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2}$ olsun ve (4.26) de, $t = -\frac{1}{p}$ alalım. O halde keyfi bir pozitif m tamsayısı için, (4.26)'dan

$$w(k) = \left(k-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}\sum_{n=k}^{m} b_n\left(\sum_{i=1}^{n}\left(i-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \tag{4.46}$$

elde edebiliriz.

$f(x) = x^{-\frac{1}{p}}, \;\; (0,+\infty)$ üzerinde dışbükey bir fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.2'den şu sonuç çıkar:

$$\left(i-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \int_{i-1}^{i} x^{-\frac{1}{p}}dx \qquad i = 1,2,\ldots,n \text{ için} \tag{4.47}$$

Böylece,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{i-1}^{i} x^{-\frac{1}{p}}dx\right)^{p-1} = \left(\int_{0}^{n} x^{-\frac{1}{p}}dx\right)^{p-1}$$

$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} n^{\frac{(p-1)^2}{p}} \tag{4.48}$$

(4.46) ve (4.48)’den şu sonuç çıkar:

$$w(k) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \sum_{n=k}^{m} \frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2} n^{\frac{-2p+1}{p}} \tag{4.49}$$

$\beta = \frac{-2p+1}{p}$ ve $a = n$’in Lemma 4.3.3’teki kullanımı ile,

$$\frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2} n^{\frac{-2p+1}{p}} \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^{\frac{-2p+1}{p}}dx \tag{4.50}$$

yazılır. (4.49) ve (4.50)’den elimizde

$$w(k) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \sum_{n=k}^{m} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^{\frac{-2p+1}{p}}dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \tag{4.51}$$

var. Lemma 4.3.4 ve (4.51)’den şu sonuç çıkar:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \sum_{n=1}^{m} a_n \tag{4.52}$$

(4.52) da $m \to \infty$ için limit alındığında teorem ispatlanmış olur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Açıklama 4.3.1. $p > \frac{4}{3}$ olduğunda $\frac{16pn^4-4(p+1)n^2}{p(4n^2-1)^2} > 1$ eşitsizliğinin herhangi $n \geq 1$ için geçerlidir. Dolayısıyla $p > \frac{4}{3}$ olduğunda Teorem 4.3.3., Hardy eşitsizliğini bir sonucunu verir (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Açıklama 4.3.2. Teorem 4.3.2.'de $\left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p$ sabiti mümkün olan en iyisidir, yani aşağıdaki sonuç geçerlidir (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Önerme 4.3.1. $p > 1$ ve $-1 < \alpha < p - 1$ olsun. Eğer öyle bir sabit c_p varsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p \leq c_p \sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n \tag{4.53}$$

$a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n < \infty$ için, o zaman

$$c_p \geq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p \tag{4.54}$$

İspat:

$$a_k = \begin{cases} \left(k-\frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha}, & k \leq m \\ 0, & k > m \end{cases} \tag{4.55}$$

Öğesini keyfi bir pozitif tamsayı m için seçelim.

O zaman (4.53)'den şunu elde edebiliriz:

$$c_p \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n} \geq \frac{\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{m}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} a_n}$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha-p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1+\alpha}{p}}\right)^{p}}{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}} \tag{4.56}$$

Şunu görelim,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1+\alpha}{p}} > \sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x^{-\frac{1+\alpha}{p}}dx =$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^{-\frac{1+\alpha}{p}}dx\,\frac{p}{p-1-\alpha}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1-\alpha}{p}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1-\alpha}{p}}\right) > \frac{p}{p-1-\alpha}\left(n^{\frac{p-1-\alpha}{p}}-1\right)$$

$$=\frac{p}{p-1-\alpha}n^{\frac{p-1-\alpha}{p}}\left(1-\frac{1}{n^{\frac{p-1-\alpha}{p}}}\right) \tag{4.57}$$

$p>1$ ve $x\geq -1$ ve (4.57) için Bernoulli eşitsizliği $(1+x)^p \geq 1+px$'ten şu sonuç çıkar:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1+\alpha}{p}}\right)^{p} \geq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p} n^{p-1-\alpha}\left(1-\frac{p}{n^{\frac{p-1-\alpha}{p}}}\right) \tag{4.58}$$

(4.56) ve (4.58)'i birleştirdiğimizde ,

$$c_p \geq \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^{p}\frac{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{p}{n^{1+\frac{p-1-\alpha}{p}}}}{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}} \tag{4.59}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{n^{1+\frac{p-1-\alpha}{p}}}$ serisinin yakınsak olduğuna ve $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\ln m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\ln m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n-\frac{1}{2}} = 1$

olduğunu ispatlamanın kolay olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla (4.59)'da $m \to \infty$ alındığında, ispatı tamamlanmış olur (Liu, Zhang & Jiang, 2012).

Teorem 4.3.4. $r > s > 1$ ve u, v, w negatif olmayan girdilere sahip diziler olsun. $m = 1,2, \dots$ için

$$\sum_{n=1}^{m} u_n \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^r \leq \left(\sum_{k=1}^{m} v_k\right)^s \tag{4.60}$$

ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\, w_k\right)^r \leq K(r,s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k^{r/s}\right)^s \tag{4.61}$$

Teoremin,

$$K(r,s) = \frac{s}{r-s} \left\{ \frac{s-1}{B\left(\frac{1}{s-1}, \frac{r-1}{s-1}\right)} \right\}^{s-1} \tag{4.62}$$

ile geçerli olduğu ancak daha küçük bir değer için geçerli olmadığı ortaya çıktı. Üstelik (4.62)'deki gibi K ile (4.61)'deki eşitlik ancak her iki tarafın da ortadan kalkması durumunda vardır (Bennett, 1989).

