

L-ZAYIF KOMPAKT ve M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER

125976

Erdal BAYRAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

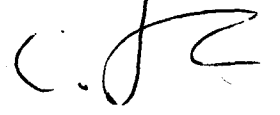
Ağustos 2002
ANKARA

Erdal BAYRAM tarafından hazırlanan -L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

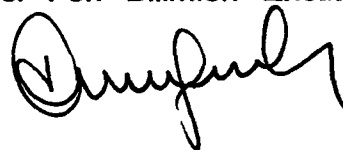


Yrd.Doç.Dr. Cevriye Tonyalı
Tez yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR 
Üye : Doç. Dr. Ahmet Ali ÖZAL 
Üye : Y. Doç. Dr. Cevriye TONYALI 
Üye :
Üye :

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR-SIRA ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER	3
2.1. Pozitif Operatörlerin Sıralı Yapısı	3
2.2. Banach Örgüleri	7
2.3. Sıra Zayıf Kompakt Operatörler	10
3. L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER	22
3.1. L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin Tanımları ve Genel Özellikleri	22
3.2. L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin Çakışma Durumları	37
3.3. Sıra Sürekli Norma Sahip Operatörler ile L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin İlişkisi	47
3.4. Yarı Kompakt Operatörler ile L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin İlişkisi	55
4. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖR OLMA DURUMLARI	64
5. L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN MODÜLLERİ	84
KAYNAKLAR	112
ÖZGEÇMİŞ	114

L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Erdal BAYRAM

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2002

ÖZET

Bu tez çalışmasında Z.L. Chen ve A.W. Wickstead 'in “L-wakly and M-weakly compact operators” adlı makalesi incelenmiştir.

Adı geçen makalede aşağıdaki sorular cevaplandırılmıştır:

1. $T:E \rightarrow F$ bir L-zayıf kompakt operatör (M-zayıf kompakt operatör) ise T 'nin modülü var mıdır?
2. $|T|$ varsa L-zayıf kompakt (M-zayıf kompakt) mıdır?
3. Regüler M-zayıf kompakt operatörler ne zaman L-zayıf kompakt (veya tersine) olurlar?

Buradaki çalışmada konuyla ilgili ön bilgiler bir araya getirilmiş, kanıtlardaki boşluklar doldurularak gerekli bütün bilgiler verilmiştir.

Bilim Kodu : 403.03.01

Anahtar Kelimeler : O-zayıf kompakt operatör, L-zayıf kompakt operatör, M-zayıf kompakt operatör

Sayfa Adedi : 114

Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Cevriye Tonyalı

L-WEAKLY AND M-WEAKLY COMPACT OPERATORS
(M.Sc. Thesis)

Erdal BAYRAM

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
August 2002

ABSTRACT

In this thesis work we have studied the paper written by Z.L. Chen–A.W. Wickstead: “L-weakly and M-weakly compact operators”. They answered the following questions :

(Q1) If $T:E \rightarrow F$ is a L-weakly compact operator (M-weakly compact), does it imply that T has a modulus?

(Q2) If the modulus $|T|$ does exist, must it be L-weakly compact (M-weakly compact) ?

(Q3) When are regular M-weakly compact operators L-weakly compact and viceversa?

In the present work, we have collected the necessary definitions, theorems and results about the subject. We have given detailed proofs of their theorems.

Science Code : 403.03.01

Key Words : O-weakly compact operator, L-weakly compact operator, M-weakly compact operator

Page Number : 114

Adviser : Yrd.Doç.Dr. Cevriye Tonyalı

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana büyük bir titizlikle her konuda yol gösteren danışmanım Yrd.Doç.Dr. Sn. Cevriye TONYALI 'ya ve bana hep destek olan aileme teşekkür ederim.



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$ x $	x elemanının modülü
x^+ ve x^-	x elemanının pozitif ve negatif kısmı
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan x_α ağı
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan x_α ağı
$\text{sol } A$	A kümesinin solid zarfı
U_E	E uzayının kapalı birim yuvarı
$\sigma(E, E')$	E uzayı üzerindeki zayıf topoloji
$x_\alpha \xrightarrow{w} x$	Zayıf topolojiye göre x elemanına yakınsayan x_α ağı
$ \sigma (E, E')$	E uzayı üzerindeki mutlak zayıf topoloji
$x_\alpha \xrightarrow{0} x$	x elemanına sıra yakınsayan x_α ağı
E^+	E uzayının pozitif kısmı
E^-	E uzayının sıra duali
E_n^-	E uzayının sıra sürekli duali
E'	E uzayının sürekli duali
E^*	E uzayının cebirsel duali
$\mathcal{L}(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı doğrusal operatörler uzayı
$L(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sürekli operatörler uzayı

$\mathcal{L}_b(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörler uzayı
$\mathcal{L}_n(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sıra sürekli operatörler uzayı
$\mathcal{L}_r(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı regüler operatörler uzayı
$E \oplus F$	E ve F Riesz uzaylarının direkt toplamı

Kısaltmalar

σ -zayıf kompakt

Sıra zayıf kompakt

w

$\sigma(E,E')$ topolojisi

w*

$\sigma(E',E)$ topolojisi

1. GİRİŞ

Bu çalışmada L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler hakkında son yıllarda yapılan çalışmalar incelenmiştir. Bu tezde özellikle Z.L. Chen ve A.W. Wickstead tarafından 1999 yılında yapılan "L-weakly and M-weakly compact operators" isimli çalışmada ulaşılan yeni katkılara yer verilmiştir [11].

İkinci bölümde Riesz uzaylarının sıra yapısı, Banach örgüleri, sıra zayıf kompakt operatörler gibi bilinen bazı tanımlar teoremler bazen kısaca gerektiği yerde geniş olarak ele alınmıştır. Daha geniş bilgiler için [6], [17], [19] kaynaklarına bakılabilir.

Üçüncü bölümün birinci kesiminde L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin tanımları ve genel özellikleri geniş biçimde verilmiştir. L-zayıf kompakt operatörler M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Aynı biçimde M-zayıf kompakt operatörler de L-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. P.G. Dodds ve D.H. Fremlin 1979 yılında E uzayının norm sürekli duali E' ve F üzerindeki normlar sıra sürekli ise $T:E \rightarrow F$ regüler operatörlerin L-zayıf kompakt olması ile M-zayıf kompakt olmasının çakıştığını göstermiştir [13]. Daha sonra Z.L. Chen ve A.W. Wickstead 1999 yılında, üzerinde tanımlı olan bütün regüler M-zayıf kompakt (L-zayıf kompakt) operatörleri L-zayıf kompakt (M-zayıf kompakt) yapan Banach örgü çiftlerini karakterize etmiştir [11]. Böylece Dodds-Fremlin'in teoreminin tersinin bir ek koşulla doğru olduğu gösterilmiştir. Bu bölümün ikinci kesiminde bu açıklamalar yer almaktadır. Üçüncü kesimde sıra sürekli norma sahip operatörlerin L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerle olan ilişkisi aktarıldı. Dördüncü kesimde ise yarı kompakt operatörler ile L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin ilişkisi sunulmuştur [6], [7]. Yarı kompakt operatörlerin sınıfı A.C. Zaanen tarafından 1983 yılında tanıtılmıştır [19].

Dördüncü bölümde zayıf kompakt operatörler ile L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin ilişkisi verilmiştir. P.G. Dodds 1975 yılında yaptığı bir

alışmasında o-zayıf kompakt operatörü karakterize etmiştir [12]. Her zayıf kompakt operatör o-zayıf kompakttır. Her L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörde zayıf kompakttır. Ancak zayıf kompakt operatörler L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Bazı koşullar altında tersinin de doğru olacağını Z.L. Chen ve A.W. Wickstead 1999 yılında ortaya koymuşlardır [11].

Son bölümde ise L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin modüllerinin varolup olmadığı ve modülü varsa modüllerinin de L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt olabilme koşulları inceleniyor [11].



2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR - SIRA ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar ve bazı sonuçlar verilmiş ve sıra zayıf kompakt operatörler sınıfı tanıtılmıştır.

2.1. Pozitif Operatörlerin Sıralı Yapısı

Tanım 2.1.1 : E gerçel vektör uzayı üzerinde " $\leq$ " bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y \in E$ olmak üzere,

- (i) Her $z \in E$ için $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
- (ii) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

sağlanıyorsa, E uzayına sıralı vektör uzayı denir.

E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ özelliğini sağlayan x elemanına pozitif denir ve E 'nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile göstereceğiz.

X ve Y gerçel vektör uzayları olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümüne operatör denir. $\forall x \in X^+$ için $Tx \in Y^+$ sağlanıyorsa $T: X \rightarrow Y$ operatörüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ (veya $0 \leq T$) ile gösterilir. $T: X \rightarrow Y$ operatörü pozitif ise $x, y \in X$ için $x \leq y$ iken $Tx \leq Ty$ sağlanır.

Tanım 2.1.2 : E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y := \sup \{x, y\} \in E$ ve $x \wedge y := \inf \{x, y\} \in E$ ise E uzayına Riesz uzayı denir. E Riesz uzayı ve $G \subset E$ alt vektör uzayı olmak üzere $x, y \in G$ iken $x \vee y \in G$ ise G 'ye Riesz alt uzayı denir.

Riesz uzaylarının tipik örneği bir X kümesi üzerindeki gerçel değerli fonksiyonların oluşturduğu gerçel vektör uzayıdır. Bunu E ile gösterirsek her

bir $f, g \in E$ ve $x \in X$ için,

$$f \vee g(x) := \max \{f(x), g(x)\} \text{ ve } f \wedge g(x) := \min \{f(x), g(x)\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar E 'ye aittirler. Buna göre E gerçel vektör uzayı noktasal sıralamaya göre bir Riesz uzayı olur. ($f \geq g \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in X$)

Örnek 2.1.3 :

- (a) R^X , X üzerindeki gerçel değerli fonksiyonların uzayı.
- (b) $C(X)$, X topolojik uzayı üzerindeki gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.
- (c) $C_b(X)$, X topolojik uzayı üzerindeki sınırlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.
- (d) $\ell_\infty(X)$, X kümesi üzerindeki tüm sınırlı dizilerin uzayı.
- (e) ℓ_p ($1 \leq p < \infty$), $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ şartını sağlayan gerçel dizilerin uzayı.
- (f) $L_p(\mu)$ ($0 < p < \infty$), (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli μ -ölçülebilir ve $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı.
- (g) $L_\infty(\mu)$, (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli μ -ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların uzayı.

Tanım 2.1.4 : Her $x \in E$ için $x^+ := x \vee 0$ elemanına x 'in pozitif kısmı, $x^- := -x \vee 0$ elemanına x 'in negatif kısmı ve $|x| := x \vee (-x)$ elemanına x 'in modülü denir. $\forall x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ ve $|x| = x^+ + x^-$ eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.5 : Her $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ve y elemanları birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. $A \subset E$ için $A^\perp := \{x \in E : x \perp y, \forall y \in A\}$ kümesine

A 'nın dik tümleyeni denir. Bu tanıma göre birbirine dik elemanlardan oluşan diziye dik dizi denir. ($n \neq m$ iken $x_n \perp x_m$ ise $(x_n) \subset E$ dik dizi)

Tanım 2.1.6 : E Riesz uzayında (x_α) bir ağ olmak üzere $\alpha \geq \beta$ iken $x_\alpha \geq x_\beta$ sağlanıyorsa (x_α) azalandır denir ve $(x_\alpha) \downarrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha) \downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ ise $(x_\alpha) \downarrow x$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\alpha \geq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ sağlanıyorsa (x_α) artandır denir ve $(x_\alpha) \uparrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha) \uparrow$ ve $\sup\{x_\alpha\} = x$ ise $(x_\alpha) \uparrow x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 : Her bir $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$ sağlanıyorsa E Riesz uzayına Arşimedyan Riesz uzayı denir.

Tanım 2.1.8 : E Riesz uzayı ve $x \leq y$ olmak üzere $x, y \in E$ için $[x, y] := \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine sıralı aralık denir. $A \subset E$ altkümesi bir sıralı aralık tarafından kapsanıyorsa A 'ya sıra sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.9 : E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \rightarrow F$ operatörü E 'nin her sıra sınırlı kümesini F 'nin sıra sınırlı kümelerine taşıyorsa T operatörüne sıra sınırlı operatör denir. E 'den F 'ye tüm sıra sınırlı operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_b(E, F)$ ile gösterilir. $T, S \in \mathcal{L}_b(E, F)$ için " $T \leq S : \Leftrightarrow S - T \geq 0$ " sıralamasına göre $\mathcal{L}_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır. Fakat $\mathcal{L}_b(E, F)$ her zaman Riesz uzayı olmak zorunda değildir. Her pozitif operatör sıra sınırlı operatördür.

Tanım 2.1.10 : Eğer her sıra sınırlı kümenin E içinde bir supremumu ve infimumu varsa E uzayına Dedekind tam uzay denir. Benzer olarak sıra sınırlı sayılabilir her kümenin E içinde bir supremumu ve infimumu varsa E uzayına σ -Dedekind tam uzay denir.

Tanım 2.1.11 : Bir $T \in \mathcal{L}(E, F)$ operatörü $R \geq 0$ ve $S \geq 0$ olmak üzere $T = R - S$

yazılabiliyorsa T operatörüne regüler operatör denir. E uzayından F uzayına regüler operatörlerin sınıfı $\mathcal{L}_r(E, F)$ şeklinde gösterilir. $\mathcal{L}_r(E, F) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ kapsamalarının sağlandığı açıktır.

Teorem 2.1.12 : E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam uzay ise $\mathcal{L}_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzaydır ve $\mathcal{L}_b(E, F)$ uzayında örgü operasyonları $S, T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ ve $x \in E^+$ olmak üzere,

$$S \vee T(x) := \sup \{ S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x \}$$

$$S \wedge T(x) := \inf \{ S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x \}$$

şeklindedir. Bu durumda $\mathcal{L}_r(E, F) = \mathcal{L}_b(E, F)$ dir.

İspat : [6], Teorem 1.13.

Tanım 2.1.13 : E Riesz uzayı ve $I \subset E$ alt vektör uzayı olsun. $x \in I$ olmak üzere $|y| \leq |x|$ koşulunu sağlayan her bir $y \in E$ için $y \in I$ oluyorsa I 'ya sıralı ideal denir. Bir $x \in E$ elemanının ürettiği esas ideal $I_x = \{ y \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, |y| \leq \lambda |x| \}$ şeklindedir.

(x_α) , E uzayında bir ağ olmak üzere $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ koşulunu sağlayacak biçimde E içinde (y_α) ağı varsa (x_α) ağı $x \in E$ elemanına sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ şeklinde gösterilir. E uzayının bir alt kümesi A olsun. $(x_\alpha) \subset A$ ağı için $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa A kümesine sıra kapalıdır denir. Sıra kapalı ideale de band denir. Bir $x \in E$ elemanının ürettiği esas band $B_x = \{ y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$ şeklindedir.

Tanım 2.1.14 : E Riesz uzayı ve E içinde $e > 0$ biçimindeki bir elemanı alalım.

(a) Eğer e ile üretilen esas ideal E 'ye eşit ise, yani $\forall x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde $0 < \lambda$ sayısı bulunabiliyorsa $e \in E^+$ elemanına E 'nin sıralı birimi denir.

(b) Eğer e tarafından üretilen esas band E uzayına eşit ise, yani $\forall x \in E$ için $\{|x| \wedge ne\}^\uparrow |x|$ ise $e \in E^+$ elemanına E uzayının zayıf sıra birimi denir.

2.2. Banach Örgüleri

Tanım 2.2.1 : E Riesz uzayı ve $|x| \leq |y|$ biçimindeki her $x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ koşulunu sağlayan E üzerinde tanımlanan bir $\|\cdot\|$ normuna örgü normu denir. E üzerinde tanımlanan norm örgü normu ise $(E, \|\cdot\|)$ uzayına normlu Riesz uzayı denir. Eğer E normlu Riesz uzayı üzerindeki norma göre tam ise E uzayına Banach örgüsü denir.

Her Banach örgüsü Arşimedian Riesz uzayıdır ve bir Riesz uzayını Banach örgüsü yapan tüm normlar denktir.

Tanım 2.2.2 : E Banach örgüsü üzerindeki norm, M-norm ise yani; $x, y \in E$ ve $x \wedge y = 0$ iken $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ sağlanıyor ise E uzayına AM-uzay denir.

Eğer E Banach örgüsü üzerindeki norm, L-norm ise yani; $x, y \in E$ ve $x \wedge y = 0$ iken $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ sağlanıyorsa E uzayına AL-uzay denir.

Teorem 2.2.3 : E 'nin AM-uzay (AL-uzay) olması için gerekli ve yeterli koşul E 'nin norm sürekli duali E' uzayının AL-uzay (AM-uzay) olmasıdır.

İspat : [6],Teorem 12.22.

E uzayı sıra birime sahipse tekrar normlandırılarak AM-uzay haline gelir ([6],Teorem 12.20). E Banach örgüsü olmak üzere E uzayının birimli AM-uzay olması için gerekli ve yeterli koşul bir K kompakt Hausdorff uzayı için E uzayının $C(K)$ uzayına örgü izometrik olmasıdır. E uzayının AM-uzay olması için gerekli ve yeterli koşul $C(K)$ 'nın bir alt uzayına örgü izometrik olmasıdır ([6],Teorem 12.28).

Tanım 2.2.4 : Bir Riesz uzayı üzerinde bir $\|.\|$ örgü normu tanımlansın. $x_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde her $\{x_\alpha\}$ ağı için $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ sağlanıyorsa $\|.\|$ normuna sıra sürekli norm denir. Bunu sağlayan normlu Riesz uzayına da sıra sürekli norma sahip normlu Riesz uzay denir.

Örnek olarak $L^p(\mu)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayları sıra sürekli norma sahiptir. $C[0,1]$, $L^\infty(\mu)$ ve ℓ_∞ sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleridir.

Teorem 2.2.5 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E uzayı sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) $0 \leq x_n \leq x$ koşulunu sağlayan (x_n) monoton dizisi norm Cauchy dizisidir.
- (3) E uzayı Dedekind tamdır ve $x_n \downarrow 0$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ sağlanır.

(4) Sıra sınırlı her dik dizi sıfıra norm yakınsaktır.

(5) E uzayı E'' içinde bir idealdir.

(6) E uzayının her sıra aralığı zayıf kompaktır.

Ayrıca E sıra sürekli norma sahip Riesz uzayı ise E uzayının norm tamlamasıda sıra sürekli norma sahiptir.

İspat : [6],Teorem 12.9, Teorem 12.10, Teorem 12.12.

Tanım 2.2.6 : E Banach örgüsü olmak üzere E 'nin her norm sınırlı artan dizisi E uzayı içinde normda yakınsak ise E uzayına KB uzayı denir.

KB uzaylarının sıra sürekli norma sahip oldukları açıktır. Buna karşılık tersi doğru değildir. Örneğin c_0 sıra sürekli norma sahip olmasına karşın KB uzay değildir. Yansımali uzaylar ve AL-uzaylar KB uzay örnekleridir.

Teorem 2.2.7 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E uzayı yansımali dır.
- (2) E ve E' uzayları KB uzaylardır.
- (3) E uzayının ℓ_1 ve c_0 uzaylarına örgü izomorf olan alt uzayı yoktur.
- (4) E uzayının ℓ_1 ve c_0 uzaylarına örgü izomorf olan alt örgüsü yoktur.

İspat : [17],Teorem 2.4.15.

Teorem 2.2.8 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E' sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) E uzayının her bir (x_n) norm sınırlı dik dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ sağlanır.
- (3) E' uzayı KB uzaydır.
- (4) E' uzayının c_0 uzayına örgü izomorf olan alt örgüsü yoktur.
- (5) E' uzayının ℓ_∞ uzayına örgü izomorf olan alt örgüsü yoktur.

İspat : [17],Teorem 2.4.14.

Tanım 2.2.9 : (a) X ve Y normlu vektör uzayları ve $T:X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer $\overline{T(U_X)}$ bir norm kompakt küme ise T operatörüne kompakt operatör denir. Ya da denk olarak $\forall (x_n) \subset U_X$ dizisi için (Tx_n) dizisi Y içinde norm yakınsak bir alt diziye sahip ise T operatörü kompakttır.

(b) X ve Y Banach uzayları $T:X \rightarrow Y$ operatör olsun. Eğer $\overline{T(U_X)}$ zayıf kompakt küme ise T operatörüne zayıf kompakt operatör denir. Diğer bir deyişle $\forall (x_n) \subset U_X$ dizisi için (Tx_n) dizisi Y içinde zayıf yakınsak bir alt diziye sahip ise T operatörü zayıf kompakttır.

Her kompakt operatörün zayıf kompakt operatör olacağı açıktır ve her zayıf kompakt operatör sürekli. Zayıf kompakt operatörlerin eşlek operatörleri de zayıf kompakttır. Benzer şekilde kompakt operatörlerin eşlek operatörleri de kompakttır.

2.3. Sıra Zayıf Kompakt Operatörler

Banach örgülerinin en önemli alt kümelerinden birisi sıralı aralıklardır. Bu yüzden sıralı aralığı relatif zayıf kompakt kümelere resmeden operatörler önemlidir. Bu bölümde Dodds 'un tanımladığı sıra zayıf kompakt operatörlerle ilgili sonuçlar verilecektir [12]. Öncelikle sıkça kullanacağımız bazı teoremleri vereceğiz.

Teorem 2.3.1 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T : E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. $x \in E^+$ için $T[0,x]$ kümesinin relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \{x_n\} \subset [0,x]$ dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat : $x \in E^+$ elemanın ürettiği ideal $A = \{y \in E : \lambda > 0, |y| \leq \lambda x\}$ kümesi üzerinde $\|y\|_\infty = \inf \{\lambda \geq 0 : |y| \leq \lambda x\}$ bir norm tanımlar ve A bu norma göre bir AM-uzayı olur ([6], Teorem 12.20). $[-x,x]$ sıra aralığı ise A 'nın kapalı birim yuvarıdır. $[-x,x] = -x + 2[0,x]$ olduğundan $T[-x,x] = -Tx + T[0,x]$ dir. $T[0,x]$ relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $T[-x,x]$ kümesinin relatif zayıf kompakt olmasıdır. Dolayısıyla $T[0,x]$ kümesinin relatif zayıf kompaktlığı $T:A \rightarrow X$ kısıtlanmış operatörünün zayıf kompakt olmasına denktir.

$T[0,x] \subset X$ relatif zayıf kompakt $\Leftrightarrow T : A \rightarrow X$ zayıf kompakt operatördür.
 $\Leftrightarrow T' : X' \rightarrow A'$ zayıf kompakt operatördür.

$T' : X' \rightarrow A'$ zayıf kompakt operatör ise $\overline{T'(U_{X'})}$ bir zayıf kompakt kümedir. A birimli AM-uzay olduğundan, $\overline{T'(U_{X'})}$ kümesinin zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $[0,x]$ kümesine ait her dik dizinin $T'(U_{X'})$ kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olmasıdır ([6], Teorem 13.10). $(x_n) \subset [0,x]$ bir dik dizi olsun. Bu durumda verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0$ ve $\forall x' \in U_{X'}$ için $|T'x'(x_n)| < \varepsilon$ sağlanır. O halde $\forall n > n_0$ ve $\forall x' \in U_{X'}$ için $|x'(Tx_n)| < \varepsilon$ dir. Yani $\forall n > n_0$ için $\sup \{|x'(Tx_n)| : x' \in U_{X'}\} < \varepsilon$ dir. Böylece $\forall n > n_0$ için $\|Tx_n\| < \varepsilon$ bulunur, dolayısıyla $\lim \|Tx_n\| = 0$ dir.

Aşağıdaki sonuç bir sıralı aralığın zayıf kompaktlığının dik diziler yardımıyla karakterize edilebilmesi ile ilgilidir.

Sonuç 2.3.2 : E bir Banach örgüsü ve $x \in E^+$ olsun. $[0,x]$ sıralı aralığının zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul her $(x_n) \subseteq [0,x]$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat : $I : E \rightarrow E$ özdeşlik operatörünü alalım. I sürekli bir operatördür. Teorem 2.3.1 gereği $\forall x \in E^+$ için $I[0,x] = [0,x]$ relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall (x_n) \subset [0,x]$ dik dizi için $\lim \|Ix_n\| = \lim \|x_n\| = 0$ olmasıdır. Ayrıca biz her sıra aralığın zayıf kapalı olduğunu biliyoruz..

Sınırlı bir kümenin relatif zayıf kompaktlığının dik diziler yardımıyla betimlenmesi P.Meyer-Nieberg tarafından verilmiştir [15].

Teorem 2.3.3 : E Banach örgüsü ve A, E uzayının norm sınırlı bir alt kümesi olsun. $\text{sol}(A)$ 'ya ait her dik dizi sifıra normda yakınsak ise $\text{sol}(A)$ relatif zayıf kompakt bir kümedir.

[$\forall (x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0 \Rightarrow \overline{\text{sol}(A)}$ zayıf kompakttır.]

İspat : $\text{sol}(A) := \{x \in E : \exists y \in A \ni |x| \leq |y|\}$ olduğunu biliyoruz. A norm sınırlı ve $\forall (x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ olsun. $p(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde bir yarı norm tanımlar. $I: E \rightarrow E$ özdeşlik dönüşümü ve $\forall (x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim p(Ix_n) = \lim p(x_n) = \lim \|x_n\| = 0$ olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için $\|I(|x| - u)^+\| = \|(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ vardır (Bu elemanı A ile üretilmiş idealde seçebiliriz) ([6], Teorem 13.5). $x \in \text{sol}(A)$ ise $|x| \leq |y|$ olacak şekilde $\exists y \in A$ vardır. E uzayının her bir y elemanı için $|y| = |y| \wedge u + (|y| - u)^+$ yazabildiğimize göre $|x| \leq |y| \wedge u + (|y| - u)^+$ sağlanır. Riesz ayrışım teoreminden $x = x_1 + x_2$ ve $|x_1| \leq |y| \wedge u$, $|x_2| \leq (|y| - u)^+$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in E$ vardır. Dolayısıyla $x_1 \in [-u, u]$ ve $|x_2| \leq (|y| - u)^+$ olduğundan $\|x_2\| \leq \|(|y| - u)^+\| < \varepsilon$ çıkar. Böylece $\left\| \frac{1}{\varepsilon} x_2 \right\| < 1$ ve $\frac{1}{\varepsilon} x_2 \in U_E$, yani $x_2 \in \varepsilon U_E$ olur. Dolayısıyla $x = x_1 + x_2 \in [-u, u] + \varepsilon U_E$ olduğundan $\text{sol}(A) \subseteq [-u, u] + \varepsilon U_E$ dir. u, A ile üretilmiş idealde ise $0 \leq u \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |u_i|$ olacak biçimde $u_1, \dots, u_n \in A$ ve $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vardır. $z \in [0, u]$ ise $z = |z| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |u_i|$ sağlandığından Riesz ayrışım teoremi ile $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $0 \leq z_i \leq \alpha_i |u_i|$ olacak şekilde $0 \leq z_1, z_2, \dots, z_n \in E$ vardır ve $z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için ;

$$z_i \in [0, \alpha_i |u_i|] \Rightarrow z \in \alpha_1 [0, |u_1|] + \dots + \alpha_n [0, |u_n|]$$

$$\Rightarrow [0, u] \subseteq \alpha_1 [0, |u_1|] + \dots + \alpha_n [0, |u_n|] \quad \dots (*)$$

sağlanır. $(\psi_n) \subseteq [0, |u_i|]$ keyfi bir dik dizi olsun. $|\psi_n| \leq |u_i|$, $u_i \in A$ ve A solid küme olduğundan $(\psi_n) \subset \text{sol}(A)$ dir. Böylece hipotezden dolayı $\lim \|\psi_n\| = 0$ olur. O halde Sonuç 2.3.2 gereği $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için $[0, |u_i|]$ aralığı zayıf kompaktır. O halde (*) 'dan $[0, u]$ sıralı aralığı zayıf kompaktır. $[-u, u] = -u + 2[0, u]$ eşitliğinden $[-u, u]$ zayıf kompaktır. $\forall \varepsilon > 0$ için $\text{sol}(A) \subseteq [-u, u] + \varepsilon U$ koşulunu sağlayan bir $[-u, u]$ zayıf kompakt kümesi bulunabileceğinden $\text{sol}(A)$, E 'nin relatif zayıf kompakt alt kümesidir ([6], Teorem 10.17).

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.3.3 'ün tersinin AL-uzaylarında doğru olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.4 : E AL-uzay ve A , E 'nin norm sınırlı alt kümesi olsun. A 'nın relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall (x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat : $(\Leftarrow) \forall (x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ ise Teorem 2.3.3 'den $\text{sol}(A)$ relatif zayıf kompaktır. $A \subset \text{sol}(A)$ kapsamasından A relatif zayıf kompaktır.

$(\Rightarrow)$ A relatif zayıf kompakt küme ve $(x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizi olsun. A relatif zayıf kompakt ise $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur ([6], Teorem 13.3). E AL-uzay ise E' birimli AM-uzaydır. $(x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizi ise $(|x_n|) \subset \text{sol}(A)$ de dik dizidir ve $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ sağlanır. E' uzayının birimi e' olmak üzere $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ olduğundan $e'(|x_n|) \rightarrow 0$ dir. $x \in E$ olsun. $|x| \in E^+$ dir ve $|x'| \leq e'$ ise

$|x'|(|x|) \leq e'(|x|)$ sağlanır. Buradan $\sup\{|x'|(|x|)| : x' \in [-e', e']\} \leq e'(|x|)$ ve $\|x\| = \| |x| \| \leq e'(|x|)$ elde ederiz. $e' \in [-e', e']$ ve $e'(|x|) \in \{x'(|x|) : x' \in [-e', e']\}$ olduğundan $e'(|x|) \leq \sup\{x'(|x|) : x' \in [-e', e']\}$ dır. Böylece $e'(|x|) \leq \|x\| = \|x\|$ buluruz. O halde $\|x\| = e'(|x|)$ eşitliği vardır ve $(x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = \lim e'(x_n) = 0$ elde edilir.

Tanım 2.3.5 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. Her bir $x \in E^+$ için $T[0, x]$, X uzayının relatif zayıf kompakt alt kümesi ise T operatörüne sıra zayıf kompakt (o-zayıf kompakt) operatör denir.

Sıra zayıf kompakt operatörler ilk defa P.G.Dodds tarafından tanımlanmıştır ve aşağıdaki şekilde karakterize etmiştir [12].

Teorem 2.3.6 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir :

- (1) T operatörü o-zayıf kompakttır.
- (2) Her $(x_n) \subset E$ sıra sınırlı dik dizi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ dir.
- (3) Her bir $x \in E^+$ ve $\varepsilon > 0$ için $|y| \leq x$ ve $x'(|y|) < \delta$ iken $\|Ty\| < \varepsilon$ olacak şekilde $0 \leq x' \in E'$ ve $0 < \delta$ sayısı vardır.
- (4) E'' içinde E tarafından üretilmiş ideal A olmak üzere $T''(A) \subseteq X$ sağlanır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ T operatörü o-zayıf kompakt operatör ve $(x_n) \subset E$ bir sıra sınırlı dik dizi olsun. $|x_n| \leq x$ olacak biçimde $x \in E^+$ vardır ve $(x_n) \subset [-x, x]$ sağlanır. $[-x, x] = -x + 2[0, x]$ olduğundan $T[-x, x] = -Tx + 2T[0, x]$ eşitliğinden $T[0, x]$ relatif zayıf kompakt ise $T[-x, x]$, X uzayının relatif zayıf kompakt alt kümesidir.

E içinde x tarafından üretilen ideal I_x , birimli AM-uzaydır ve kapalı birim yuvarı ise $[-x, x]$ dir.

$T[-x, x]$ relatif zayıf kompakttır $\Leftrightarrow T: I_x \rightarrow X$ operatörü zayıf kompakttır.

$\Leftrightarrow T': X' \rightarrow I'_x$ operatörü zayıf kompakttır.

$T': X' \rightarrow I'_x$ zayıf kompakt operatör ise $\overline{T'(U_{X'})}$, I'_x içinde zayıf kompakt kümedir. $U_{X'}$ norm sınırlı küme ve T' sürekli bir operatör olduğundan $\forall (y_n) \subset I_x$ bir norm sınırlı dik dizisi $T'(U_{X'})$ kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır ([6], Teorem 13.10). $(x_n) \subset [-x, x]$ dik dizisi için $|x_n| \leq |x|$ olduğundan $\|x_n\| \leq \|x\|$ dir. Dolayısıyla (x_n) dizisi norm sınırlıdır. O halde her bir $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x' \in U_{X'}$ için $|T'x'(x_n)| = |x'(Tx_n)| < \varepsilon$ dir, böylece $\|Tx_n\| \leq \varepsilon$ olur. Dolayısıyla E uzayının keyfi sıra sınırlı (x_n) dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ elde edilir.

(2 $\Rightarrow$ 3) Bir $\varepsilon > 0$ sayısını ve herhangi bir $x \in E^+$ elemanını seçelim. Hipotezden $\forall (x_n) \subset [0, x]$ dik dizisi $T'(U_{X'})$ kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır. Her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall f \in U_{X'}$ için $(|T'f| - x')^+(x) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde $0 \leq x' \in E'$ vardır ([6], Teorem 13.9). $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ olsun ve $x'(|y|) < \delta$ olacak şekilde $|y| \leq x$ alalım. O halde her bir $f \in U_{X'}$ için ;

$$\begin{aligned} |f(Ty)| &= |T'f(y)| \leq |T'f|(|y|) = (|T'f| - x')^+(|y|) + x' \wedge |T'f|(|y|) \\ &\leq (|T'f| - x')^+(x) + x'(|y|) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall f \in U_{X'}$ için $|f(Ty)| < \frac{2}{3}\varepsilon$ olduğundan $\sup\{|f(Ty)| : f \in U_{X'}\} \leq \frac{2}{3}\varepsilon$, yani $\|Ty\| < \varepsilon$ elde edilir.

(3 $\Rightarrow$ 4) E'' içinde E tarafından üretilmiş ideal A olsun.

$$\begin{aligned}\Phi: E &\longrightarrow E^{\sim\sim} \\ y &\longrightarrow \hat{y}: E^{\sim} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \hat{y}(f) = f(y)\end{aligned}$$

$\hat{y}$, $E^{\sim}$ üzerinde sıra sınırlı ve sıra sürekli olduğundan $y \equiv \hat{y} \in (E^{\sim})_n^{\sim}$ dir. Ogasawara teoremine göre $\mathcal{L}_n(E^{\sim}, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}_b(E^{\sim}, \mathbb{R}) = E^{\sim\sim} = E''$ içinde bir banddır ([6], Teorem 4.4). Dolayısıyla $(E^{\sim})_n^{\sim}$ solid kümedir. $y'' \in A$ ise $0 \leq y'' \leq y$ koşulunu sağlayan bir $y \in E$ vardır. E Banach örgüsü olduğundan $E' = E^{\sim}$ dir ([6], Teorem 12.5). $(E^{\sim})_n^{\sim}$ solid küme olduğundan da $y'' \in (E^{\sim})_n^{\sim} = (E')_n^{\sim}$ bulunur. Yani $A \subset (E')_n^{\sim}$ dir. E' uzayı da bir Banach örgüsü olacağından $(E')' = E^{\sim\sim}$ sağlanır. $0 \leq x'' \in A$ ise $0 \leq x'' \leq x$ olacak biçimde bir $x \in E^+$ vardır. $A \subset (E')_n^{\sim}$ olduğundan E kümesi A içinde $|\sigma|(E'', E')$ -yoğundur ([6], Teorem 11.16). Dolayısıyla $\exists (u_\alpha) \subset E$ ağı için $u_\alpha \xrightarrow{|\sigma|} x''$ sağlanır ve

$$|u_\alpha - x''| |x'| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0, \quad \forall x' \in E' \quad \dots (*)$$

olur. $\mathcal{L}(E^{\sim}, \mathbb{R})$ Dedekind tam Riesz uzay ve $||u_\alpha| - |x''|| \leq |u_\alpha - x''|$ eşitsizliğinden $\forall x' \in E'$ için $0 \leq ||u_\alpha| - |x''|| |x'| \leq |u_\alpha - x''| |x'|$ sağlanır ve $|u_\alpha - x''| |x'| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ olduğundan $||u_\alpha| - |x''|| |x'| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ dir. Dolayısıyla $|u_\alpha| - x'' \xrightarrow{|\sigma|} 0$ elde ederiz. $x_\alpha = |u_\alpha| \wedge x''$ şeklinde tanımlanırsa

$0 \leq x_\alpha \leq x'' \leq x$ dır, dolayısıyla $(x_\alpha) \subset [0, x]$ olur.

$$|x_\alpha - x''| = |u_\alpha \wedge x'' - x''| = |u_\alpha \wedge x'' - x'' \wedge x''| \leq |u_\alpha - x''| \leq |u_\alpha - x''|$$

eşitsizliğinden $\forall x' \in E'$ için $|x_\alpha - x''||x'| \leq |u_\alpha - x''||x'|$ olur ve $|u_\alpha - x''||x'| \xrightarrow{IR} 0$ sağlandığına göre

$$|x_\alpha - x''||x'| \xrightarrow{IR} 0 \Rightarrow x_\alpha - x'' \xrightarrow{|\sigma|} 0$$

elde ederiz (aynı zamanda $|x_\alpha - x''| \xrightarrow{|\sigma|} 0$). Dolayısıyla $\sigma(E'', E') \subset |\sigma|(E'', E')$ olduğundan

$$x_\alpha - x'' \xrightarrow{w^*} 0 \quad \dots (1)$$

sağlanır.

İddia : $T'' : E'' \rightarrow X''$ operatörü w^* -süreklidir. $x''_\alpha \xrightarrow{\sigma(E'', E')} 0$ olduğundan

$\forall x' \in E'$ için $\langle x', x''_\alpha \rangle \xrightarrow{IR} 0$ dır. Her $f \in X'$ için $\langle f, T'' x''_\alpha \rangle = \langle T' f, x''_\alpha \rangle$ ve

$\langle T' f, x''_\alpha \rangle \xrightarrow{IR} 0$ olacağından $\langle f, T'' x''_\alpha \rangle \xrightarrow{IR} 0$ dır, yani

$T'' x''_\alpha \xrightarrow{\sigma(X'', X')} 0$ dır. Dolayısıyla T'' operatörü $\sigma(E'', E')$ -süreklidir. (1) 'den

devam edersek $T x_\alpha \xrightarrow{w^*} T'' x''$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ olsun. Hipotezden $|y| \leq x$ ve

$x'(|y|) < 2\delta$ iken $\|Ty\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $0 \leq x' \in E'$ seçelim.

$|x_\alpha - x''| \xrightarrow{\sigma(E'', E')} 0$ olduğundan $\delta > 0$ sayısına karşılık

$\exists \alpha_0 \in \Gamma \ni \forall \alpha \geq \alpha_0$ ve $\forall x' \in X'$ için $\langle x', |x'' - x_\alpha| \rangle < \delta$ olacak şekilde ki bir

α_0 damgasını sabitleyelim. $|x_\alpha - x_\beta| = x_\alpha \vee x_\beta - x_\alpha \wedge x_\beta \leq x_\alpha \vee x_\beta \leq x$

olduğundan her $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ için ,

$$\begin{aligned} \langle x', |x_\alpha - x_\beta| \rangle &= \langle x', |x_\alpha - x'' + x'' - x_\beta| \rangle \\ &= \langle x', |x_\alpha - x''| + |x'' - x_\beta| \rangle \\ &\leq \langle x', |x_\alpha - x''| \rangle + \langle x', |x'' - x_\beta| \rangle \\ &\leq \delta + \delta = 2\delta \end{aligned}$$

sağlanır. $\beta \geq \alpha_0$ sabitlersek ve $g \in U_{X'}$ için $\lim_{\alpha \geq \alpha_0} g(T''x'' - Tx_\beta) = g(T''x'' - Tx_\beta)$

ve $\lim_{\alpha \geq \alpha_0} g(Tx_\alpha - T''x'') = 0$ dir. O halde $|x_\alpha - x_\beta| \leq x$ ve $x'(|x_\alpha - x_\beta|) < 2\delta$

olduğundan $g \in U_{X'}$ için,

$$\begin{aligned} |g(T''x'' - Tx_\beta)| &= \left| \lim_{\alpha \geq \alpha_0} g(T(x_\alpha - x_\beta)) \right| \\ &= \lim_{\alpha \geq \alpha_0} |g(T(x_\alpha - x_\beta))| \\ &\leq \lim_{\alpha \geq \alpha_0} \sup \|T(x_\alpha - x_\beta)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Her bir $\beta \geq \alpha_0$ için $\|T''x'' - Tx_\beta\| < \varepsilon$ çıkar. Bu ise $T''x'' \in \overline{X} \subset X''$ olduğunu gösterir. $x'' \in A$ keyfi seçildiğinden $T''(A) \subseteq X$ olur.

(4 $\Rightarrow$ 1) $x \in E^+$ seçelim. İddia ediyoruz ki $[0, x] = \{x'' \in E'' : 0 \leq x'' \leq x\}$ kümesi

E'' içinde w^* -kompakt kümedir. $x'' \in \overline{[0, x]}$ ise $x''_n \xrightarrow{w^*} x''$ olacak biçimde

$(x''_n) \subset [0, x]$ dizisi vardır. $\forall g \in E'_+$ için $0 = \lim (x''_n - x'')(g) \leq (x - x'')(g)$ sağlandığından $(x - x'')(g) = (x - x''_n + x''_n - x'')(g) \geq (x''_n - x'')(g) \geq 0$ dir.

Dolayısıyla $x'' \in [0, x]$ dir. O halde $[0, x]$ kapalıdır. E'' Banach örgüsü ise

$0 \leq x'' \leq x$ olduğundan $\|x''\| \leq \|x\|$ sağlanacağından $[0, x]$ sınırlıdır.

Dolayısıyla $[0, x]$, E'' içinde w^* -kompakt kümedir. $T'' : E'' \rightarrow X''$ operatörü

w^* -sürekli olduğundan $T''([0, x]) \subset X''$ kümesi $\sigma(X'', X')$ -kompakttır. Hipotezden $T''([0, x]) \subseteq X$ kümesi $\sigma(X, X')$ -kompakttır. $T[0, x] = T''[0, x] \subseteq T''[0, x]$ olduğundan $T[0, x]$ relatif zayıf kompakttır. Bu ise $T: E \rightarrow X$ operatörünün sıra zayıf kompakt olduğunu gösterir.

Aşağıdaki önerme sıra zayıf kompakt bir operatörle sınırlandırılmış pozitif operatöründe sıra zayıf kompakt olacağı ile ilgilidir.

Önerme 2.3.7 : E, F Banach örgüleri ve $S, T : E \rightarrow F$ pozitif operatörleri için $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Eğer T operatörü sıra zayıf kompakt ise S operatörü de sıra zayıf kompakt operatördür.

İspat : T operatörü sıra zayıf kompakt ise $\forall x \in E^+$ için $T[0, x]$ relatif zayıf kompakttır. Teorem 2.3.1 gereği $\forall (y_n) \subset [0, x]$ dik dizisi için $\lim \|Ty_n\| = 0$ olur. Bu durumda verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0 \quad \|Ty_n\| < \varepsilon$ sağlanır.

$$0 \leq S \leq T \Rightarrow 0 \leq Sy_n \leq Ty_n \Rightarrow 0 \leq \|Sy_n\| \leq \|Ty_n\|$$

eşitsizliklerinden her bir $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0 \quad \|Sy_n\| < \varepsilon$, yani $\lim \|Sy_n\| = 0$ dır. O halde Teorem 2.3.1 gereği her bir $x \in E^+$ için $S[0, x]$ relatif zayıf kompakttır. Dolayısıyla S operatörü sıra zayıf kompakt operatör olur.

Önerme 2.3.8 : E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve X Banach uzayı ise her $T: E \rightarrow X$ sürekli operatörü sıra zayıf kompakttır.

İspat : E sıra sürekli norma sahip ise Teorem 2.2.5 gereği E 'nin her bir sıralı aralığı zayıf kompakttır. T operatörünün sürekliliğinden $T[0, x]$ zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T: E \rightarrow X$ operatörü sıra zayıf kompakttır.

Önerme 2.3.9 : Her zayıf kompakt operatör sıra zayıf kompakttır.

İspat : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T:E \rightarrow X$ operatörü zayıf kompakt olsun. Her zayıf kompakt operatör sürekli olduğundan T operatörü sürekli ve her bir $(x_n) \subset E$ norm sınırlı dizisi için $(Tx_n) \subset X$ zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir. $x \in E^+$ sabitleyelim. $(y_n) \subset T[0,x]$ dizisi için $y_n = Tx_n$ olacak şekilde $(x_n) \subset [0,x]$ dizisi vardır. $0 \leq x_n \leq x$ olduğundan $\|x_n\| \leq \|x\|$ dir ve (x_n) bir norm sınırlı dizidir. Dolayısıyla T operatörü zayıf kompakt olduğundan $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} y$ olacak şekilde $(Tx_{n_k}) = (y_{n_k}) \subset (y_n)$ alt dizisi vardır. Böylece her bir $(y_n) \subset T[0,x]$ dizisi X içinde zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu ise $T[0,x]$ kümesinin relatif zayıf kompakt olduğunu gösterir. Yani T operatörü sıra zayıf kompakttır.

Fakat sıra zayıf kompakt operatörler zayıf kompakt operatör olmak zorunda değildir.

Örnek 2.3.10 : $I: L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ özdeşlik operatörünü göz önüne alalım. $L_1[0,1]$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olduğundan her sıralı aralığı zayıf kompakttır. Dolayısıyla I operatörü sıra zayıf kompakt operatördür. Fakat $L_1[0,1]$ yansımali uzay olmadığından kapalı birim yuvarı zayıf kompakt değildir ([6], Teorem 10.5). Dolayısıyla $I: L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ zayıf kompakt operatör değildir.

Sıra zayıf kompakt bir operatörün adjointi sıra zayıf kompakt olmak zorunda değildir.

Örnek 2.3.11 : $I: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ özdeşlik dönüşümünü gözönüne alalım. ℓ_1 sıra sürekli norma sahip ise her bir $x \in \ell_1^+$ için $[0,x]$ sıralı aralığı zayıf kompakt olacağından birim dönüşüm sıra zayıf kompakttır. $(e_n) \subset \ell_\infty$ sıra sınırlı dik

dizisi için $\lim \|e_n\| \neq 0$ dır. O halde $I': \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ adjoint operatörü sıra zayıf kompakt değildir.



3. L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin genel özellikleri ve yarı kompakt operatörlerle ilişkisi verilecektir:

3.1. L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin Tanımları ve Genel Özellikleri

Bu kesimde zayıf kompakt operatörlerin bir sınıfı olan M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatörler tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatörler ilk defa P. Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmıştır [16]. İlk olarak oldukça sık kullanacağımız bir kümeyi tanımlayıp özelliklerini vereceğiz.

Tanım 3.1.1 : E bir Banach örgüsü olmak üzere ;

$$E^a := \{x \in E : (x_n) \subset [0, |x|], \forall (x_n) \text{ monoton dizisi norm yakınsak} \}$$

şeklinde tanımlanan küme, E içinde sıra sürekli norma sahip kapalı maksimal idealdir. Gerçekten $x, y \in E^a$ için kabul edelim ki $(z_n) \subset [0, |x+y|]$ herhangi bir artan dizi olsun. $x_n = z_n \wedge |x|$ şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi artandır ve $(x_n) \subset [0, |x|]$ sağlanır. Dolayısıyla $x \in E^a$ olduğundan $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ olacak şekilde $u \in E$ vardır. (x_n) dizisi yardımıyla oluşturulan $y_n = z_n - x_n = z_n - (z_n \wedge |x|) = z_n + (-z_n \vee -|x|) = 0 \vee z_n - |x|$ dizisi artandır ve $0 \leq z_n \leq |x| + |y|$ olduğundan $(y_n) \subset [0, |y|]$ sağlanır. $y \in E^a$ olduğundan $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v$ olacak şekilde bir $v \in E$ vardır. $z_n = x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u + v$ sağlanır. $(z_n) \subset [0, |x+y|]$ dizisinin azalan olması durumunda da benzer şekilde ispat yapılabilir. O halde her monoton $(z_n) \subset [0, |x+y|]$ dizisi yakınsak

olacağından $x+y \in E^a$ sağlanır.

$x \in E^a$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(z_n) \subset [0, |\alpha x|]$ monoton dizi olsun. $0 \leq z_n \leq |\alpha x| \leq |\alpha| |x|$ ise $0 \leq \frac{1}{|\alpha|} z_n \leq |x|$ sağlandığından $\left(\frac{1}{|\alpha|} z_n\right) \subset [0, |x|]$ monoton dizidir. $x \in E^a$ ise $\frac{1}{|\alpha|} z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ olacak şekilde $u \in E$ vardır. Dolayısıyla $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} |\alpha| u$ sağlanır ve $|\alpha| u \in E$ olur. Yani $(z_n) \subset [0, |\alpha x|]$ monoton dizisi yakınsaktır. O halde $\alpha x \in E^a$. Dolayısıyla E^a bir alt vektör uzayıdır.

E^a uzayının solid olduğunu gösterelim. $x \in E^a$ ve $|y| \leq |x|$ sağlansın. $(z_n) \subset [0, |y|]$ monoton dizisi alalım. $0 \leq z_n \leq |y| \leq |x|$ ise (z_n) dizisi $[0, |y|]$ sıralı aralığında monoton bir dizidir. $x \in E^a$ olduğundan (z_n) yakınsaktır. Dolayısıyla $y \in E^a$ yani E^a soliddir. Sonuç olarak E^a , E içinde bir idealdir. Teorem 2.2.5 gereği E^a sıra sürekli norma sahiptir. E^a sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 2.2.5 'den $\overline{E^a}$ uzayı da sıra sürekli norma sahiptir. $x \in \overline{E^a}$ elemanını alalım. $\overline{E^a}$ sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 2.2.5 gereği $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ koşulunu sağlayan (x_n) dizisi norm Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) yakınsaktır. Diğer taraftan $0 \leq y_n \downarrow \leq x$ koşulunu sağlayan (y_n) dizisi aldığımızda $(x - y_n)$ dizisi artandır ve $0 \leq x - y_n \leq x$ sağlanacağından (y_n) dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $x \in E^a$ olur. Böylece E^a kapalıdır. Ayrıca E^a maksimaldir ([17], Teorem 2.4.10).

Eğer E uzayı sıra sürekli norma sahip ise Teorem 2.2.5 ile $E^a = E$ eşitliğinin varlığı açıktır.

Tanım 3.1.2 : E Banach örgüsü ve $A \subset E$ boştan farklı alt küme olsun.

$\forall (x_n) \subset \text{sol } A$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ sağlanıyorsa A kümesine L-zayıf kompakt küme denir.

Aşağıda vereceğimiz önermeler E Banach örgüsü olmak üzere E 'nin L-zayıf kompakt kümeleri ile E^a arasındaki ilişkilerini gösterir.

Önerme 3.1.3 : E , Banach örgüsü ve $x \in E$ olmak üzere $\{x\}$ kümesinin L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $x \in E^a$ olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ $\{x\}$ kümesi L-zayıf kompakt olsun. O halde; $\forall (x_n) \subset \text{sol } \{x\} = [-|x|, |x|]$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ olduğundan Teorem 2.3.3 gereği $[-|x|, |x|]$ zayıf kompaktır. $[-|x|, |x|] = -|x| + 2[0, |x|]$ ise $[0, |x|]$ zayıf kompakt, dolayısıyla Teorem 2.3.2 ile $[0, |x|]$ sıra aralığındaki her dik dizi sıfıra normda yakınsaktır. Böylece Teorem 2.2.5. ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \uparrow \leq |x|$ şartını sağlayan (x_n) dizisi norm Cauchy dizisi olacağından yakınsaktır. E Banach örgüsü olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır. Diğer taraftan $(y_n) \downarrow [0, |x|]$ dizisi için $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = |x| - y_n$ şeklinde tanımlanan $(z_n) \uparrow [0, |x|]$ dizisi yakınsaktır. Böylece $(y_n) \downarrow \leq |x|$ dizisi yakınsaktır. O halde $x \in E^a$ dır.

$(\Leftarrow)$ $x \in E^a$ olsun. E^a sıra sürekli ideal olduğundan Teorem 2.2.5 gereği $[0, |x|] \subset E^a$ zayıf kompaktır. Dolayısıyla Teorem 2.3.2 'den $[0, |x|]$ sıra aralığındaki her dik dizi sıfıra norm yakınsaktır. O halde $\forall (x_n) \subset \text{sol } \{x\} = [-|x|, |x|]$ dik dizisi için $(|x_n|) \subset [0, |x|]$ dik dizi olacağından $\lim \| |x_n| \| = \lim \|x_n\| = 0$ dır. Böylece $\{x\}$ kümesi L-zayıf kompakt olur.

Önerme 3.1.4 : (a) E Banach örgüsü içindeki her L-zayıf kompakt küme, E^a uzayı tarafından kapsanır.

(b) E^a uzayının her relatif kompakt kümesi L-zayıf kompaktır.

İspat : (a) $A \subset E$ L-zayıf kompakt küme olsun. $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow \text{sol}\{x\} \subset \text{sol}A$ sağlanır. $\forall (y_n) \subset \text{sol}\{x\}$ dik dizisi için $(y_n) \subset \text{sol}A$ ve A , L-zayıf kompakt olduğundan $\lim \|y_n\| = 0$ dır. $\{x\}$, L-zayıf kompakt kümedir. O halde Önerme 3.1.3 gereği $x \in E^a$ dır. $x \in A$ keyfi seçildiğinden $A \subset E^a$ kapsaması sağlanır.

(b) $A \subset E^a$ relatif kompakt olsun. E^a sıra sürekli norma sahip ise $(E^a)'$ uzayına ait her norm sınırlı dik dizi sıfıra zayıf yakınsak olacağından A üzerinde düzgün yakınsaktır ([13], Sonuç 2.5). O halde A kümesi L-zayıf kompaktır ([13], Sonuç 2.10).

Önerme 3.1.5 : E Banach örgüsündeki sonlu sayıda L-zayıf kompakt kümelerin birleşimleri de L-zayıf kompaktır.

İspat : $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$ L-zayıf kümeler olmak üzere $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ olsun. Her

bir $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \subset [-x_k, x_k] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $x_k \in E_+^a$ elemanları vardır ([17], Teorem 3.6.2). $x = \bigvee_{k=1}^n x_k$ ile gösterirsek her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$[-x_k, x_k] \subset [-x, x]$ ve $x \in E_+^a$ dır. $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{k=1}^n [-x_k, x_k] + \varepsilon U_E$ olduğundan

$A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $x \in E_+^a$ elemanı vardır. Dolayısıyla A kümesi L-zayıf kompaktır ([17], Teorem 3.6.2).

Önerme 3.1.6 : E Banach örgüsü içindeki her L-zayıf kompakt kümenin solid konveks zarfı da L-zayıf kompaktır.

İspat : $A \subset E$ kümesi L-zayıf kompakt olsun. A kümesinin solid konveks zarfını A_c ile gösterirsek,

$$A_c := \left\{ x \in E : |x| \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k |a_k|, a_k \in A, 0 \leq \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ ve } \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

biçiminde olacaktır. A kümesi L-zayıf kompakt ise $\forall \varepsilon > 0$ için $A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde bir $x \in E_+^a$ elemanı vardır ([17], Teorem 3.6.2). $[-x, x]$ ve εU_E kümeleri solid ve konveks kümeler olduklarından $[-x, x] + \varepsilon U_E$ kümesi solid ve konvektir. A kümesini kapsayan en küçük solid ve konveks küme A_c olacağından $\varepsilon > 0$ için $A_c \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olur. Dolayısıyla A_c kümesi L-zayıf kompaktır.

Önerme 3.1.7 : E Banach örgüsü içindeki her L-zayıf kompakt küme relatif zayıf kompaktır.

İspat : $A \subset E$ altkümesi L-zayıf kompakt olsun. $\varepsilon > 0$ için $A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $x \in E_+^a$ vardır ([17], Teorem 3.6.2). E^a sıra sürekli norma sahip bir ideal olduğundan Teorem 2.2.5 gereği $[-x, x]$ zayıf kompaktır. $\varepsilon > 0$ için $A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ sağlanacak şekilde $[-x, x]$ zayıf kompakt kümesi bulunacağından A relatif zayıf kompakt bir küme olur ([6], Teorem 10.17).

Aşağıda tanımlayacağımız L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler ilk defa P.Meyer-Nieberg tarafından verilmiştir [16].