Teorem 4.3.5. $1 < p < q < \infty$ olsun. O zaman

$$\int_0^{\infty} x^{(q/p)-1-q} \left(\int_0^{x} f(t)dt\right)^q dx \leq A(p,q) \left(\int_0^{\infty} f^p(x)dx\right)^{q/p} \tag{4.63}$$

negatif olmayan her ölçülebilir fonksiyon için $\boldsymbol{f}: [\mathbf{0}, \infty) \to [\mathbf{0}, \infty)$ burada

$$A(p,q) = \frac{p}{(p-1)q}\left\{\frac{q-p}{pB\left(\frac{p}{q-p},\frac{p(q-1)}{q-p}\right)}\right\}^{(q-p)/p} \tag{4.64}$$

$f(x) = \frac{c}{\left(1+dx^{(q-p)/p}\right)^{q/(q-p)}}$ formundaki her fonksiyon için ve sıfır ölçüsünde bunlardan birinden farklı olan her fonksiyon için (4.63)'de eşitlik vardır, ancak diğerleri için eşitlik yoktur.

Bliss'in kanıtı, Varyasyonlar Hesabı'nın tüm temel araçlarının en ustaca uygulanmasını içeren çok zorlu bir kanıttır. O halde Teorem 4.3.4. bize zaten karşılaşılan çok ilginç olgunun başka bir örneğini sunuyor: yani kanıtlanması analizin en derin fikirlerinden bazılarını gerektiren temel bir eşitsizliği. Teorem 4.3.4.'ün (keskinleştirilmiş versiyonu) temel bir yaklaşımıdır (Bennett, 1989).

Teorem 4.3.4'ün ispatı: v'nin pozitif ve w'nun azalan olduğu ek hipotezler altında teoremi kanıtlamak yeterlidir. Üstelik her sabit v için (4.60)'ı sağlayan u'lardan sadece birini, diyelim ki $\bar{u}$'yu dikkate almak yeterlidir. Burada

$$\bar{u}_n = \frac{V_n^s - V_{n-1}^s}{V_n^r} \qquad (n = 1,2,\dots) \tag{4.65}$$

$V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ve $V_0 = 0$ dır.

Bunu görmek için şunu not ediyoruz:

$$\sum_{n=1}^{m} \bar{u}_n V_n^r = V_m^s \qquad (m = 1,2,\dots)$$

Yani (4.60) kesinlikle $\bar{u}$ için geçerlidir. Ayrıca u (4.60)'yi sağlıyorsa, o zaman açıkça

$$\sum_{n=1}^{m} u_n V_n^r \le \sum_{n=1}^{m} \bar{u}_n V_n^r \qquad (m = 1,2,\dots)$$

olur.

$\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n} V_k w_k$, n ile azaldığı için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_k w_k\right)^r$$

dır.

Dolayısıyla eğer teorem $\overline{u}$ için geçerliyse, u için de geçerlidir. $\overline{u}$ için teoremi kanıtlamak amacıyla, şu şekilde tanımlanan $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önünde bulunduruyoruz**.**

$$f(x) = \begin{cases} w_k, & V_{k-1} \leq x < V_k \\ 0, & x > \sup\limits_{x} V_k \end{cases}$$

Açıkça görülüyor ki ,

$$\int_0^{\infty} f^{r/s}(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k^{r/s} \tag{4.66}$$

Üstelik $f(x)$, x'in azalan bir fonksiyonu olduğundan, $V_{n-1} \leq x < V_n$ olduğunda

$$\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n} v_k w_k \leq \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt \tag{4.67}$$

olur. $(4.65), (4.67)$ ve Teorem 4.3.5.'i uygulayarak şunu görüyoruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \left(\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^r = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n^s - V_n^{s-1}) \left(\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^r$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} s \int_{V_{n-1}}^{V_n} x^{s-1}dx \left(\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^r$$

$$\leq s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{V_{n-1}}^{V_n} x^{s-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^r dx$$

$$\leq s\int_0^{\infty} x^{s-r-1}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^r dx$$

$$\leq sA(r/s\,,r)\left(\int_0^{\infty} f^{r/s}(x)dx\right)^s$$

Bu kestirim (4.66) ile birlikte (4.61)'in

$$K(r,s)=\frac{s}{r-s}\left\{\frac{s-1}{B\left(\frac{1}{s-1},\frac{r-1}{s-1}\right)}\right\}^{s-1}$$

için geçerli olduğunu göstermektedir.

Yukarıdaki $K(r,s)$ değerinin mümkün olan en iyi değer olduğunu göstermek için Bliss tarafından bulunan $f(x)=(cx^{s-1}+d)^{s/(1-s)}$ $(c,d>0)$ ekstrem değerlerini uygulamaya çalıştık.