Tanım 3.1.8 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: E \rightarrow X$ sürekli operatör olsun. Her bir $(x_n) \subset E$ norm sınırlı dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ sağlanıyorsa T operatörüne M-zayıf kompakt operatör denir.

Tanım 3.1.9 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: X \rightarrow E$ sürekli

operatör olsun. T operatörü X uzayının norm sınırlı kümelerini E uzayının L -zayıf kompakt kümelere resmediyorsa T operatörüne L -zayıf kompakt operatör denir.

Aşağıdaki teoremden oldukça sık kullanılan L -zayıf kompakt ve M -zayıf kompakt operatörlerin bir özelliği verilmiştir.

Teorem 3.1.10 : E Banach örgüsü , X Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler sağlanır:

(1) $T:E \rightarrow X$ operatörü M -zayıf kompakt operatör ise her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in U_E$ için $\|T(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ vardır.

(2) $T:X \rightarrow E$ operatörü L -zayıf kompakt operatör ise her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in U_X$ için $\|(|Tx| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ vardır.

İspat : (1) $p(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan $p:E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu E uzayı üzerinde bir yarınorm tanımlar. T operatörü M -zayıf kompakt ise $\forall (x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim p(Tx_n) = \lim \|Tx_n\| = 0$ dır, ayrıca U_E norm sınırlı solid küme olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_X$ için $p(T(|x| - u)^+) = \|T(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ vardır ([6], Teorem 13.5).

(2) T operatörü L -zayıf kompakt ise her bir $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisi için $\lim \|y_n\| = 0$ dır. $p(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan $p:E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu E uzayı üzerinde bir yarı norm tanımlar. $I:E \rightarrow E$ özdeşlik dönüşümü süreklidir ve her bir $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisi için $\lim p(I y_n) = 0$ sağlanır. O halde her bir $y \in \text{sol}(T(U_X))$ için $p(I(|y| - u)^+) = \|(I(|y| - u)^+)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır

([6], Teorem 13.5). Dolayısıyla her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_X$ için $\|(|Tx| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ bulunur.

Aşağıdaki önermeler L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatör ile sınırlandırılmış pozitif operatörlerinde aynı özelliği sağlayacağını gösterir.

Önerme 3.1.11 : E, F Banach örgüleri ve $S, T: E \rightarrow F$ pozitif operatörleri için $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Eğer T operatörü M-zayıf kompakt ise S operatörü de M-zayıf kompakttır.

İspat : T operatörü M-zayıf kompakt ise her $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ sağlanır. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0$ $\|Tx_n\| < \varepsilon$ dir. $|Sx_n| \leq S|x_n| \leq T|x_n|$ olduğundan $0 \leq \|Sx_n\| \leq \|T|x_n|\|$ dir. Böylece $(|x_n|) \subset U_E$ dik dizi olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0$, $\|Sx_n\| < \varepsilon$ sağlanır. O halde her bir $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|Sx_n\| = 0$ dir. Dolayısıyla S operatörü M-zayıf kompakttır.

Önerme 3.1.12 : E, F Banach örgüleri ve $S, T: E \rightarrow F$ pozitif operatörleri için $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Eğer T operatörü L-zayıf kompakt operatör ise S operatörü de L-zayıf kompakttır.

İspat : T operatörü L-zayıf kompakt ise her bir $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ dik dizisi için $\lim \|y_n\| = 0$ dir. $(y_n) \subset \text{sol}(S(U_E))$ keyfi bir dik dizi olsun. O halde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $|y_n| \leq |Sx_n|$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset U_E$ dizisi vardır. $|y_n| \leq |Sx_n| \leq S|x_n| \leq T|x_n|$ eşitsizliğinden (y_n) , $\text{sol}(T(U_E))$ içinde bir dik dizidir. O halde $\lim \|y_n\| = 0$ sağlanacağından S operatörü L-zayıf kompakttır.

Önerme 3.1.13 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı olsun. Eğer E uzayı

sıra sürekli norma sahip ise her $T:X \rightarrow E$ kompakt operatörü L-zayıf kompakttır.

İspat : E uzayı sıra sürekli norma sahip ise $E = E^a$ dır. $T:X \rightarrow E$ operatörü kompakt ise $\overline{T(U_X)}$ norm kompakt kümedir. Teorem 3.1.4 gereği E^a uzayı içindeki her relatif kompakt küme L-zayıf kompakt olacağından T operatörü L-zayıf kompakttır.

L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin zayıf kompakt operatör oldukları P.Meyer-Nieberg tarafından gösterilmiştir [16].

Teorem 3.1.14 : L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler zayıf kompakt operatörlerdir.

İspat : E Banach örgüsü, X Banach uzayı olmak üzere $T:E \rightarrow X$ operatörünün M-zayıf kompakt operatör olduğunu kabul edelim. Teorem 3.1.10 gereği her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_E$ için $\|T(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ vardır. $|x| = |x| \wedge u + (|x| - u)^+$ eşitliğinden $T((|x| - u)^+) = T(|x| - |x| \wedge u)$ sağlanır. Her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_E^+$ için $\|T(x - u)^+\| < \varepsilon$ olduğundan $\|T(x - x \wedge u)\| < \varepsilon$ dır. Böylece $\forall x \in U_E^+$ için $\|Tx - Tx \wedge u\| < \varepsilon$ elde edilir. Yani, $Tx - Tx \wedge u \in \varepsilon U_X$ dır ve buradan $Tx \in Tx \wedge u + \varepsilon U_X$ bulunur. $0 \leq x \wedge u \leq u$ olduğundan $Tx \in T[0, u] + \varepsilon U_X$ sağlanır. Dolayısıyla $T(U_E^+) \subseteq \overline{T[0, u]} + \varepsilon U_X$ sağlanır. T operatörünün M-zayıf kompakt olmasından her bir $(u_n) \subset [0, u]$ dik dizisi için $\lim \|Tu_n\| = 0$ dır. Böylece Teorem 2.3.1 ile $T[0, u]$ relatif zayıf kompakttır. Her bir $\varepsilon > 0$ için $T(U_E^+) \subseteq \overline{T[0, u]} + \varepsilon U_X$ olacak şekilde $\overline{T[0, u]}$ zayıf kompakt kümesi bulunabileceğinden $T(U_E^+)$ kümesi relatif zayıf kompakttır ([6], Teorem 10.17).

Benzer şekilde $\overline{T(U_E^-)}$ zayıf kompaktır. $U_E \subset U_E^+ - U_E^-$ olduğundan ve $\overline{T(U_E)} \subset \overline{T(U_E^+) - T(U_E^-)} = \overline{T(U_E^+) - T(U_E^-)}$ sağlandığından $\overline{T(U_E^+)}$ ve $\overline{T(U_E^-)}$ kümelerinin zayıf kompakt olması $\overline{T(U_E)}$ kümesinin zayıf kompakt olmasını gerektirir. Dolayısıyla T operatörü zayıf kompaktır.

$T: X \rightarrow E$ operatörünün L -zayıf kompakt olduğunu kabul edelim. O halde her bir $(u_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisi için $\lim \|u_n\| = 0$ dır. Böylece Teorem 2.3.3 gereği $\text{sol}(T(U_X))$ relatif zayıf kompaktır. O halde $T(U_X)$ relatif zayıf kompaktır, yani T operatörü zayıf kompakt operatördür.

Teorem 3.1.14 'ün tersi her zaman doğru değildir. Yani her zayıf kompakt operatör L -zayıf kompakt veya M -zayıf kompakt operatör olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.15: $T: \ell_1 \rightarrow \ell_\infty$ operatörü, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ olmak üzere

$$T\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1, 1, \dots)$$

biçimde tanımlansın. $T(\ell_1) \subset \text{span}\{(1, 1, \dots)\}$ olduğundan T rank bir operatörüdür ve böylece kompaktır. Dolayısıyla zayıf kompakt operatördür.

Fakat $e_n = (e_k^n)_{k=1}^{\infty}$, $e_k^n = \begin{cases} 1 & ; k=n \\ 0 & ; k \neq n \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $(e_n) \subset \ell_1$ norm sınırlı dik dizi için $\lim \|Te_n\|_{\infty} \neq 0$ olduğundan T operatörü M -zayıf kompakt değildir. Diğer taraftan $(e_n) \subset \text{sol}(T(U_{\ell_1}))$ sağlanır. Ancak $\lim \|e_n\|_{\infty} \neq 0$ olduğundan T operatörü L -zayıf kompakt değildir.

Aşağıdaki iki teorem tanım veya görüntü uzaylarının özelliklerine göre zayıf kompakt operatörler ile L -zayıf kompakt veya M -zayıf kompakt operatörlerin

çakıştıklarını gösterir.

Teorem 3.1.16 : E AM-uzayı , X Banach uzayı ve $T:E \rightarrow X$ sürekli operatör olsun. T operatörünün zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün M -zayıf kompakt olmasıdır.

İspat : E AM-uzayı, X Banach uzayı ve $T:E \rightarrow X$ sürekli operatör olsun.

Teorem 3.1.14 gereği T operatörü M -zayıf kompakt ise zayıf kompakt operatördür.

T operatörünün zayıf kompakt ve $(x_n) \subset E$ norm sınırlı dik dizi olduğunu kabul edelim. $T'':E'' \rightarrow X''$ operatörü de zayıf kompakttır ([6], Teorem 17.2). E AM-uzay ise Teorem 2.2.3 'den E'' birimli AM-uzayı ve $(x_n) \subset E''$ norm sınırlı dik dizidir. $(x_n) \subset E''$ norm sınırlı ise $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı vardır. E'' AM-uzayının birimi e'' ise $[-e'', e'']$ sıra aralığı E'' uzayının kapalı birim yuvardır ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için ;

$$\left\| \frac{x_n}{M} \right\| \leq 1 \Rightarrow \frac{x_n}{M} \in [-e'', e''] \Rightarrow (x_n) \subset [-Me'', Me'']$$

olduğundan (x_n) dizisi E'' içinde sıra sınırlı dik dizidir. $T'':E'' \rightarrow X''$ zayıf kompakt operatör olduğundan sıra zayıf kompakt operatördür. Dolayısıyla Teorem 2.3.1 gereği $\lim \|T''x_n\| = 0$ sağlanır.

$$\begin{aligned} \|T''x_n\| &= \sup \{ |T''x_n(x')| : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |x_n(T'x')| : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |T'x'(x_n)| : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |x'(Tx_n)| : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \} = \|Tx_n\| \end{aligned}$$

Böylece $\lim \|Tx_n\| = 0$ sağlanır, yani T operatörü M -zayıf kompakt operatördür.

Teorem 3.1.17 : E AL -uzayı , X Banach uzayı ve $T:X \rightarrow E$ sürekli operatör olsun. T operatörünün zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün L -zayıf kompakt olmasıdır.

İspat : E AL -uzayı , X Banach uzayı ve $T:X \rightarrow E$ sürekli operatör olsun.

Teorem 3.1.14 gereği T operatörü L -zayıf kompakt olduğundan bir zayıf kompakt operatördür.

T operatörü zayıf kompakt olsun. $\overline{T(U_X)}$ zayıf kompakt ve E AL -uzayı olduğundan Teorem 2.3.4. gereği her bir $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisi için $\lim \|y_n\| = 0$ sağlanır. O halde T operatörü L -zayıf kompakt operatördür.

Aşağıdaki teorem L -zayıf kompakt ve M -zayıf kompakt operatörlerin eşlek operatörlerinin de birbirlerini verdiğini göstermektedir. Bu sonuç P.Meyer-Nieberg tarafından verilmiştir [16].

E bir Banach örgüsü olsun. E ve E' 'nün boştan farklı norm sınırlı iki alt kümesi A ve B olsun. Bu durumda her bir $(x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizisinin B üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $(y_n) \subset \text{sol}(B)$ dik dizisinin A üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olacağını biliyoruz ([6] Teorem 18.12, [7]).

Teorem 3.1.18 : E bir Banach örgüsü olsun. X Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır :

(1) $T:E \rightarrow X$ operatörünün M -zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul

$T': X' \rightarrow E'$ operatörünün L-zayıf kompakt olmasıdır.

(2) $T: X \rightarrow E$ operatörünün L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul

$T': E' \rightarrow X'$ operatörünün M-zayıf kompakt olmasıdır.

İspat : (1) $T: E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun.

T operatörü M-zayıf kompakttır $\Leftrightarrow$ Her bir $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ dır.

$\Leftrightarrow$ Her bir $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi ve her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|Tx_n\| < \varepsilon$ dır.

$\Leftrightarrow$ Her bir $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi ve her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x' \in U_{X'}$ için $|x'(Tx_n)| < \varepsilon$ dır.

$\Leftrightarrow$ Her bir $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi ve her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x' \in U_{X'}$ için $|T'x'(x_n)| < \varepsilon$ dır.

Bu ise $(x_n) \subset U_E$ dik dizisinin $T'(U_{X'})$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\text{sol}(U_E) = U_E$ olduğundan her bir $(y'_n) \subset \text{sol}(T'(U_{X'}))$ dik dizisi U_E üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır ([6], Teorem 18.12, [7]). $\delta > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in U_E$ için $|y'_n(x)| < \delta$ sağlanır. Böylece $\forall n \geq n_0$ için $\sup\{|y'_n(x)| : x \in U_E\} < \delta$ olur, yani $\forall n \geq n_0$, $\|y'_n\| < \delta$ dır. O halde ; $T: E \rightarrow X$ operatörü M-zayıf kompakt $\Leftrightarrow \forall (y'_n) \subset \text{sol}(T'(U))$ dik dizisi için $\lim \|y'_n\| = 0$ dır. Böylece, $T: E \rightarrow X$ M-zayıf kompakt operatördür $\Leftrightarrow T': X' \rightarrow E'$ L-zayıf kompakt operatördür.

(2) $T: X \rightarrow E$ operatörü sürekli operatör olsun. $T: X \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakt ise $\forall (y_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisi için $\lim \|y_n\| = 0$ dır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|y_n\| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x' \in U_{E'}$ için $|x'(y_n)| < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise her bir

$(y_n) \subset \text{sol}(T(U_X))$ dik dizisinin $U_{E'}$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\text{sol}(U_{E'}) = U_{E'}$ olduğundan her bir $(x'_n) \subset U_{E'}$ dik dizisi $T(U_X)$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır ([6], Teorem 18.12, [7]). O halde verilen bir $\delta > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in U_X$ için $|x'_n(Tx)| < \delta$ sağlanır. Böylece $\forall n \geq n_0$ için $|T'x'_n(x)| < \delta$, yani $\forall n \geq n_0$ için, $\sup\{|T'x'_n(x)| : x \in U_E\} < \delta$ olur. Böylece verilen bir $\delta > 0$ sayısına karşılık $\forall n \geq n_0$ için $\|T'x'_n\| < \delta$ dır. Böylece $T: X \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakttır $\Leftrightarrow \forall (x'_n) \subset U_{E'}$ dik dizisi için $\lim \|T'x'_n\| = 0$ dır. $\Leftrightarrow T': E' \rightarrow X'$ M-zayıf kompakt operatördür, denkliği elde edilir.

Önerme 3.1.19 : X ve Y Banach uzayları , E Banach örgüsü olsun. $T: E \rightarrow X$ operatörü M-zayıf kompakt ve $S: X \rightarrow Y$ operatörü sınırlı ise $ST: E \rightarrow Y$ operatörü M-zayıf kompakt operatördür.

İspat : $T: E \rightarrow X$ operatörü M-zayıf kompakt ise $\forall (x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ dır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|(ST)x_n\| \leq \|S\| \|Tx_n\|$ sağlanacağından $\lim \|(ST)x_n\| = 0$ olur. O halde $ST: E \rightarrow Y$ operatörü M-zayıf kompakttır.

Önerme 3.1.20 : X ve Y Banach uzayları , E Banach örgüsü olsun. $T: X \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakt ve $S: Y \rightarrow X$ operatörü sınırlı ise $TS: Y \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakt operatördür.

İspat : T operatörü L-zayıf kompakt ise $T': E' \rightarrow X'$ operatörü M-zayıf kompakttır. $S': X' \rightarrow Y'$ operatörü sınırlı olduğundan Önerme 3.1.19 gereği $S'T': E' \rightarrow Y'$ operatörü M-zayıf kompakttır. $(TS)' = S'T'$ sağlandığından $(TS)'$ operatörü M-zayıf kompakt, dolayısıyla TS operatörü L-zayıf kompakttır.

Aşağıdaki teorem L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatör dizilerinin norm limitlerinin sırasıyla L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.21 : E Banach örgüsü ve X Banach uzayı olmak üzere

(1) E uzayından X uzayı içine tanımlanan bütün M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(E,X)$ uzayının bir kapalı alt vektör uzayıdır.

(2) X uzayından E uzayı içine tanımlanan bütün L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(X,E)$ uzayının bir kapalı alt vektör uzayıdır.

İspat : (1) İlk olarak M-zayıf kompakt operatörler kümesinin $L(E,X)$ uzayının alt vektör uzayı olduğunu gösterelim. $T, S: E \rightarrow X$ operatörleri keyfi M-zayıf kompakt operatörler ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ ve $\lim \|Sx_n\| = 0$ dir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ için $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_1 \quad \|Tx_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\forall n \geq n_2 \quad \|Sx_n\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ sağlanır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçtiğimizde $n \geq n_0$ için ;

$$\|(T + \alpha S)x_n\| = \|Tx_n + \alpha Sx_n\| \leq \|Tx_n\| + |\alpha| \|Sx_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} = \varepsilon$$

$(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\lim \|(T + \alpha S)x_n\| = 0$ sağlanır. Böylece $T + \alpha S$ operatörü M-zayıf kompakt operatör olur. M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(E,X)$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Kabul edelim ki $T: E \rightarrow X$ operatörü M-zayıf kompakt operatörlerin kümesinin $L(E,X)$ içindeki kapanışının bir elemanı olsun. O halde $\varepsilon > 0$ için $\|T - S\| < \frac{\varepsilon}{2}$

olacak şekilde M-zayıf kompakt olan bir $S:E \rightarrow X$ operatörü vardır. $(x_n) \subset U_E$ dik dizi ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için ;

$$\|Tx_n\| = \|(T - S + S)x_n\| \leq \|(T - S)x_n\| + \|Sx_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan $\lim \|Tx_n\| = 0$ çıkar. Bu ise $T:E \rightarrow X$ operatörünün M-zayıf kompakt olduğunu gösterir. Sonuç olarak M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(E, X)$ uzayı içinde kapalı alt vektör uzayıdır.

(2) İlk olarak L-zayıf kompakt operatörler kümesinin $L(X, E)$ uzayının alt vektör uzayı olduğunu gösterelim. $T, S: X \rightarrow E$ iki L-zayıf kompakt operatör ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. T' ve S' M-zayıf kompakt operatördür. $T' + \alpha S'$ M-zayıf kompakt ve $(T + \alpha S)' = T' + \alpha S'$ eşitliğinden dolayı $(T + \alpha S)'$ M-zayıf kompakttır. Böylece $T + \alpha S$ L-zayıf kompakt operatör olur. Dolayısıyla L-zayıf kompakt operatörler kümesi $L(X, E)$ uzayının alt vektör uzayıdır.

Kabul edelim ki $T: X \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakt operatörler kümesinin $L(X, E)$ uzayı içindeki kapanışında bir eleman olsun. O halde $\lim \|T_n - T\| = 0$ olacak biçimde L-zayıf kompakt operatörlerin bir $\{T_n\} \subset L(X, E)$ dizisi vardır. $\lim \|T_n - T\| = 0$ ise $\lim \|T'_n - T'\| = 0$ dır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için T'_n operatörü M-zayıf kompakt olduğundan (1) gereği T' operatörü M-zayıf kompakttır. Dolayısıyla T operatörü L-zayıf kompakt operatördür. Yani L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(X, E)$ uzayının kapalı alt vektör uzayıdır.

Aşağıdaki teorem L-zayıf kompakt operatörlerin görüntülerinin sıra sürekli bir Banach örgüsü tarafından kapsandığı ile ilgili önemli bir teoremdir.

Teorem 3.1.22 : E Banach örgüsü , X Banach uzayı ve $T: X \rightarrow E$ operatörü L-zayıf kompakt olsun. $T(X)$ ile üretilen ideal A ise $\overline{A}$ sıra sürekli norma sahip

Banach örgüsüdür.

İspat : $\bar{A}$ ideal olduğundan E uzayından indirgenen norma göre Banach örgüsüdür. $\bar{A}$ nın sıra sürekli norma sahip olduğunu göstermek için Teorem 2.2.5 gereği A içindeki her sıra sınırlı dik dizinin sıfıra yakınsadığını göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $x \in A$ ve $(x_n) \subset A$ dik dizisi için $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq x$ sağlansın. $x \in A$ ise $x \leq \sum_{i=1}^k |Ty_i|$ olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$ vardır. Riesz ayrışım teoremi ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^k$ ve $0 \leq x_n^i \leq |Ty_i|$ olacak şekilde $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k \in E$ elemanları vardır. (x_n) dizisi dik dizi ise her bir $i=1, \dots, k$ için (x_n^i) dizisi dik dizidir. T operatörü L -zayıf kompakt olduğundan $\lim \|x_n^i\| = 0$ dır. Dolayısıyla $\lim \|x_n\| = 0$ olur. O halde $\bar{A}$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsüdür.

3.2. L -zayıf Kompakt ve M -zayıf Kompakt Operetörlerin Çakışma Durumları

L -zayıf kompakt operatörlerin M -zayıf kompakt olması veya M -zayıf kompakt operatörlerin L -zayıf kompakt olması zorunluluğu yoktur. Fakat Dodds-Fremlin tanımlandıkları uzayların özelliklerine göre L -zayıf kompakt operatörler ile M -zayıf kompakt operatörlerin çakışabildiklerini göstermiştir [13].

Teorem 3.2.1 : E ve F Banach örgüleri olsun. E' ve F sıra sürekli norma sahip ve $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör ise aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) T operatörü L -zayıf kompakt operatördür,
- (2) T operatörü M -zayıf kompakt operatördür,
- (3) T' operatörü L -zayıf kompakt operatördür,
- (4) T' operatörü M -zayıf kompakt operatördür,

(5) $(x_n) \subset E^+$ ve $(x'_n) \subset F'_+$ norm sınırlı dik dizileri için $\lim x'_n(Tx_n) = 0$ dır.

İspat : $1 \Leftrightarrow 4$ ve $2 \Leftrightarrow 3$ denklikleri Teorem 3.1.18 'den açıktır.

(4 $\Rightarrow$ 5) T' operatörü M - zayıf kompakt , $(x_n) \subseteq E^+$ ve $(x'_n) \subseteq F'_+$ norm sınırlı dik diziler olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$|x'_n(Tx_n)| = |T'x'_n(x_n)| \leq \|T'x'_n\| \|x_n\| \leq \|T'x'_n\| M$$

T' operatörü M -zayıf kompakt ise $\forall (x'_n) \subset F'$ norm sınırlı dik dizisi için $\lim \|T'x'_n\| = 0$ dır, yani $\lim x'_n(Tx_n) = 0$ elde edilir.

(5 $\Rightarrow$ 2) Kabul edelim ki $(x_n) \subset E^+$ norm sınırlı dik dizisi için $\lim \|Tx_n\| \neq 0$ olsun.

O halde $\exists \varepsilon > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|Ty_n\| > 2\varepsilon$ olacak şekilde $(y_n) \subset (x_n)$ alt dizisi vardır. E' sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 2.2.8 gereği $y_n \xrightarrow{w} 0$ dır. $y_n \xrightarrow{w} 0$ ise $|Ty_n| \xrightarrow{w} 0$ sağlanır. Dolayısıyla $|Ty_n| \leq |Ty_n|$ olduğundan $|Ty_n| \xrightarrow{w} 0$ elde edilir. Tümevarımla $x'_n(|Tz_n|) > 2\varepsilon$ ve

$\left(4^n \sum_{i=1}^n x'_i\right)(|Tz_{n+1}|) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $(x'_n) \subseteq F'_+$, $\|x'_n\| = 1$ ve $(z_n) \subset (y_n)$

dizileri vardır. $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x'_n$ olmak üzere ;

$$\varphi_n : F \rightarrow \mathbb{R} ; \varphi_n = \left(x'_{n+1} - 4^n \sum_{i=1}^n x'_i - 2^{-n} \varphi \right)^+$$

şeklinde tanımlanan φ_n bir dik dizidir ([6], Lemma 13.4).

$$\varphi_n(|Tz_{n+1}|) \geq \left(x'_{n+1} - 4^n \sum_{i=1}^n x'_i - 2^{-n} \varphi \right) (|Tz_{n+1}|)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(|Tz_{n+1}|) &\geq x'_{n+1}|Tz_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^n x'_i |Tz_{n+1}| - 2^{-n} \varphi(|Tz_{n+1}|) \\
&\geq 2\varepsilon - \frac{1}{n} - 2^{-n} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x'_n |Tz_{n+1}| \\
&\geq 2\varepsilon - \frac{1}{n} - 2^{-n} \varphi(|Tz_{n+1}|)
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \varphi(|Tz_{n+1}|) > \varepsilon \quad \dots (*)$$

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n(|Tz_{n+1}|) = \max\{\psi_n(Tz_{n+1}) : |\psi_n| \leq \varphi_n\}$ eşitliğinden $\varphi_n(|Tz_{n+1}|) = \psi_n(Tz_{n+1})$ ve $|\psi_n| \leq \varphi_n$ olacak şekilde $(\psi_n) \subset F'_+$ seçebiliriz. (ψ_n) dik dizidir ([6], Teorem 1.18). Böylece $(z_n) \subset E^+$ ve $(\psi_n) \subset F'_+$ olduğuna göre her bir $n \in \mathbb{N}$ için hipotez gereği $\lim \psi_n(Tz_{n+1}) = 0$ dır, yani $\varphi_n(|Tz_{n+1}|) \rightarrow 0$ olur. Bu ise (*) eşitsizliğine çelişkidir. O halde $T: E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 1) Bir $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ dik dizisini seçelim. Burada (y_n) dizisini genelliği bozmaksızın pozitif alabiliriz. $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ ise $\exists x_n \in U_E$ için $0 \leq y_n \leq |Tx_n|$ sağlanır. T operatörü M-zayıf kompakt operatör olduğundan Teorem 3.1.10 gereği $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists u \in E^+$ için $\|T(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ elde edilir. $x = x \wedge u + (x - u)^+$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
0 \leq y_n \leq |Tx_n| &= |Tx_n^+ - Tx_n^-| \leq |Tx_n^+| + |Tx_n^-| \\
&\leq |(x_n^+ - u)^+| + |(x_n^+ \wedge u)| + |(x_n^- - u)^+| + |(x_n^- \wedge u)| \\
&\leq |(x_n^+ - u)^+| + |T||x_n^+ \wedge u| + |(x_n^- - u)^+| + |T||x_n^- \wedge u| \\
&\leq |(x_n^+ - u)^+| + |T|u + |T|(x_n^- - u)^+ + |T|u \in 2\varepsilon U_F + 2[0, |T|u]
\end{aligned}$$

εU_F ve $[0, |T|u]$ solid kümeler olduğundan $\varepsilon U_F + [0, |T|u]$ solid kümedir. Dolayısıyla $(y_n) \subset 2\varepsilon U_F + 2[0, |T|u]$ bulunur. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\exists u_n \in 2\varepsilon U_F$ ve $\exists v_n \in 2[0, |T|u]$ için $y_n = u_n + v_n$ yazabiliriz. F sıra sürekli norma sahip ve (v_n) sıra sınırlı dik dizi olduğundan Teorem 2.2.5 gereği $\lim \|v_n\| = 0$ olur. $|y_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ olduğundan $\|y_n\| \leq \|u_n\| + \|v_n\|$ dir. Ayrıca $u_n \in 2\varepsilon U_F$ dir, dolayısıyla $\|u_n\| \leq 2\varepsilon$ dir ve $\lim \|v_n\| = 0$ dir. Buradan $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|v_n\| \leq \varepsilon$ olur. O zaman $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|y_n\| \leq 3\varepsilon$ dir ve $\lim \|y_n\| = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $T: E \rightarrow F$ operatörü L-zayıf kompakt operatördür.

Teorem 3.2.1 'ün tersi her zaman doğru olmamakla birlikte ek şartlar altında doğrudur.

Teorem 3.2.2 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir :

- (1) Aşağıdakilerden biri sağlanır.
 - (a) F sıra sürekli norma sahiptir.
 - (b) $(E')^a = \{0\}$
- (2) Her $T: E \rightarrow F$ regüler M-zayıf kompakt operatör, L-zayıf kompakttır.

İspat : (1(a) $\Rightarrow$ 2) $T: E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakt olsun. Genelliği bozmaksızın, M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(E, F)$ içinde kapalı alt uzay olduğundan T operatörünü pozitif seçebiliriz. F sıra sürekli norma sahip olduğundan T operatörü L-zayıf kompakttır ([17], Teorem 3.6.14).

(1(b) $\Rightarrow$ 2) $T: E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakt olsun. O halde $T': F' \rightarrow E'$ operatörü L-zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T'(U_{F'})$ L-zayıf kompakt kümedir.

E' uzayının her L-zayıf kompakt kümesi $(E')^a$ tarafından kapsanacağından $T'(U_{F'}) \subset (E')^a = \{0\}$ olur. Böylece $\forall x' \in U_{F'}$ için $T'(x') = 0$ dır. $0 \neq y' \in F'$ için $\frac{y'}{\|y'\|} \in U_{F'}$ dır ve $T'\left(\frac{y'}{\|y'\|}\right) = 0$ olur. Buradan $\forall y' \in F'$ için $T'(y') = 0$ çıkar, yani $T' = 0$ elde edilir. $\|T\| = \|T'\|$ sağlandığından $T = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla T operatörü L-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki $(E')^a \neq \{0\}$ olsun. $0 < x' \in (E')^a$ elemanını sabitleyelim. Her bir $y \in F^+$ için ;

$$\begin{aligned} T: E &\rightarrow F \\ x &\rightarrow Tx = x'(x)y \end{aligned}$$

pozitif operatörünü tanımlayalım. Buna göre eşlek operatör ise ;

$$\begin{aligned} T': F' &\rightarrow E' \\ y' &\rightarrow T'y' = y'(y)x' \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır ve pozitif operatördür. $y' \in U_{F'}$ için $|T'y'| = |y'(y)x'| = |y'(y)|x' \leq \|y\|x'$ ve $T'y' \in \|y\|[-x', x']$ olur. O halde $T'(U_{F'}) \subset \|y\|[-x', x']$ sağlanır. $T'(U_{F'})$ L-zayıf kompakt küme ise T' operatörü L-zayıf kompakttır ([17], Önerme 3.6.2). Dolayısıyla T operatörü M-zayıf kompakt ve hipotezimiz gereği ise L-zayıf kompakttır.

$\|x'\| = \sup \{ |x'(x)| : \|x\| \leq 1, x \in E \}$ ise supremum tanımı gereği $\frac{\|x'\|}{2} > 0$ için

$\exists z_0 \in U_E$ vardır ve $\frac{\|x'\|}{2} \leq x'(z_0) \leq \|x'\|$ sağlanır. $z = \frac{\|x'\|}{2} \frac{z_0}{x'(z_0)}$ şeklinde

tanımlayalım. Buna göre ;

$$x'(z) = \frac{\|x'\|}{2} \quad \text{ve} \quad \|z\| = \frac{\|x'\|}{2} \frac{\|z_0\|}{\|x'(z_0)\|} \leq \frac{\|x'\|}{2} \frac{\|z_0\|}{\frac{\|x'\|}{2}} = \|z_0\| \leq 1$$

sağlanır. O halde $x'(z) = \frac{\|x'\|}{2}$ olduğundan $T(z) = x'(z)y = \frac{\|x'\|}{2}y$ dir ve

böylece $\frac{\|x'\|}{2}y \in T(U_E)$ çıkar. Dolayısıyla $\forall u \in [0,y]$ için

$0 \leq 2^{-1}\|x'\|u \leq 2^{-1}\|x'\|y$ eşitsizliğinden $2^{-1}\|x'\|u \in \text{sol}(T(U_E))$ dir. Böylece $2^{-1}\|x'\|[0,y] \subset \text{sol}(T(U_E))$ kapsaması sağlanır. T operatörü L-zayıf kompakt ise $T(U_E)$ L-zayıf kompakt küme olduğundan $\text{sol}(T(U_E))$ kümesi de L-zayıf kompakttır. Her L-zayıf kompakt küme relatif zayıf kompakt olacağından ; $\forall y \in F^+$ için $[0,y]$ sıralı aralığı zayıf kompakttır. O halde Teorem 2.2.5 gereği F sıra sürekli norma sahiptir.

Teorem 3.2.3 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere aşağıdakiler denktir :

(1) Aşağıdakilerden biri sağlanır

- (a) E' sıra sürekli norma sahiptir.
- (b) $F^a = \{0\}$

(2) Her $T:E \rightarrow F$ regüler L-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır.

İspat : (1(a) $\Rightarrow$ 2) $T:E \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatör olsun. Genelliği bozmaksızın, L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(E,F)$ içinde kapalı alt uzay olduğundan T operatörünü pozitif alabiliriz. $T':F' \rightarrow E'$ operatörü M-zayıf kompakttır. E' sıra sürekli norma sahip olduğundan T' operatörü L-zayıf kompakttır, dolayısıyla T operatörü M-zayıf kompakttır ([17],Teorem 3.6.14).

(1(b) $\Rightarrow$ 2) $T:E \rightarrow F$ operatörü regüler L-zayıf kompakt olsun. O halde $T(U_E)$

L-zayıf kompakt küme olduğundan $T(U_E) \subset F^a$ sağlanır. Hipotez gereği $F^a = \{0\}$ olduğundan $T=0$ dir. Yani T operatörü M-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki $F^a \neq \{0\}$ olsun. $0 < y \in F^a$ elemanını sabitleyelim. Her bir $x' \in E'_+$ için ;

$$\begin{aligned} T: E &\rightarrow F \\ x &\rightarrow T(x) = x'(x) y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre eşlek operatör ise ;

$$\begin{aligned} T': F' &\rightarrow E' \\ y' &\rightarrow T'(y') = y'(y) x' \end{aligned}$$

biçimindedir. $x \in U_E$ olmak üzere ;

$$|Tx| = |x'(x)y| = |x'(x)|y \leq \|x'\|y \Rightarrow Tx \in \|x'\| [-y, y] \Rightarrow T(U_E) \subset \|x'\| [-y, y]$$

sağlandığından T operatörü L-zayıf kompakttır ([17], Teorem 3.6.2).

Hipotezimiz gereği ise T operatörü M-zayıf kompakt olacağından T' operatörü L-zayıf kompakttır. $\|y\| = \sup \{ |y'(y)| : \|y'\| \leq 1, y' \in F' \}$ ise

supremum tanımı gereği $\frac{\|y\|}{2} > 0$ için $\exists y'_0 \in U_{F'}$ vardır ve $\frac{\|y\|}{2} \leq |y'_0(y)| \leq \|y\|$

sağlanır. $y' = \frac{\|y\|}{2} \frac{y'_0}{y'_0(y)}$ şeklinde tanımlayalım. Buna göre ;

$$y'(y) = \frac{\|y\|}{2} \quad \text{ve} \quad \|y'\| = \frac{\|y\|}{2} \frac{\|y'_0\|}{|y'_0(y)|} \leq \frac{\|y\|}{2} \frac{\|y'_0\|}{\frac{\|y\|}{2}} = \|y'\| \leq 1$$

sağlanır. O halde $y'(y) = \frac{\|y\|}{2}$ olduğundan $T'(y') = y'(y)x' = \frac{\|y\|}{2}x'$ dir, ve böylece $\frac{\|y\|}{2}x' \in T'(U_{F'})$ çıkar. Dolayısıyla $\forall u' \in [0, x']$ için $0 \leq 2^{-1}\|y\|u' \leq 2^{-1}\|y\|x'$ eşitsizliğinden $2^{-1}\|y\|u' \in \text{sol}(T'(U_{F'}))$ dir. Böylece $2^{-1}\|y\|[0, x'] \subset \text{sol}(T'(U_{F'}))$ kapsaması sağlanır. T' operatörü L-zayıf kompakt ise $T'(U_{F'})$ L-zayıf kompakt küme, dolayısıyla $\text{sol}(T'(U_{F'}))$ kümesi L-zayıf kompakttır. Her L-zayıf kompakt küme relatif zayıf kompakt olacağından $\forall x' \in E'_+$ için $[0, x']$ sıralı aralığı zayıf kompakttır. Dolayısıyla Teorem 2.2.5 gereği E' sıra sürekli norma sahiptir.

Teorem 3.2.4 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere aşağıdakiler denktir :

- (1) Aşağıdakilerden biri sağlanır.
 - (a) E' ve F sıra sürekli norma sahiptirler.
 - (b) $(E')^a = \{0\}$ ve $F^a = \{0\}$
- (2) Her bir $T: E \rightarrow F$ regüler operatörün M-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul L-zayıf kompakt olmasıdır.

İspat : (1(a) $\Rightarrow$ 2) E' uzayı sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.2.3 gereği her bir $T: E \rightarrow F$ regüler L-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır. Yine benzer şekilde F sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.2.2 gereği her bir $T: E \rightarrow F$ regüler M-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakttır.

(1(b) $\Rightarrow$ 2) $(E')^a = \{0\}$ ise Teorem 3.2.2 gereği her bir $T: E \rightarrow F$ regüler M-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakttır. Yine benzer şekilde $F^a = \{0\}$ ise Teorem 3.2.3 gereği her bir $T: E \rightarrow F$ regüler L-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki (1b) sağlanmasın. Yani $(E')^a \neq \{0\}$ veya $F^a \neq \{0\}$. Eğer $(E')^a \neq \{0\}$ ise Teorem 3.2.2 ile F sıra sürekli norma sahiptir. F sıra sürekli norma sahip olduğunda da $F^a = F$ dir. Dolayısıyla $F^a \neq \{0\}$ olacağından Teorem 3.2.3 'den E' sıra sürekli norma sahiptir. Benzer şekilde $F^a \neq \{0\}$ ise Teorem 3.2.3 gereği E' sıra sürekli norma sahiptir. E' sıra sürekli norma sahip iken de $(E')^a = E'$ olacaktır. Dolayısıyla $(E')^a \neq \{0\}$ olduğundan Teorem 3.2.2 gereği F sıra sürekli norma sahiptir.

Verilen bu sonuçlarda operatörlerin regüler olması gerekli bir şarttır. Yukarıdaki teoremler regüler olmayan operatörler için sağlanmayabilir :

Örnek 3.2.5 : $E=C[0,1]$ ve $F = c_0$ olsun. E' ve F sıra sürekli norma sahiptirler. $f \in E$ ve $r_n:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$; $r_n(t) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$ şeklinde tanımlı n. Rademacher fonksiyonu için ;

$$T:C[0,1] \rightarrow c_0 \quad ; \quad Tf = \left(\int_0^1 f r_n dt \right)_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde T operatörünü tanımlayalım. T operatörü $L^2[0,1]$ yansımali uzayına faktör edilebileceğinden bir zayıf kompakt operatördür ([6],Teorem 17.17). $C[0,1]$ uzayı AM-uzayı olduğundan Teorem 3.1.16 gereği T operatörü M-zayıf kompakttır. $0 \leq k \leq (n-1)$ olmak üzere,

$$f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad f_n(t) = \begin{cases} 2^{n+1}t - 4k & ; \quad 4k 2^{-n-1} \leq t \leq (4k+1) 2^{-n-1} \\ -2^{n+1}t + 4k+2 & ; \quad (4k+1) 2^{-n-1} \leq t \leq (4k+2) 2^{-n-1} \\ 0 & ; \quad (4k+2) 2^{-n-1} \leq t \leq (4k+4) 2^{-n-1} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_n \in C[0,1]$ için $Tf_m = \left(\int_0^1 f_m r_n dt \right)_{n=1}^{\infty}$ olur.

$(x_n) = (\delta_{n,k}) = \begin{cases} \int_0^1 f_k r_k dt & ; n=k \\ 0 & ; n \neq k \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $(x_n) \subset c_0$ dizisi dik

dizidir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq |Tf_n|$ sağlanır. Dolayısıyla $(x_n) \subset \text{sol}(T'(U_{C[0,1]}))$

kapsaması vardır. Fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim \|x_n\| = 1/4 \neq 0$ dır. Bu ise T operatörünün L -zayıf kompakt olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.6 : $E = \ell_2$ ve $F = L^1[0,1]$ olsun. E' ve F Banach örgüleri sıra sürekli norma sahiptirler. R_p , Rademacher fonksiyonları ile üretilen kapalı alt uzay olmak üzere $\varphi: \ell_2 \rightarrow R_p$ izomorfizmi vardır ([17], Sonuç 2.7.7). ℓ_2 yansımali uzay olduğundan φ operatörü zayıf kompakttır ([6], Teorem 17.3). Dolayısıyla $L^1[0,1]$ AL-uzayı olduğundan φ operatörü L -zayıf kompakttır. Fakat $(e_n) \subset U_{\ell_2}$ dik dizisini göz önüne alırsak $\lim \|\varphi(e_n)\| \neq 0$ olur. Yani φ operatörü M -zayıf kompakt değildir.

Tanım 3.2.7 : E ve F Riesz uzayları olmak üzere $\forall x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ şartını sağlayan $T: E \rightarrow F$ operatörüne örgü homomorfizmi denir. Her örgü homomorfizmi pozitif operatördür.

Tanım 3.2.8 : E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $\forall x \in E$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ sağlanıyorsa T operatörüne aralık koruyan operatör denir.

Önerme 3.2.9 : E ve F Banach örgüleri, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

(a) T operatörü L -zayıf kompakt örgü homomorfizmi ise aynı zamanda M -zayıf kompakt operatördür.

(b) T operatörü M-zayıf kompakt aralık koruyan operatör ise aynı zamanda L-zayıf kompakt operatördür.

İspat : (a) $(x_n) \subset U_E$ dik dizi olsun. T operatörü örgü homomorfizmi olduğundan $n \neq m$ için $0 \leq |Tx_n| \wedge |Tx_m| \leq T|x_n| \wedge T|x_m| = T(|x_n| \wedge |x_m|) = 0$ sağlanır. Bu ise $(Tx_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ dizisinin dik dizi olduğunu gösterir. Dolayısıyla T operatörünün L-zayıf kompakt olmasından $\lim \|Tx_n\| = 0$ olur. Bu ise T operatörünün M-zayıf kompakt olduğunu gösterir.

(b) T operatörü aralık koruyan operatör ise $T' : F' \rightarrow E'$ örgü homomorfizmdir ([6]Teorem 7.7). E ve F Banach örgüleri ise $E' = E'$ ve $F' = F'$ sağlanır. $T' : F' \rightarrow E'$ L-zayıf kompakt örgü homomorfizmdir. Dolayısıyla $T' : F' \rightarrow E'$ operatörü M-zayıf kompakttır. O halde $T : E \rightarrow F$ operatörü L-zayıf kompakttır.

3.3. Sıra Sürekli Norma Sahip Operatörler ile L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin İlişkisi

Bu bölümde sıra sürekli norma sahip operatörler tanımlanacak ve Dodds-Fremlin tarafından verilen sıra sürekli norma sahip operatörlerin L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompaktlığının gerekli ve yeterli koşul olduğu verilecektir [13].

Tanım 3.3.1 : E ve F Banach örgüleri , F Dedekind tam uzay ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olsun. $\mathcal{L}_b(E, F)$ içinde $0 \leq T_n \downarrow \leq |T|$ olacak şekilde her (T_n) pozitif dizisi için $\|T_n\| \downarrow 0$ sağlanıyorsa T operatörüne sıra sürekli norma sahiptir denir.

Tanım 3.3.2 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere $T : E \rightarrow F$ operatörünün modülü tanımlı ise T operatörünün regüler normu (r-normu)

$$\|T\|_r := \| |T| \| := \sup \{ \| |T| x \| : \|x\| \leq 1 \}$$

biçiminde tanımlıdır ve $\|T\| \leq \|T\|_r$ sağlanır.

Eğer F Dedekind tam uzay ise $\| \cdot \|_r$ normu $\mathcal{L}_b(E, F)$ üzerinde bir örgü normu tanımlar ve $\mathcal{L}_b(E, F)$ bu norma göre bir Banach örgüsüdür ([6], Teorem 15.2).

Aşağıdaki önerme T operatörünün sıra sürekli olmasını karakterize eder :

Önerme 3.3.3 : E ve F Banach örgüleri, F Dedekind tam uzay ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (1) T operatörü sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) $|T| \geq T_\alpha \downarrow 0$ olacak şekildeki $(T_\alpha) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ ağı için $\|T_\alpha\| \downarrow 0$ dır.
- (3) $0 \leq T_\alpha \uparrow \leq |T|$ ise (T_α) ağı r -norm Cauchy ağıdır.
- (4) $0 \leq T_n \uparrow \leq |T|$ ise (T_n) dizisi r -norm Cauchy dizisidir.
- (5) $\forall (T_n) \subset [0, |T|]$ dik dizisi sıfıra norm yakınsaktır.
- (6) $\mathcal{L}_b(E, F)$ içinde T tarafından üretilen ideal A_T üzerindeki norm r -normu olmak üzere A_T idealinin norm tamlaması bir sıra sürekli norma sahip Banach örgüsüdür.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ $(T_\alpha) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ ağı için $|T| \geq T_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. Kabul edelim ki (T_α) Cauchy ağı olmasın. O halde $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists \alpha_n \uparrow$ dizisi için

$$\|T_{\alpha_n} - T_{\alpha_{n-1}}\|_r > \varepsilon. \quad \dots (*)$$

$\forall n \geq 1$ için $T_{\alpha_n} \geq 0$ ise $\inf \{T_{\alpha_n}\} \in \mathcal{L}_b(E, F)$ dır. $\inf \{T_{\alpha_n}\} = S$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$

sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \|T_{\alpha_{n_0}} - S\|_r < \varepsilon$ sağlanır. $T_{\alpha_n} \downarrow$ ise $n \geq n_0$, $T_{\alpha_n} \leq T_{\alpha_{n_0}}$ ve $T_{\alpha_n} - S \leq T_{\alpha_{n_0}} - S$ dir, ve $\|T_{\alpha_n} - S\|_r \leq \|T_{\alpha_{n_0}} - S\|_r$ olur. O halde $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|T_{\alpha_n} - S\|_r < \varepsilon$ eşitsizliği vardır. Dolayısıyla (T_{α_n}) bir Cauchy dizisidir. Bu ise (*) eşitsizliğine çelişki meydana getirir. O halde (T_{α}) , $\mathcal{L}_b(E, F)$ içinde bir Cauchy ağıdır. $\mathcal{L}_b(E, F)$ uzayı r -normuna göre Banach örgüsü olduğundan $T_{\alpha} \rightarrow R$ olacak şekilde bir $R \in \mathcal{L}_b(E, F)$ vardır. $T_{\alpha} \downarrow 0$ ve $T_{\alpha} \rightarrow R$ ise $\inf\{T_{\alpha}\} = R$ olmalıdır ([4], Teorem 5.6). Dolayısıyla $R=0$ olur. $\varepsilon > 0$ için $\exists \alpha_0 \ni \|T_{\alpha}\| < \varepsilon$ dir, ve böylece $\|T_{\alpha}\| \downarrow 0$ elde edilir.

(2 $\Rightarrow$ 3) $(T_{\alpha}) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ ağı için $0 \leq T_{\alpha} \uparrow \leq |T|$ sağlansın. $\mathcal{L}_b(E, F)$ uzayı r -normu altında Dedekind tam Banach örgüsüdür. (T_{α}) üsten sınırlı olduğundan $\sup\{T_{\alpha}\} \in \mathcal{L}_b(E, F)$ dir. $\sup\{T_{\alpha}\} = S$ ile gösterelim. $\forall \alpha \in \Gamma$ için $0 \leq S - T_{\alpha} \downarrow 0$ sağlanır ve hipotezden $\|S - T_{\alpha}\|_r \downarrow 0$ olur. Her bir $\varepsilon > 0$ için $\exists \alpha_0 \in \Gamma \ni \|S - T_{\alpha}\|_r < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $(S - T_{\alpha}) \downarrow$ olduğundan her $\alpha \geq \alpha_0$ için $S - T_{\alpha} \leq S - T_{\alpha_0}$ vardır ve $\|S - T_{\alpha}\|_r \leq \|S - T_{\alpha_0}\|_r$ dir. Her bir $\varepsilon > 0$ için $\exists \alpha_0 \in \Gamma \ni \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad \|S - T_{\alpha}\|_r \leq \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ için,

$$\|T_{\alpha} - T_{\beta}\|_r \leq \|T_{\alpha} - S + S - T_{\beta}\|_r \leq \|T_{\alpha} - S\|_r + \|S - T_{\beta}\|_r \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığından (T_{α}) , r -normuna göre bir Cauchy ağıdır.

(3 $\Rightarrow$ 4) $0 \leq T_n \uparrow \leq |T|$ sağlayan $(T_n) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ dizisi aynı zamanda bir ağ

olduğundan hipotez gereği bu ağın r -normuna göre bir Cauchy dizisi olduğu açıktır.

(4 $\Rightarrow$ 5) $(T_n) \subset [0, |T|]$ dik dizisini alalım. Buna göre $0 \leq \sum_{i=1}^n T_i \leq \bigvee_{i=1}^n T_i \leq |T|$

sağlanır. $U_n = \sum_{i=1}^n T_i$ biçiminde tanımlanırsa $0 \leq U_n \uparrow \leq |T|$ dir. Hipotezden

(U_n) dizisi r -normuna göre bir Cauchy dizisidir. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|U_n - U_{n-1}\| < \varepsilon$ dir. Dolayısıyla $\|T_n\| = \|U_n - U_{n-1}\|$

olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\|T_n\| < \varepsilon$

sağlanır. Dolayısıyla (T_n) operatör dizisi sıfıra norm yakınsaktır.

(5 $\Rightarrow$ 6) $\mathcal{L}_b(E, F)$ içinde T operatörü tarafından üretilen ideal A_T olmak üzere

$\overline{A_T}$, $\mathcal{L}_b(E, F)$ uzayının bir Riesz alt uzayıdır. $\mathcal{L}_b(E, F)$ uzayı r -normuna göre

bir Banach örgüsü olduğundan $\overline{A_T}$ r -normuna göre bir Banach örgüsüdür.

Hipotezden $\forall (T_n) \subset [0, |T|]$ dik dizisi için $\lim \|T_n\| = 0$ dir. Bu önermeye denk

olarak Teorem 2.2.5 'den $0 \leq T_n \uparrow \leq |T|$ iken (T_n) r -normuna göre bir Cauchy

dizisidir. Yine Teorem 2.2.5 ile $T_n \downarrow 0$ olacak biçimindeki $(T_n) \subset \overline{A_T}$ dizisi için

$\|T_n\| \downarrow 0$ olur. Bu ise $\overline{A_T}$ idealinin sıra sürekli norma sahip olduğunu gösterir.

(6 $\Rightarrow$ 1) $\overline{A_T}$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olsun. $|T| \geq T_n \downarrow 0$

olacak şekilde $(T_n) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ pozitif dizisini alalım. A_T solid küme

olduğundan $(T_n) \subset \overline{A_T}$ ve $\overline{A_T}$ sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|T_n\| \downarrow 0$

sağlanır. O halde T operatörü sıra sürekli norma sahiptir.

Sıra sürekli norma sahip pozitif operatörlerin L -zayıf kompakt ve M -zayıf kompaktlığı ile ilgili sonuç Dodds-Fremlin tarafından aşağıdaki şekilde

verilmiştir [13].

Teorem 3.3.4 : E , F Banach örgüleri ve F Dedekind tam olsun. $T:E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T operatörünün hem L -zayıf kompakt hem de M -zayıf kompakt operatör olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ T sıra sürekli norma sahip ve $(x_n) \subset U_E^+$ bir dik dizi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in E^+$ için ;

$$T_n : E \rightarrow F ; T_n(x) = \sup \{ T(x \wedge k x_n) : k \in \mathbb{N}^+ \}$$

şeklinde pozitif operatörler tanımlayalım. $T_n : E \rightarrow F$ operatörleri $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x \geq x \wedge k x_n \geq 0$ ve T pozitif olduğundan $T(x) \geq T(x \wedge k x_n) \geq 0$ dır. Böylece $x \in E^+$ için $T(x) \geq \sup \{ T(x \wedge k x_n) : k \in \mathbb{N} \} \geq 0$, yani $T \geq T_n \geq 0$ sağlanır. $x_n \wedge k x_n = x_n$ olduğundan $T(x_n \wedge k x_n) = T(x_n)$ dır, böylece $T_n(x_n) = T(x_n)$ olur. $y \perp x_n$ ise $|y| \wedge x_n = 0$ dır. Her bir $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|y| \wedge k x_n = 0$ dır. Böylece $T_n(y) = 0$ çıkar. $0 \leq x \leq x_n$ olacak şekildeki $x \in E^+$ için $x \wedge k x_n = x$ olduğundan $T_n(x) = T(x)$ dır. $m \neq n$ ve $x \in E^+$ olsun. $x \wedge k x_n \perp x_m$ olduğundan $T_m(x \wedge k x_n) = 0$ dır ve Teorem 2.1.12 ile

$$\begin{aligned} 0 \leq T_n \wedge T_m(x) &= \inf \{ T_n(y) + T_m(z) : y, z \in E^+ \ y + z = x \} \\ &\leq T_n(x - x \wedge k x_n) + T_m(x \wedge k x_n) \\ &= T_n(x) - T_n(x \wedge k x_n) \\ &\leq T_n(x) - T(x \wedge k x_n) \end{aligned}$$

sağlanır.

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sup\{T(x \wedge kx_n) : k \in \mathbb{N}^+\} \Rightarrow -T_n(x) = -\sup\{T(x \wedge kx_n) : k \in \mathbb{N}^+\} \\
&\Rightarrow 0 = T_n(x) + \inf\{-T(x \wedge kx_n) : k \in \mathbb{N}^+\} \\
&\Rightarrow 0 = \inf\{T_n(x) - T(x \wedge kx_n) : k \in \mathbb{N}^+\} \\
0 \leq T_n \wedge T_m(x) &\leq T_n(x) - T(x \wedge kx_n) \downarrow 0 \Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } T_n \wedge T_m(x) = 0 \\
&\Rightarrow T_n \perp T_m
\end{aligned}$$

T sıra sürekli norma sahip ise $(T_n) \subset [0, |T|]$ dik dizisi için $\lim \|T_n\| = 0$ dır. Her $(x_n) \subset U_E$ dik dizisi için ;

$$\|T(x_n)\| = \|T_n(x_n)\| \leq \|T_n\| \|x_n\| \leq \|T_n\| \Rightarrow \lim \|T(x_n)\| = 0$$

Dolayısıyla T operatörü M -zayıf kompakttır.

$0 \leq (y_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ dik dizi olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq y_n \leq Tx_n$ olacak şekilde $x_n \in U_E$ vardır. F Dedekind tam uzay olduğundan her band bir projeksiyon banddır. y_n tarafından üretilen band B_n ve B_n üzerinde tanımlanmış sıralı projeksiyon P_{B_n} olsun. $n \neq m$ için $P_{B_n} \perp P_{B_m}$ olduğunu İddia ediyoruz. $u \in B_n$ ve $v \in B_m$ ise $\forall k, r \in \mathbb{N}$ için $|u| \wedge k y_n \uparrow |u|$ ve $|v| \wedge r y_m \uparrow |v|$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
|u| \wedge |v| &= |u| \wedge \sup_{r \in \mathbb{N}} \{|v| \wedge r y_m\} \\
&= \sup_{r \in \mathbb{N}} \{|u| \wedge |v| \wedge r y_m\} \\
&= \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \{|u| \wedge k y_n\} \wedge |v| \wedge r y_m \right\} \\
&= \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \{|u| \wedge |v| \wedge k y_n \wedge r y_m\} \right\}
\end{aligned}$$

$n \neq m$ için $y_n \perp y_m$ ise $k y_n \perp r y_m$ sağlanır, dolayısıyla $k y_n \wedge r y_m = 0$ çıkar. O halde $|u| \wedge |v| = 0$ ise $B_n \subset B_m^d$ dir, böylece $P_{B_n} \leq P_{B_m^d} = I - P_{B_m}$ olur. Buradan da $x \in F$ için $(I - P_{B_m})(x) \perp P_{B_m}(x)$ sağlanır ([6], Teorem 3.10). $x \in F$ ve $n \neq m$ için ;

$$0 \leq P_{B_n}(x) \wedge P_{B_m}(x) \leq P_{B_m^d}(x) \wedge P_{B_m}(x) = (I - P_{B_m})(x) \wedge P_{B_m}(x) = 0$$

sağlanacağından her bir $x \in F$ için $P_{B_n}(x) \perp P_{B_m}(x)$ dir.

$$T_n : E \rightarrow F, \quad T_n(x) = P_{B_n} T(x)$$

operatörünü tanımlayalım. P_{B_n} sıralı projeksiyon olduğundan $0 \leq P_{B_n} \leq I$ dir. O halde $x \in E^+$ için $T_n(x) = P_{B_n}(Tx) \leq I(Tx) = Tx$ ve $0 \leq T_n \leq T$ sağlanır. Diğer taraftan $n \neq m$ ve $x \in E^+$ için $0 \leq T_n \wedge T_m(x) \leq P_{B_n}(Tx) \wedge P_{B_m}(Tx) = 0$ dir. Dolayısıyla (T_n) bir dik dizidir. T sıra sürekli norma sahip olduğundan $\lim \|T_n\| = 0$ olur. O halde $(y_n) \subset \text{sol}(T(U_E))$ için ;

$$\|y_n\| = \|P_n(y_n)\| \leq \|P_n(Tx_n)\| = \|T_n(x_n)\| \leq \|T_n\| \|x_n\| \leq \|T_n\|$$

olduğundan da $\lim \|y_n\| = 0$ dir. Dolayısıyla T operatörü L-zayıf kompakt operatördür.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki $T: E \rightarrow F$ operatörü hem M- zayıf kompakt hem de L- zayıf kompakt operatör olsun. $T \geq T_n \downarrow 0$ olacak şekilde $(T_n) \subset \mathcal{L}_b(E, F)$ dizisini alalım. T operatörü M-zayıf kompakt olduğundan Teorem 3.1.10 gereği her bir $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$ için $\|T(|x| - u)^+\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ vardır.