Elbette c ve d'yi seçmekte özgürüz, ancak -seçimler ne olursa olsun- integrallerden serilere geçişte bir miktar hassasiyet kaybı olduğunu görüyoruz. Neyse ki, göreceğimiz gibi bu kayıp $c/d\to 0$ olduğunda ihmal edilebilir hale gelir. Böylece $c=1$ ve d büyükken

$$v_k\equiv 1,\qquad\qquad u_n=\frac{n^s-(n-1)^s}{n^r},$$

ve

$$w_n=\frac{n}{(n^{s-1}+d)^{1/(s-1)}}-\frac{(n-1)}{((n-1)^{s-1}+d)^{1/(s-1)}}$$

alırız.

Bazı hesaplamalardan sonra aşağıdaki asimptotik kestirimleri elde ederiz.

$d \to \infty$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\sum_{k=1}^{n} v_k w_k\right)^r \sim s \frac{d^{(s-r)/(s-1)}}{s-1} B\left(\frac{s}{s-1}, \frac{r-s}{s-1}\right) \tag{4.68}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k^{r/s} \sim \frac{d^{(r/s)+(1-r)/(s-1)}}{s-1} B\left(\frac{1}{s-1}, \frac{r-1}{s-1}\right) \tag{4.69}$$

$B(x+1, y-1) = \frac{x}{y-1} B(x,y)$ özdeşliğini kullanarak (4.68) ve (4.69)'dan

$$K(r,s) \geq \frac{s}{r-s} \left\{ \frac{s-1}{B\left(\frac{1}{s-1}, \frac{r-1}{s-1}\right)} \right\}^{s-1}$$

olduğu sonucu çıkar. Bu da Teorem 4.3.4.'ün ispatını tamamlar (Bennett, 1989).

Sonuç 4.3.3. Eğer $s > 1$ ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_n^s - V_n^{s-1}) \left(\prod_{k=1}^{n} w_k^{v_k}\right)^{s/V_n} \leq \frac{s^*}{\Gamma(s^*)^{s-1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k\right)^s$$

Mümkün olan en iyi sabittir.

Burada $s^* = s/(s-1)$, s'nin eşlenik üssünü belirtir; v ve w negatif olmayan girişlere sahip dizilerdir ve $V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. (Hiçbir V_n'nin sıfırlanmaması(kaybolmaması) için $v_1 > 0$ alıyoruz.)

Sonuçta $s \to 1$'e izin verirsek ve Stirling formülünü tekrar uygularsak, Polya'nın Carleman eşitsizliğine ilişkin genellemesini elde ederiz (Bennett, 1989).

4.4. Ağırlıklı Kesikli Hardy Operatörü:

Tanım 4.4.1. Pozitif sayılardan oluşan bir $(w_n)_{n\geq 0}$ dizisi verildiğinde, $l^p(w)$, $\|a\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\, w_n)^{\frac{1}{p}}$ normuyla verilmiş $\sum_{n\geq 0}|a_n|^p\, w_n < \infty$ olacak şekilde $a = (a_n)_{n\geq 0}$ karmaşık sayı dizilerinin uzayıdır.

Her $n \in \mathbb{N}_0$(negatif olmayan tam sayılar kümesi) için $w_n = 1$ olduğunda kısaca l^p yazarız.

Karmaşık sayılardan oluşan bir $a = (a_k)_{k\geq 0}$ dizisi verildiğinde $A_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$ genel terimli dizi kullanılır (Lefevre, 2020b).

Teorem 4.4.1. $w = (w_n)_{n\geq 0}$ ve $w' = (w'_n)_{n\geq 0}$ negatif olmayan gerçel sayı dizileri olsun ve $(w_n)_{n\geq 0}$'ın azalmadığını varsayalım.

f , $(0,1)$ üzerinde ölçülebilir bir pozitif fonksiyonun var olduğunu varsayalım, öyle ki

- Bir alt homojenlik özelliğinden, her $n \in (m/s,\ (m+1)/s) \cap \mathbb{N}\ için\ w'_{n-1} \leq f(s)w_n$' dir. Burada $s \in (0,1)$ ve $m \in \mathbb{N}_0$.
- $C = \int_0^1 \left(\frac{f(s)}{s}\right)^{1/p} ds < \infty$

Bu durumda Γ, $l^p(w)$'den $l^p(w')$'ne $\|\Gamma\| \leq C$ ile sınırlanır.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} w'_n \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k\right|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\, w_n\right)^{1/p}. \tag{4.70}$$

Özellikle $f(s) = s^{-\alpha p}$ ile klasik ağırlıklı hali olur (Lefevre, 2020b).

Teorem 4.4.2. $p > 1$ olmak üzere, $\forall a \in l^p$ ve l^p uzayındaki $A = (a_n)_{n\geq 0}$ dizisi için, $\|A\|_p \leq p'\|a\|_p$ dir ve

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right|^p\right)^{1/p} \leq p'\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p} \tag{4.71}$$

(Lefevre, 2020a)

İspat: $\forall\, N \in \mathbb{N}_0$ için,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} a_k ds = \int_0^1 a_{[(n+1)s]} ds$$

ise, integraller için üçgen eşitsizliğinden

$$\sum_{n=0}^{N} |A_n|^p \leq \int_0^1 \left(\left|a_{[(n+1)s]}\right|^p\right)^{1/p} ds \leq \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1} \left|a_{[ns]}\right|^p\right)^{1/p} ds \tag{4.72}$$

elde edilir. $\forall\, s \in (0,1)$ve $m \in \mathbb{N}_0$ için,

$$I_m(s) = \{n \geq 1 | [ns] = m\} = \left[\frac{m}{s}, \frac{m+1}{s}\right] \cap \mathbb{N}$$