$|x| = |x| \wedge u + (|x| - u)^+$ eşitliğinden

$$|T_n(x)| \leq T_n(|x|) = T_n(|x| - u)^+ + T_n(|x| \wedge u) \leq T(|x| - u)^+ + T_n(u)$$

çıkar, böylece

$$\|T_n(x)\| \leq \|T(|x| - u)^+\| + \|T_n(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n(u)\| \quad \dots(*)$$

bulunur. Teorem 3.1.22 gereği $T(E)$ tarafından üretilen ideal sıra sürekli norma sahip olduğundan bu ideal üzerinde $T_n(u) \downarrow 0$ iken $\|T_n(u)\| \downarrow 0$ elde edilir. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \|T_n(u)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. O halde (*) eşitsizliğinden $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \|T_n(x)\| \leq \varepsilon$ dır. Dolayısıyla $\|T_n\| \downarrow 0$ sağlanacağından T operatörü sıra sürekli norma sahiptir.

Teorem 3.3.4 ile sıra sürekli norma sahip pozitif operatörün eşleşiminin de aynı özelliğe sahip olduğunu söyleyebiliriz .

Sonuç 3.3.5 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $T': F' \rightarrow E'$ operatörünün sıra sürekli norma sahip olmasıdır.

İspat : T sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.3.4 gereği hem L -zayıf kompakt hem de M -zayıf kompaktır. Dolayısıyla $T': F' \rightarrow E'$ operatörü hem M -zayıf kompakt hem de L -zayıf kompaktır. O halde Teorem 3.3.4 gereği T' sıra sürekli norma sahiptir.

3.4. Yarı Kompakt Operatörler ile L-zayıf Kompakt ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin İlişkisi

Bu bölümde yarı kompakt operatörler tanımlanmış, bazı özellikleri ve L-zayıf kompakt M-zayıf kompakt operatörlerle ilişkisi verilmiştir. Yarı kompakt operatörler ilk defa A.C. Zaanen tarafından tanımlanmıştır [19].

Tanım 3.4.1 : E Banach örgüsü ve $A \subset E$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $x \in E^+$ elemanı varsa A kümesine yaklaşık sıra sınırlı küme denir.

Tanım 3.4.2 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: X \rightarrow E$ sürekli bir operatör olmak üzere $T(U_X)$ kümesi E içinde yaklaşık sıra sınırlı ise T operatörüne yarı kompakt operatör denir.

Aşağıdaki önerme yarı kompakt operatörlerin bir karakterizasyonunu verir:

Önerme 3.4.3 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow E$ sürekli operatörünün yarı kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_X$ için $\| (|Tx| - u)^+ \| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ elemanının olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ T operatörü yarı kompakt olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $T(U_X) \subset [-u, u] + \varepsilon U_E$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ bulunabilsin. $[-u, u]$ ve εU_E solid kümeler olduğundan $[-u, u] + \varepsilon U_E$ kümesi de soliddir. $\forall x \in U_X$ için $Tx \in T(U_X) \subset [-u, u] + \varepsilon U_E$ kapsamı ile $|Tx| \leq |y_1| + |y_2|$ olacak biçimde $y_1 \in [-u, u]$ ve $y_2 \in \varepsilon U_E$ elemanları vardır.

$$|Tx| \leq |y_1| + |y_2| \Rightarrow |Tx| - |y_1| \leq |y_2|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (|Tx| - |y_1|)^+ \leq |y_2| \\
&\Rightarrow (|Tx| - u)^+ \leq |y_2| \\
&\Rightarrow \|(|Tx| - u)^+ \| \leq \|y_2\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

sağlanır. O halde verilen her bir $\varepsilon > 0$ karşılık $\forall x \in U_X$ için $\|(|Tx| - u)^+ \| \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $u \in E^+$ vardır.

($\Leftarrow$) Her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_X$ için $\|(|Tx| - u)^+ \| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $u \in E^+$ bulunduğunu kabul edelim. $|Tx| = |Tx| \wedge u + (|Tx| - u)^+$ eşitliği ve Riesz ayrışım teoremi ile $Tx = y_1 + y_2$ olacak şekilde $|y_1| \leq |Tx| \wedge u$ ve $|y_2| \leq (|Tx| - u)^+$ şartlarını sağlayan $y_1, y_2 \in E$ vardır. $|y_1| \leq |Tx| \wedge u$ olduğundan $|y_1| \leq u$ dir, böylece $y_1 \in [-u, u]$ olur ve $|y_2| \leq (|Tx| - u)^+$ olduğundan $\|y_2\| \leq \|(|Tx| - u)^+ \| \leq \varepsilon$ dir ve böylece $y_2 \in \varepsilon U_E$ elde edilir. O halde $\forall x \in U_X$ için $Tx = y_1 + y_2 \in [-u, u] + \varepsilon U_E$, yani $T(U_X) \subset [-u, u] + \varepsilon U_E$ olur. Buradan T operatörünün yarı kompakt olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem kompakt ve L-zayıf kompakt operatörlerle yarı kompakt operatör arasındaki ilişkiyi gösterir.

Teorem 3.4.4 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı olmak üzere $T: X \rightarrow E$ operatörü kompakt veya L-zayıf kompakt ise yarı kompaktır.

İspat : T operatörünün kompakt olduğunu kabul edelim. O halde T sürekli ve $\overline{T(U_X)}$ bir norm kompakt kümedir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in U_X$ için $\|Tx - u_i\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ sonlu alt kümesi seçebiliriz.

$u = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ biçimindeki $u \in E^+$ elemanını alalım. $x \in U_X$ elemanına karşılık en az bir u_i için $\|Tx - u_i\| < \varepsilon$ sağlandığından

$$(|Tx| - u)^+ \leq (|Tx| - |u_i|)^+ \leq ||Tx| - |u_i|| \leq |Tx - u_i|$$

$$\|(|Tx| - u)^+\| \leq \|Tx - u_i\| < \varepsilon$$

elde edilir, dolayısıyla T bir yarı kompakt operatör olur.

T operatörünün L -zayıf kompakt olduğunu kabul edelim. T operatörü L -zayıf kompakt operatör ise Teorem 3.1.10 gereği her bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in U_X$ için $\|(|Tx| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde $u \in E^+$ vardır. Bu da T operatörünün yarı kompakt olduğunu gösterir.

Yarı kompakt operatörler kompakt veya L -zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Eğer E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ise Teorem 3.4.4 'ün tersi de doğrudur. Bu durumda $E^a = E$ olduğundan $T: X \rightarrow E$ operatörü yarı kompakt ise $T(U_X) \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak biçimde bir $u \in E^a$ vardır. O halde $T(U_X)$ kümesi L -zayıf kompakttır, dolayısıyla T operatörü L -zayıf kompakt olur ([17], Teorem 3.6.2).

Teorem 3.4.5 : E ve F Banach örgüleri ve $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) T operatörü M -zayıf kompakt ise yarı kompakttır.
- (ii) $R: E \rightarrow F$ yarı kompakt ve $0 \leq T \leq R$ ise T operatörü de yarı kompakttır.

İspat : (i) $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörünün M -zayıf kompakt olduğunu kabul

edelim. Teorem 3.1.10 ile verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in U_E$ için $\|T(|x| - w)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $w \in E^+$ vardır. $u = Tw$ ise $T \geq 0$ olduğundan $\exists u \in F^+$ için ;

$$(|Tx| - u)^+ = (|Tx| - Tw)^+ \leq (T|x| - Tw)^+ \leq [T(|x| - w)]^+ \leq T(|x| - w)^+$$

sağlandığından $\|(|Tx| - u)^+\| \leq \|T(|x| - w)^+\| < \varepsilon$ çıkar. Dolayısıyla

Önerme 3.4.3 gereği T operatörü yarı kompakt operatördür.

(ii) $R: E \rightarrow F$ pozitif yarı kompakt operatörü için $0 \leq T \leq R$ sıralamasının sağlandığını kabul edelim. R operatörü yarı kompakt olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|(|Rx| - u)^+\| < \varepsilon$ ifadesini sağlayan bir $u \in F^+$ vardır. $\forall x \in U_E$ için;

$$(|Tx| - u)^+ \leq (T|x| - u)^+ \leq (R|x| - u)^+ \text{ ve } \|(|Tx| - u)^+\| \leq \|(R|x| - u)^+\| < \varepsilon$$

çıkarak. Dolayısıyla verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in U_E$ için $\|(|Tx| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak biçimde $\exists u \in F^+$ vardır. Bu da T operatörünün yarı kompakt olduğunu gösterir.

Yarı kompakt operatörler zayıf kompakt, dolayısıyla M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Örneğin $I: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ özdeşlik operatörü yarı kompakt olmasına rağmen zayıf kompakt operatör değildir. Aşağıdaki teorem yarı kompakt bir operatörün görüntüsünün sağladığı önemli bir özelliği ile ilgilidir.

Teorem 3.4.6 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T : X \rightarrow E$ bir yarı kompakt operatör olsun. O halde y tarafından üretilen ideal A_y olmak üzere $T(X) \subseteq \overline{A_y}$ olacak biçimde bir $y \in E^+$ vardır.

İspat : $T:X \rightarrow E$ operatörü yarı kompakt olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in U_X$

için $\left\| (|Tx| - u_n)^+ \right\| < n^{-1}$ olacak biçimde bir $u_n \in E^+$ vardır. $y = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{u_n}{\|u_n\|}$

ile tanımlanan y tarafından üretilmiş ideal A_y olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$0 < \frac{2^{-n}}{\|u_n\|} u_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{u_k}{\|u_k\|}$ sıralamasından $0 < u_n \leq 2^n \|u_n\| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{u_k}{\|u_k\|}$ çıkar

ve A_y ideal olduğundan $(u_n) \subset A_y$ buluruz. $x \in U_X$ için

$|Tx| = |Tx| \wedge u_n + (|Tx| - u_n)^+$ eşitliğinden

$$\left\| |Tx| - |Tx| \wedge u_n \right\| = \left\| (|Tx| - u_n)^+ \right\| < n^{-1}$$

sağlanır. $|Tx| \wedge u_n \leq u_n \in A_y$ ve A_y solid küme olduğundan $|Tx| \wedge u_n \in A_y$

olur. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0$ için

$\left\| |Tx| - |Tx| \wedge u_n \right\| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ sağlandığından $|Tx| \in \overline{A_y}$ dir. Ayrıca $\overline{A_y}$ bir ideal

olduğundan $x \in U_X$ için $Tx \in \overline{A_y}$ elde edilir. $x \in X$ ve $x \neq 0$ olsun.

$\frac{x}{\|x\|} \in X$ ve $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ olduğundan $T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in \overline{A_y}$ dir. Böylece $\frac{1}{\|x\|} T(x) \in \overline{A_y}$

ve $\overline{A_y}$ 'de bir ideal olduğundan her bir $x \in X$ için $T(x) \in \overline{A_y}$ olur. Yani

$T(X) \subseteq \overline{A_y}$ sağlanır.

Sürekli bir operatörün eşleğinin yarı kompakt olması sıra zayıf kompakt olması için yeterlidir.

Teorem 3.4.7 : E, F Banach örgüleri ve $T:E \rightarrow F$ ise bir sürekli operatör olsun. T operatörünün eşleği T' yarı kompakt ise T operatörü sıra zayıf kompakttır.

İspat : $T:E \rightarrow F$ sürekli operatör ve T' 'de yarı kompakt olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını ve $0 < x \in E$ elemanını sabitleyelim. T' yarı kompakt olduğundan $\forall x' \in U_{F'}$ için $\|(|T'x' - \varphi|)\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ olacak şekilde $0 \leq \varphi \in E'$ vardır. $|y| \leq x$ ve $\varphi(|y|) < \varepsilon$ olacak biçimdeki $y \in E$ ve $\forall x' \in U_{F'}$ için ;

$$\begin{aligned} |x'(Ty)| &= |T'x'(y)| \leq |T'x'| \cdot |y| \leq (|T'x' - \varphi|)^+ |y| + (|T'x' \wedge \varphi|) |y| \\ &\leq (|T'x' - \varphi|)^+ (|y|) + \varphi(|y|) \\ &\leq \|(|T'x' - \varphi|)^+\| \|y\| + \varphi(|y|) \\ &\leq \|(|T'x' - \varphi|)^+\| \|x\| + \varphi(|y|) \end{aligned}$$

çıkar. Böylece $\forall x' \in U_{F'}$ için $|x'(Ty)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ sağlanır. $\|Ty\| \leq 2\varepsilon$ olduğundan Teorem 2.3.6. (3) gereği T operatörü sıra zayıf kompakt operatör olur.

Ancak eşlek operatörü sıra zayıf kompakt olan operatörler yarı kompakt olmak zorunda değildir. Örneğin ℓ_2 sıra sürekli norma sahip olduğundan her sıralı aralık zayıf kompakttır. Dolayısıyla $I: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ özdeşlik operatörü sıra zayıf kompakt operatördür. Buna karşılık I operatörü yarı kompakt değildir.

Önerme 3.4.8 : E Banach örgüsü ve X, Y Banach uzayları olsun. $T:X \rightarrow E$ operatörü yarı kompakt ve $S:Y \rightarrow X$ operatörü sınırlı ise $TS:Y \rightarrow E$ operatörü yarı kompakttır.

İspat : $T:X \rightarrow E$ operatörü yarı kompakt ise her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $T(U_X) \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak biçimde $x \in E^+$ elemanı vardır. S operatörü sınırlı olduğundan $\forall x \in U_Y$ için $\|Sx\| \leq \|S\| \|x\| \leq \|S\|$ ve $\frac{1}{\|S\|} S(U_Y) \subset U_X$ olur.

$$\frac{1}{\|S\|} TS(U_Y) \subset T(U_X) \subset [-x, x] + \varepsilon U_E \Rightarrow TS(U_Y) \subset \|S\| [-x, x] + \varepsilon \|S\| U_E$$

$\varepsilon' = \|S\| \varepsilon$ ve $y = \|S\| x$ seçimiyle her bir $\varepsilon' > 0$ için $TS(U_X) \subset [-y, y] + \varepsilon' U_E$ olacak şekilde $\exists y \in E^+$ elemanı vardır. O halde TS operatörü yarı kompakt operatördür.

X bir normlu uzay ve X uzayının bir alt kümesi A olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A \subset \Phi + \varepsilon U_X$ olacak biçimde X uzayının bir Φ sonlu alt kümesi varsa A kümesine norm-total sınırlı küme denir.

Önerme 3.4.9 : E Banach örgüsü ve $T:E \rightarrow E$ pozitif operatörü L -zayıf kompakt ve her bir $x \in E^+$ için $T[0, x]$ norm-total sınırlı olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $0 \leq S \leq T$ sıralamasını sağlayan $S:E \rightarrow E$ operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

- a) Her bir $x \in E^+$ için $S[0, x]$ norm-total sınırlıdır.
- b) S^2 operatörü kompaktır.

İspat : $T[0, x]$ norm-total sınırlı ise her bir $\varepsilon > 0$ için $T[0, x] \subset \Phi + \varepsilon U$ olacak şekilde $\Phi \subset T[0, x]$ sonlu alt kümesi vardır. $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğinden $S[0, x] \subset T[0, x] \subset \Phi + \varepsilon U_E$ sağlanır. Dolayısıyla her bir $\varepsilon > 0$ için $S[0, x] \subset \Phi + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $\Phi \subset E$ sonlu kümesi bulunabileceğinden $S[0, x]$ norm-total sınırlıdır.

$0 \leq S \leq T$ sağlandığından $T:E \rightarrow E$ operatörü L -zayıf kompakt ve her bir

$x \in E^+$ için $T[0,x]$ norm-total sınırlı ise S operatörü de L -zayıf kompakt ve her bir $x \in E^+$ için $S[0,x]$ norm-total sınırlıdır. S operatörü L -zayıf kompakt ise Teorem 3.4.4 gereği yarı kompakt operatördür. Her bir $\varepsilon > 0$ için $S(U_E) \subset [-u,u] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $u \in E^+$ vardır. Dolayısıyla

$$S^2(U_E) \subset S[-u,u] + \varepsilon S(U_E) \subset S[-u,u] + \varepsilon \|S\| U_E \quad \dots(*)$$

sağlanır. $[-u,u] = -u + 2[0,u]$ olduğundan $S[-u,u] = -S(u) + 2S[0,u]$ eşitliği sağlandığından $S[0,u]$ norm-total sınırlı ise $S[-u,u]$ kümesinde norm-total sınırlıdır. Böylece $(*)$ 'dan dolayı $S^2(U_E)$ norm kompakt kümedir. Bu ise S^2 operatörünün kompakt operatör olduğunu gösterir.

Önerme 3.4.10 : E Banach örgüsü ve $T: E \rightarrow E$ pozitif operatörü M -zayıf kompakt ve her bir $x \in E^+$ için $T[0,x]$ norm-total sınırlı olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $0 \leq S \leq T$ olacak şekildeki her $S: E \rightarrow E$ operatörü için S^2 kompakt bir operatör olur.

İspat : $0 \leq S \leq T$ sağlansın. $T: E \rightarrow E$ operatörü M -zayıf kompakt ve her bir $x \in E^+$ için $T[0,x]$ norm-total sınırlı olduğundan S operatörü de M -zayıf kompakttır ve her bir $x \in E^+$ için $S[0,x]$ norm-total sınırlıdır. S operatörü M -zayıf kompakt ise Teorem 3.4.5 gereği yarı kompakt operatördür. Her bir $\varepsilon > 0$ için $S(U_E) \subset [-u,u] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ vardır. Dolayısıyla

$$S^2(U_E) \subset S[-u,u] + \varepsilon S(U_E) \subset S[-u,u] + \varepsilon \|S\| U_E \quad \dots(*)$$

sağlanır. $[-u,u] = -u + 2[0,u]$ olduğundan $S[-u,u] = -S(u) + 2S[0,u]$ eşitliği sağlanır ve $S[0,u]$ norm-total sınırlı ise $S[-u,u]$ kümesi de norm-total sınırlıdır.

Dolayısıyla (*) 'dan $S^2(U_E)$ norm kompakt bir küme olur. Bu da S^2 operatörünün bir kompakt bir operatör olduğunu gösterir.



4. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖR OLMA DURUMLARI

L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler zayıf kompakt oldukları halde zayıf kompakt operatörler her zaman L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatör olmak zorunda değildir. Bu bölümde zayıf kompakt operatörlerin L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt olmalarının hangi durumlarda gerçekleştiği verilmiştir. Bunun için Schur özelliğine veya pozitif Schur özelliğine sahip uzaylarla ilgili sonuçlar verilecektir.

Tanım 4.1 : E Banach örgüsü olmak üzere $x_n \xrightarrow{w} 0$ olacak şekilde her $(x_n) \subset E$ dizisi için $\|x_n\| \rightarrow 0$ sağlanıyorsa E uzayı Schur özelliğine sahiptir denir.

Benzer olarak $x_n \xrightarrow{w} 0$ olacak şekilde her $(x_n) \subset E^+$ dizisi için $\|x_n\| \rightarrow 0$ sağlanıyorsa E uzayına pozitif Schur özelliğine sahiptir denir.

Açıktır ki Schur özelliğine sahip uzaylar pozitif Schur özelliğine sahiptir. Ayrıca AL-uzayları Schur özelliğine sahiptir.

E Banach örgüsü ve $A \subset E$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-x, x] + \varepsilon U_E$ olacak şekilde $x \in E^+$ elemanı varsa A kümesine yaklaşık sıra sınırlı küme denildiğini Tanım 3.4.1 'den biliyoruz.

Tanım 4.2 : E Riesz uzayı ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $x, y \in [0, \varepsilon]$ ve $x \wedge y = 0$ iken $x=0$ veya $y=0$ ise $\varepsilon \in E^+$ elemanına atom denir. E 'nin bütün atomlarının ürettiği band E 'ye eşit ise E uzayına atomik denir.

c , c_0 ve ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$) dizi uzayları atomik uzaylardır.

E Riesz uzayının $e \in E^+$ elemanı tarafından üretilen ideal, e ile üretilen alt vektör uzayına eşit ise $e \in E^+$ elemanına E uzayının bir diskret elemanı denir. Yani $I_e = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ise e bir diskret eleman olur.

Arşimedyan bir uzayın atomları ile diskret elemanları çakışır. Yani $e \in E^+$ elemanının atom olması için gerek ve yeter şart diskret eleman olmasıdır.

Aşağıdaki teorem pozitif Schur özelliğine sahip Banach örgülerini karakterize eder.

Teorem 4.3 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E pozitif Schur özelliğine sahiptir.
- (2) $x_n \xrightarrow{w} 0$ olacak şekilde her $(x_n) \subset E^+$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ dır.
- (3) E 'nin her relatif zayıf kompakt kümesi L -zayıf kompaktır.
- (4) $\emptyset \neq A \subset E$ sınırlı kümesinin relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul yaklaşık sıra sınırlı olmasıdır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ $(x_n) \subset E^+$ dik dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ sağlansın. E pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan $\lim \|x_n\| = 0$ dır.

$(2 \Rightarrow 3)$ $\emptyset \neq A \subset E$ relatif zayıf kompakt küme ve $(x_n) \subset \text{sol}(A)$ dik dizi olsun. $(|x_n|)$ dik dizidir ve $(|x_n|) \subset \text{sol}(A)$ ise $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ dır ([6], Teorem 13.3). Hipotezimizden dolayı $\| |x_n| \| = \|x_n\| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise A kümesinin L -zayıf kompakt olduğunu gösterir.

$(3 \Rightarrow 4)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n = (\delta_{n,k}) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \in c_0$ biçiminde tanımlanan elemanların oluşturduğu $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi c_0 Banach örgüsü için bir

Schauder tabanıdır. $f = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in c'_0 = \ell_1$ için $f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \delta_{n,k} = f_n$ ve $f \in \ell_1$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ dir, dolayısıyla $\lim f_n = 0$ dir. Dolayısıyla $e_n \xrightarrow{w} 0$ dir.

Böylece $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$ kümesi relatif zayıf kompakttır

([6], Sonuç 10.16). $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$ dolayı $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

relatif zayıf kompakttır. Fakat $(e_n) \subset \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ dik dizisi için $\lim \|e_n\| = 1 \neq 0$ olduğundan $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ L-zayıf kompakt küme değildir. Dolayısıyla E uzayının c_0 uzayına örgü izomorf hiç bir alt örgüsü yoktur. Buradan E bir KB uzayı olur ([17], Teorem 2.5.6). E sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 2.2.5 gereği her bir sıra aralığı zayıf kompakttır. A yaklaşık sıra sınırlı ise $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists x \in E^+$ vardır ve $A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ dir. $[-x, x]$ zayıf kompakt olduğundan A relatif zayıf kompakttır ([6], Teorem 10.17).

Tersine, A relatif zayıf kompakt ise hipotezimiz gereği A L-zayıf kompakttır. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ karşılık $\exists x \in E^a$ vardır ve $A \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ sağlanır ([17], Teorem 3.6.2). Bu ise A kümesinin yaklaşık sıra sınırlı olduğunu gösterir.

(4 $\Rightarrow$ 1) $(x_n) \subset E^+$ dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ sağlansın. $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$

kümesi relatif zayıf kompakttır ([6], Sonuç 10.16).

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$ kapsamından $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ relatif zayıf

kompakt ise hipotezimiz gereği yaklaşık sıra sınırlıdır. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists x \in E^+$ vardır ve $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [-x, x] + \varepsilon U_E$ sağlanır. O halde $n \in \mathbb{N}$ için

$a_n \in [-x, x]$ ve $b_n \in U_E$ olmak üzere $x_n = a_n + \varepsilon b_n$ yazabiliriz. $0 \leq x_n \leq |a_n + \varepsilon b_n| \leq |a_n| + \varepsilon |b_n|$ ise Riesz ayrışım teoremi gereğince her bir $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq u_n \leq |a_n|$ ve $0 \leq v_n \leq |b_n|$ olmak üzere $x_n = u_n + \varepsilon v_n$ yazabiliriz. $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise, $\forall x' \in E'$ için $x'(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ dır. $0 \leq u_n \leq x_n$ ise $\forall x' \in E'$ için $|x'(u_n)| \leq |x'(x_n)| \leq |x'(x_n)|$ sağlanacağından $\forall x' \in E'$ için $x'(u_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ dır. Dolayısıyla $u_n \xrightarrow{w} 0$ olur. $U_{E'}$ solid kümedir ve (u_n) dizisi $U_{E'}$ üzerinde düzgün sınırlıdır. O halde $\limsup \|u_n\| = \limsup x'_n(u_n)$ olacak şekilde $0 \leq x'_n \in U_{E'}$ dik dizisi vardır ([17], Önerme 2.3.4). Böylece ;

$$\limsup \|u_n\| = \limsup x'_n(u_n) \leq \limsup x'_n(x)$$

elde edilir. Hipotezimizden dolayı her bir sıralı aralık zayıf kompakt olacağından Teorem 2.2.5 'den E sıra sürekli norma sahiptir. Dolayısıyla $x'_n \xrightarrow{w} 0$ ([17], Sonuç 2.4.3) ve

$$\limsup \|x_n\| \leq \limsup (\|u_n\| + \varepsilon \|v_n\|) \leq \limsup \|u_n\| + \varepsilon = \varepsilon$$

olur. Bu ise $\|x_n\| \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. Böylece E pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Teorem 4.3 'ün sonucu olarak Teorem 2.2.5 yardımıyla pozitif Schur özelliğine sahip uzayların sıra sürekli norma sahip olduklarını söyleyebiliriz.

Teorem 4.4 : E bir Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E Schur özelliğine sahiptir.
- (2) E atomik ve pozitif Schur özelliğine sahiptir.

(3) E atomik ve her bir $\emptyset \neq A \subset E$ sınırlı alt kümesinin relatif zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul yaklaşık sıra sınırlı olmasıdır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ E Schur özelliğine sahip ise sıra sürekli norma sahiptir. Kabul edelim ki E atomik olmasın. O halde E uzayı içindeki tüm atomların ürettiği band B olmak üzere $E \neq B$ olur. E sıra sürekli norma da sahip olduğundan Dedekind tam uzaydır. Bu nedenle B bir projeksiyon banddır. Yani $E = B \oplus B^\perp$ yazılabilir. Dolayısıyla $B^\perp$, E içinde hiç bir atom içermeyen sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsüdür. Dolayısıyla her bir $x \in (B^\perp)^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| = x$ ve $x_n \xrightarrow{w} 0$ olacak şekilde $(x_n) \subset E$ dizisi vardır. Böylece; $\lim \|x_n\| = \lim \| |x_n| \| = \lim \|x\| \neq 0$ dır ([9], Teorem 2.2). Bu ise E Banach örgüsünün Schur özelliğine sahip olmasına çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış, yani E atomiktir.

$(2 \Leftrightarrow 3)$ denklği Teorem 4.3. 'den sağlanır.

$(2 \Rightarrow 1)$ E atomik ise E uzayında örgü operasyonları zayıf dizisel süreklidir. ([17], Teorem 2.5.23). Yani $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ sağlanır. E pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan $\lim \|x_n\| = \lim \| |x_n| \| = 0$ dır. O halde E Schur özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki önermeler ve Teorem 4.7 pozitif zayıf kompakt operatörlerin L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt olduğu durumlarda tanımlandıkları uzayların özellikleri ile ilgilidir. Böyle durumlarda pozitif Schur özelliği önemli rol oynar.

Önerme 4.5 : E ve F Banach örgüleri ve her $T: E \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompakt olsun. Bu durumda E' KB uzay değil ise F pozitif Schur özelliğine sahiptir.

İspat : E' , KB uzay değil ise sıra sürekli norma da sahip değildir ([6], Teorem 14.11). O halde $\varphi: \ell_1 \rightarrow E$ örgü izomorfizmi ve $P: E \rightarrow \varphi(\ell_1)$ pozitif projeksiyonu vardır ([17], Teorem 2.4.14 , Teorem 2.3.11).

$(x_n) \subset F^+$ dik dizisi için $x_n \xrightarrow{w} 0$ sağlansın.

$$\begin{aligned} T: \varphi(\ell_1) &\rightarrow F \\ (\lambda_n) &\rightarrow T(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T operatörü pozitifdir ve

$$T(U_{\varphi(\ell_1)}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$$

$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$ görüntü kümesi relatif zayıf kompakt olduğundan T

zayıf kompakt operatördür ([6], Sonuç 10.16). Böylece P projeksiyonu sürekli olduğundan $TP: E \rightarrow F$ operatörü zayıf kompaktır ve hipotez gereği ise

M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır. $e_n = (\delta_{n,k}) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \in \ell_1$ dizisini

gözönüne aldığımızda $\forall n \in \mathbb{N}$ için ,

$$TP(\varphi e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varphi e_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi e_n) x_n = x_n$$

olur. φ bir örgü izomorfizmi altında $(e_n) \subset \ell_1$ norm sınırlı dik dizisinin görüntüsü de $(\varphi e_n) \subset E$ bir norm sınırlı dik dizi olur. TP operatörü M -zayıf kompakt ise $\lim \|x_n\| = \lim \|TP(\varphi e_n)\| = 0$ dir. TP operatörü L -zayıf kompakt ise $x_n = TP(\varphi e_n) \subset \text{sol}(TP(U))$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = \lim \|TP(\varphi e_n)\| = 0$ bulunur. Sonuç olarak $x_n \xrightarrow{w} 0$ olacak şekildeki her $(x_n) \subset F^+$ dik dizisi

için $\|x_n\| \rightarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.3 gereği F pozitif Schur özelliğine sahip olur.

Önerme 4.6 : E ve F Banach örgüleri ve her $T:E \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatör M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompakt olsun. Bu durumda F , KB uzay değilse E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.

İspat : F , KB uzay değil ise bir $\phi:c_0 \rightarrow F$ örgü izomorfizmi (içine) vardır ([17], Teorem 2.4.12). $x'_n \xrightarrow{\sigma(E',E)} 0$ olacak biçimde bir dik dizi $(x'_n) \subset E'_+$ verilsin.

$$T:E \rightarrow c_0 \subset F \quad ; \quad Tx = (x'_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlanan T operatörü pozitifdir ve eşlek operatörü ise ;

$$T':\ell_1 \rightarrow E' \\ (\alpha_n) \rightarrow T'(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x'_n$$

biçimindedir. $T'(U_{\ell_1}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x'_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1 \right\}$ relatif zayıf kompakt

olduğundan T' operatörü zayıf kompakt, dolayısıyla T operatörü zayıf kompaktır. Hipotezimiz gereği T operatörü M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır. Teorem 3.1.18 gereği T' operatörü L -zayıf kompakt veya M -zayıf kompaktır. $(e_n) \subset U_{\ell_1}$ dik dizisini gözönüne alırsak her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x'_n = T'e_n$ eşitliği sağlanır. T' operatörü M -zayıf kompakt ise $\lim \|x'_n\| = \lim \|T'e_n\| = 0$ olur. T' operatörü L -zayıf kompakt ve $(x'_n) \subset \text{sol}(T'(U_{\ell_1}))$ dik dizi ise $\lim \|x'_n\| = \lim \|T'e_n\| = 0$ buluruz. Sonuç olarak $x'_n \xrightarrow{\sigma(E',E)} 0$ olacak şekildeki her $(x'_n) \subset E'_+$ dik dizisi için $\|x'_n\| \rightarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.3 gereği E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Teorem 4.7 : E ve F Banach örgüleri olmak üzere her $T:E \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompakt ise aşağıdakilerden biri sağlanır.

- (1) F pozitif Schur özelliğine sahiptir.
- (2) E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.
- (3) E' ve F KB uzaylarıdır.

İspat : E' ve F pozitif Schur özelliğine sahip değilse Önerme 4.6 ve Önerme 4.5 ile E' ve F KB uzaylarıdır. Dolayısıyla (1) ve (2) önermeleri sağlanmadığında (3) önermesi sağlanır. Kabul edelim ki (3) sağlanmasın. Bu durumda E' veya F uzaylarından biri KB uzay değildir. E' KB uzay değil ise Önerme 4.5 gereği F pozitif Schur özelliğine sahiptir. Yani (1) önermesi sağlanır. F KB uzay değil ise Önerme 4.6 'den E' pozitif Schur özelliğine sahiptir. Yani (2) önermesi sağlanır.

Her $T:E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt olsa bile E' veya F nin pozitif Schur özelliğine sahip olduğunu söyleyemeyiz :

Örnek 4.8 : ℓ_3 ve ℓ_2 atomik Banach örgüleri arasındaki her sınırlı operatörü kompakt operatördür ([13], Teorem 7.6). ℓ_3 ve ℓ_2 sıra sürekli norma sahip olduklarından her relatif kompakt küme L-zayıf kompakt olacağından T operatörü L-zayıf kompakt , dolayısıyla M-zayıf kompaktır. Ancak ℓ_3 ve ℓ_2 pozitif Schur özelliğine sahip değildir.

Teorem 4.3 ve Teorem 4.7 ile aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Teorem 4.9 : F , Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktirler:

- (1) F pozitif Schur özelliğine sahiptir.

(2) X Banach uzayı olmak üzere her $T: X \rightarrow F$ zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakttır.

(3) Her $T: \ell_1 \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakttır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ $T: X \rightarrow F$ zayıf kompakt operatör ise $\overline{T(U_X)}$ kümesi zayıf kompakttır. F pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan Teorem 4.3 ile F 'nin her relatif zayıf kompakt kümesi L-zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T(U_X)$, L-zayıf kompakt küme, yani T operatörü L-zayıf kompakt olur.

$(2 \Rightarrow 3)$ ℓ_1 bir Banach uzayı olduğundan hipotezimiz gereği her $T: \ell_1 \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatörü L-zayıf kompakttır.

$(3 \Rightarrow 1)$ Her $T: \ell_1 \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt olsun.

$(\ell_1)' = \ell_\infty$ sıra sürekli norma ve pozitif Schur özelliğine sahip değildir. O halde Teorem 4.7 ile F pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem Teorem 4.9 'un dualidir.

Teorem 4.10 : E bir Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktirler:

(1) E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.

(2) Y bir Banach uzayı olmak üzere her $T: E \rightarrow Y$ zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır.

(3) Her $T: E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ $T: E \rightarrow Y$ zayıf kompakt operatör ise $T': Y' \rightarrow E'$ operatörü de zayıf kompakttır ([6], Teorem 17.2). E' pozitif Schur özelliğine sahip ise Teorem 4.9 gereği $T': Y' \rightarrow E'$ operatörü L-zayıf kompakt, dolayısıyla $T: E \rightarrow Y$ operatörü M-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 3) c_0 , bir Banach uzayı olduğundan dolayı hipotezimiz gereği her $T:E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatörü M-zayıf kompakttır.

(3 $\Rightarrow$ 1) Her $T:E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakt olsun.

$(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ dik dizisini göz önüne aldığımızda $e_n \xrightarrow{w} 0$, fakat $\lim \|e_n\| \neq 0$ dır. Dolayısıyla Teorem 4.3 ile c_0 , pozitif Schur özelliğine sahip değildir. c_0 , KB uzayı olmadığından Teorem 4.7 ile E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem regüler operatörlerin L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompaktlığı ile ilgilidir. Fakat uzaylar üzerinde ek şartlar getirilmiştir.

Teorem 4.11. : F Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktirler:

- (1) F pozitif Schur özelliğine sahiptir.
- (2) E' sıra sürekli norma sahip olacak şekildeki E Banach örgüsü için her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörü M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakttır.
- (3) E yansımali bir Banach örgüsü olmak üzere her $T:E \rightarrow F$ örgü homomorfizmi M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompakttır.

İspat : (1 $\Rightarrow$ 2) F , pozitif Schur özelliğine sahip olsun. M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi ile L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(E, F)$ uzayı içinde kapalı alt vektör uzayları olduklarından dolayı genelliği bozmaksızın her $T:E \rightarrow F$ pozitif operatörün M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki $T:E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $(x_n) \subset U_E$ dik dizi ise $(\|x_n\|) \subset U_E$ dizisi de diktir ve E' sıra sürekli norma sahip olduğundan Teorem 2.2.8 'den $\|x_n\| \xrightarrow{w} 0$ bulunur. T operatörü sürekli bir operatör ise

T operatörü zayıf süreklidir ([6], Teorem 17.1). Dolayısıyla $T|x_n| \xrightarrow{w} 0$ ve F pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan $\lim \|T|x_n|\| = 0$ dir.

$$|Tx_n| \leq T|x_n| \Rightarrow \|Tx_n\| = \|Tx_n\| \leq \|T|x_n|\|$$

eşitsizliğinden dolayı $\lim \|Tx_n\| = 0$. Yani T operatörü M-zayıf kompaktır. Diğer taraftan F pozitif Schur özelliğine sahip ise sıra sürekli norma sahiptir. E' ve F sıra sürekli norma sahip olduklarından Teorem 3.2.1 gereği T operatörü L-zayıf kompaktır.

(2 $\Rightarrow$ 3) E yansımali Banach örgüsü ise Teorem 2.2.7 gereği E ve E' KB uzaylarıdır. $T:E \rightarrow F$ bir örgü homomorfizmi olduğundan pozitif operatördür ve $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$. Hipotezimiz gereği T operatörü M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompaktır.

(3 $\Rightarrow$ 1) F uzayının pozitif Schur özelliğine sahip olduğunu göstermek için Teorem 4.9 ile her $T:\ell_1 \rightarrow F$ pozitif zayıf kompakt operatörünün L-zayıf kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki F KB uzay olmasın. O halde c_0 uzayını F 'nin kapalı alt örgüsü olarak düşünebiliriz. ([17], Teorem 2.4.12). $i:\ell_2 \rightarrow c_0 \subset F$ doğal gömmesi bir örgü homomorfizmi olacağından hipotezimiz gereği M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompaktır. $(e_n)_{n=1}^\infty \subset U_{\ell_2}$ dik dizisini göz önüne alırsak i dönüşümü örgü homomorfizmi olduğundan $i(e_n) \subset i(U_{\ell_2})$ dik dizidir, ve $\lim \|i(e_n)\| = \|e_n\| \neq 0$ olur. Bu ise i dönüşümünün M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt olması ile çelişir. Sonuç olarak kabulümüz yanlış, yani F bir KB uzayıdır.

$T: \ell_1 \rightarrow F$ zayıf kompakt operatör olsun. T operatörü yansımali bir E Banach örgüsüne; $P: \ell_1 \rightarrow E$ sınırlı operatör ve $Q: E \rightarrow F$ aralık koruyan örgü homomorfizmi olmak üzere $T:=QP$ olacak şekilde faktör edilebilir ([5], Teorem 2.2). Böylece Q operatörü hipotezimiz gereği M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompakttır. Kabul edelim ki Q operatörü M -zayıf kompakt olsun. E' ve F sıra sürekli norma sahip olduklarından Teorem 3.2.1 gereği Q operatörü L -zayıf kompakttır. O halde $T:=QP$ yazılabildiğinden Önerme 3.1.20 gereği T operatörü L -zayıf kompakttır. Sonuç olarak Teorem 4.9 'dan F pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem Teorem 4.11 'nin dual versiyonudur.

Teorem 4.12 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.
- (2) F KB uzayı olmak üzere, her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompakttır.
- (3) F yansımali Banach örgüsü olmak üzere, her $T: E \rightarrow F$ hemen hemen aralık koruyan operatörü M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompakttır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ E' , pozitif Schur özelliğine sahip ve F bir KB uzay olsun. Genelliği bozmaksızın $T: E \rightarrow F$ operatörünü pozitif alabiliriz. E' sıra sürekli norma sahip ise ℓ_1 uzayına örgü izomorf olan hiçbir alt örgüsü yoktur ve F bir zayıf dizisel tam uzaydır ([6], Teorem 14.12). O halde $T: E \rightarrow F$ operatörü zayıf kompakt operatördür ([18], Teorem 1.7). Dolayısıyla $T': F' \rightarrow E'$ operatörü zayıf kompakttır. E' pozitif Schur özelliğine sahip olduğundan Teorem 4.9 gereği T' operatörü L -zayıf kompakttır. E' ve F sıra sürekli norma sahip ise Teorem 3.2.1 'den T operatörü L -zayıf kompakt ve M -zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 3) F bir yansımali Banach örgüsü ise Teorem 2.2.7 gereği F ve F' uzayları KB dir. T:E $\rightarrow$ F hemen hemen aralık koruyan operatör pozitif operatör olduğundan regüler operatördür. O halde hipotezimiz gereği T operatörü M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakttır.

(3 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki E' sıra sürekli norma sahip olmasın. O halde Teorem 2.2.5 'den $\exists y' \in E'$ için $\exists (y'_m) \subset [0, y'] \subset E'$ dik dizisi vardır ve $\lim \|y'_m\| \neq 0$ dır.

$\exists \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall m_0 \in \mathbb{N}$ için $\exists m \geq m_0 \quad \ni \quad \|y'_m\| \geq \varepsilon$ sağlanır. Yani,

$$m_0 = 1 \text{ için } \exists m_1 \geq 1 \quad \ni \quad \|y'_{m_1}\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{\varepsilon} y'_{m_1} \right\| \geq 1$$

$$m_0 = 2 \text{ için } \exists m_2 \geq 2 \quad \ni \quad \|y'_{m_2}\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{\varepsilon} y'_{m_2} \right\| \geq 1$$

.....

$$m_0 = n \text{ için } \exists m_n \geq n \quad \ni \quad \|y'_{m_n}\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{\varepsilon} y'_{m_n} \right\| \geq 1$$

.....

$x'_n = \frac{1}{\varepsilon} y'_{m_n}$ ve $x' = \frac{1}{\varepsilon} y'$ şeklinde tanımlandığında, E' sıra sürekli norma sahip değilse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x'_n\| \geq 1$ ve $(x'_n) \subset [0, x'] \subset E'$ olacak şekilde bir $x' \in E'$ ve bir (x'_n) dik dizisi bulabiliriz.

$$T: E \rightarrow \ell_1 \subset \ell_2 \quad ; \quad Tx = (x'_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlayalım. $x \in E$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^k |x'_n(x)| \leq \sum_{n=1}^k x'_n |x| = \left(\sum_{n=1}^k x'_n \right) |x| = \left(\bigvee_{n=1}^k x'_n \right) |x| \text{ sağlanır. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } x'_n \subset [0, x']$$

olduğundan $\bigvee_{n=1}^k x'_n \leq x'$ dır ve $\left(\bigvee_{n=1}^k x'_n \right) |x| \leq x' |x|$ bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$\left(\sum_{n=1}^k x'_n\right) |x| \leq x' |x|$ dir ve buradan $\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n(x)| \leq x' |x| < \infty$ elde edilir. Böylece

$Tx \in \ell_1$ olduğunu görürüz. O halde T operatörü anlamlıdır ve eşlek operatörü

$\forall (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ için ;

$$T': \ell_2 \rightarrow E' ; T'(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x'_n$$

biçimindedir. $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \ell_2$ dizileri için $\lambda \wedge \mu = 0$ sağlansın.

$\forall n, m \in \mathbb{N} (n < m)$ için ;

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i \wedge \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j = \bigvee_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i \wedge \mu_j x'_j \right) = \bigvee_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n (\lambda_i x'_i \wedge \mu_j x'_j) = \sum_{s=1}^n (\lambda_s \wedge \mu_s) x'_s = 0$$

sağlanır.

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i \right) \uparrow \text{ ve } \lim_{i=1}^n \sum \lambda_i x'_i = T'(\lambda) \text{ ise } \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i : n \in \mathbb{N} \right\} = T'(\lambda) \text{ dir.}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x'_i \right) \uparrow \text{ ve } \lim_{i=1}^m \sum \mu_i x'_i = T'(\mu) \text{ ise } \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i x'_i : m \in \mathbb{N} \right\} = T'(\mu) \text{ dir.}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i \wedge \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j \right) = 0 \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i \right) \wedge \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j = 0$$

$$\Rightarrow T'(\lambda) \wedge \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ T'(\lambda) \wedge \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j \right\} = 0$$

$$\Rightarrow T'(\lambda) \wedge \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j \right\} = 0$$

Böylece $\lambda \wedge \mu = 0$ ise $T'(\lambda) \wedge T'(\mu) = 0$ buluruz. Yani, T' operatörü örgü homomorfizmidir. Dolayısıyla T operatörü hemen hemen aralık koruyan operatördür ([17], Teorem 1.4.19). Hipotezimiz gereği T operatörü M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompaktır. $e_n = (\delta_{n,k}) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ dik dizisi için $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T'e_n = x'_n$ sağlanır. T' operatörü L-zayıf kompakt operatör ise $(x'_n) = (T'e_n) \subset \text{sol}(T'(U_{\ell_2}))$ dik dizi olduğundan $\|x_n\| \rightarrow 0$ dir. Eğer T' operatörü M-zayıf kompakt ise $(e_n) \subset U_{\ell_2}$ dik dizi olduğundan $\|x'_n\| = \|T'e_n\| \rightarrow 0$ olur. Bu ise (x'_n) dizisinin $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x'_n\| \geq 1$ olacak şekilde seçilişine çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış, yani E' sıra sürekli norma sahiptir.

E' pozitif Schur özelliğine sahip olduğunu göstermek için Teorem 4.10 ile her $T: E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatörünün M-zayıf kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. E' sıra sürekli norma sahip ise $T: E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatörü G yansımali Banach örgüsüne $Q: E \rightarrow G$ örgü homomorfizmi ve $S: G \rightarrow c_0$ pozitif operatör olmak üzere $T := S Q$ biçiminde faktör edilebilir ([5], Teorem 2.5). Q örgü homomorfizmi olduğundan $Q(E)$ bir alt örgüdür ve $F = \overline{Q(E)}^G$, G Banach örgüsü içinde bir alt örgü olur ([17], Önerme 1.2.3). G uzayının yansımali olmasından F yansımali bir Banach örgüsüdür. O halde $S_1 = S|_F$ şeklinde tanımlanırsa T operatörü $T := S_1 Q$ olacak biçimde F uzayına faktör edilebilir.

Şimdi $Q: E \rightarrow G$ operatörünün hemen hemen aralık koruyan bir operatör olduğunu gösterelim. $0 \leq x \in E$ elemanını sabitleyelim. $y \in [0, Qx] \subset F = \overline{Q(E)}$ ise $\exists (x_n) \subset E \ni Qx_n \rightarrow y$ dir. Q örgü homomorfizmi ise ;

$$Q(|x_n| \wedge x) = Q|x_n| \wedge Qx = |Qx_n| \wedge Qx \longrightarrow |y| \wedge Qx = y$$

dir. Sonuç olarak her bir $x \in E$ için $Q(|x_n| \wedge x) \longrightarrow y$ olacak şekilde $(|x_n| \wedge x) \subset [0, x]$ dizisi bulabiliriz. Böylece $y \in \overline{Q[0, x]}$, yani $[0, Qx] \subset \overline{Q[0, x]}$ olur. O halde $Q[0, x]$ kümesi, $[0, Qx]$ içinde yoğundur. Yani Q operatörü hemen hemen aralık koruyan operatör olur. Hipotezimiz gereği Q operatörü M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır. E' ve F sıra sürekli norma sahip olduklarından Teorem 3.2.1 gereği Q operatörü M -zayıf kompaktır. Dolayısıyla Önerme 3.1.19 gereği her $T: E \rightarrow c_0$ pozitif zayıf kompakt operatör M -zayıf kompakt operatördür. E' pozitif Schur özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki iki teorem Teorem 4.11 ve Teorem 4.12. 'ün bir sonucudur.

Teorem 4.13 : F Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) F KB uzayıdır.
- (2) E' eşleği pozitif Schur özelliğine sahip olacak biçimdeki E Banach örgüsü için her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.
- (3) Her $T: c_0 \rightarrow F$ örgü homomorfizmi M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ E' uzayı pozitif Schur özelliğine sahip ve F uzayı KB uzayı ise Teorem 4.12 gereği her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ regüler operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.

$(2 \Rightarrow 3)$ $T: c_0 \rightarrow F$ örgü homomorfizmi ise pozitif operatördür, dolayısıyla regüler operatör olur. $(c_0)' = \ell_1$ ve ℓ_1 pozitif Schur özelliğine sahip Banach

örgüsü olduğundan T operatörü hipotezimiz gereği M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.

(3 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki F uzayı KB olmasın. O halde F 'nin, c_0 uzayına örgü izomorf olan bir alt örgüsü vardır ([17], Teorem 2.4.12). Bu alt örgüyü W ile gösterirsek $\Phi: c_0 \rightarrow W \subset F$ şeklinde bir örgü izomorfizmi buluruz. Hipotez gereği Φ örgü izomorfizmi M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır. Böylece Φ operatörü zayıf kompakt ve c_0 , AM - uzayı olduğundan M -zayıf kompaktır. $(e_n) \subset U_{c_0}$ dik dizisini göz önüne alalım. $\Phi: c_0 \rightarrow W$ operatörü birebir ve örten ise Φ^{-1} vardır ve $\Phi^{-1} \geq 0$ olur.

$$1 = \|e_n\| = \|\Phi^{-1} \Phi e_n\| \leq \|\Phi^{-1}\| \|\Phi e_n\| \Rightarrow \frac{1}{\|\Phi^{-1}\|} \leq \|\Phi e_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi e_n\| \neq 0$$

eşitsizliğinden $\Phi: c_0 \rightarrow W \subset F$ operatörünün M -zayıf kompakt olmasına çelişki elde ederiz. O halde kabulümüz yanlış, yani F uzayı KB olur.

Teorem 4.14 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E' sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) F pozitif Schur özelliğine sahip Banach örgüsü olmak üzere her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.
- (3) Her $T: E \rightarrow \ell_1$ hemen hemen aralık koruyan operatör M -zayıf kompakt veya L -zayıf kompaktır.

İspat : (1 $\Rightarrow$ 2) E' sıra sürekli norma sahip ve F uzayı pozitif Schur özelliğine sahip ise Teorem 4.11 gereği her $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.

(2 $\Rightarrow$ 3) ℓ_1 , AL-uzayı olduğundan Schur özelliğine sahiptir ve her $T: E \rightarrow \ell_1$ hemen hemen aralık koruyan operatör pozitif operatör olduğundan hipotez gereği M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompaktır.

(3 $\Rightarrow$ 1) Kabul edelim ki E' uzayı sıra sürekli norma sahip olmasın. E' sıra sürekli norma sahip değilse Teorem 2.2.5 gereği $\exists x' \in E'$ için $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x'_n\| \geq 1$ olacak biçimde $(x'_n) \subset [0, x'] \subset E'$ dik dizisi bulabiliriz.

$$T: E \rightarrow \ell_1 \subset \ell_2 \quad ; \quad Tx = (x'_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

biçimde T operatörü tanımlayalım. O halde eşlek operatörü ;

$$T': \ell_2 \rightarrow E' \quad ; \quad T'(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x'_n$$

biçimindedir. T' operatörü örgü homomorfizmi olduğundan T operatörü hemen hemen aralık koruyan operatördür. Hipotez gereği T operatörü M-zayıf kompakt veya L-zayıf kompaktır. Yani T operatörü zayıf kompakt operatör olur. ℓ_1 Banach örgüsü bir AL-uzayı olduğundan T operatörü L-zayıf kompakt, dolayısıyla T' operatörü M-zayıf kompaktır.

$e_n = (\delta_{n,k}) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$, $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ dik dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T'e_n = x'_n$ sağlanır. $(e_n) \subset U_{\ell_2}$ dik dizi ve T' operatörü M-zayıf kompakt ise $\|x'_n\| = \|T'e_n\| \rightarrow 0$ olur. Bu sonuç ise (x'_n) dizisinin $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x'_n\| \geq 1$ koşulunu sağlamasına çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış, yani E' sıra sürekli norma sahip olur.

Bu iki sonuç Teorem 4.7 'de verilen (1) ve (2) koşullarının tek başlarına teoremin tersinin doğru olabilmesi için, yani zayıf kompakt operatörlerin

L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt olabilmeleri için yeterli olamayacağını gösterir. Aynı şekilde (3) koşulu da yeterli değildir.

Örnek 4.15 : $E = F = \ell_2$ olsun. E' ve F uzayları KB dir. ℓ_2 yansımali uzay olduğundan kapalı birim yuvarı zayıf kompakttır. Dolayısıyla $I: E \rightarrow F$ özdeşlik dönüşümü zayıf kompakt operatördür. Ancak $I: E \rightarrow F$ operatörü ne M-zayıf kompakt ne de L-zayıf kompakt operatördür.

AM-kompakt operatörler ilk olarak Dodds-Fremlin tarafından tanımlanmıştır [13].

Tanım 4.16 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T: E \rightarrow X$ ise doğrusal operatör olsun. Eğer her bir $x \in E^+$ için $T[-x, x]$ relatif kompakt küme ise T operatörüne AM-kompakt operatör denir.

Önerme 4.17 : E Banach örgüsü, X Banach uzayı olmak üzere her $T: E \rightarrow X$ kompakt operatörü AM-kompakttır.

İspat : $0 \neq x \in E^+$ için $\alpha = \frac{1}{\|x\|}$ olsun. $\alpha x \in U_E$ ise ;

$$[-\alpha x, \alpha x] \subset U_E \Rightarrow \overline{T([-\alpha x, \alpha x])} \subset \overline{T(U_E)}$$

sağlanır. T operatörü kompakt olduğundan $\overline{T(U_E)}$ kompakt , dolayısıyla $\overline{T([-\alpha x, \alpha x])}$ kümesi kompakttır. X Banach uzayında $\alpha \overline{T[-x, x]}$ kompakt ise $\overline{T[-x, x]}$ kümesi de kompakt olacağından T operatörü AM-kompakt olur.

Aşağıdaki teoremler [17], Teorem 3.7.21 'in bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.18 : E' eşlek uzayı sıra sürekli norma sahip olacak biçimde E Banach örgüsü ve F ise pozitif Schur özelliğine sahip Banach örgüsü olsun.

Bu durumda E uzayından F uzayı içine tanımlanan tüm regüler kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_r(E, F)$ içinde banddır.

İspat : E' uzayı sıra sürekli norma sahip ve F ise pozitif Schur özelliğine sahip ise Teorem 4.11 gereği her $T: E \rightarrow F$ regüler operatör M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır. O halde T regüler operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul AM -kompakt olmasıdır ([17], Teorem 3.7.4). Sonuç olarak E uzayından F uzayı içine tanımlı tüm regüler kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_r(E, F)$ içinde bir banddır ([17], Teorem 3.7.2).

Teorem 4.19 : E' eşleği pozitif Schur özelliğine sahip olacak biçimdeki E Banach örgüsü ve F ise KB uzay olsun. Bu durumda E uzayından F uzayı içine tanımlanan tüm regüler kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{L}_r(E, F)$ içinde banddır.

İspat : E' uzayı pozitif Schur özelliğine sahip ve F uzayı KB ise Teorem 4.12 gereği her $T: E \rightarrow F$ regüler operatör M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır. O halde T regüler operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul AM -kompakt olmasıdır ([17], Teorem 3.7.4). Sonuç olarak E 'den F 'ye tanımlı tüm regüler kompakt operatörler $\mathcal{L}_r(E, F)$ içinde banddır ([17], Teorem 3.7.2).