ℕ'nin bir parçası olmak üzere,

$$\sum_{n\geq 1} \left|a_{[ns]}\right|^p = \sum_{m\geq 0} \sum_{n\in I_m(s)} \left|a_{[ns]}\right|^p = \sum_{m\geq 0} |a_m|^p (\operatorname{card} I_m(s))$$

şeklinde yazılabilir. $A \notin \mathbb{N}$ iken, $(\operatorname{card}(0, A) \cap \mathbb{N}) = [A])$ olduğunu belirtir. Bu nedenle, Her $s \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ve her $m \geq 0$ için,

$$\operatorname{card} I_m(s) = \left[\frac{m+1}{s}\right] - \left[\frac{m}{s}\right]$$

olur. $(a_m)_{m\geq 0}$ negatif olmayan reel sayıların toplanabilir bir dizi olmak üzere ve $\delta > 0$ ise,

$$\sum_{m\geq 0} a_m\,([(m+1)\delta]) - [m\delta] \leq \sum_{m\geq 0} a_m$$

olacağından son iki kabulden, h.h.h.y.

$$\left(\sum_{n\geq 1} \left|a_{[ns]}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq s^{\frac{-1}{p}} \|a\|_p$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} \left|a_{[ns]}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 s^{\frac{-1}{p}} \|a\|_p ds = p' \|a\|_p$$

bulunur (Lefevre, 2020a).

Teorem 4.4.1'in ispatı:$a \in l^p(w)$ olsun. Öncelikle $(|a_k|^p w_k)_k$ artmadığını varsayalım. Keyfi bir $N \in \mathbb{N}_0$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} a_k ds = \int_0^1 a_{[(n+1)s]} ds$$

ise, integraller için üçgen eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |A_n|^p w_n'\right)^{1/p} \leq \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \left|a_{[(n+1)s]}\right|^p w_n'\right)^{1/p} ds \leq \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1} \left|a_{[ns]}\right|^p w_{n-1}'\right)^{1/p} ds$$

yazarız.

Terimleri toplamak amacıyla her $s \in (0,1)$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için şunu tanıtıyoruz.

$$I_m(s) = \{n \geq 1 | [ns] = m\} = \left[\frac{m}{s}, \frac{m+1}{s}\right] \cap \mathbb{N}$$

Açıkça, $(I_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ℕ'in bir parçası ise, hipotezden

$$\sum_{n\geq 1}\left|a_{[ns]}\right|^p w'_{n-1} = \sum_{m\geq 0}|a_m|^p \sum_{n\in I_m(s)} w'_{n-1} \leq f(s)\sum_{m\geq 0}|a_m|^p w_m(\operatorname{card} I_m(s)) \qquad (4.73)$$

yazılabilir.

$A \notin \mathbb{N}$ iken, $(\operatorname{card}(0,A)\cap\mathbb{N})$ =[A]) olduğunu belirtir. Bu nedenle, Her $s\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ ve her $m\geq 0$ için,

$$\operatorname{card} I_m(s) = \left\lceil\frac{m+1}{s}\right\rceil - \left\lceil\frac{m}{s}\right\rceil \qquad (4.74)$$

dir.

(4.73), (4.74)'ten hemen hemen her yerde

$$\left(\sum_{n\geq 1}\left|a_{[ns]}\right|^p w'_n\right)^{1/p} \leq f(s)^{\frac{1}{p}} s^{\frac{-1}{p}}\|a\|_p$$

i elde ederiz. s'ye göre integral alırsak,

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|A_n|^p w'_n\right)^{1/p} \leq C\|a\|_p$$

elde ederiz.

$N\in\mathbb{N}_0$ keyfi olduğundan, $(|a_k|^p w_k)_k$'nın artmadığı özel durumda sonuç ispatlanmış olur (Lefevre, 2020b).

4.5. Değişken Üslü $l^{p(.)}$ Uzaylarında Kesikli Ağırlıklı ve Dual Hardy Operatörü

Tanım 4.5.1. $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ ve $\{x_k\}_1^\infty$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve Kesikli Hardy eşitsizliği,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^p\right)^{1/p} \leq p'\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.75}$$

dir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Değişken kesikli Lebesgue uzayının ilk kez 1931 yılında W. Orlicz tarafından incelenmiştir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Tanım 4.5.2. ℕ Doğal sayıların kümesi ve $p = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\underline{p} = \inf_{n\geq 1} p_n$ ve $\overline{p} = \sup_{n\geq 1} p_n$ olmak üzere, $1 \leq \underline{p} \leq p_n \leq \overline{p} < \infty$ olacak şekilde bir gerçel sayılar dizisi olsun. p_n'nin eşlenik üs fonksiyonu tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n'} = 1$ olarak tanımlanır. $A \subset \mathbb{N}$'nin karakteristik fonksiyonu χ_A olsun. Bu konu boyunca $\underline{p}' = \frac{p}{\underline{p}-1}$ ve $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir pozitif sayılar dizisidir yani w, ℕ'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonudur (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Tanım 4.5.3. Bazı λ_0 değerleri için,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|x_n|}{\lambda_0}\right)^{p_k} < \infty$$

şeklindeki $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin kümesine değişken üslü $l_{w_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ ile kesikli ağırlıklı Lebesgue uzayı denir. Burada,

$$\|x\|_{l_{w_n}^{p_n}(\mathbb{N})} = \|xw\|_{l^{p_n}(\mathbb{N})} = \inf\left\{\lambda > 0\colon \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{\lambda}w_k\right)^{p_k} \leq 1\right\}$$

ifadesi $l_{w_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ daki Luxemburg normu olarak bilinir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

$l_{w_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ uzayı bir Banach uzayıdır (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Sabit üslü dizi için $l_{w_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ uzayı klasik kesikli ağırlıklı Lebesgue uzayı ile çakışır (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Lemma 4.5.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_k = \sum_{n=1}^{k} v_n^{-p'}$, $A_0 = 0$ ve $v_n > 0$ ise, aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) Eğer $0 < b < 1$ ise, tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$bA_k^{b-1}v_k^{-p'} \leq A_k^b - A_{k-1}^b \leq bA_{k-1}^{b-1}v_k^{-p'}.$$

b) Eğer $b < 0$ veya $b \geq 1$ ise, tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$bA_{k-1}^{b-1}v_k^{-p'} \leq A_k^b - A_{k-1}^b \leq bA_k^{b-1}v_k^{-p'}$$ (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

İspat:

a) $f(x) = x^b$ ve $0 < b < 1$ olsun. Ortalama değer teoremine göre,

$$bx^{b-1}(x-y) \leq x^b - y^b \leq by^{b-1}(x-y), 0 < y < x \tag{4.76}$$

yazılabilir. (4.76) eşitsizliğinden de,

$A_k^{b-1}(A_k - A_{k-1}) \leq \frac{1}{b}\left(A_k^b - A_{k-1}^b\right) \leq A_{k-1}^{b-1}(A_k - A_{k-1})$ bulunur.

Yani,

$A_k^{b-1}v_k^{-p'} \leq \frac{1}{b}\left(A_k^b - A_{k-1}^b\right) \leq A_{k-1}^{b-1}v_k^{-p'}$ olur.

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{b-1}v_k^{-p'} \leq \frac{1}{b}A_n^b \tag{4.77}$$

Benzer şekilde (b) ifadesi de kanıtlanabilir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Lemma 4.5.2. $1 \leq p_n \leq q_n \leq \overline{q} < \infty$ olsun. $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif reel sayılar dizisi için,

$l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N}) \to l_{v_n}^{q_n}(\mathbb{N})$ ve $\|x\|_{l_{v_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq \|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})}$

dir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

İspat: $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{p_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{p_n} \leq 1$$

olduğu açıktır.

$f(t) = a^t$ üstel fonksiyonunun $0 < a < 1$ için azalan fonksiyon olduğundan, $\left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{q_n} \leq \left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{p_n}$ olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{q_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{\lambda} v_n\right)^{p_n} \leq 1$$

dir.

Yani, $\|x\|_{l_{v_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq \lambda$.

$\lambda = \|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})}$ şeklinde seçildiğinde, $\|x\|_{l_{v_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq \|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})}$ bulunur (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Teorem 4.5.1. $1 \leq p_n \leq q_n \leq \overline{q} < \infty$, $\frac{1}{r_n} = \frac{1}{p_n} - \frac{1}{q_n}$, $\Omega_1 = \{n \in \mathbb{N}: p_n < q_n\}$ ve $\Omega_2 = \{n \in \mathbb{N}: p_n = q_n\}, v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}\ ve\ w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$' nin koşulu karşılayan ağırlık dizileri olduğunu varsayalım.

$$\left\|\frac{v}{w}\right\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} < \infty$$

Sonra $l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N}) \to l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ ve

$$\|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})} \leq \left(A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{l_\infty(\mathbb{N})}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \left\|\frac{v}{w}\right\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} \|x\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})}.$$

Burada $A = \sup\limits_{n\in\Omega_1} \frac{p_n}{q_n}$, $B = \sup\limits_{n\in\Omega_1} \frac{q_n - p_n}{q_n}$ ve

$$\left\|\frac{v}{w}\right\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} = \left\|\frac{v}{w}\right\|_{l^{r_n}(\Omega_1)} + \left\|\frac{v}{w}\right\|_{l^{\infty}(\Omega_2)}$$

(Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Teorem 4.5.2. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tün $n \in \mathbb{N}$ ve $\|1\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} < \infty$ için $1 < \underline{p} \leq q_n \leq \overline{q} < \infty$ ve $\frac{1}{r_n} = \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{p_n}$ olacak şekilde gerçek sayı dizileri ve $\mathcal{H}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ ve $\mathcal{H}_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ olmak üzere,

$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizileri olduğunu varsayalım. O zaman

$$\|\mathcal{H}_n\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq C.\|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})} \tag{4.78}$$

eşitsizliği ancak ve ancak şu durumda geçerlidir.

$$D = \sup_{k\geq 1} \left(\sum_{n=1}^{k} v_n^{-\underline{p}'}\right)^{\frac{1}{\underline{q}\,\underline{p}'}} \left\| \frac{\left(\sum_{m=1}^{n} v_m^{-\underline{p}'}\right)^{\frac{1}{\underline{p}'\,\underline{q}'}}}{n} \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)} < \infty. \tag{4.79}$$