5. L-ZAYIF KOMPAKT VE M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN MODÜLLERİ

Kompakt ve zayıf kompakt operatörler bir modüle sahip olmak zorunda değildir, veya modüle sahip olsalar bile modül kompakt veya zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Bu bölümde L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin modüllerinin hangi durumlarda tanımlı olduğu ve modülün L-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt olması gerektiği verilecektir. İlk olarak bazı operatörler yardımıyla Banach örgüleri arasında L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörlerin tanımlanabileceği gösterilecektir. Daha sonra bu sonuçlar genel uzaylar için verilecektir.

$\ell_2^{2^n}$, 2^n -boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $x \in \ell_2^{2^n}$ için $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $S_{n+1} = \begin{bmatrix} S_n & S_n \\ S_n & -S_n \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan matrisler yardımıyla $\|S_n\| = 2^{n/2}$ olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n : \ell_2^{2^n} \rightarrow \ell_2^{2^n}$ operatörleri tanımlanabilir. $|S_n|$, bütün bileşenleri 1 olduğundan $1_n = (1,1,\dots,1)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) \in \ell_2^{2^n}$ için $|S_n| = \left(\sum_{k=1}^{2^n} x_k \right) 1_n$ şeklinde tanımlıdır ve $\| |S_n| \| = 2^n$ olur [2].

$\ell_2^{2^n}$, 2^n -boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $x \in \ell_2^{2^n}$ için

$$J_n : \ell_2^{2^n} \rightarrow L^2[0,1] \quad : \quad J_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}$$

şeklinde tanımlanan J_n bir örgü izomorfizmdir [2]. Gerçekten

$$|J_n x| = \left| \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right| \in L^2[0,1] \quad \text{ve} \quad J_n |x| = \sum_{k=1}^{2^n} |x_k| \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \in L^2[0,1]$$

her bir $t \in [0, 1]$ için bir tek $k \in \mathbb{N}$ vardır ve $t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$.

$$\sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) = x_k \quad \text{ve} \quad - \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) = -x_k \quad \text{ise}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right| = |x_k| \quad \text{sağlanır. Yani } \forall t \in [0, 1] \text{ için,}$$

$$|J_n x| = \left| \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right| = \sum_{k=1}^{2^n} |x_k| \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} = J_n |x|$$

J_n operatörü bir örgü izomorfizmdir.

$$\begin{aligned} |J_n x|^2(t) &= (J_n |x|)^2(t) = \left(\sum_{k=1}^{2^n} |x_k| \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right)^2(t) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2^n} |x_k| \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) \right) \left(\sum_{k=1}^{2^n} |x_k| \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) \right) \\ &= |x_k|^2 \end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} \|J_n x\|_2 &= \left(\int_0^1 |J_n x|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |J_n x|^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2^n} |x_k|^2 \frac{1}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \|x\|_{\ell_2^{2^n}} \end{aligned}$$

sağlanır. J_n ve S_n tanımlarından $J_n |S_n| x = \left(\sum_{k=1}^{2^n} x_k \right) \chi_{[0,1]}$ ve $\|J_n S_n\| = 1$,

$$\|J_n|S_n|\| = 2^{n/2} \text{ sağlanır.}$$

$$H_n = J_n(\ell_2^{2^n}) \text{ şeklinde tanımlarsak } H_n = \text{span}\left\{\chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} : 1 \leq k \leq 2^n\right\} \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $y = \sum_{k=1}^{2^n} x_k \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \in H_n$ için $J_n^{-1} : H_n \rightarrow \ell_2^{2^n}$; $J_n^{-1}(y) = (\alpha_k)_{k=1}^{2^n}$ olur.
Burada $\alpha_k = x_k$ 'dir.

$$H_n = J_n(\ell_2^{2^n}) \subset L^2[0,1] \text{ ve } f \in L^2[0,1] \text{ olmak üzere;}$$

$$Q_n : L^2[0,1] \rightarrow H_n ; Q_n(f) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}$$

şeklinde tanımlanan Q_n operatörü pozitif doğal projeksiyondur [2]. Gerçekten $f, g \in L^2[0,1]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} Q_n(f + \alpha g) &= 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} (f + \alpha g) \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \\ &= 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu + \alpha \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} g \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \\ &= 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} + \alpha 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} g \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \end{aligned}$$

olduğundan $Q_n(f + \alpha g) = Q_n(f) + \alpha Q_n(g)$ sağlanır. Yani Q_n operatörü lineerdir.

$$\begin{aligned}
 Q_n^2(f) &= Q_n(Q_n(f)) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} Q_n(f) \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \\
 &= 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \left[2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right] d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \\
 &= 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \\
 &= Q_n(f)
 \end{aligned}$$

Böylece Q_n operatörü bir projeksiyondur.

$$\|Q_n f\|_{L_2}^2 = \int_{[0,1]} \left[2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \right]^2 d\mu \leq 2^{2n} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right)^2 2^{-n}$$

$$\|Q_n f\|_{L_2}^2 \leq 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f| \, d\mu \right)^2 \quad \dots (*)$$

$$\text{Hölder eşitsizliğine göre} \quad \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f| \, d\mu \right)^2 \leq \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f|^2 \, d\mu \right) \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} d\mu \right) = \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f|^2 \, d\mu \right) 2^{-n}$$

sağlandığından (*) 'dan devam edersek

$$\|Q_n f\|_{L_2}^2 \leq 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f|^2 \, d\mu \right) 2^{-n} = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f|^2 \, d\mu = \int_0^1 |f|^2 \, d\mu = \|f\|_{L_2}^2 \Rightarrow \|Q_n f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}$$

dir. Ayrıca H_n sonlu boyutlu olduğundan Q_n kompakt bir operatördür. Q_n ve J_n^{-1} operatörlerini gözönüne alırsak

$$\|J_n^{-1}Q_n f\|_{\ell_2^{2^n}}^2 = \sum_{k=1}^{2^n} \left(2^n \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f \, d\mu \right)^2 \leq 2^{2n} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |f|^2 \, d\mu \right) 2^{-n} = 2^n \int_0^1 |f|^2 \, d\mu = 2^n \|f\|_{L_2}^2$$

$$\Rightarrow \|J_n^{-1}Q_n f\|_{\ell_2^{2^n}} \leq 2^n \|f\|_{L_2}$$

J_n, S_n, J_n^{-1} ve Q_n operatörlerinin yardımıyla

$$A_n : L^2[0,1] \longrightarrow H_n \quad ; \quad A_n = 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n$$

operatörünü tanımlayalım [2].

$$L_2[0,1] \xrightarrow{Q_n} H_n \xrightarrow{J_n^{-1}} \ell_2^{2^n} \xrightarrow{S_n} \ell_2^{2^n} \xrightarrow{J_n} H_n \subset L^2[0,1]$$

olduğundan A_n iyi tanımlıdır. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n operatörü kompakt operatördür ([6], Teorem 16.1). Her bir $f \in L^2[0,1]$ için

$$\|A_n f\|_{L_2} = \|2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n f\|_{L_2} \leq 2^{-n} \|J_n S_n\| \|J_n^{-1} Q_n f\|_{\ell_2^{2^n}} \leq 2^{-n} \|J_n S_n\| 2^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L_2}$$

elde edilir. Böylece her bir $f \in L^2[0,1]$ için $\|A_n f\| \leq 2^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L_2}$ sağlanır.

$|A_n| = 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n$ 'dir, gerçekten $U_n = 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n$ olsun. J_n^{-1} ve Q_n pozitif operatörler olduğundan her bir $0 \leq f \in L^2[0,1]$ için $J_n^{-1} Q_n f \geq 0$ dir ve

$\pm S_n \leq |S_n|$ olduğundan $\pm S_n(J_n^{-1}Q_n f) \leq |S_n|(J_n^{-1}Q_n f)$ sağlanır. Yine aynı şekilde J_n pozitif lineer operatör ve $2^{-n} \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} J_n(\pm S_n J_n^{-1} Q_n f) &\leq J_n(|S_n| J_n^{-1} Q_n f) \\ \pm 2^{-n} J_n S_n Q_n f &\leq 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n f \\ \pm A_n &\leq U_n \end{aligned}$$

dir. $\pm A_n \leq L_n$ olacak şekilde $L_n : L^2[0,1] \rightarrow H_n$ operatörünü göz önüne alalım.

O halde her bir $f \in L^2[0,1]$ için

$$\begin{aligned} \pm 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n f &\leq L_n f \\ 2^{-n} J_n(\pm S_n J_n^{-1} Q_n f) &\leq L_n f \\ \pm S_n Q_n f &\leq 2^n J_n^{-1}(L_n f) \\ \pm S_n J_n^{-1} Q_n f &\leq |S_n| J_n^{-1} Q_n f \leq 2^n J_n^{-1}(L_n f) \\ 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n f &\leq L_n f \\ U_n f &\leq L_n f \\ U_n &\leq L_n \end{aligned}$$

çıkar. Böylece $|A_n| = 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n$ sağlanır. Dolayısıyla

$$|A_n|(f) = \left(\int_0^1 f \, d\mu \right) \chi_{[0,1]} \text{ dir.}$$

Yukarıda yapılanları ve tanımları göz önüne alarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz :

Teorem 5.1 : $E = L^2[0,1]$ ve $F = c_0(L^2[0,1])$ olmak üzere M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt olacak şekilde $T:E \rightarrow F$ kompakt operatörü vardır. Ancak T operatörü regüler değildir.

İspat: $A_n = 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n$ olmak üzere;

$$T: E \rightarrow F ; Tf = (A_n f)_{n=1}^{\infty}, \forall f \in E$$

biçiminde tanımlayalım. Her $f \in L^2[0,1]$ için $A_n f \in L^2[0,1]$ ve $\|A_n f\|_{L_2} \leq 2^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L_2}$ sağlandığından $Tf \in c_0(L_2[0,1])$ dir.

$$T(U_E) = \{Tf : f \in U_E\} = \{(A_n f)_{n=1}^{\infty} : f \in U_E\} \subset \prod_{n=1}^{\infty} A_n(U_E)$$

Böylece $\overline{T(U_E)} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \overline{A_n(U_E)}$ elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n operatörleri kompakt olduğundan T operatörü de kompakttır. Böylece $T': F' \rightarrow E'$ operatörü kompakttır ([6], Teorem 16.2). E yansımali uzay olduğundan E' sıra sürekli norma sahiptir. $(E')^a = E'$ ve $\overline{T'(U_{F'})}$ kompakt kümesi L -zayıf kompakt küme olacağından $T': F' \rightarrow E'$ operatörü L -zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T: E \rightarrow F$ operatörü M -zayıf kompakt olur. Yine benzer şekilde F sıra sürekli norma sahip ise $F^a = F$ dir ve $\overline{T(U_E)} \subset F^a$ kompakt kümesi L -zayıf kompakt küme olacağından $T: E \rightarrow F$ operatörü L -zayıf kompakttır. Fakat T operatörü regüler değildir.

Teorem 5.2: $E = L^2[0,1]$ ve $F = c(L^2[0,1])$ olmak üzere E 'den F içine olan M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompakt bir regüler operatör tanımlanabilir. Fakat tanımlanan bu operatörün modülü yoktur.

İspat: $A_n = 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n$ ve $\lambda_{2n-1} = 1$, $\lambda_{2n} = 0$ olmak üzere ;

$$T: E \rightarrow F ; Tf = (\lambda_n A_n f)_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$T(U_E) = \{ Tf : f \in U_E \} = \{ (\lambda_n A_n f)_{n=1}^{\infty} : f \in U_E \} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n(U_E)$$

Böylece $\overline{T(U_E)} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n A_n(U_E)}$ sağlanır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için A_n kompakt olduğundan $\lambda_n A_n$ kompakttır. Dolayısıyla T operatörü kompakttır, yani $T': F' \rightarrow E'$ operatörü kompakttır ([6], Teorem 16.2). E yansımali uzay olduğundan E' sıra sürekli norma sahiptir. $(E')^a = E'$ dir ve $\overline{T'(U_{F'})}$ kompakt kümesi L -zayıf kompakt küme olacağından $T': F' \rightarrow E'$ operatörü L -zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T: E \rightarrow F$ operatörü M -zayıf kompakttır.

Yine benzer şekilde F sıra sürekli norma sahip ise $F^a = F$ ve $T(U_E) \subset F^a$ kompakt küme ise $T(U_E)$ L -zayıf kompakt küme olacağından $T: E \rightarrow F$ operatörü L -zayıf kompakttır.

$$\bar{1} = (\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots) \text{ olmak üzere } R: L^2[0,1] \rightarrow c(L^2[0,1]) ; Rf = \left(\int_0^1 f d\mu \right) \bar{1}$$

şeklinde tanımlanan R operatörü pozitifdir ve rank bir operatörü olduğundan kompakttır. $0 \leq f \in L^2[0,1]$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n f \leq \left(\int_0^1 f d\mu \right) \chi_{[0,1]}$ sağlanır. Böylece $T \leq R$ çıkar. Dolayısıyla T operatörü regüler operatördür.

$|T|: E \rightarrow F$ operatörünün tanımlı olduğunu kabul edelim. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall f \in E^+$ için;

$$|T|f \geq \pm(\lambda_n 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n f) \text{ ise } |T|f \geq \lambda_n 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n f$$

dir. Özel olarak $\chi_{[0,1]} \in E^+$ için $|T| \chi_{[0,1]} \geq \lambda_n 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n \chi_{[0,1]}$ sağlanır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n \chi_{[0,1]} = (\chi_{[0,1]}, 0, \chi_{[0,1]}, 0, \dots)$ olduğundan

$|T| \chi_{[0,1]} \notin F$ elde edilir. Bu ise kabulümüze çelişkidir. O halde T operatörünün modülü yoktur.

Teorem 5.3 : $E = \ell_1(L^2[0,1])$ ve $F = \ell_\infty(L^2[0,1])$ olmak üzere , $\pm T \leq U$ olacak şekilde, aşağıdaki koşulları sağlayan $T, U: E \rightarrow F$ operatörleri bulunabilir.

- (1) T operatörü M -zayıf kompakt ve L -zayıf kompaktır.
- (2) T ve U operatörleri kompaktır.
- (3) T operatörünün modülü vardır, fakat modül zayıf kompakt değildir.

Dolayısıyla modül ne M -zayıf kompakt , ne de L -zayıf kompaktır.

İspat : $A_n = 2^{-n} J_n S_n J_n^{-1} Q_n$ olmak üzere $\forall f = (f_n)_{n=1}^\infty \in E$ için ;

$$T: E \rightarrow F ; T(f_n) = \left(\sum_{k=n}^\infty A_k f_k \right)_{n=1}^\infty$$

$$U: E \rightarrow F ; U(f_n) = \left(\sum_{k=1}^\infty |A_k| f_k \right)_{n=1}^\infty = \left(\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 f_k dt \right) (\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots)$$

operatörlerini tanımlayalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için ;

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=n}^\infty A_k f_k \right|^2 d\mu &\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^\infty |A_k| |f_k| \right)^2 \\ &\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^\infty 2^{-n} J_n |S_n| J_n^{-1} Q_n |f_k| \right)^2 d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_k| d\mu \right) \chi_{[0,1]} \right)^2 d\mu \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 |f_k| d\mu \right)^2 \chi_{[0,1]} d\mu \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 |f_k| d\mu \right) \right]^2 \chi_{[0,1]} d\mu \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 |f_k| d\mu \right) \int_0^1 \chi_{[0,1]} d\mu \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 |f_k| d\mu \right) = \sum_{k=n}^{\infty} \|f_k\|_{L^2} < \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k \in L^2[0,1]$ dir. $f = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1(L^2[0,1])$ için,

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k \right\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k \right|^2 d\mu \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |f_k| d\mu \right) \leq \|f\|_{\ell_1}$$

$T(f_n) \in \ell_{\infty}(L^2[0,1])$ ve $U(f_n) \in \ell_{\infty}(L^2[0,1])$ dir. $0 \leq (f_n) \in E^+$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f_n \in L^2[0,1]$ olur ve

$$\begin{aligned}
\pm T(f_n) &= \left(\pm \sum_{k=1}^{\infty} A_k f_k, \pm \sum_{k=2}^{\infty} A_k f_k, \dots \right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| f_k, \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| f_k, \dots \right) = U(f_n)
\end{aligned}$$

$\pm T \leq U$ elde edilir. $\forall (f_n) \in E$ için $U(f_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k dt \right) (\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots)$ ise U operatörü rank bir operatörü olduğundan kompakt olur.

$$\begin{aligned}
\|U(f_n)\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k d\mu \right) \chi_{[0,1]} \right\|_{L_2} = \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k d\mu \right|^2 \chi_{[0,1]} d\mu \right]^{1/2} \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f_k d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_k|^2 \right)^{1/2} = \| (f_n) \|_{\ell_1},
\end{aligned}$$

böylece $\|U(f_n)\|_\infty \leq \| (f_n) \|_{\ell_1}$, yani U operatörü sınırlı olur.

İddia : T operatörü kompakttır.

$$H_n : \ell_1(L^2[0,1]) \rightarrow L^2[0,1] ; H_n(f_k) := \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

operatörünü tanımlayalım. H_n operatörleri yardımıyla her bir $m \in \mathbb{N}$ için,

$$H_{nm} : \ell_1(L^2[0,1]) \rightarrow L^2[0,1] ; H_{nm}(f_k) := \sum_{k=n}^{n+m} A_k f_k$$

şeklinde tanımladığımız H_{nm} operatörleri, $A_k : L^2[0,1] \rightarrow J_n(\ell_2^{2^n})$ ve boy $(J(\ell_2^{2^n})) = 2^n$ olduğundan sonlu rank operatörleri olur. Dolayısıyla her bir $n, m \in \mathbb{N}$ için H_{nm} operatörü kompakt operatördür.

$$\begin{aligned}
\|H_n - H_{nm}\| &= \sup \left\{ \|H_n(f_k) - H_{nm}(f_k)\|_{L_2} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k - \sum_{k=n}^{n+m} A_k f_k \right\|_{L_2} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left\| \sum_{k=n+m+1}^{\infty} A_k f_k \right\|_{L_2} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=n+m+1}^{\infty} \|A_k f_k\|_{L_2} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=n+m+1}^{\infty} 2^{-k/2} \|f_k\|_{L_2} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sum_{k=n+m+1}^{\infty} 2^{-k/2}
\end{aligned}$$

olduğundan $H_{nm} \rightarrow H_n$ sağlanır. Kompakt operatörler kümesi $L(E, F)$ içinde norm kapalı alt vektör uzayı olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $H_n : E \rightarrow L^2[0, 1]$ operatörü kompakttır ([6], Teorem 16.1).

$$S_n : E \rightarrow F \quad ; \quad S_n(f_k) := (H_1(f_k), H_2(f_k), \dots, H_n(f_k), 0, 0, \dots)$$

şeklinde tanımlanan S_n operatörü için

$$S_n(U_E) \subset \prod_{k=1}^n H_k(U_E) \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \Rightarrow \overline{S_n(U_E)} \subset \overline{\prod_{k=1}^n H_k(U_E)} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$$

sağlandığından her bir $n \in \mathbb{N}$ için S_n operatörleri de kompakttır.

$$\begin{aligned}
\|T - S_n\| &= \sup \left\{ \|T(f_k) - S_n(f_k)\|_{\infty} : \| (f_k) \|_{\ell_1} \leq 1 \right\} \\
&= \sup_{\|(f_k)\| \leq 1} \left\{ \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k \right)_{n=1}^{\infty} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k f_k, \sum_{k=2}^{\infty} A_k f_k, \dots, \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k, 0, 0, \dots \right) \right\|_{\infty} \right\} \\
&= \sup_{\|(f_k)\| \leq 1} \left\{ \left\| \left(0, 0, \dots, 0, \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k f_k, \sum_{k=n+2}^{\infty} A_k f_k, \dots \right) \right\|_{\infty} \right\} \\
&= \sup_{\|(f_k)\| \leq 1} \left\{ \sup_{k \geq n+1} \left\| \sum_k A_k f_k \right\|_2 \right\} \\
&\leq \sup_{\|(f_k)\| \leq 1} \left\{ \sup_{k \geq n+1} \sum_k \|A_k f_k\|_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|(f_k)\| \leq 1} \left\{ \sup_{k \geq n+1} \sum_k 2^{-k/2} \|f_k\|_2 \right\} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k/2}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $S_n \rightarrow T$ sağlanacağından T operatörü kompakttır ([6], Teorem 16.1).

U pozitif bir operatör ve $\pm T \leq U$ sağlandığından T operatörü regülerdir. Dolayısıyla $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ elde edilir. F Dedekind tam uzay ise $\mathcal{L}_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzay olacağından $|T|: E \rightarrow F$ tanımlıdır. n . bileşeni $\chi_{[0,1]}$ ve diğer bütün bileşenleri 0 olan $(w_n) = (0, 0, \dots, 0, \chi_{[0,1]}, 0, \dots) \in \ell_1(L^2[0,1])$ dizisini göz önüne alalım. $\|(w_n)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{L_2} = 1$ olduğundan $(w_n) \subset U_E$ kapsamı vardır.

$$\begin{aligned}
|T|w_n &= \left(\sum_{k=n}^{\infty} |A_k| w_n^k \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 w_n^k d\mu \right) \chi_{[0,1]}, \sum_{k=2}^{\infty} \left(\int_0^1 w_n^k d\mu \right) \chi_{[0,1]}, \dots \right) \\
&= (\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots, \chi_{[0,1]}, 0, 0, \dots)
\end{aligned}$$

$|T|w_n \uparrow$ ve $\forall n, m \in \mathbb{N} (n > m)$ için;

$$\| |T|w_n - |T|w_m \|_{\infty} = \| (0, \dots, 0, \chi_{[0,1]}, \dots, \chi_{[0,1]}, 0, \dots) \|_{\infty} = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $(|T|w_n)$ Cauchy dizisi olmadığından norm yakınsak değildir. Dini teoremine göre zayıf yakınsak değildir ve $\{|T|w_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi hiçbir zayıf yakınsak alt diziye sahip değildir ([17], Önerme 1.4.1). O halde $\overline{|T|(U_E)}$ zayıf kompakt olmadığından $|T|$

operatörü zayıf kompakt değildir ([6], Teorem 10.13). Dolayısıyla $|T|$ operatörü Teorem 3.1.14 gereği M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatör değildir.

$$(f_n) \in U_E \Rightarrow \| (f_n) \|_{\ell_1} \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_2 \leq 1 \Rightarrow \| f_n \|_2 \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k f_k \right\|_{L_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \| A_k f_k \|_{L_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k/2} \| f_k \|_{L_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k/2}$$

Böylece $T(f_n) \in c_0(L^2[0,1])$ olur ve $T(U_E) \subset c_0(L^2[0,1])$ elde edilir. Diğer taraftan $T(U_E) \subset c_0(L^2[0,1]) \subset F^a$ sağlanacağından $\overline{T(U_E)}$, F^a içinde bir kompakt kümedir. O halde $T(U_E)$ kümesi L-zayıf kompakt olduğundan T operatörü L-zayıf kompakttır.

$T(U_E) \subset c_0(L^2[0,1])$ sağlandığından T operatörünü $T: E \rightarrow c_0(L^2[0,1])$ şeklinde düşünebiliriz. T' adjoint operatörü her bir $(g_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1(L^2[0,1])$ için,

$$T': \ell_1(L^2[0,1]) \rightarrow \ell_{\infty}(L^2[0,1]) \quad ; \quad T'(g_n) := \left(A_n \left(\sum_{k=1}^n g_k \right) \right)_{n=1}^{\infty}$$

biçiminde tanımlıdır. T operatörü kompakt olduğundan T' operatörü de kompakt operatördür ([6], Teorem 16.2).

$$\left\| A_n \left(\sum_{k=1}^n g_k \right) \right\|_{L_2} \leq \| A_n \| \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_{L_2} \leq 2^{-n/2} \sum_{k=1}^n \| g_k \|_{L_2} \leq 2^{-n/2} \| (g_n) \|_{\ell_1}$$

böylece $\forall (g_n) \in \ell_1(L^2[0,1])$ için $T'(g_n) \in c_0(L^2[0,1])$ olur. Yani,

$$T' \ell_1(L^2[0,1]) \subset c_0(L^2[0,1]) \subset (E')^a$$

elde edilir. Dolayısıyla $\overline{T'(U_{\ell_1})}$ kompakt bir küme olduğundan $T'(U_{\ell_1})$ L-zayıf kompakttır. O halde T' operatörü L-zayıf kompakt ise Teorem 3.1.18 gereği T operatörü M-zayıf kompakttır.

L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler regüler operatörler uzayı içinde ideal olduklarından Teorem 5.3 'de görüldüğü üzere $\pm T \leq U$ şartını sağlayan U operatörünü L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt olacak şekilde tanımlayamayız.

Teorem 5.4 : E Banach örgüsü olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) E bir AL-uzayına örgü izomorftur.
- (2) F Banach örgüsü ise her $T:E \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt modüle sahiptir.
- (3) Her $T:E \rightarrow \ell_1$ L-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt modüle sahiptir.

İspat : $(1 \Rightarrow 2)$ E bir AL-uzayına örgü izomorf, F Banach örgüsü ve $T:E \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatör olsun. $T(U_E)$ kümesi L-zayıf kompakt olacağından relatif zayıf kompakttır. Dolayısıyla $U_E^+ \subset U_E$ ise $|T(U_E^+)| \subset \text{sol}(T(U_E))$ kapsamı sağlanacağından $|T(U_E^+)|$ kümesi relatif zayıf kompakttır. K , $|T(U_E^+)|$ kümesinin kapalı konveks zarfı olmak üzere K zayıf kompakttır ([6], Teorem 10.15). Her bir $x \in U_E^+$ için

$$A_x = \left\{ \sum_{i=1}^n |Tx_i| : i=1, \dots, n \quad x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\}$$

şeklinde tanımlansın. $x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j$ olmak üzere Riesz ayrışım teoremi ile

$1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $x_i = \sum_{j=1}^m z_{ij}$ ve $y_j = \sum_{i=1}^n z_{ij}$ olacak şekilde z_{ij} pozitif

elemanları vardır ve $x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}$ biçiminde yazılır. O halde

$$\sum_{i=1}^n |Tx_i| = \sum_{i=1}^n \left| T \left(\sum_{j=1}^m z_{ij} \right) \right| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m Tz_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |Tz_{ij}| \quad \text{ve benzer şekilde}$$

$$\sum_{i=1}^n |Ty_j| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |Tz_{ij}| \quad \text{sağlanacağından } A_x \text{ kümesi yukarı yönlendirilmiştir.}$$

$x = \sum_{i=1}^n x_i$ olmak üzere $y_i = T \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right)$ olsun. Diğer taraftan E AL-uzay

olduğundan $\sum_{i=1}^n \|x_i\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| = \|x\| \leq 1$ bulunur.

$$\sum_{i=1}^n |Tx_i| = \sum_{i=1}^n \|x_i\| T \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right) = \sum_{i=1}^n \|x_i\| |y_i| \Rightarrow \sum_{i=1}^n |Tx_i| \in K \Rightarrow A_x \subset K$$

A_x , K zayıf kompakt kümesi içinde yukarı yönlendirilmiş ise K zayıf kompakt olduğundan zayıf yakınsaktır. Dolayısıyla Dini teoremi gereği norm yakınsaktır ([17], Önerme 1.4.1). O halde $\sup A_x \in K$ ve T operatörünün modülü $|T|: E \rightarrow F$ tanımlıdır ([6], Teorem 1.10).

$T(U_E)$ kümesinin solid konveks zarfı B olsun. $T(U_E)$ L -zayıf kompakt ise Önerme 3.1.6 gereği B kümesi de L -zayıf kompakttır. $|T|(U_E) \subset B$ sağlandığından $|T|(U_E)$ L -zayıf kompakt küme, dolayısıyla $|T|$ operatörü L -zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 3) ℓ_1 Banach örgüsü olduğundan hipotez gereği her $T:E \rightarrow \ell_1$ L-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt modüle sahiptir.

(3 $\Rightarrow$ 1) Her $T:E \rightarrow \ell_1$ kompakt operatörü zayıf kompakt ve ℓ_1 AL-uzay olduğundan Teorem 3.1.17 gereği L-zayıf kompakttır. Hipotez gereği $|T|:E \rightarrow \ell_1$ tanımlıdır ve T operatörü $T = (|T| - T) - |T|$ olacak şekilde iki pozitif operatörün farkı olarak yazabiliriz. O halde E Banach örgüsü bir AL-uzayına örgü izomorfiktir ([8], Teorem 1).