Ayrıca, $C > 0$,

$$\left(\frac{\underline{p} - 1}{\underline{p} + \underline{q} - 1}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} D \leq C \leq (\overline{q}')^{\frac{1}{\underline{p}'}} \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \|\chi_{\Omega_2}\|_{l^{\infty}(\mathbb{N})}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} D$$

ile optimaldir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

İspat: **<u>Yeterlilik :</u>**

$h_n = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{-\frac{p'}{}}\right)^{\frac{1}{q\,p'}}$ ve $h_0 = 0$ olsun. Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği uygulandığında

$$\|\mathcal{H}_n\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})} = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})} = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k v_k h_k (v_k h_k)^{-1}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})}$$

$$\leq \left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(v_k h_k)^{-\underline{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})}$$

$$= \left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^{-\underline{p'}}\, v_k^{-\underline{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})}$$

$$= \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\underline{p}}}(|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{}}\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^{-\underline{p'}}\, v_k^{-\underline{p'}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})}$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\underline{p}}}(|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{}}\chi_{E_n}(k)\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^{-\underline{p'}}\, v_k^{-\underline{p'}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{\frac{q_n}{p}}(\mathbb{N})}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{n^{\underline{p}}}(|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{}}\chi_{E_n}(k)\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^{-\underline{p'}}\, v_k^{-\underline{p'}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{\frac{q_n}{p}}(\mathbb{N})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n^{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}h_k^{-p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{p}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{\frac{q_n}{p}}(n\geq k)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}h_k^{-p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$b=1-\frac{1}{q}$ olsun. (4.77)'den şu sonuç çıkıyor.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}h_k^{-p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}v_l^{-p'}\right)^{\frac{-1}{q}}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}v_l^{-p'}\right)^{\left(1-\frac{1}{q}\right)-1}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{p}h_k^{\frac{p}{k}}\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1-\frac{1}{q}}{p'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (\overline{q}')^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{k}} \left\| \frac{1}{n} (h_n)^{\underline{q}-1} \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}. \tag{4.80}$$

(4.79) ve Teorem 4.5.1'den,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| v_k)^{\underline{p}} h_k^{\frac{p}{k}} \left\| \frac{1}{n} (h_n)^{\underline{q}-1} \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\geq k)}^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$\leq D \|x\|_{l_{v_n}^{\underline{p}}(\mathbb{N})} \leq D \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \left\| \chi_{\Omega_2} \right\|_{l_\infty(\mathbb{N})} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})}. \tag{4.81}$$

bulunur.

Yani, (4.80) ve (4.81) eşitsizliklerini birleştirerek şunu elde ederiz.

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq (\overline{q}')^{\frac{1}{\underline{p}'}} D \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \left\| \chi_{\Omega_2} \right\|_{l_\infty(\mathbb{N})} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})}.$$

Yani, (4.78) sağlanır ve $C \leq (\overline{q}')^{\frac{1}{\underline{p}'}} D \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \left\| \chi_{\Omega_2} \right\|_{l_\infty(\mathbb{N})} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$.

Gereklilik: (4.78) sağlansın ve sabit doğal sayı N için aşağıdaki test dizisini şu şekilde seçelim:

$$x_k = \begin{cases} h_N^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}} v_k^{-\underline{p}'} & k = 1,2,\dots,N \\ h_k^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}} v_k^{-\underline{p}'} & k = N+1,\dots \end{cases}$$

(4.78)'in sol tarafı için ,

$$\|\mathcal{H}_n\|_{l^{q_n}_{w_n}(\mathbb{N})}=\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(\mathbb{N})}\geq\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$=\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N}h_N^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}}v_k^{-\underline{p}'}+\sum_{k=N+1}^{n}h_k^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}}v_k^{-\underline{p}'}\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$\geq\left\|\frac{1}{n}\left(h_N^{\underline{q}-1}+h_n^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}}\sum_{k=N+1}^{n}v_k^{-\underline{p}'}\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$=\left\|\frac{1}{n}\left(h_N^{\underline{q}-1}+h_n^{-1-\frac{\underline{q}}{\underline{p}-1}}\left(h_n^{\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}-h_N^{\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}\right)\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$=\left\|\frac{1}{n}\left(h_N^{\underline{q}-1}+h_n^{\underline{q}-1}-h_n^{-1-\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}h_N^{\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$\geq\left\|\frac{1}{n}\left(h_N^{\underline{q}-1}+h_n^{\underline{q}-1}-h_N^{-1-\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}h_N^{\frac{\underline{p}\,\underline{q}}{\underline{p}-1}}\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

$$=\left\|\frac{1}{n}\left(h_N^{\underline{q}-1}+h_n^{\underline{q}-1}-h_N^{\underline{q}-1}\right)\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}=\left\|\frac{h_n^{\underline{q}-1}}{n}\right\|_{l^{q_n}_{w_n}(n\geq N)}$$