Tanım 5.5 : E Banach örgüsünün pozitif elemanlarından oluşan norm sınırlı yukarı yönlendirilmiş her kümenin E içinde bir supremumu varsa E üzerindeki norma Levi norm denir $\{\forall (x_\alpha) \subset U_E^+, 0 \leq x_\alpha \uparrow \text{ ağı için } \sup_{\alpha \in I} x_\alpha \in E\}$.

Benzer olarak pozitif elemanlarından oluşan norm sınırlı yukarı yönlendirilmiş her dizinin E içinde bir supremumu varsa E üzerindeki norma dizisel Levi normu denir $\{\forall (x_n) \subset U_E^+, 0 \leq x_n \uparrow \text{ ağı için } \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \in E\}$. Dolayısıyla Levi normuna sahip her Banach örgüsü Dedekind tam uzaydır.

Teorem 5.6 : F Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) F sıralı birime sahip Dedekind tam uzaydır.
- (2) E Banach örgüsü olmak üzere, her $T:E \rightarrow F$ M-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakt modüle sahiptir.
- (3) E birimli AM-uzay olmak üzere, her $T:E \rightarrow F$ M-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakt modüle sahiptir.

İspat : (1 $\Rightarrow$ 2) E Banach örgüsü, F sıra birime sahip Dedekind tam uzay ve $T:E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakt olsun. O halde Teorem 3.1.18 gereği $T':F' \rightarrow E'$ eşlek operatörü L-zayıf kompakttır ve F sıra birime sahip

olduğundan F uzayı bir AM-uzayına örgü izomorftur. Dolayısıyla F' eşleği AL-uzayına örgü izomorftur. Böylece Teorem 5.4 gereği $|T'|:F' \rightarrow E'$ operatörü tanımlıdır ve L-zayıf kompakttır. Teorem 3.1.18 den $|T'|':E'' \rightarrow F''$ operatörü M-zayıf kompakttır. F uzayı sıra birime sahip ise $P:F'' \rightarrow F$ bir pozitif daraltma projeksiyonu vardır ([17],Teorem 1.5.10). $i:E \rightarrow E''$ doğal gömme olmak üzere $|T| = P|T'|'i$ sağlanır ([17],Teorem 1.5.12.). O halde i örgü homomorfizmi ve $|T'|'$ operatörü M-zayıf kompakt olduğundan Önerme 3.1.19 gereği $|T|$ operatörü M-zayıf kompakttır.

(2 $\Rightarrow$ 3) E birimli AM-uzayı Banach örgüsü olduğundan hipotez gereği her $T:E \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt bir modüle sahiptir.

(3 $\Rightarrow$ 1) 1.Adım: F dizisel Levi norma sahiptir. F Banach örgüsünün dizisel Levi norma sahip olduğunu göstermek için, tüm sonlu toplamalarının kümesi norm sınırlı olacak şekilde her pozitif dik dizinin F 'de bir supremuma sahip olduğunu göstermek yeterlidir ([3],Teorem 2.4). Bu şartı sağlayan dik dizi $(y_n) \subset F^+$ olsun. Bu dizi yardımıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $r_n:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ Rademacher fonksiyonları olmak üzere ;

$$T:C[0,1] \rightarrow F \quad ; \quad Tf := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f r_n dt \right) y_n$$

şeklinde tanımlayalım. $S = \left\{ y = \sum_{i \in \sigma} y_i : \sigma \subset \mathbb{N} \text{ sonlu} \right\}$ olmak üzere $\forall y \in S$ için

$\|y\| \leq M$ olacak şekilde $0 \leq M \in \mathbb{R}$ vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L^1[0,1]$ uzayında

$r_n \xrightarrow{w} 0$ ise $\forall f \in C[0,1]$ için $\int_0^1 f r_n dt \rightarrow 0$. $\forall \varepsilon > 0$ karşılık

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$ için $\left| \int_0^1 f r_n dt \right| < \varepsilon / 2M$ dir. $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 f r_k dt \right) y_k$ olmak

üzere $n > m > n_0$ için

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n \left(\int_0^1 f r_k dt \right) y_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{\varepsilon}{2M} y_k \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \left\| \sum_{k=m+1}^n y_k \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} M < \varepsilon \end{aligned}$$

(S_n) dizisi Cauchy dizisi ve F tam uzay olduğundan (S_n) yakınsaktır.

Dolayısıyla $\forall f \in C[0,1]$ için $Tf \in F$ elde edilir. $C[0,1] \subset L^2[0,1]$ olduğundan,

$i: C[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$ doğal gömme ve $S: L^2[0,1] \rightarrow F$; $Sf := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f r_n dt \right) y_n$

olmak üzere T operatörü $L^2[0,1]$ uzayı üzerine $T := S \circ i$ şeklinde faktör edilebilir.

T operatörü yansımali bir uzay üzerine faktör edilebildiğinden zayıf kompakt operatördür ([6], Teorem 17.7). $C[0,1]$ birimli AM-uzayı olduğundan

Teorem 3.1.16 gereği T operatörü M -zayıf kompakttır. Hipotezimiz gereği

$|T|: C[0,1] \rightarrow F$ operatörü M -zayıf kompakttır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n = \sin(2^n \pi t) \in C[0,1]$ göz önüne alalım. $|f_n| \leq 1$ ve

$\int_0^1 f_n r_m dt = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \frac{2}{\pi} & , \quad n = m \end{cases}$ sağlandığından $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Tf_n = \frac{2}{\pi} y_n$ dir. $|T|$ tanımlı

olduğundan $Tf_n \leq |Tf_n| \leq |T| |f_n| \leq |T| 1$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{2}{\pi} y_n \leq |T| 1$ sağlanır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{2}{\pi} y_n \leq y$ olacak şekilde $y \in F$ elemanını seçelim ve U operatörünü

$$U: C[0,1] \rightarrow F \quad ; \quad Uf := \left(\int_0^1 f \, dt \right) y$$

şeklinde tanımlayalım. U operatörü pozitif bir operatördür. Diğer taraftan

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \sum_{k=1}^n y_k = \bigvee_{k=1}^n y_k \leq y \quad \text{olduğundan} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \sum_{k=1}^n y_k \leq y \quad \text{çıkar,}$$

böylece $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \leq y$ elde ederiz. $0 \leq f \in C[0,1]$ için ;

$$\pm T f \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f r_n| \, dt \right) y_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f \, dt \right) y_n = \left(\int_0^1 f \, dt \right) \sum_{n=1}^{\infty} y_n \leq \left(\int_0^1 f \, dt \right) y = Uf$$

sağlandığından $\pm T \leq U$ dir. O halde $|T| \leq U$ sıralamasından $|T|1 \leq U1 = y$ olur. O halde $\sup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \in F$ dir, dolayısıyla F dizisel Levi normuna sahiptir ([3], Teorem 2.4).

2.Adım: F Levi normuna sahiptir. F uzayının Levi normuna sahip olduğunu göstermek için ; tüm sonlu toplamalarının oluşturduğu küme norm sınırlı olan , pozitif ve birbirine dik elemanlardan oluşan her kümenin F içinde bir supremuma sahip olduğunu göstermek yeterlidir ([3], Teorem 2.3.). Bu şartları sağlayan bir küme $\{y_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ olsun. $K_\alpha = \{0,1\}$ ve K_α üzerindeki diskret topoloji τ_α olmak üzere $\forall \alpha \in \Gamma$ için (K_α, τ_α) kompakt Hausssdorf uzaydır. Yine aynı şekilde $K = \prod_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ ve τ , K üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere (K, τ) kompakt Hausssdorf uzaydır.

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \in K \Rightarrow x_\alpha = 0 \quad \text{veya} \quad x_\alpha = 1$$

$$\forall \alpha \in \Gamma \quad \text{için} \quad \mu_\alpha : K_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \mu(\{0\}) = \frac{1}{2} = \mu(\{1\}) \quad \text{olacak şekilde olasılık ölçüsü}$$

olmak üzere $\mu: K \rightarrow \mathbb{R}$; $\mu = \prod_{\alpha \in \Gamma} \mu_{\alpha}$ şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla $\forall A \subset K$

için $\mu(A) = \prod_{\alpha \in \Gamma} \mu_{\alpha}(A)$. İddia ediyoruz ki $A = \prod_{\alpha \in \Gamma} A_{\alpha}$ kümesi ancak sayılabilir

sayıda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ hariç $\mu(A_{\alpha}) = 1$ ise sıfırdan farklıdır. $\forall \alpha$ için $A_{\alpha} \neq \emptyset$

olsun. $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \frac{1}{\varepsilon} < n_0 < 2^{n_0} \Rightarrow \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$

Sayılabılır tane $\alpha \in \Gamma$ için $A_{\alpha} \neq K_{\alpha}$ olsun. O halde $k=1,2,\dots$ için $A_{\alpha_k} = \{0\}$

veya $A_{\alpha_k} = \{1\} \Rightarrow \mu_{\alpha}(A_{\alpha_1}) = \mu_{\alpha}(A_{\alpha_2}) = \dots = \mu_{\alpha}(A_{\alpha_n}) = \dots = 2^{-1}$.

$\mu(A) = \prod_{\alpha \in \Gamma} \mu_{\alpha}(A_{\alpha}) \leq 2^{-n_0} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\mu(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(A) = 0$

Diğer taraftan $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrallenebilir ise f sadece sayılabilir tane değişkene bağlıdır. Yani $x = (x_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma} \in K$ ve $y = (y_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma} \in K$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \in \Gamma$ için $x_{\alpha_k} = y_{\alpha_k}$ olduğundan $f(x) = f(y)$ dir.

$$\Phi_{\alpha}: K \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \Phi_{\alpha}(x_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma} := \begin{cases} 1 & ; \quad x_{\alpha} = 0 \\ -1 & ; \quad x_{\alpha} = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonel süreklidir. $K_1 = \{x = (x_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma} : x_{\alpha} = 0\}$ ve

$K_2 = \{x = (x_{\alpha})_{\alpha \in \Gamma} : x_{\alpha} = 1\}$ biçiminde tanımlanan kümeler için $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

ve $K_1 \cup K_2 = K$ sağlanır. $x \in K$ için $\Phi_{\alpha}(x) = 1$ ise

$\Phi_{\alpha}^{-1}((1-\varepsilon, 1+\varepsilon)) = \begin{cases} K_1 & ; \quad -1 \notin (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \\ K_2 & ; \quad -1 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \end{cases}$ açık ve $\Phi_{\alpha}(x) = -1$ ise

$\Phi_{\alpha}^{-1}((-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)) = \begin{cases} K_2 & ; \quad 1 \notin (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \\ K & ; \quad 1 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \end{cases}$ açık küme olduğundan Φ_{α}, K

üzerinde süreklidir. Böylece $\Phi_{\alpha} \in C(K) \subset L^{\infty}(\mu)$ elde edilir. Kabul edelim ki

$f \in L^1(\mu)$ fonksiyonu α . bileşene bağlı olmasın. Yani $x = (x_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \in K$ ve

$y = (y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in K$ olmak üzere $x_\alpha \neq y_\alpha$ ve $\alpha \neq \gamma$ iken $x_\gamma = y_\gamma$ olduğunda $f(x) = f(y)$ olsun. O halde;

$$\int_K f \Phi_\alpha d\mu = \int_{K_1 \cup K_2} f \Phi_\alpha d\mu = \int_{K_1} f \Phi_\alpha d\mu + \int_{K_2} f \Phi_\alpha d\mu = \int_{K_1} f d\mu - \int_{K_2} f d\mu = 0 \Rightarrow f|_{K_1} = f|_{K_2}$$

$\alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\alpha \neq \beta$ ise Φ_β , α . bileşene bağlı değildir ve $\int_K \Phi_\alpha \Phi_\beta d\mu = 0$ dır.

$f \in L^1(\mu)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ sayılabilir tane değişkene bağlı ise $\alpha \neq \alpha_k$ için $\int_K f \Phi_\alpha d\mu = 0$ olur. Yani sadece sayılabilir tane değişken için $\int_K f \Phi_\alpha d\mu \neq 0$

olabilir. $\|\Phi_\alpha\|^2 = \int_K |\Phi_\alpha|^2 d\mu = \mu(K) = 1$ ve $|\Phi_\alpha| = 1_K$ olduğundan $\{\Phi_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$

kümesi $L^2(\mu)$ içinde ortonormal bir kümedir.

$$T: C(K) \rightarrow F ; \quad T f := \sum_{\alpha \in \Gamma} \left(\int_K f \Phi_\alpha d\mu \right) y_\alpha$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $\sum_{\alpha \in \Gamma} \left(\int_K f \Phi_\alpha d\mu \right) y_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_K f \Phi_{\alpha_k} d\mu \right) y_{\alpha_k}$ olur.

$L^2(\mu)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall f \in L^2(\mu)$ için Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} | \langle f, \Phi_\alpha \rangle |^2 = \sum_{\alpha \in \Gamma} \left| \int_K f \Phi_\alpha d\mu \right|^2 \leq \|f\|_2^2$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\int_K f \Phi_{\alpha_k} d\mu \right) y_{\alpha_k}$$

olmak üzere ;

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_K f \Phi_{\alpha_k} d\mu \right) y_{\alpha_k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_K f \Phi_{\alpha_k} d\mu \right| y_{\alpha_k} \leq \|f\| \sum_{k=1}^n y_{\alpha_k}$$

olduğundan $\|S_n\| \leq \|f\| M$ dir. Dolayısıyla T operatörü iyi tanımlıdır. T operatörü $L^2(\mu)$ yansımali uzayı üzerine; $i: C(K) \rightarrow L^2(\mu)$ doğal gömme ve

$$S: L^2(\mu) \rightarrow F \quad ; \quad S f := \sum_{\alpha \in \Gamma} \left(\int_K f \Phi_{\alpha} d\mu \right) y_{\alpha} \quad \text{olmak üzere } T = S i \quad \text{olacak şekilde}$$

faktör edilebilir. O halde T operatörü zayıf kompakttır. ([6] Teorem 17.7). $C(K)$ AM-uzay olduğundan Teorem 3.1.16 gereği T operatörü M -zayıf kompakttır. Dolayısıyla hipotezimiz gereği $|T|: C(K) \rightarrow F$ operatörü M -zayıf kompakttır. Diğer taraftan benzer şekilde $\sup\{y_{\alpha} : \alpha \in \Gamma\} \in F$ sağlanır. O halde F Levi norma sahiptir. Dolayısıyla Dedekind tam uzaydır

3.Adım : İddia ediyoruz ki F sıralı birime sahiptir. $T: C(K) \rightarrow F$ şeklinde tanımlanan her kompakt operatör M -zayıf kompakt olacağından hipotez gereği $|T|: C(K) \rightarrow F$ operatörü M -zayıf kompakttır. Dolayısıyla $T = |T| - (|T| - T)$ eşitliği sağlanacağından F Banach örgüsü bir AM-uzayına örgü izomorftur ([8], Teorem 1). $A = \left\{ \bigvee_{k \in \sigma} y_k : \sigma \subset \mathbb{N} \text{ sonlu, } y_k \in U_F^+ \right\}$ kümesi

yönlendirilmiş bir kümedir ve $\left\| \bigvee_{k=1}^n y_k \right\| = \max\{\|y_k\| : k = 1, 2, \dots, n\} \leq 1$. F uzayı

Levi norma sahip olduğundan $e = \sup A \in F$ dir. O halde $0 \neq y \in F$ için $\frac{|y|}{\|y\|} \in A$

olur. Böylece $\frac{|y|}{\|y\|} \leq e$ ise $|y| \leq \|y\| e$ ve, $0 < \|y\| \in \mathbb{R}$ sağlandığından e, F

uzayının bir sıra birimidir.

Teorem 5.7 : E AL-uzayı ve F Banach örgüsü olmak üzere, her $T:E \rightarrow F$ M-zayıf kompakt operatör, M-zayıf kompakt modüle sahiptir.

İspat : E AL-uzay F Banach örgüsü ve $T:E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakt olsun. E uzayının tüm atomlarının ürettiği band E_1 ve $E_2 = E_1^d$ olsun. E Dedekind tam uzay olduğundan her band bir projeksiyon band ise $E = E_1 \oplus E_2$ biçiminde yazılabilir.

$$T|_{E_1} = T_1 : E_1 \rightarrow F \quad \text{ve} \quad T|_{E_2} = T_2 : E_2 \rightarrow F$$

şeklinde tanımlanan operatörler M-zayıf kompakt operatörlerdir. Dolayısıyla $T_2' : F' \rightarrow E_2'$ operatörü L-zayıf kompakttır. O halde $T_2' (U_{F'}) \subset (E_2')^a$ sağlanır. E_2 hiçbir atom içermeyen AL-uzay olduğundan μ hiç atom içermeyecek biçimde bir ölçüm olmak üzere $E_2 = L^1(\mu)$ kabul edebiliriz ([17], Teorem 2.7.1). $(E_2')^a = (L^\infty(\mu))^a = \{0\}$ sağlandığından $T_2' = 0$, dolayısıyla $T_2 = 0$ dir.

O halde E uzayını atomik kabul edebiliriz. Yani $E \cong \ell_1(\Gamma)$ dir. E uzayındaki her bir dizi sayılabilir sayıda değişkene bağlı olduğundan genelliği bozmaksızın Γ kümesini sayılabilir kabul edebiliriz. Böylece $E \cong \ell_1$ olur. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi E uzayının doğal tabanı olmak üzere, T operatörü M-zayıf kompakt ise $\|Te_n\| \rightarrow 0$ dir. $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists K \in \mathbb{N}$ $\ni \forall k \geq K$ için $\|Te_k\| < \varepsilon$ sağlanır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (\lambda_{nk})_{k=1}^\infty$ olmak üzere $(x_n)_{n=1}^\infty \subset U_E$ dik dizi olsun.

$\lambda_{n,1} \neq 0$ olacak biçimde bir eleman $x_{n_1} = (\lambda_{n_1,k})_{k=1}^\infty$ ise $\forall n \neq n_1$ için $x_n \perp x_{n_1}$ olacağından $\lambda_{n,1} = 0$ dir.

$\lambda_{n_2 2} \neq 0$ olacak biçimde bir eleman $x_{n_2} = (\lambda_{n_2 k})_{k=1}^{\infty}$ ise $\forall n \neq n_2$ için $x_n \perp x_{n_2}$ olacağından $\lambda_{n 2} = 0$ dir.

.....

$\lambda_{n_k 1} \neq 0$ olacak şekilde bir eleman $x_{n_k} = (\lambda_{n_k k})_{k=1}^{\infty}$ ise $\forall n \neq n_k$ için $x_n \perp x_{n_k}$ olacağından $\lambda_{n k} = 0$ olur.

Sonuç olarak $N = \max\{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ olmak üzere; $\forall n > N$ ve $1 \leq k \leq K$ için $\lambda_{nk} = 0$ dir. Diğer taraftan $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, ℓ_1 için Schauder tabanı olduğundan

$(\lambda_k) \in \ell_1^+$ için $(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ şeklinde yazılabilir.

$$\pm T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\pm T e_k) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k |T e_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |T e_k|$$

sıralamasından $\pm T(\lambda_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |T e_k|$ olur. $R: E \rightarrow F$ operatörü için

$\pm T \leq R$ sağlansın. $\pm T e_k \leq R e_k$ olduğundan $|T e_k| \leq R e_k$ 'dir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |T e_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k R e_k = R\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = R(\lambda_k) \text{ olduğundan } |T|(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |T e_k|$$

dir. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni \forall N \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} \| |T| x_n \| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} |T e_k| \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_{nk} |T e_k| \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_{nk} |T e_k| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_{nk} \\ &\leq \varepsilon \|x_n\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall (x_n) \subset U_E$ dik dizisi için $\| |T| (x_n) \| \rightarrow 0$ çıkar. Dolayısıyla

$|T|: E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakttır.

Önerme 5.8 : Y Banach uzayı ve $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ℓ_1 Banach örgüsünün doğal tabanı olmak üzere $\|Te_n\| \rightarrow 0$ şartını sağlayan her $T: \ell_1 \rightarrow Y$ operatörü kompakt operatördür.

İspat : $T: \ell_1 \rightarrow Y$ operatörü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|Te_n\| \rightarrow 0$ şartını sağlasın. $\forall x \in \ell_1$ için $p(x) = \|Tx\|$ şeklinde tanımlanan $p: \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli ℓ_1 üzerinde sürekli yarı normdur. $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \forall k \geq k_0$ için $\|Te_k\| < \varepsilon$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (\lambda_{nk})_{k=1}^{\infty}$ olmak üzere $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset U_{\ell_1}$ dik dizi olsun. O halde $\forall n > n_0$ ve $1 \leq k \leq K$ için $\lambda_{nk} = 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için ;

$$\|Tx_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} Te_k \right\| = \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_{nk} Te_k \right\| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \|\lambda_{nk} Te_k\| \leq \varepsilon \sum_{k=K+1}^{\infty} |\lambda_{nk}| \leq \varepsilon \|x_n\| \leq \varepsilon$$

olur. $\forall (x_n) \subset U_{\ell_1}$ dik dizisi için $\lim p(T(x_n)) = \lim \|T(x_n)\| = 0$ çıkar. O halde $U_T = \{x \in \ell_1 : \|Tx\| \leq 1\}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $U_{\ell_1} \subseteq [-x, x] + \varepsilon U_T$ olacak şekilde $x \in E^+$ vardır ([17], Teorem 2.3.2). ℓ_1 uzayında her sıra sınırlı aralık total sınırlı olacağından $[-x, x]$ relatif kompakt dolayısıyla $T[-x, x]$ relatif kompakttır ([19], Örnek 122.7).

$$T(U_{\ell_1}) \subseteq T[-x, x] + \varepsilon T(U_T) \subset T[-x, x] + \varepsilon U_Y$$

sağlandığından $T(U_{\ell_1})$ kümesi relatif kompakttır. Yani T operatörü kompakt operatördür.

Sonuç 5.9 : E AL-uzay ve Y Banach uzayı olmak üzere her $T:E \rightarrow Y$ M-zayıf kompakt operatörü kompaktır.

İspat : E AL-uzay , F Banach örgüsü ve $T:E \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompakt olsun. Teorem 5.7 'nin ispatına benzer olarak $\Phi: \ell_1 \rightarrow E$ şeklinde Φ örgü izomorfizmi vardır. T operatörü M-zayıf kompakt ve Φ örgü izomorfizmi olacağından $T\Phi: \ell_1 \rightarrow F$ operatörü M-zayıf kompaktır ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T\Phi e_n\| \rightarrow 0$ sağlanır. Dolayısıyla Önerme 5.8 gereği $T\Phi$ operatörü kompaktır. Ohalde T operatörü kompaktır ([6], Teorem 16.1).

Sonuç 5.10 : F AM-uzay ve X Banach uzayı olmak üzere her $T:X \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatörü kompaktır.

İspat : F AM-uzay, X Banach uzayı ve $T:X \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatör olsun. $T':F' \rightarrow X'$ operatörü M-zayıf kompaktır. Dolayısıyla F' AL-uzay olduğundan Sonuç 5.9 gereği T' operatörü kompaktır. O halde T operatörü kompaktır ([6], Teorem 16.2).

Teorem 5.11 : E Banach örgüsü ve F AM-uzay olmak üzere her $T:E \rightarrow F$ L-zayıf kompakt operatörü L-zayıf kompakt modüle sahiptir.

İspat : E Banach örgüsü, F AM-uzay ve $T:E \rightarrow F$ operatörü L-zayıf kompakt olsun. F^a sıra sürekli norma sahip kapalı maksimal ideal ve $T(U_E)$ L-zayıf kompakt küme olmasından $T(U_E) \subset F^a$ kapsamı sağlanır. Dolayısıyla $T:E \rightarrow F^a$ operatörünü L-zayıf kompakt operatör olarak düşünebiliriz. Teorem 5.10 gereği T operatörü kompaktır. F^a bir AM-uzay olduğundan T operatörü Krengel 'nin teoremine göre kompakt bir modüle sahiptir [14]. O halde $|T|(U_E) \subset F^a$ elde edilir. F^a idealindeki her relatif kompakt küme L-zayıf kompakt olduğundan $\overline{|T|(U_E)}$ kompakt ise $|T|(U_E)$ kümesi L-zayıf kompakt

olacaktır. Dolayısıyla $|T|: E \rightarrow F$ operatörü L-zayıf kompakttır.

Önerme 5.12: $E = \ell_2(L^1[0,1])$ ve X, Y Banach uzayları olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

- (1) $T: X \rightarrow E'$ operatörü L-zayıf kompakt operatör ise $T=0$ dır.
- (2) $T: E \rightarrow Y$ operatörü M-zayıf kompakt operatör ise $T=0$ dır.
- (3) E herhangi bir AM-uzayı ve AL-uzayına örgü izomorf değildir.

İspat: $T: X \rightarrow E'$ operatörü L-zayıf kompakt ise $T(U_X)$ kümesi L-zayıf kompakt kümedir ve $T(U_X) \subset (E')^a$ elde edilir. Dolayısıyla $(E')^a = \{0\}$ ise $T'=0$ ve $T=0$ dır. Böylece (1) sağlanır. $T: E \rightarrow Y$ operatörü M-zayıf kompakt ise $T': Y' \rightarrow E'$ operatörü L-zayıf kompakttır. (1) önermesi sağlandığından dolayı $T'=0$ ve $T=0$ dır. Yani (2) sağlanır. E 'nin bir AM-uzayına ve AL-uzayına örgü izomorf olmadığı açıktır.

KAYNAKLAR

1. Abramovich, Y.A., Wickstead, A.W., 1992, A compact regular operator without modulus, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 116, 721-726.
2. Abramovich, Y.A., Wickstead, A.W., 1995, Solutions of several problems in the theory of compact positive operators, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 123, 3021-3026.
3. Abramovich, Y.A., Wickstead, A.W., 1997, When each continuous operator is regular II, **Indag. Math.**, 8, 281-294.
4. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Locally Solid Riesz Spaces, **Academic Press**, London.
5. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1984, Factoring compact and weakly compact operators through reflexive Banach lattices, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 283, 369-381.
6. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Positive Operators, **Academic Press**, London.
7. Burkinshaw, O., Dodds, P.G., 1977, Disjoint sequences, compactness and semireflexivity in locally convex Riesz spaces, **Illinois J. Math.**, 21, 759-775.
8. Cartwright, D.I., Lotz, H.P., 1975, Some characterizations of AM- and AL-spaces, **Math. Z.**, 142, 97-103.
9. Chen, Z.L., Wickstead, A.W., 1998, Relative weak compactness of solid hulls in Banach lattices, **Indag Math.**, 9, 187-196.
10. Chen, Z.L., Wickstead, A.W., 1999, Vector lattices of weakly compact operators on Banach lattices, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 352, 397-412.
11. Chen, Z.L., Wickstead, A.W., 1999, L-weakly and M-weakly compact operators, **Indag Math.**, 10, 321-336.
12. Dodds, P.G., 1975, O-weakly compact mappings of Riesz spaces, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 214, 389-402.
13. Dodds, P.G., Fremlin, D.H., 1979, Compact operators in Banach lattices, **Israel J. Math.**, 34, 287-320.
14. Krengel, U., 1966, Remark on the modulus of compact operators, **Bull. Amer. Math. Soc.**, 72, 132-133.

15. Meyer, P., Nieberg, 1973, Zur schwachen kompaktheit in Banachverbänden, **Math. Z.**, 134, 303-315.
16. Meyer, P., Nieberg, 1974, Über klassen schwach kompakter operatoren in Banachverbänden, **Math. Z.**, 138, 145-159.
17. Meyer, P., Nieberg, 1991, Banach Lattices, **Springer-Verlag**, Heidelberg.
18. Niculescu, C.P., 1981, Weak compactness in Banach lattices, **J. Oper. Theory.**, 6, 217-231.
19. Zaanen, A.C., 1983, Riesz Spaces II, **Nort-Holland Publ. Comp.**, Amsterdam.



ÖZGEÇMİŞ

Erdal BAYRAM, 22.05.1975 tarihinde Ankara 'da doğdu. İlköğrenimini Demetevler İlkokulu ve Mustafa Kemal Lisesinde, orta öğrenimini Yapı Meslek ve İnşaat Teknik Lisesinde tamamladı. Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Ede. Fakültesinde 1995 yılında başladığı lisans öğrenimini 1999 yılında tamamladı. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı 'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Kızılcahamam Lisesi 'nde öğretmen olarak görev yapmaktadır.