(4.78)'in sağ tarafına da Lemma 4.5.1'i uygulayarak,

$$\|x\|_{l^{p_n}_{v_n}(\mathbb{N})}\leq\|x\|_{l^{\underline{p}}_{v_n}(\mathbb{N})}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{\underline{p}}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}=\left(\sum_{k=1}^{N}(|x_k|v_k)^{\underline{p}}+\sum_{k=N+1}^{\infty}(|x_k|v_k)^{\underline{p}}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{N}h_N^{-\underline{p}-\underline{q}\,\underline{p}'}v_k^{-\underline{p}'}+\sum_{k=N+1}^{\infty}h_k^{-\underline{p}-\underline{q}\,\underline{p}'}v_k^{-\underline{p}'}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}=\left(h_N^{-\underline{p}}+\sum_{k=N+1}^{\infty}h_k^{-\underline{p}-\underline{q}\,\underline{p}'}v_k^{-\underline{p}'}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$= \left(h_N^{-\underline{p}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{k} v_m^{-\underline{p}'} \right)^{-\frac{\underline{p}-1}{\underline{q}}-1} v_k^{-\underline{p}'} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$\leq \left(h_N^{-\underline{p}} + \frac{\underline{q}}{\underline{p}-1} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left[h_{k-1}^{-\underline{p}} - h_k^{-\underline{p}} \right] \right) \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$\leq \left(h_N^{-\underline{p}} + \frac{\underline{q}}{\underline{p}-1} h_N^{-\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} = \left(\frac{\underline{p}+\underline{q}-1}{\underline{p}-1} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} h_N^{-1}$$

elde edilir. Yani (4.78) eşitsizliğinden,

$$\left\| \frac{h_n^{\underline{q}-1}}{n} \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n \geq N)} \leq C \left(\frac{\underline{p}+\underline{q}-1}{\underline{p}-1} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} h_N^{-1}$$

olduğu ve böylece ,

$$\left(\frac{\underline{p}-1}{\underline{p}+\underline{q}-1} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} h_N \left\| \frac{h_n^{\underline{q}-1}}{n} \right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n \geq N)} \leq C$$

dir.

Bu da, (4.75)’in (4.78) ile sağlandığını gösterir ve

$$\left(\frac{\underline{p}-1}{\underline{p}+\underline{q}-1} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} D \leq C$$

dir (Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Kesikli Hardy operatörünün Duali için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.5.3. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçek sayı dizileri olsun. Öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $\|1\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} < \infty$ için $1 < \underline{p} \leq q_n \leq \overline{q} < \infty$ ve $\frac{1}{r_n} = \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{p_n}$ olsun. $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizileri olduğunu varsayalım. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})$ gerçek sayıların herhangi bir dizisi ise,

$$\|\mathcal{H}_n^*\|_{l_{w_n}^{q_n}(\mathbb{N})} \leq C.\|x\|_{l_{v_n}^{p_n}(\mathbb{N})} \tag{4.82}$$

dir. Ancak ve ancak

$$D^* = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{v_n^{-\underline{p}'}}{n^{\underline{p}'}}\right)^{\frac{1}{\underline{q}\,\underline{p}'}}\left\|\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{v_m^{-\underline{p}'}}{m^{\underline{p}'}}\right)^{\frac{1}{\underline{p}'\underline{q}'}}\right\|_{l_{w_n}^{q_n}(n\leq k)} < \infty$$

ayrıca, eğer $C > 0$ (4.82)'deki en iyi sabit ise,

$$\left(\frac{\underline{p}-1}{\underline{p}+\underline{q}-1}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} D^* \leq C \leq \left(\overline{q}'\right)^{\frac{1}{\underline{p}'}}.\left(1+\frac{\overline{p}-\underline{p}}{\overline{p}}+\left\|\chi_{\Omega_2}\right\|_{l^{\infty}(\mathbb{N})}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} D^*$$

(Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Sonuç 4.5.3.1. Tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $1 < p \leq q < \infty$ için $p_n = p$ =sabit, $q_n = q$ =sabit olsun. $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$'nin negatif olmayan sayı dizileri olduğunu varsayalım. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{v_n}^{p}(\mathbb{N})$ gerçek sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda (4.79) eşitsizliği

$$M = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{k} v_n^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{w_n}{n}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

koşuluna denktir. Ayrıca,

$$M \leq D \leq q^{\frac{1}{q}}M.$$

(Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Sonuç 4.5.3.2. Tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $1 < p \leq q < \infty$ için $p_n = p$ =sabit, $q_n = q$ =sabit olsun. $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$'nin negatif olmayan sayı dizileri olduğunu varsayalım. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{v_n}^{p}(\mathbb{N})$ gerçek sayıların herhangi bir dizisi olsun. (4.88) eşitsizliği,

$$M^* = \sup_{k\geq 1} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{v_n^{-p'}}{n^{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=1}^{k} w_n \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

ile eşdeğerdir. Ayrıca,

$$M^* \leq D^* \leq q^{\frac{1}{q}} M^*.$$

(Bandalliyev &Aliyeva, 2022).

Sonuç 4.5.3.3. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $\|1\|_{l^{r_n}(\mathbb{N})} < \infty$ için $1 < \underline{p} \leq q_n \leq \overline{q} < \infty$ ve $\frac{1}{r_n} = \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{p_n}$ olacak şekilde gerçek sayı dizileri olsun. Tüm $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha < \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\underline{q}}$ için $w_n = n^{\alpha}$ ve $v_n = 1$ olduğunu varsayalım. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{p}(\mathbb{N})$ gerçek sayıların herhangi bir dizisi olsun.
O zaman (4.78) eşitsizliği geçerlidir. $C > 0$ en iyi sabit ise ,

$$\left(\frac{\underline{p} - 1}{\underline{p} + \underline{q} - 1} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{\underline{p}'\underline{q}}} \left\| n^{\frac{\underline{q}-1}{\underline{q}\,\underline{p}'}+\alpha-1} \right\|_{l^{q_n}(n\geq k)} \leq C$$

$$\leq (\overline{q}')^{\frac{1}{\underline{p}'}}. \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \left\| \chi_{\Omega_2} \right\|_{l^{\infty}(\mathbb{N})} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \left(1 + \frac{\underline{p}}{\underline{q} - \alpha \underline{p}\,\underline{q} - 1} \right)^{\frac{1}{\underline{q}}}.$$

(Bandalliyev &Aliyeva, 2022)

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Hardy tipinden eşitsizlikler üzerine p sabitinin eşleneği olan q sabitine göre farklı durumları göz önüne alınarak çalışılmış ve bu doğrultuda Hardy operatörünün kesikli halinin sabit üstlü ağırlıklı hali ve son olarak değişken üstlü halinin sınırlılığı dolayısıyla sürekliliği araştırılmıştır. Hardy tipi eşitsizlikler, Fonksiyonel Analiz ve Harmonik Analiz deki diferansiyel denklemlerin bazı koşullar altındaki çözümlerinin varlığı ve düzgünlüğü gibi özeliklerinin incelenmesinde Hardy tipinden eşitsizliklerin kullanımı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Abbas, C., 2003, Functional Analysis, *Math. 920, (Spring,2003).*

Anderson, K. & Heining, H. P., 1983, Weighted Norm Inequaities for Certain Integral Operators, *STAM J. Math. Anal.*, 14, No:48844, 834-844.

Bandalliyev, R. A. & Aliyeva, D. R., 2022, On Boundedness and Compactness of Discrete Hardy Operator in Discrete Weighted Variable Lebesgue Spaces, *Jaurnal of Mathematical Inequalities*,16(3), 1215-1228.

Bennett, G., 1989, Some Elementery Inequalities III. Quart. *J. Math. Oxford Ser.*, 242 (1) (19991), 149-174.

Bennett, G., 1996, Factorizing the Clasical Inequalities, *Amer. Math. Soc. 120 providance RI.*

Bradley, J. S., 1978, Hardy Inequalities with Mixed Norms, *Canad. Math. Bull.*, 21(4).

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. & Ružıčka, M., 2011, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, *Lecture Notes in Math.*,Springer, Berlin.

Gao, P., 2005, A Note on Hardy-Type Inequalities, *American Mathematical Society*, 133(7), S 0002-9939(05)07964-5, 1977-1984.

Gol’dman, M.L., 2001, Sharpestimates of the Norms of Hardy-Type Operators on the Cone of Quasimonotone Functions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 232, 109-137.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Polya, G., 1934, Inequalities, *Cambridge üniv. Press*, (Second ed. 1952).

Harman, A. & Keleş, M. Ö., 2014, On the Logarithmic Regularity Conditions for the Variable Exponent Hardy Type Inequality, *International Journal of Analysis,* Doi:10.1155/2014/606012, Vol:2014, 1-5.

Harman, A., 2019, The Log-Conditions for the Variable Exponent Hardy Inequality, *Nonlinear Analysis and Differential Equations*, 7(1), 125 – 132.

Kreyszig, E., 1989, Introductory Functional Analysis with Applications, *Wiley Classics Library Edition Published.*

Kufner, A., Maligranda, L. & Persson, L.- E., 2006, The Prehistory of the Hardy Inequality, *The Mathematical Association of America*, 715-732.

Kufner, A., Maligranda, L. & Persson, L.- E., 2007, The Hardy Inequality About History and Some Related Results, *Pilson.*

Lefèvre, P., 2020a, A Short Direct Proof of the Discrete Hardy Inequality, *Arch. Math.* 114, 2019 Springer Nature Switzerland AG 0003-889X/20/020195-4, 195-198.

Lefèvre, P., 2020b, Weighted Discrete Hardy's Inequalities, *Hal-02528265*, 1-3.

Leindler, L., 1970, Generalization of Inequalities of Hardy and Littlewood, *Acta Sci. Math. 31.*, 279-285.

Liu, J., Zhang, X. & Jiang B., 2012, Some Generalizations and Improvements of Discrete Hardy's Inequality, *Computers and Mathematics with Applications 63*, 601-607.

Okpoti, C. A., Persson, L.-E. & Wedesting, A., 2006, Weight Characizations fort he Discrete Hardy Inequality with Kernel, *Journal of Inequality and Applications*, Article ID 18030, 1-14.

Soykan, Y., 2016, Fonksiyonel Analiz, *Nobel*, 3.Basım.

Tu, M. & Xia, W., 2019, Proof of Hardy Inequality, *JMEST*, Vol:6, ISSUE 10, ISSN:2458-9403, 10893-10904.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Kadriye SAVAŞ İPEKYÜZ
Uyruğu	**:**	T.C.

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Üniversite	:	Dicle Üniversitesi, Sur, Diyarbakır	2016
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016-	MEB	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

YAYINLAR